ОТЗЫВ ОППОНЕНТА

о диссертации Егора Дмитриевича Косова

"Модули непрерывности и дробная регулярность плотностей распределений",

представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

по специальностям

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ,

1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

Диссертационная работа Е.Д. Косова посвящена изучению аналитических свойств плотностей распределений случайных векторов $f(X)$, где X — случайный элемент со значениями в пространстве E (конечномерном или бесконечномерном), распределение которого обозначается буквой μ, а отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^k$ измеримо. Таким образом, рассматриваются индуцированные меры $\mu \circ f^{-1}$, причем мера μ и отображение f в некотором смысле достаточно гладкие.

Эти задачи стали предметом активных исследований с аналитической точки зрения после появления известных работ П. Маллявэна в середине 1970-х, продолженных И. Шигекавой, Ш. Кусуокой, Ш. Ватанабе, Д. Струком и многими другими математиками разных стран. Среди отечественных специалистов, получивших важные результаты в этом направлении, можно отметить Ю.А. Давыдова, М.Л. Лифшица, Н.В. Смородину, А.В. Угланова, В.И. Богачева. Значительный интерес, в том числе с точки зрения приложений, представил случай полиномиальных отображений. Этим случаем занимались также Ю.В. Прохоров, В.В. Ульянов, С.Г. Бобков, Д. Нуаларт, И. Нурдин, Дж. Пеккати. В диссертации Е.Д. Косова получен, в частности, ряд важных усилений и обобщений результатов этих известных специалистов. Принципиально новой идеей данной работы является изучение дробной дифференцируемости распределений многочленов и других важных функционалов. Полученные результаты лежат на стыке анализа и теории вероятностей, и их совокупность создает новое направление, которое можно назвать дробной регулярностью распределений нелинейных функционалов на бесконечномерных пространствах с мерами. Большое внимание уделяется ситуации, когда мера μ — гауссовская или общая логарифмически вогнутая. Все вышесказанное свидетельствует об **актуальности темы выполненной работы.**

Все результаты диссертации являются новыми, основные из них состоят в следующем.

1. В терминах действия функции $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$ на производные пробных функций φ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ определены два новых модуля непрерывности $\sigma_p(\varrho,\cdot)$ и $\widetilde{\sigma}_p(\varrho,\cdot)$, эквивалентные классическому модулю непрерывности $\omega_p(\varrho,\cdot)$.

2. С помощью модуля непрерывности $\widetilde{\sigma}_1(\varrho,\cdot)$ разработан аналог метода Маллявэна для исследования свойств низкой регулярности распределений.

3. С помощью развитого в работе обобщения классического метода Маллявэна исследованы свойства регулярности образов гауссовской меры γ на локально выпуклом пространстве E под действием отображений

$$f = (f_1, \ldots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$$

с компонентами из классов Соболева $W^{2,p}(\gamma)$ в зависимости от поведения величины $\gamma(\Delta_f \leq \varepsilon)$, где Δ_f — определитель матрицы Маллявэна отображения f. В случае слабой невырожденности отображения f, т. е. в случае интегрируемости Δ_f^{-1} в степени $\theta \in (0,1)$, установлена принадлежность плотности распределения вектора f пространству Никольского $B^\alpha_{1,\infty}$ с показателем дробной регулярности α, зависящим от параметров p, k и θ.

4. Для пары отображений $f\colon E \to \mathbb{R}^k$, $g\colon E \to \mathbb{R}^k$ с компонентами из классов Соболева $W^{2,p}(\gamma)$ в случае слабой невырожденности хотя бы одного из отображений получены оценки сверху расстояния по вариации между распределениями случайных векторов f и g через дробную степень β расстояния в пространстве Соболева $W^{1,p}(\gamma)$ между отображениями f и g, причем степень β зависит только от p, k и параметра слабой невырожденности θ.

5. В случае произвольной меры μ на $\mathbb{R}^n$ с плотностью из класса функций ограниченной вариации (например с плотностью из пространства Соболева $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$) и общего непостоянного многочлена f на $\mathbb{R}^n$ степени не выше d показано, что мера образ $\mu \circ f^{-1}$ обладает плотностью из пространства Никольского $B^{\alpha}_{1,\infty}$ с показателем дробной регулярности $\alpha = 1/d$. В том случае, когда мера μ логарифмически вогнута (например гауссовская), получена количественная оценка нормы в пространстве Никольского $B^{1/d}_{1,\infty}$, зависящая лишь от степени d многочлена и его дисперсии, что позволяет перенести результат и на бесконечномерный случай.

6. Установленные результаты о регулярности распределений многочленов от логарифмически вогнутых случайных элементов применены для доказательства в логарифмически вогнутом случае неравенства типа Нурдина – Поли, которое оценивает сверху расстояние по вариации между распределениями двух многочленов через дробную степень расстояния Канторовича – Рубинштейна между этими распределениями. Полученное неравенство является новым даже в гауссовском случае и уточняет ранее известные результаты.

7. В логарифмически вогнутом случае установлено неравенство типа Давыдова – Мартыновой, оценивающее сверху расстояние по вариации между распределениями двух многочленов через дробную степень расстояния между ними в L^2. Полученная оценка уточняет известные результаты и в гауссовском случае.

8. Для ортопроекций на k-мерные подпространства случайных векторов с независимыми компонентами $X_1, \ldots, X_n$ показано, что норма производной распределения по любому направлению оценивается с константой, зависящей лишь от k, через максимум из норм производных распределений компонент X_j.

9. В случае гауссовской меры на бесконечномерном пространстве определены новые L^p-модули непрерывности. В случае $p \in (1, \infty)$ показана их эквивалентность между собой, а также эквивалентность интерполяционному функционалу. Доказывается эквивалентность различных определений пространств Бесова в гауссовском случае.

Остановимся на распределении материала по главам.

В первой главе определяются два новых L^p-модуля непрерывности функций, исследуются их связи с классическим L^p-модулем непрерывности и дополнительные свойства новых модулей непрерывности. Удивительно, что в таком классическом вопросе даже в одномерном случае автору удалось предложить интересные новшества и дать полезные эквивалентные описания пространств Никольского – Бесова на $\mathbb{R}^k$ с помощью своих модулей непрерывности, имеющих вид нелинейного неравенства «интегрирования по частям». Эта характеризация совершенно классического объекта анализа сама по себе является ярким результатом, но основное ее назначение — применение к распределениям многочленов.

Вторая глава посвящена изучению модулей непрерывности и классов дробной регулярности на локально выпуклом пространстве с гауссовской мерой. Здесь доказана эквивалентность нескольких определений гауссовских пространств Бесова.

В третьей главе определен аналог модуля непрерывности $\widetilde{\sigma}_1$ для мер, который позволяет исследовать «дробную» регулярность индуцированных мер аналогично классическому методу Маллявэна. Здесь получены полезные общие утверждения, связывающие свойства регулярности распределений и верхние оценки расстояния по вариации. Наконец, в качестве эффектной иллюстрации предлагаемого метода показана принадлежность пространствам Никольского – Бесова образов мер с плотностями ограниченной вариации под действием многочленов.

В четвертой главе исследуются свойства регулярности образов гауссовских мер γ под действием отображений с компонентами из пространств Соболева $W^{2,p}(\gamma)$, в частности, устанавливается принадлежность плотностей образов гауссовских мер под действием отображений с соболевскими компонентами пространствам Никольского – Бесова при условии слабой невырожденности отображения. Кроме того, здесь изучается связь различных видов сходимости на пространстве таких распределений.

В пятой главе исследуются свойства одномерных образов логарифмически вогнутых мер под действием многочленов.

Наконец, в шестой главе изучаются свойства образов мер при дополнительных структурных ограничениях. Полученные результаты о распределениях сильно выпуклых функций затем применяются для исследования регулярности распределений максимумов из квадратичных форм и многочленов второй степени.

Все основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах автора в центральных отечественных и международных высокорейтинговых математических журналах из списка, рекомендованного ВАК. **Достоверность описанных результатов** подтверждается их достаточно подробными доказательствами, а также их сравнительными характеристиками с полученными ранее результатами других авторов. Эти результаты были всесторонне представлены на крупных международных и российских конференциях и доложены на ведущих семинарах. Результаты в равной мере актуальны для нелинейного анализа, в том числе бесконечномерного анализа, и теории вероятностей, в том числе для теории распределений и стохастического анализа. Поэтому вполне целесообразно отнесение данной диссертации к двум специальностям — анализу и теории вероятностей. **Диссертации соответствует критериям** «Положения о порядке присуждения ученых степеней» (п.9 Положения, утвержденного постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842).

Считаю диссертацию **полностью завершенной**. Диссертация **хорошо оформлена, содержания автореферата соответствует основным выводам диссертации**.

Диссертация лишена погрешностей. Однако, так как она содержит весьма много результатов, было бы нелишне в начале каждой главы написать, на каких именно статьях автора эта глава основывается.

Таким образом, в диссертационной работе Е.Д. Косова "Модули непрерывности и дробная регулярность плотностей распределений" решен ряд важных и трудных научных проблем, а совокупность ее результатов является крупным научным достижением. Эта диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК к докторским диссертациям, а ее автор Косов Егор Дмитриевич **заслуживает** присуждения ученой степени степени доктора физико-математических наук по специальностям 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент Павлов И.В.
29.12.2022

Павлов Игорь Викторович
Доктор физико-математических наук (специальность 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика), профессор, заведующий кафедрой высшей математики ДГТУ, e-mail: pavloviv2005@mail.ru, тел.: 8(863) 20-19-083.
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Донской государственный технический университет”, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1; e-mail: reception@donstu.ru, тел.: 8-800-100-1930.

Подпись И.В. Павлова заверяю.
Ученый секретарь Ученого совета ДГТУ В.Н. Анисимов.
09.01.2023