Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

На правах рукописи

Косов Егор Дмитриевич

МОДУЛИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ДРОБНАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ ПЛОТНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ
1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ **4**

ГЛАВА 1. Новые L^p-модули непрерывности и эквивалентное описание пространств Никольского – Бесова **30**
1.1. Определения и обозначения **30**
1.2. Новые L^p-модули непрерывности **31**
1.3. Связь с теорией интерполяции и эквивалентное описание пространств Никольского – Бесова **40**

ГЛАВА 2. Модули непрерывности и классы Никольского – Бесова на пространствах с гауссовскими мерами **45**
2.1. Меры и их образы, гауссовские меры **45**
2.2. Модули непрерывности на пространствах с гауссовскими мерами **53**
2.3. Эквивалентные определения пространств Бесова относительно гауссовских мер **60**

ГЛАВА 3. Регулярность распределений и оценки между различными расстояниями на пространстве распределений **70**
3.1. Определения и обозначения **70**
3.2. Применение модулей непрерывности для исследования свойств распределений **72**
3.3. Принадлежность пространствам Никольского полиномиальных образов дифференцируемых по Скороходу мер **81**

ГЛАВА 4. Регулярность образов гауссовских мер под действием соболевских отображений **91**
4.1. Определения и обозначения **91**
4.2. Случай одной соболевской функции **93**
4.3. Случай многомерного отображения с компонентами из пространств Соболева **100**
4.4. Оценки расстояния по вариации для соболевских образов гауссовских мер через расстояние в $W^{1,p}(\gamma)$ **108**
4.5. Образы гауссовских мер при полиномиальных отображениях . . . **118**

ГЛАВА 5. Полиномиальные образы логарифмически вогнутых мер . **123**
5.1. Логарифмически вогнутые меры **123**
5.2. Принадлежность плотностей образов под действием полиномов пространствам Никольского **128**
5.3. Оценки между расстояниями на пространстве распределений многочленов **137**
5.4. Многочлены от гауссовских случайных векторов **150**

ГЛАВА 6. Свойства образов при дополнительных структурных ограничениях **152**
6.1. Регулярность образов многочленов специального вида от гауссовских случайных величин **152**
6.2. Распределения сильно выпуклых функций и максимумов из нескольких квадратичных форм **158**
6.3. Оценки расстояния по вариации между двумя многочленами второй степени **167**
6.4. Линейные образы продакт мер **179**

ЛИТЕРАТУРА **188**

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Работа посвящена изучению свойств регулярности плотностей распределений случайных векторов $f(X)$ для широкого круга случайных элементов X с распределением μ на вероятностном пространстве E и измеримых отображений $f\colon E \to \mathbb{R}^k$, т. е. индуцированных мер $\mu \circ f^{-1}$, при условии, что мера μ и отображение f в некотором смысле достаточно гладкие. Полученные результаты лежат на стыке анализа и теории вероятностей, и их совокупность создает новое направление, которое можно назвать дробной регулярностью распределений нелинейных функционалов на бесконечномерных пространствах с мерами. Большое внимание уделяется ситуации, когда мера μ — гауссовская или общая логарифмически вогнутая. Вопросы о наличии и регулярности плотностей распределений различных нелинейных функционалов относятся к классическим задачам, изучавшимся П. Маллявэном [83], Ш. Кусуокой [78], И. Шигекавой [96], В.И. Богачевым [12], [10], [8], Ю.А. Давыдовым [22], М.А. Лифшицем [34], [35], [36], Н.В. Смородиной [44] и многими другими известными авторами. Отчасти подобные исследования были мотивированы вопросами о регулярности плотностей распределений функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений (см. монографии [84], [90], [21]).

Одним из основных способов исследования регулярности образов мер является так называемый метод Маллявэна, ключевая идея которого заключается в следующем наблюдении. Рассмотрим случайный вектор

$$f(X) = (f_1(X), \ldots, f_k(X)).$$

Предположим, что для каждого единичного вектора $e \in \mathbb{R}^k$ и для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ удается проверить, что

$$\mathbb{E}[\partial_e \varphi(f(X))] \leqslant C \sup_{t \in \mathbb{R}^k} |\varphi(t)|$$

с некоторой константой $C > 0$. Тогда распределение случайного вектора $f(X)$ задано плотностью, причем эта плотность оказывается функцией ограниченной вариации (см., например, лемму 2.1.1 в [90]). Если

аналогичные оценки выполнены с производными всех порядков (с константами, зависящими от порядка производной), то плотность случайного вектора $f(X)$ будет бесконечно дифференцируемой (см. §9.1 в [10]). Важной составляющей метода Маллявэна является то, что условие записано именно в виде математического ожидания от производных функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$, так как затем $\mathbb{E}[\partial_e \varphi(f(X))]$ можно переписать в виде интеграла от $\partial_e \varphi(f(x))$ по мере μ (распределение вектора X). Если мера μ сама оказывается достаточно гладкой, то можно применить формулы интегрирования по частям на пространстве с мерой μ, что позволяет убрать производную с функции φ и получить нужную для метода Маллявэна оценку.

Однако оказывается, что описанный метод не применим во многих простейших ситуациях. Например, пусть $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ — стандартная нормальная случайная величина. Тогда распределение случайной величины X_1^2 абсолютно непрерывно относительно меры Лебега, но его плотность не принадлежит классу функций ограниченной вариации (так как плотность не будет даже ограниченной функцией). Таким образом, возникает вопрос, как исследовать свойства плотностей индуцированных мер, для которых неприменим классический метод Маллявэна (например, в случае многочленов от гауссовских случайных величин). Естественный ответ на этот вопрос заключается в привлечении пространств промежуточной (т. е. дробной) регулярности, например, пространств Никольского – Бесова $B^\alpha_{p,\theta}$ (см. [5]). Однако чтобы получить аналог метода Маллявэна для изучения принадлежности плотностей пространствам Никольского – Бесова, нужно правильно переформулировать определение указанных пространств через действие исследуемой плотности на производные пробных функций $\partial_e \varphi$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$, как это сделано в классическом методе Маллявэна, в котором использовано одно из эквивалентных определений пространства функций ограниченной вариации. В главе 1 исследуется даже более общий вопрос: как описать классический L^p-модуль непрерывности

$$\omega_p(\varrho, \varepsilon) := \sup_{|h| \leqslant \varepsilon} \|\varrho(\cdot - h) - \varrho\|_{L^p(\mathbb{R}^k)}.$$

в терминах действия функции $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$ на производные пробных функций $\partial_e \varphi$. Для этого в диссертационной работе вводятся два новых модуля непрерывности, задаваемых в указанных терминах и эквивалентных модулю непрерывности ω_p.

Построенные модули непрерывности применяются в диссертационной работе для исследования регулярности плотностей образов гауссовских мер под действием отображений $f = (f_1, \ldots, f_k)$ с компонентами из определенных соболевских классов по гауссовской мере. Обычно при исследовании свойств плотностей таких индуцированных мер накладывается условие интегрируемости определителя Δ_f матрицы Маллявэна, т. е. матрицы Грама градиентов ∇f_j, в отрицательных степенях меньше -1 (см., например, §9.3 в [10] и недавние исследования в работе [74]). В диссертации поставлен вопрос о том, какими свойствами регулярности обладают плотности индуцированных мер при условии «слабой невырожденности», т. е. интегрируемости Δ_f в малых отрицательных степенях из промежутка $(-1, 0)$. Развитый в диссертационной работе аппарат позволяет установить принадлежность таких плотностей определенным пространствам Никольского – Бесова.

Особое внимание в работе уделено полиномиальным образам мер, т. е. ситуации, когда $f = (f_1, \ldots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$ и каждая компонента f_j — многочлен некоторой фиксированной степени. Вопросы о свойствах распределений многочленов на пространствах с мерами входят в круг классических задач, исследовавшихся Ш. Кусуокой [79], И. Шигекавой [95], Ю.А. Давыдовым [24], Ю.В. Прохоровым [40], В.В. Ульяновым [18], [19], С.Г. Бобковым [59], В.И. Богачевым [12]. Часто рассматривается частный случай распределений многочленов второй степени и квадратичных форм (см. [30], [72], [73]). Отчасти интерес к распределению многочленов от гауссовских элементов вызван тем, что в случае меры Винера (т. е. распределения винеровского процесса) конечные комбинации кратных стохастических интегралов и есть многочлены на соответствующем пространстве (см., например, монографию [90]). В последние годы интерес к свойствам полиномиальных образов мер также оказался связан с

различными предельными теоремами для таких распределений. В частности, в работе [91] Д. Нуалартом и Дж. Пеккати было показано, что для гауссовского элемента X и последовательности многочленов Эрмита f_n фиксированного порядка $d \geqslant 1$ (т. е. для элементов фиксированного винеровского хаоса относительно распределения X) с единичной дисперсией следующие условия эквивалентны:

$$\mathbb{E}[(f_n(X))^4] \to 3 \Leftrightarrow f_n(X) \to Z \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ по распределению.}$$

Это наблюдение о том, что сходимость к нормальному закону на пространстве многочленов Эрмита фиксированного порядка имеет очень простое описание, снова вызвало большой интерес исследователей к изучению и уточнению аналогичных предельных теорем, а также к изучению общих свойств многочленов от гауссовских элементов. Серьезные продвижения в этих вопросах были получены Д. Нуалартом, И. Нурдиным, Дж. Пеккати, и другими авторами (см.[87], монографию [86] и ссылки в ней). Помимо простого условия сходимости к нормальному закону оказывается, что для последовательностей случайных величин вида $f_n(X)$, где f_n — многочлены фиксированной степени, а X — гауссовский случайный элемент, многие виды сходимостей эквивалентны. Так, Ю.А. Давыдовым и Г.В. Мартыновой в работе [23] было установлено, что сходимость указанных случайных величин в L^2 влечет их сходимость по вариации при условии невырожденности предельного распределения. Более того, в указанной работе была предложена оценка сверху расстояния по вариации через расстояние в L^2. Аналогично И. Нурдиным и Г. Поли в работе [89] было показано, что при условии невырожденности предельного распределения сходимость по распределению случайных величин $f_n(X)$ также влечет их сходимость по вариации, причем была предложена оценка расстояния по вариации через расстояние Канторовича – Рубинштейна, метризующее сходимость по распределению. Эти работы стимулировали активное исследование связей различных видов сходимостей на пространстве образов гауссовских и более общих мер под действием многочленов, многомерных отображений с полиномиальными компонентами и нелинейных функционалов общего вида (см., например, работы [13], [57],

[88]). В диссертации рассматриваются вопросы о свойствах регулярности распределений многочленов фиксированной степени на пространствах с гауссовскими, логарифмически вогнутыми и общими дифференцируемыми по Скороходу мерами. В гауссовском случае эти вопросы исследуются и для многочленов со специальными дополнительными структурными ограничениями, что позволяет усилить оценки характеристических функций из работы [18]. Полученные в диссертации результаты для многочленов второй степени уточняют результаты работы [105]. Кроме того, в работе устанавливается точное неравенство типа Давыдова – Мартыновой и наиболее точное на настоящий момент неравенство типа Нурдина – Поли, которые доказываются сразу в логарифмически вогнутом случае.

С вопросами регулярности распределений функционалов от гауссовских элементов тесно связаны дифференциальное исчисление (исчисление Маллявэна) на бесконечномерных пространствах с гауссовскими мерами и различные функциональные классы по гауссовским мерам (например гауссовские классы Соболева, см. [8], [90]). Возможным обобщениям и эквивалентным описаниям соболевских пространств и других классов функций в различных постановках посвящена обширная литература (подобными вопросами занимались Л. Амброзио [54], Е.И. Бережной [3], [4], В.И. Богачев [15], С.К. Водопьянов [16], [100], [101], И.В. Павлов [2], [39], Ю.Г. Решетняк [41] и многие другие авторы). Гауссовские пространства Соболева с нецелыми показателями регулярности были рассмотрены в работе [99], а гауссовские аналоги пространств Бесова были введены в работе [103], где они определялись с помощью теории интерполяции. В работе [92] также были рассмотрены гауссовские аналоги пространств Бесова, определяемые с помощью полугрупп. В диссертационной работе в гауссовском случае вводятся два новых модуля непрерывности, один из которых задается с помощью специальных «сдвигов» функции на пространстве с гауссовской мерой и частично мотивирован исследованиями гауссовских пространств функций ограниченной вариации из работы [53], а второй определяется с помощью действия функции на гауссовские дивергенции пробных векторных полей. Показывается эквивалент-

ность определенных модулей непрерывности, а также их эквивалентность интерполяционному функционалу. Кроме того, исследуется эквивалентность различных определений гауссовских пространств Бесова, включая определения с помощью новых модулей непрерывности и определения из упомянутых работ [103] и [92].

Цель работы.

• Определить новые L^p-модули непрерывности, эквивалентные классическому, на основе которых затем построить общий метод исследования свойств низкой регулярности индуцированных мер, в частности метод проверки принадлежности плотностей распределений пространствам Никольского $B^{\alpha}_{1,\infty}$ с показателем регулярности $\alpha \in (0,1)$.

• Применить предложенный метод к исследованию свойств регулярности образов гауссовских мер под действием отображений с соболевскими компонентами в зависимости от степени невырожденности отображения.

• Исследовать регулярность образов гауссовских и логарифмически вогнутых мер под действием многочленов.

• Исследовать верхние оценки расстояния по вариации для различных классов распределений.

• Исследовать оценки производных образов продакт мер под действием ортопроекторов на подпространства.

• Определить аналоги конечномерных L^p-модулей непрерывности в гауссовском случае и исследовать связь различных определений пространств Бесова по гауссовской мере.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. В терминах действия функции $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$ на производные пробных функций $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^k)$ определены два новых модуля непрерывности $\sigma_p(\varrho,\cdot)$ и $\widetilde{\sigma}_p(\varrho,\cdot)$, эквивалентные классическому модулю непрерывности $\omega_p(\varrho,\cdot)$.

2. С помощью модуля непрерывности $\widetilde{\sigma}_1(\varrho,\cdot)$ (точнее, с помощью его эквивалента для мер) предложен аналог метода Маллявэна для исследования свойств малой регулярности распределений.

3. С помощью предложенного в работе обобщения классического метода Маллявэна исследованы свойства регулярности образов гауссовской меры γ на локально выпуклом пространстве E под действием отображений $f = (f_1, \ldots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$ с компонентами из классов Соболева $W^{2,p}(\gamma)$ в зависимости от поведения величины $\gamma(\Delta_f \leqslant \varepsilon)$, где Δ_f — определитель матрицы Маллявэна отображения f. В случае условия слабой невырожденности отображения f, т. е. в случае интегрируемости Δ_f^{-1} в степени $\theta \in (0, 1)$, установлена принадлежность плотности распределения вектора f пространству Никольского $B^{\alpha}_{1,\infty}$ с показателем дробной регулярности α, зависящим от p, k и θ.

4. Для пары отображений $f\colon E \to \mathbb{R}^k$, $g\colon E \to \mathbb{R}^k$ с компонентами из классов Соболева $W^{2,p}(\gamma)$ в случае слабой невырожденности хотя бы одного из отображений получены оценки сверху расстояния по вариации между распределениями случайных векторов f и g через дробную степень β расстояния в пространстве Соболева $W^{1,p}(\gamma)$ между отображениями f и g, причем степень β зависит только от p, k и параметра слабой невырожденности θ.

5. В случае произвольной меры μ на $\mathbb{R}^n$ с плотностью из класса функций ограниченной вариации (например с плотностью из пространства Соболева $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$) и произвольного непостоянного многочлена f на $\mathbb{R}^n$ степени не выше d показано, что мера образ $\mu \circ f^{-1}$ обладает плотностью из пространства Никольского $B^{\alpha}_{1,\infty}$ с показателем дробной регулярности $\alpha = 1/d$. В том случае, когда мера μ — логарифмически вогнутая (например гауссовская), получена количественная оценка нормы в пространстве Никольского $B^{1/d}_{1,\infty}$, зависящая лишь от степени многочлена d и его дисперсии, что позволяет перенести результат и на бесконечномерный случай.

6. Установленные результаты о регулярности распределений многочленов от логарифмически вогнутых случайных элементов применены для доказательства в логарифмически вогнутом случае неравенства типа Нурдина – Поли, которое оценивает сверху расстояние по вариации между распределениями двух многочленов через дробную степень расстояния Канторовича – Рубинштейна между этими распределениями. Полученное

неравенство является новым даже в гауссовском случае и уточняет ранее известные результаты.

7. В логарифмически вогнутом случае установлено неравенство типа Давыдова – Мартыновой, оценивающее сверху расстояние по вариации между распределениями двух многочленов через дробную степень расстояния между ними в L^2. Причем полученная оценка уточняет известные результаты и в гауссовском случае.

8. Для ортопроекций на k-мерные подпространства случайных векторов $(X_1, \dots, X_n)$ с независимыми компонентами показано, что норма производной распределения в любом направлении оценивается с константой, зависящей лишь от k, через максимум из норм производных распределений компонент X_j.

9. В случае гауссовской меры на бесконечномерном пространстве определены новые L^p-модули непрерывности. В случае $p \in (1, \infty)$ показана их эквивалентность между собой, а также их эквивалентность интерполяционному функционалу. Доказывается эквивалентность различных определений пространств Бесова в гауссовском случае.

Методы исследования. В работе используются методы теории меры, функционального анализа, теории функциональных пространств и теории вероятностей, а также ряд оригинальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах многомерного и бесконечномерного анализа, теории меры, теории функций, теории вероятностей, статистики и стохастического анализа, теории логарифмически вогнутых и гауссовских мер. Результаты и методы работы будут востребованы в исследованиях, проводимых в Математическом институте имени В.А. Стеклова РАН, Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, Институте проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН, Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики», Новосибирском государственном университете и Ярославском государственном университете имени

П.Г. Демидова.

Разделы диссертации могут быть использованы как материал специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности «математика».

Апробация диссертации.

Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях:

1. международная конференция “Вероятность, анализ и геометрия” (Россия, Москва, 2014),

2. третья международная конференция “Вероятность, анализ и геометрия” (Германия, Ульм, 2015),

3. четвертая международная конференция “Вероятность, анализ и геометрия” (Россия, Москва, 2016),

4. международная конференция “Бесконечномерный анализ и теория управления” (Россия, Москва, 2018),

5. 20 международная Саратовская зимняя школа “Современные проблемы теории функций и их приложения” (Россия, Саратов, 2020),

6. международная конференция “High Dimensional Probability”, онлайн, 2020,

7. конференция международных математических центров мирового уровня (Россия, Сочи, 2021),

8. конференция “Аппроксимация и дискретизация” (Россия, Москва, 2021),

9. конференция “Новые вызовы в современной теории вероятностей в пространствах высокой размерности и ее применениях в машинном обучении” (Россия, Сочи, 2021).

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научно-исследовательских семинарах:

1. научно-исследовательский семинар “Бесконечномерный анализ и стохастика” под руководством В.И. Богачева, С.В. Шапошникова и Н.А. Толмачева (МГУ, многократно, 2015–2022),

2. международный научно-исследовательский семинар “Infinite-dimen-

sional stochastic analysis" в университете г. Билефельда, Германия (многократно, 2015–2019),

3. научно-исследовательский семинар в Пекинском Нормальном университете, Китай (2014, 2015),

4. научно-исследовательский семинар по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН Б.С. Кашина и академика РАН С.В. Конягина (МГУ, 2016, 2018, 2021, 2022),

5. большой семинар кафедры теории вероятностей МГУ под руководством академика РАН А.Н. Ширяева (МГУ, 2022),

6. семинар по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (Семинар Никольского) (МИАН, 2018, 2022),

7. семинар по структурному обучению (Structural Learning Seminar) под руководством А.А. Наумова, М.Е. Панова и В.Г. Спокойного (ИППИ, ВШЭ, 2018, 2019),

8. научно-исследовательский семинар "Теория вероятностей. Аналитические и экономические приложения" под руководством А.В. Колесникова и В.Д. Конакова (ВШЭ, 2017),

9. заседание Московского математического общества (онлайн, 2021).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах автора (см. [106], [107], [108], [109], [110], [111], [112], [113], [114], [115], [116], [117]) в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science.

Личный вклад. Научные результаты, выносимые на защиту и составляющие содержание диссертационной работы, получены автором самостоятельно. Все результаты, выносимые на защиту и опубликованные в совместных работах, принадлежат автору.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 6 глав, разбитых на параграфы, и списка литературы из 117 наименований. Общий объем диссертации составляет 198 страниц.

Краткое содержание диссертации

Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте диссертации.

В **первой главе** определяются два новых L^p-модуля непрерывности, исследуются их связи с классическим L^p-модулем непрерывности и дополнительные свойства новых модулей непрерывности.

В §1.2 определяются L^p-модули непрерывности σ_p и $\widetilde{\sigma}_p$:

Определение 1.2.2. Пусть $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$. Положим

$$\sigma_p(\varrho, \varepsilon) := \sup \int_{\mathbb{R}^k} \varrho(x) \cdot \operatorname{div}\Phi(x)\, dx,$$

где супремум берется по всевозможным отображениям $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, для которых $\|\operatorname{div}\Phi\|_{p'} \leqslant 1$, $\|\Phi\|_{p'} \leqslant \varepsilon$.

Определение 1.2.3. Пусть $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$. Положим

$$\widetilde{\sigma}_p(\varrho, \varepsilon) := \sup \int_{\mathbb{R}^k} \varrho(x) \cdot \partial_e\varphi(x)\, dx,$$

где супремум берется по всевозможным векторам $e \in \mathbb{R}^k$ единичной длины, т. е. $|e| = 1$, и по всевозможным функциям $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$, для которых выполнены соотношения $\|\partial_e\varphi\|_{p'} \leqslant 1$, $\|\varphi\|_{p'} \leqslant \varepsilon$.

В этих определениях $\|\cdot\|_p$ — L^p норма на $\mathbb{R}^k$, $p' = \frac{p}{p-1}$, если $p > 1$, $p' = \infty$, если $p = 1$.

Напомним, что для функции $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$ классический L^p-модуль непрерывности задается формулой

$$\omega_p(\varrho, \varepsilon) := \sup_{|h| \leqslant \varepsilon} \|\varrho(\cdot - h) - \varrho\|_p,$$

где $\varrho(\cdot - h)$ — сдвиг функции ϱ на вектор h, т. е. $\varrho(\cdot - h)(x) := \varrho(x - h)$. Основным результатом первой главы является теорема об эквивалентности модулей непрерывности $\sigma_p(\varrho, \cdot)$, $\widetilde{\sigma}_p(\varrho, \cdot)$ и $\omega_p(\varrho, \cdot)$.

Теорема 1.2.6. *Для произвольной функции $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$ выполнены неравенства*

$$2^{-1}\omega_p(\varrho, 2\varepsilon) \leqslant \widetilde{\sigma}_p(\varrho, \varepsilon) \leqslant \sigma_p(\varrho, \varepsilon) \leqslant 6k\, \omega_p(\varrho, \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

В §1.3 новые модули непрерывности применяются для эквивалентного описания пространств Никольского – Бесова на $\mathbb{R}^k$. Например, для функции ϱ из $L^p(\mathbb{R}^k)$ принадлежность пространству Никольского $B^\alpha_{p,\infty}$ с показателем дробной регулярности $\alpha \in (0,1)$ равносильна тому, что

$$\widetilde{\sigma}_p(\varrho, t) \leqslant C \cdot t^\alpha$$

для некоторого числа $C > 0$ при каждом $t > 0$. В свою очередь это условие равносильно выполнению следующего «нелинейного неравенства интегрирования по частям»: существует такое число $C > 0$, что для каждого единичного вектора $e \in \mathbb{R}^k$ и для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ выполнена оценка

$$\int_{\mathbb{R}^k} [\partial_e \varphi(x)] \cdot \varrho(x)\, dx \leqslant C \|\varphi\|^\alpha_{L^{p'}(\mathbb{R}^k)} \|\partial_e \varphi\|^{1-\alpha}_{L^{p'}(\mathbb{R}^k)}.$$

Заметим, что если в приведенном свойстве подставить $\alpha = 1$, то получится определение класса функций ограниченной вариации.

Также, в §1.3 обсуждается связь модулей непрерывности σ_p и $\widetilde{\sigma}_p$ с теорией интерполяции.

Вторая глава посвящена изучению модулей непрерывности и классов дробной регулярности на локально выпуклом пространстве с гауссовской мерой γ.

В §2.2 определяются два модуля непрерывности на локально выпуклом пространстве E с гауссовской мерой γ:

Определение 2.2.2. Пусть $f \in L^p(\gamma)$. Положим

$$\sigma_{\gamma,p}(f,\varepsilon) := \sup\Big\{ \int_E f\ \mathrm{div}_\gamma \Phi\, d\gamma \colon \Phi \in \mathcal{FC}^\infty(E,H), \|\mathrm{div}_\gamma \Phi\|_{p'} \leqslant 1, \|\Phi\|_{p'} \leqslant \varepsilon \Big\},$$

где $\|\Phi\|_{p'} := \| |\Phi|_{H(\gamma)} \|_{p'}$.

Определение 2.2.4. Для функции $f \in L^p(\gamma)$ положим

$$a_{\gamma,p}(f,t) := \Big(\iint\limits_{E\times E} \big| f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) - f(x) \big|^p\, \gamma\otimes\gamma(dxdy) \Big)^{1/p}.$$

Модуль непрерывности $\sigma_{\gamma,p}$ мотивирован определенным и изучавшимся в первой главе модулем непрерывности σ_p. Модуль непрерывности

$a_{\gamma,p}$ мотивирован изучавшимися в работе [53] подходами к определению классов функций ограниченной вариации в гауссовском случае. Отметим, что сдвиг функции, интегрируемой в степени p относительно гауссовской меры, может перестать быть интегрируемым в степени p, поэтому невозможно рассмотреть прямой аналог классического модуля непрерывности ω_p. В §2.2 исследуются свойства определенных модулей непрерывности $\sigma_{\gamma,p}$ и $a_{\gamma,p}$. Основной результат параграфа представлен в следующей теореме.

Теорема 2.2.10. *Пусть $p \in [1, \infty)$. Для каждой функции $f \in L^p(\gamma)$ при каждом $t > 0$ выполнены неравенства*

$$a_{\gamma,p}(f, t^2) \leqslant C_1(p) \cdot \sigma_{\gamma,p}(f, t) \quad \text{и} \quad \sigma_{\gamma,p}(f, t) \leqslant K_{\gamma,p}(f, t).$$

Если $p > 1$, то при каждом $t > 0$ имеет место оценка:

$$K_{\gamma,p}(f, t) \leqslant C_2(p) \cdot a_{\gamma,p}(f, t^2).$$

В приведенной теореме $K_{\gamma,p}$ — интерполяционный функционал:

$$K_{\gamma,p}(f, t) := \inf\bigl\{\|f_0\|_p + t\|\nabla f_1\|_p \colon f = f_0 + f_1, f_0 \in L^p(\gamma), f_1 \in W^{1,p}(\gamma)\bigr\}$$

для функции $f \in L^p(\gamma)$.

Как видно, случай $p = 1$ получается менее изученным с точки зрения эквивалентности модулей непрерывности и интерполяционного функционала. Известно, что случай $p = 1$ для гауссовской меры особый. Например, поведение спектра оператора Орнштейна – Уленбека в случае $p = 1$ совсем не похоже на его поведение при $p > 1$ (см. [85]). Также и в работе [53] для доказательства эквивалентности нескольких определений принадлежности функции f гауссовскому классу функций ограниченной вариации приходится накладывать дополнительное условие интегрируемости $|f| \ln(1 + |f|)^{1/2}$ (см. теорему 3.2 в указанной работе). Далее в этой главе мы в основном рассматриваем только случай $p > 1$.

В §2.3 доказывается эквивалентность нескольких определений гауссовских пространств Бесова. А именно в этом параграфе установлена следующая теорема.

Теорема 2.3.9. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$, $\theta \in [1,\infty]$. *Тогда для каждой функции* $f \in L^p(\gamma)$ *следующие выражения конечны или бесконечны одновременно:*

$$\|t^{-\alpha}\sigma_{\gamma,p}(f,t)\|_{*,\theta},\ \left\|t^{\frac{1-\alpha}{2}}\|\nabla T_t f\|_p\right\|_{*,\theta},\ \left\|t^{1-\frac{\alpha}{2}}\|\tfrac{\partial}{\partial t}T_t f\|_p\right\|_{*,\theta},\ \left\|t^{1-\alpha}\|\tfrac{\partial}{\partial t}Q_t f\|_p\right\|_{*,\theta}$$

В случае, когда они конечны, то они оценивают друг друга с константами, зависящими только от α, p, θ.

В приведенной теореме T_t — классическая полугруппа Орнштейна – Уленбека, Q_t — полугруппа Пуассона – Эрмита, с помощью которой в работе [92] определялись пространства Бесова по гауссовской мере:

$$Q_t f(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} T_{\frac{t^2}{4s}} f(x)\, ds = \frac{t}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4s}}}{s^{3/2}} T_s f(x)\, ds.$$

Кроме того, в формулировке использовано обозначение

$$\|\sigma\|_{*,\theta} := \Big(\int_0^\infty |\sigma(t)|^\theta t^{-1}\, dt\Big)^{1/\theta},\ \theta \in [1,\infty); \quad \|\sigma\|_{*,\infty} := \sup_{t>0}|\sigma(t)|.$$

В **третьей главе** определяется аналог модуля непрерывности $\widetilde{\sigma}_1$ для мер, который позволяет исследовать «дробную» регулярность индуцированных мер аналогично классическому методу Маллявэна. Также получены общие утверждения, связывающие свойства регулярности распределений и верхние оценки расстояния по вариации. Наконец, в качестве простейшей иллюстрации предлагаемого метода показана принадлежность пространствам Никольского – Бесова образов мер с плотностями ограниченной вариации под действием многочленов.

В §3.2 вводится модуль непрерывности $\sigma(\nu,\cdot)$ для мер.

Определение 3.2.2. Для ограниченной борелевской меры ν на $\mathbb{R}^k$ положим

$$\sigma(\nu,t) := \sup \int_{\mathbb{R}^k} \partial_e\varphi(x)\, \nu(dx),$$

где супремум берется по всевозможным векторам $e \in \mathbb{R}^k$ единичной длины, и по всевозможным функциям $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$, удовлетворяющим условиям $\|\partial_e\varphi\|_\infty \leqslant 1$, $\|\varphi\|_\infty \leqslant t$.

Если мера $\nu = \mu \circ f^{-1}$ есть распределение случайного вектора f, заданного на вероятностном пространстве с мерой μ, предыдущее определение читается следующим образом:

$$\sigma(\mu \circ f^{-1}, t) = \sup\Big\{\mathbb{E}[\partial_e \varphi(f)] : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k), |e| = 1, \|\partial_e \varphi\|_\infty \leqslant 1, \|\varphi\|_\infty \leqslant t\Big\}.$$

Как следствие теоремы 1.2.6 получаем такое утверждение.

Теорема 3.2.3. *Для произвольной конечной борелевской меры ν на $\mathbb{R}^k$ выполнены оценки*

$$\|\nu(\cdot - h) - \nu\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 2\sigma(\nu, |h|/2), \quad \sigma(\nu, t) \leqslant 6k \sup_{|h| \leqslant t} \|\nu(\cdot - h) - \nu\|_{\mathrm{TV}},$$

где $\nu(\cdot - h)(B) := \nu(B - h)\, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$.

Это в частности означает, что мера ν имеет плотность относительном меры Лебега на $\mathbb{R}^k$ тогда и только тогда, когда $\sigma(\nu, t) \to 0$ при $t \to 0$.

В §3.2 также доказывается несколько относительно простых, но важных для дальнейших исследований в диссертации утверждений. В частности, доказана следующая оценка расстояния по вариации $d_{\mathrm{TV}}(f, g)$ между распределениями случайных векторов f и g в терминах расстояния Канторовича – Рубинштейна $d_{\mathrm{KR}}(f, g)$ между ними.

Следствие 3.2.7. *Пусть f, g — два случайных k-мерных вектора, определенных на вероятностном пространстве $(E, \mathcal{A}, \mu)$. Тогда для каждого $\varepsilon \in (0, 1]$ верно неравенство*

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant 6\sqrt{k} \max\{\sigma(\mu \circ f^{-1}, \varepsilon), \sigma(\mu \circ g^{-1}, \varepsilon)\} + \sqrt{k}\varepsilon^{-1} d_{\mathrm{KR}}(f, g).$$

В частности, если плотности распределений векторов f и g принадлежат пространству Никольского $B^\alpha_{1,\infty}$, то

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant 9\sqrt{k}\Big(\max\{[\mu \circ f^{-1}]_\alpha, [\mu \circ g^{-1}]_\alpha\} + 1\Big) d_{\mathrm{KR}}(f, g)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

где $[\nu]_\alpha := \sup\limits_{t>0} t^{-\alpha} \sigma(\nu, t)$.

В §3.3 предложенный в §3.2 подход применяется для изучения свойств регулярность полиномиальных образов мер μ на $\mathbb{R}^n$ с плотностями из класса функций ограниченной вариации (например с соболевскими плотностями из $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$). Основной результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.3.1. *Пусть $d \in \mathbb{N}$. Пусть μ — вероятностная мера на измеримом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ с плотностью ограниченной вариации и f — многочлен степени d на $\mathbb{R}^n$, т. е.*

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j_1+\ldots+j_n \leqslant d} a_{j_1,\ldots,j_n} x_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{j_n}$$

и $d[f] := \max\{j_1 + \ldots + j_n \colon a_{j_1,\ldots,j_n} \neq 0\} = d$. Тогда

$$\sigma(\mu \circ f^{-1}, t) \leqslant C(d, f, \mu) \cdot t^{1/d},$$

т. е. мера $\mu \circ f^{-1}$ обладает плотностью, принадлежащей пространству Никольского $B^{\alpha}_{1,\infty}$ с показателем дробной регулярности $\alpha = 1/d$.

Отметим, что количественная зависимость константы $C(d, f, \mu)$ от степени d, характеристик многочлена f и норм производных меры μ уточняется при доказательстве указанной теоремы в §3.3.

В **четвертой главе** исследуются свойства регулярности образов гауссовской меры γ под действием отображений с компонентами из пространств Соболева $W^{2,p}(\gamma)$. Кроме того, изучается связь различных видов сходимостей на пространстве таких распределений.

Основные результаты параграфов 4.2 и 4.3 устанавливают связи между регулярностью образов гауссовской меры γ под действием отображений $f = (f_1, \ldots, f_k) \colon E \to \mathbb{R}^k$ с компонентами из соболевских классов $W^{2,p}(\gamma)$ и поведением функции $t \mapsto \gamma(\Delta_f \leqslant t)$, где Δ_f — определитель матрицы Маллявэна, т. е. матрицы Грама градиентов ∇f_j. В случае $k = 1$ вместо определителя матрицы Маллявэна $|\nabla f|^2_{H(\gamma)}$ используется первая степень модуля градиента.

Теорема 4.2.2. *Пусть $p > 1$, $a > 0$. Тогда найдется такое число $c(p) > 0$, зависящее только от параметра p, что для каждой функции $f \in W^{2,p}(\gamma)$ с $\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a$ при всех $\varepsilon > 0$ и $t > 0$ справедлива оценка*

$$\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t) \leqslant c(p) a\, t \varepsilon^{-2} u_\gamma(|\nabla f|_{H(\gamma)}, \varepsilon)^{1-1/p} + 4u_\gamma(|\nabla f|_{H(\gamma)}, \varepsilon).$$

Теорема 4.3.2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $a, p \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $p > 4k - 1$. Тогда существует такое число $C := C(p, k, a) > 0$, что для каждого отображения*

$f = (f_1, \dots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$, *для которого* $f_i \in W^{2,p}(\gamma)$ *и*

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} := \max_{i=1,\dots,k} \big(\|f_i\|_{W^{2,p}(\gamma)}\big) \leqslant a,$$

при каждом $\varepsilon \in (0,1)$ *выполнено неравенство*

$$\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t) \leqslant Ct\varepsilon^{-2} u_\gamma(\Delta_f, \varepsilon)^{1-\frac{4k-1}{p}} + u_\gamma(\Delta_f, \varepsilon).$$

В предыдущих двух теоремах для функции $g \geqslant 0$, измеримой относительно некоторой меры μ, использовано обозначение

$$u_\mu(g, \varepsilon) := \int_0^\infty (s+1)^{-2} \mu(g \leqslant \varepsilon s)\, ds.$$

В качестве следствия предыдущих теорем в параграфах 4.2 и 4.3 устанавливается принадлежность плотностей образов гауссовских мер под действием отображений с соболевскими компонентами пространствам Никольского – Бесова при условии слабой невырожденности отображения.

Следствие 4.2.4. *Пусть* $p > 1$, $a, b > 0$, $\theta \in (0,1)$, $\alpha := \frac{p\theta}{2p+\theta}$. *Существует такое число* $C := C(p, a, b, \theta) > 0$, *что для каждой соболевской функции* $f \in W^{2,p}(\gamma)$, *для которой*

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a, \quad \mathbb{E}\big[|\nabla f|^{-\theta}_{H(\gamma)}\big] \leqslant b,$$

плотность ϱ_f *распределения* $\gamma \circ f^{-1}$ *принадлежит пространству Никольского* $B^\alpha_{1,\infty}$ *с показателем дробной регулярности* α *и при каждом* $t > 0$ *верно неравенство*

$$\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t) \leqslant C \cdot t^\alpha.$$

Следствие 4.3.4. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$, $\theta \in (0,1)$, $p > 4k-1$, $\alpha := \frac{p\theta}{2p+(4k-1)\theta}$. *Найдется такое число* $C := C(p, k, a, b, \theta) > 0$, *что для каждого отображения* $f = (f_1, \dots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$ *с компонентами* $f_i \in W^{2,p}(\gamma)$,

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} := \max_{i=1,\dots,k} \big(\|f_i\|_{W^{2,p}(\gamma)}\big) \leqslant a, \quad \mathbb{E}[\Delta_f^{-\theta}] \leqslant b,$$

выполнено неравенство

$$\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t) \leqslant C \cdot t^{\alpha} \quad \forall t > 0.$$

В частности, плотность распределения $\gamma \circ f^{-1}$ принадлежит пространству Никольского $B^{\alpha}_{1,\infty}$.

Как следствие общих результатов третьей главы, в параграфах 4.2 и 4.3 также устанавливаются оценки расстояния по вариации между распределениями гауссовских мер под действием отображений с соболевскими компонентами через расстояние Канторовича – Рубинштейна между такими распределениями. Например, при условии слабой невырожденности отображений получены такие результаты.

Следствие 4.2.6. *Пусть $p > 1$, $a, b > 0$, $\theta \in (0, 1)$ и пусть*

$$\beta := \frac{p\theta}{(2+\theta)p + \theta}.$$

Существует такое число $C := C(p, a, b, \theta) > 0$, что для всяких функций $f, g \in W^{2,p}(\gamma)$, удовлетворяющих условиям

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a, \quad \|g\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a, \quad \mathbb{E}\big[|\nabla f|^{-\theta}_{H(\gamma)}\big] \leqslant b, \quad \mathbb{E}\big[|\nabla g|^{-\theta}_{H(\gamma)}\big] \leqslant b,$$

выполнено неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C \cdot d_{\mathrm{KR}}(f, g)^{\beta}.$$

Следствие 4.3.6. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$, $\theta \in (0, 1)$, $p > 4k - 1$,*

$$\beta := \frac{p\theta}{(2+\theta)p + (4k-1)\theta}.$$

Существует такое число $C := C(p, k, a, b, \theta) > 0$, что для всяких отображений $f = (f_1, \ldots, f_k), g = (g_1, \ldots, g_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$, $f_j, g_j \in W^{2,p}(\gamma)$, для которых

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a, \quad \|g\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a, \quad \mathbb{E}[\Delta_f^{-\theta}] \leqslant b, \quad \mathbb{E}[\Delta_g^{-\theta}] \leqslant b,$$

выполнено неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C d_{\mathrm{KR}}(f, g)^{\beta}.$$

В §4.4 доказываются оценки расстояния по вариации между двумя случайными векторами с компонентами из соболевских классов $W^{2,p}(\gamma)$ через расстояние между отображениями в пространстве $W^{1,p}(\gamma)$.

В одномерном случае $k = 1$ получена следующая теорема, уточняющая теорему 4.2 из работы [89].

Теорема 4.4.1. *Пусть $a > 0$, $b > 0$, $\theta \in (0, 2)$, $q \geqslant p > 1$, $1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$, и пусть*

$$\beta := \frac{\theta}{2 + \theta/p + \theta/q}.$$

Существует такое число $C := C(\theta, p, q, a, b) > 0$, что для всякого отображения $g \in W^{2,q}(\gamma)$, для которого

$$\|g\|_{W^{2,q}(\gamma)} \leqslant a, \quad \mathbb{E}[|\nabla g|^{-\theta}] \leqslant b,$$

и всякой функции $f \in W^{1,p}(\gamma)$ выполнено неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C\|f - g\|^{\beta}_{W^{1,p}(\gamma)}.$$

При $k > 1$ получено следующее обобщение предыдущей теоремы.

Теорема 4.4.4. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$, $\theta \in (0, 1)$, $p > 4k$,*

$$\beta := \frac{p\theta}{2p + 4\theta k}.$$

Существует такое число $C := C(p, k, a, b, \theta) > 0$, что для всякого отображения $f = (f_1, \ldots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$, $f_j \in W^{2,p}(\gamma)$, для которого

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} := \max \|f_j\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a, \quad \mathbb{E}[\Delta_f^{-\theta}] \leqslant b,$$

и всякого отображения $g = (g_1, \ldots, g_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$, для которого $g_j \in W^{2,p}(\gamma)$, $\|g\|_{W^{2,p}(\gamma)} := \max \|g_j\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a$, выполнено неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C\|f - g\|^{\beta}_{W^{1,p}(\gamma)}.$$

В §4.5, как следствие установленных результатов для отображений с соболевскими компонентами, показана принадлежность пространствам

Никольского – Бесова плотностей распределений образов гауссовских мер под действием отображений с полиномиальными компонентами, а также доказаны верхние оценки расстояния по вариации между такими распределениями.

В **пятой главе** исследуются свойства одномерных образов логарифмически вогнутых мер под действием многочленов. Вероятностная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^n$ называется логарифмически вогнутой, если она задана плотностью вида e^{-V} относительно меры Лебега на некотором аффинном подпространстве L, где $V\colon\ L \to (-\infty, +\infty]$ выпуклая функция. В бесконечномерном случае радоновская вероятностная мера на локально выпуклом пространстве E называется логарифмически вогнутой, если все ее конечномерные проекции оказываются логарифмически вогнутыми мерами. Пространство $\mathcal{P}_d(\mu)$ всех измеримых многочленов степени не выше d определяется как замыкание в $L^2(\mu)$ всех многочленов степени не выше d, «зависящих от конечного числа переменных», т. е. функций вида $P(\ell_1, \ldots, \ell_n)$, где $\ell_1, \ldots, \ell_n \in E^*$, P — алгебраический многочлен степени не выше d от n переменных. Важными примерами логарифмически вогнутых меря являются гауссовские меры и равномерные распределения на выпуклых множествах в $\mathbb{R}^n$. Логарифмически вогнутые функции оказываются естественным обобщением выпуклых множеств и играют большую роль в современных вопросах выпуклой геометрии (см., например, монографию [65]). Кроме того, логарифмически вогнутые меры имеют приложения и во многих других областях (см. работы [14], [52]).

В §5.2 доказывается следующее уточнение теоремы 3.3.1 для логарифмически вогнутых (в том числе для гауссовских) мер, причем удается проследить зависимость константы в правой части не только от характеристик многочлена f, но и от его степени d.

Теорема 5.2.1. *Существует такое число $C > 0$, что для всяких числа $d \in \mathbb{N}$, логарифмически вогнутой меры μ на локально выпуклом пространстве E и непостоянного измеримого многочлена $f \in \mathcal{P}_d(\mu)$ степени не выше d выполнено неравенство*

$$\sigma(\mu \circ f^{-1}, t) \leqslant Cd^2[\mathbb{D}f]^{-1/2d} \cdot t^{1/d}.$$

В частности, если f — непостоянный измеримый многочлен степени не выше d, то распределение $\mu \circ f^{-1}$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$, а его плотность принадлежит пространству Никольского $B^{\alpha}_{1,\infty}$ с показателем дробной регулярности $\alpha = 1/d$.

Из общих рассуждений третьей главы сразу же получаем оценки расстояния по вариации между распределениями двух непостоянных измеримых многочленов через расстояние по Канторовичу – Рубинштейну между этими распределениями, усиливающие в гауссовском случае результаты работы [89].

Следствие 5.3.1. *Существует такое число $C > 0$, что для всяких числа $d \in \mathbb{N}$, числа $a > 0$, логарифмически вогнутой меры μ на локально выпуклом пространстве E и измеримых многочленов $f, g \in \mathcal{P}_d(\mu)$ степени не выше d с $\mathbb{D}f \geqslant a$, $\mathbb{D}g \geqslant a$ верно неравенство*

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C(a, d) \cdot d_{\mathrm{KR}}(f, g)^{\frac{1}{d+1}},$$

где $C(a, d) := 9(Cd^2 a^{-1/2d} + 1)$.

В параграфе 5.3 установлено следующее неравенство типа Давыдова – Мартыновой, уточняющее ранее известные результаты и в гауссовском случае (см. работы [23], [89], [104]).

Теорема 5.3.2. *Для каждого $d \in \mathbb{N}$ существует такое число $C(d) > 0$, что для всяких логарифмически вогнутой меры μ на локально выпуклом пространстве E и многочленов $f, g \in \mathcal{P}_d(\mu)$ степени не выше d выполнено неравенство*

$$[\mathbb{D}g]^{1/2d} \cdot d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C(d) \cdot \|f - g\|_1^{1/d}.$$

Отметим, что, к сожалению, зависимость константы $C(d)$ от степени многочлена d при доказательстве теоремы 5.3.2 проследить сложнее, она получается сильно хуже степенной.

В **шестой главе** изучаются свойства образов мер при дополнительных структурных ограничениях.

В §6.1 изучаются свойства регулярности распределений случайных величин вида

$$f(X) := \sum_{j_1=0}^{m} \dots \sum_{j_n=0}^{m} a_{j_1,\dots,j_n} X_1^{j_1} \cdot \dots \cdot X_n^{j_n},$$

где $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением $\mathcal{N}(0,1)$. Таким образом, исследуются свойства образов стандартной гауссовской меры γ_n на $\mathbb{R}^n$ под действием многочленов f с дополнительным предположением, что каждая переменная входит в многочлен в степенях не выше некоторого фиксированного числа $m \in \mathbb{N}$. Показано, что с точки зрения регулярности распределений плотности таких случайных величин $f(X)$ ведут себя практически так же, как плотности распределений многочленов степени m, а именно доказана следующая теорема.

Теорема 6.1.1. *Пусть $m, d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant m$, и пусть γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$. Существует такое число $C(m,d)$, зависящее лишь от d и m, что для каждого непостоянного многочлена f указанного выше вида степени*

$$d[f] := \max\{j_1 + \dots + j_n \colon a_{j_1,\dots,j_n} \neq 0\} \in [1, d]$$

выполнено неравенство

$$\sigma(\gamma_n \circ f^{-1}, t) \leqslant C(m,d)(t/a[f])^{1/m}\big[|\ln(t/a[f])|^{d-m} + 1\big],$$

где $a[f] := \max\limits_{j_1+\dots+j_n=d[f]} |a_{j_1,\dots,j_n}|$.

В частности, плотности таких случайных величин $f(X)$ принадлежат каждому пространству Никольского $B^{\alpha}_{1,\infty}$ с показателем дробной регулярности $\alpha \in (0, 1/m)$.

В работе [18] была установлена следующая оценка характеристической функции случайной величины $f(X)$ рассматриваемого вида:

$$|\mathbb{E}\exp\{itf(X)\}| \leqslant C(n,m,d[f])|a[f]\cdot t|^{-1/m}\big[\ln(2+|a[f]t|)\big]^{\alpha}$$

где $\alpha = \frac{1}{2}\big(3n - \frac{d[f]}{m}\big) - 1$. Как следствие доказанной в параграфе 6.1 теоремы 6.1.1 получается следующее уточнение приведенной оценки, которое уже не зависит от количества переменных n.

Следствие 6.1.2. *Пусть $m, d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant m$, и $X_1, \ldots, X_n$ — независимые стандартные нормальные случайные величины. Существует такое число $C(m,d)$, зависящее лишь от d и m, что для каждого непостоянного многочлена f вида*

$$f(x) := \sum_{j_1=0}^{m} \ldots \sum_{j_n=0}^{m} a_{j_1,\ldots,j_m} x_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{j_n}$$

с $d[f] \leqslant d$, выполнено неравенство

$$|\mathbb{E} \exp\{itf(X)\}| \leqslant C(m,d)|a[f] \cdot t|^{-1/m} \big[\big|\ln |a[f] \cdot t|\big|^{d-m} + 1\big].$$

В §6.2 исследуются свойства дифференцируемости образов мер под действием сильно выпуклых функций, т. е. таких борелевских функций f на локально выпуклом пространстве E, что для некоторого линейного подпространства $L \subset E$ и для некоторого числа $m > 0$ выполнено неравенство

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geqslant m|h|^2 \quad \forall x \in E, \forall h \in L.$$

Если f сильно выпукла вдоль всего пространства E, то такую функцию называют просто сильно выпуклой на E.

Один из основных результатов данного параграфа сформулирован в следующей теореме.

Теорема 6.2.2. *Пусть μ — вероятностная борелевская мера на $\mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 3$, имеющая локально соболевскую плотность ϱ, и пусть f — сильно выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$ с постоянной $m > 0$. Предположим, что величины*

$$M(\mu) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-2}\, \mu(dx), R(\mu) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-2} |\langle \nabla \varrho(x), x-y\rangle|\, dx$$

конечны. Тогда для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ выполнено

$$\mathbb{E}\big[\varphi'(f)\big] \leqslant 2m^{-1}\big[(n-1)M(\mu) + R(\mu)\big].$$

В частности,

$$\|D_1\mu \circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 2m^{-1}\big[(n-1)M(\mu) + R(\mu)\big]$$

Для гауссовской меры получаем такое следствие.

Следствие 6.2.5. *Пусть $n \geqslant 3$, γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$, f — сильно выпуклая функция вдоль некоторого трехмерного подпространства L с постоянной $m > 0$. Тогда*

$$\|D_1\gamma_n \circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 8m^{-1}.$$

Полученные результаты о распределениях сильно выпуклых функций затем применяются для исследования регулярности распределений максимумов из квадратичных форм и многочленов второй степени.

Следствие 6.2.7. *Пусть $n \geqslant 3$, γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$ и $f := \max\{f_1, \ldots, f_p\}$, где*

$$f_j(x) := \langle A_j x, x\rangle + \langle a_j, x\rangle + \alpha_j$$

на $\mathbb{R}^n$ с симметричными операторами A_j (необязательно неотрицательными). Предположим, что имеется такое подпространство L размерности $\dim L = 3$, что для каждого $x \in L$ для некоторого числа $m > 0$ выполнена оценка $\langle A_j x, x\rangle \geqslant m|x|^2$ для каждого $j \in \{1, \ldots, p\}$. Тогда

$$\|D_1\gamma_n \circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 4m^{-1}.$$

Заключительный результат параграфа дает оценку нормы производной образа гауссовской меры под действием максимума из квадратичных форм в случае общей невырожденности на подпространстве размерности 2. Данная оценка уже зависит от количества форм.

Следствие 6.2.11. *Пусть $n \geqslant 2$, γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$ и $f := \max\{f_1, \ldots, f_p\}$, где*

$$f_j(x) := \langle A_j x, x\rangle + \langle a_j, x\rangle + \alpha_j$$

на $\mathbb{R}^n$ с симметричными операторами A_j. Предположим, что имеется такое двумерное подпространство L, что с некоторым $m > 0$ для всех

$x \in L$ *и* $j \in \{1, \dots, p\}$ *выполнено неравенство* $\langle A_j x, x\rangle \geqslant m|x|^2$. *Тогда*

$$\|D_1\gamma_n \circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant (2p^2+1)m^{-1}.$$

В §6.3 изучаются верхние оценки расстояния по вариации между образами гауссовских мер под действием многочленов второй степени. В работе [105] было установлено следующее утверждение. Пусть

$$g(x) = \langle Bx, x\rangle - \mathrm{tr}B,$$

где B — некоторый самосопряженный оператор. Предположим, что множество ненулевых собственных значений B с учетом кратности имеет мощность не менее пяти. Тогда для произвольного многочлена

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle - \mathrm{tr}A,$$

где A — самосопряженный оператор, выполнено неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(f(X), g(X)) \leqslant C(g)\|f-g\|_2,$$

где X — стандартный нормальный вектор. В §6.3 доказывается следующая теорема, уточняющая приведенное утверждение.

Теорема 6.3.6. *Пусть* γ_n *— стандартная гауссовская мера на* $\mathbb{R}^n$ *и* $d \in \mathbb{N}$. *Существует такое число* $C(d)$, *зависящее только от* d, *что для всякого многочлена* f *степени не выше* d *на* $\mathbb{R}^n$ *и всякого многочлена второй степени* $g(x) = \langle Bx, x\rangle + \langle b, x\rangle + \beta$, *где* B *— самосопряженный оператор,* $b \in \mathbb{R}^n$ *и* $\beta \in \mathbb{R}$, *выполнено неравенство*

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant \frac{C(d)}{\sqrt{|s_1|\cdot|s_2|}} \cdot \|f-g\|_2,$$

при условии, что существует двумерное подпространство L, *на котором квадратичная форма* $x \mapsto \langle Bx, x\rangle$ *положительно или отрицательно определена, а* s_1 *и* s_2 *— собственные числа этой квадратичной формы. В случае* $d = 2$ *можно взять* $C(2) = 80$.

В частности, если у оператора B есть два собственных значения одного знака (например, так будет, если множество собственных значений

оператора B имеет мощность не менее трех), то справедлива оценка из работы [105] с константой $C(g) = \frac{80}{\sqrt{|s_1|\cdot|s_2|}}$, где s_1 и s_2 — два указанных собственных значения одного знака.

В §6.4 изучаются свойства распределений случайных векторов вида PX, где X — случайный n-мерный вектор с независимыми компонентами, а P — проектор на некоторое k-мерное подпространство. В работах [7], [42], [93] рассматривался вопрос об оценках максимума плотности вектора PX, при условии, что плотность каждой компоненты вектора X ограничена единицей. В частности, в работе [93] было доказано существование такого числа $C > 0$, что при указанных выше условиях плотность вектора PX ограничена числом C^k. В §6.4 устанавливается следующий аналог приведенного результата для производных.

Теорема 6.4.1. *Для каждого числа $k \in \mathbb{N}$ найдется такое положительное число $C(k)$, что для всякого случайного вектора $X := (X_1, \ldots, X_n)$ с независимыми компонентами, распределения $\mu_1, \ldots, \mu_n$ которых дифференцируемы по Скороходу, и всякого ортогонального проектора*

$$P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

выполнено неравенство

$$\sup_{|e|=1} \|D_e[\mu \circ P^{-1}]\|_{\mathrm{TV}} \leqslant C(k) \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|\mu_j'\|_{\mathrm{TV}},$$

где $\mu = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ — распределение вектора X. В случае $k = 1$ выполнено равенство $C(1) = \sqrt{2}$, а в случае $k > 1$ можно взять $C(k) = C \cdot k^2$ для некоторой абсолютной постоянной C.

Глава 1

Новые L^p-модули непрерывности и эквивалентное описание пространств Никольского – Бесова

1.1 Определения и обозначения

Приведем обозначения, используемые в этой главе и далее.

Символом $|\cdot|$ будем обозначать стандартную евклидову норму на $\mathbb{R}^k$, порожденную стандартным евклидовым скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Символом $L^p(\mathbb{R}^k)$, $p \in [1,\infty)$, будем обозначать классическое пространство интегрируемых в степени p относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^k$ функций с нормой

$$\|\varrho\|_{L^p(\mathbb{R}^k)} := \Big(\int_{\mathbb{R}^k} |\varrho(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

В данной главе, для краткости, будем писать $\|\varrho\|_p$ вместо $\|\varrho\|_{L^p(\mathbb{R}^k)}$. Для функции $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$ и вектора $h \in \mathbb{R}^k$ символом $\varrho(\cdot - h)$ обозначим сдвиг функции ϱ на вектор h, т. е. $\varrho(\cdot - h)(x) := \varrho(x - h)$. Пространство $C^\infty(\mathbb{R}^k)$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^k$. Для функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ символом $\|\varphi\|_\infty$ обозначим ее супремум по $\mathbb{R}^k$, т. е. $\|\varphi\|_\infty := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^k} |\varphi(x)|$, а символом $\partial_e\varphi$ обозначим ее производную вдоль вектора $e \in \mathbb{R}^k$, т. е. $\partial_e\varphi(x) := \langle\nabla\varphi, e\rangle$, где $\nabla\varphi = (\partial_1\varphi,\dots,\partial_k\varphi)$ – градиент функции φ. Пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ состоит из всех функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$, имеющих компактный носитель, а пространство $C_b^\infty(\mathbb{R}^k)$ состоит из всех ограниченных функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ с ограниченны-

ми производными всех порядков. Пространство $C^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ ($C_0^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, $C_b^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$) состоит из всех отображений $\Phi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$, для которых $\Phi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ $\forall j \in \{1, \dots, k\}$ ($\Phi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ или $C_b^\infty(\mathbb{R}^k)$ соответственно). Для краткости будем писать $\|\Phi\|_p$ вместо $\||\Phi|\|_p$ для отображений $\Phi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Символом $\mathrm{div}\Phi$ будем обозначать дивергенцию дифференцируемого отображения Φ, т. е.

$$\mathrm{div}\Phi(x) := \sum_{j=1}^{k} \partial_j \Phi_j(x).$$

Для множества $A \subset \mathbb{R}^k$ символом I_A будем обозначать индикатор (индикаторную функцию) множества A, т. е.

$$\mathrm{I}_A(x) := \begin{cases} 1, \, x \in A \\ 0, \, x \notin A \end{cases}$$

Классическую Лебеговскую меру на $\mathbb{R}^k$ будем обозначать символом λ^k.

Для $p \in (1, +\infty)$ пусть $p' := \frac{p}{p-1}$, а для $p = 1$ пусть $p' := +\infty$, т. е. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

1.2 Новые L^p-модули непрерывности

В данном параграфе определяются два новых модуля непрерывности в пространстве $L^p(\mathbb{R}^k)$ и доказывается их эквивалентность классическому L^p-модулю непрерывности.

Напомним определение классического L^p-модуля непрерывности.

Определение 1.2.1. *Пусть $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$, тогда L^p-модулем непрерывности ϱ называется функция*

$$\omega_p(\varrho, \varepsilon) := \sup_{|h| \leqslant \varepsilon} \|\varrho(\cdot - h) - \varrho\|_p.$$

Отметим, что функция $\omega_p(\varrho, \cdot)$ — неубывающая и субаддитивная, т. е.

$$\omega_p(\varrho, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leqslant \omega_p(\varrho, \varepsilon_1) + \omega_p(\varrho, \varepsilon_2) \quad \forall\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0.$$

Определим теперь два новых модуля непрерывности.

Определение 1.2.2. *Пусть* $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$. *Положим*

$$\sigma_p(\varrho, \varepsilon) := \sup \int_{\mathbb{R}^k} \varrho(x) \cdot \mathrm{div}\Phi(x)\, dx,$$

где супремум берется по всевозможным отображениям $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, *для которых* $\|\mathrm{div}\Phi\|_{p'} \leqslant 1$, $\|\Phi\|_{p'} \leqslant \varepsilon$.

Определение 1.2.3. *Пусть* $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$. *Положим*

$$\widetilde{\sigma}_p(\varrho, \varepsilon) := \sup \int_{\mathbb{R}^k} \varrho(x) \cdot \partial_e \varphi(x)\, dx,$$

где супремум берется по всевозможным векторам $e \in \mathbb{R}^k$ *единичной длины, т. е.* $|e| = 1$, *и по всевозможным функциям* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$, *для которых выполнены соотношения* $\|\partial_e \varphi\|_{p'} \leqslant 1$, $\|\varphi\|_{p'} \leqslant \varepsilon$.

В следующей лемме собраны основные свойства функций $\sigma_p(\varrho, \cdot)$ и $\widetilde{\sigma}_p(\varrho, \cdot)$.

Лемма 1.2.4. *Пусть* $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$. *Тогда функции* $\sigma_p(\varrho, \cdot)$ *и* $\widetilde{\sigma}_p(\varrho, \cdot)$ *являются неубывающими, субаддитивными, вогнутыми и непрерывными на интервале* $(0, +\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим только функцию $\sigma_p(\varrho, \cdot)$, так как для второй функции доказательство проводится аналогично. Легко проверить, что данная функция действительно неубывающая. Субаддитивность автоматически следует из вогнутости. Проверим, что функция $\sigma_p(\varrho, \cdot)$ вогнута. Возьмем $a, b > 0$ и $t \in (0, 1)$. Тогда для произвольных векторных полей $\Phi_1, \Phi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, удовлетворяющих условиям

$$\|\mathrm{div}\Phi_1\|_{p'} \leqslant 1, \|\Phi_1\|_{p'} \leqslant a, \|\mathrm{div}\Phi_2\|_{p'} \leqslant 1, \|\Phi_2\|_{p'} \leqslant b,$$

выполнены соотношения

$$t \int_{\mathbb{R}^k} \varrho(x) \cdot \mathrm{div}\Phi_1(x)\, dx + (1-t) \int_{\mathbb{R}^k} \varrho(x) \cdot \mathrm{div}\Phi_2(x)\, dx = \\ = \int_{\mathbb{R}^k} \varrho(x) \cdot \mathrm{div}[t\Phi_1(x) + (1-t)\Phi_2(x)]\, dx$$

и

$$\|\mathrm{div}[t\Phi_1 + (1-t)\Phi_2]\|_{p'} \leqslant 1, \quad \|t\Phi_1 + (1-t)\Phi_2\|_{p'} \leqslant ta + (1-t)b.$$

Таким образом,

$$t\sigma_p(f,a)+(1-t)\sigma_p(f,b)\leqslant\sigma_p(f,ta+(1-t)b).$$

Вогнутость влечет также и непрерывность. Лемма доказана. □

В следующей лемме показана связь модулей непрерывности $\sigma_p(\varrho,\cdot)$ и $\widetilde{\sigma}_p(\varrho,\cdot)$ со сдвигом функции $\varrho(\cdot-h)$.

Лемма 1.2.5. *Для каждой функции $\varrho\in L^p(\mathbb{R}^k)$ и для каждого вектора $h\in\mathbb{R}^k$ выполнены неравенства*

$$\frac{1}{2}\|\varrho(\cdot-2h)-\varrho\|_p\leqslant\widetilde{\sigma}_p(\varrho,|h|)$$
$$\leqslant\sigma_p(\varrho,|h|)\leqslant(2\pi)^{-k/2}\int_{\mathbb{R}^k}\|\varrho(\cdot-|h|z)-\varrho\|_p(1+|z|)e^{-\frac{|z|^2}{2}}\,dz.$$

Доказательство. Для всякой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ и для всякого единичного вектора $e\in\mathbb{R}^k$ можно рассмотреть векторное поле $\Phi=\varphi e$, что влечет оценку

$$\widetilde{\sigma}_p(\varrho,\varepsilon)\leqslant\sigma_p(\varrho,\varepsilon).$$

Пусть теперь $e=|h|^{-1}h$. Для произвольной функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ с нормой $\|\varphi\|_{p'}\leqslant 1$ выполнены равенства

$$\int_{\mathbb{R}^k}(\varrho(x-h)-\varrho(x))\cdot\varphi(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^k}\varrho(x)\cdot[\varphi(x+h)-\varphi(x)]\,dx=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^k}\varrho(x)\cdot\int_0^{|h|}\partial_e\varphi(x+se)\,ds\,dx.$$

Для функции

$$\psi(x)=\int_0^{|h|}\varphi(x+se)\,ds\in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$$

верны неравенства

$$\|\psi\|_{p'}\leqslant|h|\|\varphi\|_{p'}\leqslant|h|$$

и

$$\|\partial_e\psi\|_{p'}\leqslant 2\|\varphi\|_{p'}\leqslant 2,$$

так как

$$|\partial_e\psi(x)|=\left|\int_0^{|h|}\partial_e\varphi(x+se)\,ds\right|=|\varphi(x+h)-\varphi(x)|.$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}^k} (\varrho(x-h)-\varrho(x))\cdot\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} \varrho(x)\cdot\partial_e\psi(x)\,dx \leqslant 2\widetilde{\sigma}_p(\varrho,|h|/2).$$

Взяв супремум по функциям φ с нормой $\|\varphi\|_{p'} \leqslant 1$, получаем оценку $\|\varrho(\cdot-h)-\varrho\|_p \leqslant 2\widetilde{\sigma}_p(\varrho,|h|/2)$.

Для доказательства последнего неравенства нам понадобится полугруппа теплопроводности P_t на $\mathbb{R}^k$, определяемая равенством

$$P_t\varrho(x) := (2\pi t)^{-k/2}\int_{\mathbb{R}^k}\varrho(y)\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)dy, \quad \varrho\in L^p(\mathbb{R}^k).$$

Для произвольного векторного поля $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k)$ и произвольного числа $t>0$ верно равенство

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^k}\varrho(x)\cdot\operatorname{div}\Phi(x)\,dx &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^k}(\varrho(x)-P_t\varrho(x))\cdot\operatorname{div}\Phi(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^k} P_t\varrho(x)\cdot\operatorname{div}\Phi(x)\,dx. \quad (1.2.1)\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\|\varrho-P_t\varrho\|_p \leqslant (2\pi)^{-k/2}\int_{\mathbb{R}^k}\|\varrho(\cdot-\sqrt{t}z)-\varrho\|_p e^{-\frac{|z|^2}{2}}\,dz.$$

Таким образом, для первого слагаемого тождества (1.2.1) выполнены неравенства

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^k}(\varrho(x)-P_t\varrho(x))\cdot\operatorname{div}\Phi(x)\,dx &\leqslant \|\varrho-P_t\varrho\|_p\cdot\|\operatorname{div}\Phi\|_{p'} \leqslant \\ &\leqslant \|\operatorname{div}\Phi\|_{p'}\cdot(2\pi)^{-k/2}\int_{\mathbb{R}^k}\|\varrho(\cdot-\sqrt{t}z)-\varrho\|_p e^{-\frac{|z|^2}{2}}\,dz.\end{aligned}$$

Интегрируя по частям во втором слагаемом тождества (1.2.1), получаем

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^k} P_t\varrho(x)\cdot\operatorname{div}\Phi(x)\,dx &= -\int_{\mathbb{R}^k}\langle\Phi(x),\nabla P_t\varrho(x)\rangle\,dx = \\ &= t^{-1/2}\int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^k}\langle\Phi(x),(x-y)t^{-1/2}\rangle\varrho(y)(2\pi t)^{-k/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}\,dy\,dx = \\ &= t^{-1/2}\int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^k}\langle\Phi(x),z\rangle\varrho(x-\sqrt{t}z)(2\pi)^{-k/2}e^{-\frac{|z|^2}{2}}\,dz\,dx.\end{aligned}$$

Так как

$$\int_{\mathbb{R}^k} \varrho(x) \int_{\mathbb{R}^k} \langle \Phi(x), z\rangle e^{-\frac{|z|^2}{2}}\, dz\, dx = 0,$$

то

$$t^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^k} \langle \Phi(x), z\rangle \varrho(x-\sqrt{t}z)(2\pi)^{-k/2} e^{-\frac{|z|^2}{2}}\, dz\, dx =$$
$$= t^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^k} (2\pi)^{-k/2} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^k} \langle \Phi(x), z\rangle (\varrho(x-\sqrt{t}z) - \varrho(x))\, dx\, dz \leqslant$$
$$\leqslant t^{-1/2} \|\Phi\|_{p'} \cdot (2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} |z| e^{-\frac{|z|^2}{2}} \|\varrho(\cdot - \sqrt{t}z) - \varrho\|_p\, dz.$$

Таким образом, получено неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^k} \varrho(x) \cdot \mathrm{div}\Phi(x)\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathrm{div}\Phi\|_{p'} \cdot (2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} \|\varrho(\cdot - \sqrt{t}z) - \varrho\|_p e^{-\frac{|z|^2}{2}}\, dz +$$
$$+ t^{-1/2} \|\Phi\|_{p'} \cdot (2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} |z| \|\varrho(\cdot - \sqrt{t}z) - \varrho\|_p e^{-\frac{|z|^2}{2}}\, dz.$$

Поэтому

$$\sigma_p(\varrho, \varepsilon) \leqslant (2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} \|\varrho(\cdot - \sqrt{t}z) - \varrho\|_p e^{-\frac{|z|^2}{2}}\, dz +$$
$$+ t^{-1/2}\varepsilon\, (2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} |z| \|\varrho(\cdot - \sqrt{t}z) - \varrho\|_p e^{-\frac{|z|^2}{2}}\, dz.$$

Взяв $\sqrt{t} = \varepsilon$, получаем

$$\sigma_p(\varrho, \varepsilon) \leqslant (2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |z|) \|\varrho(\cdot - \varepsilon z) - \varrho\|_p e^{-\frac{|z|^2}{2}}\, dz.$$

Лемма доказана. □

Как уже было отмечено ранее, функция $\omega_p(f, \cdot)$ является неубывающей и субаддитивной, в частности,

$$\omega_p(f, \tau s) \leqslant 2\tau \omega_p(f, s) \tag{1.2.2}$$

при $\tau \geqslant 1$ и $s > 0$. Действительно, пусть число $k \in \mathbb{N}$ выбрано так, что $k \leqslant \tau < k + 1$. Тогда

$$\omega_p(f, \tau s) \leqslant \omega_p(f, (k+1)s) \leqslant$$
$$\leqslant (k+1)\omega_p(f, s) = k(1 + 1/k)\omega_p(f, s) \leqslant 2\tau \omega_p(f, s).$$

В следующей теореме представлен основной результат данного параграфа — эквивалентность модулей непрерывности $\sigma_p(\varrho,\cdot)$, $\widetilde{\sigma}_p(\varrho,\cdot)$ и $\omega_p(\varrho,\cdot)$.

Теорема 1.2.6. *Для произвольной функции $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$ выполнены неравенства*

$$2^{-1}\omega_p(\varrho,2\varepsilon) \leqslant \widetilde{\sigma}_p(\varrho,\varepsilon) \leqslant \sigma_p(\varrho,\varepsilon) \leqslant 2(1+\sqrt{k}+k)\omega_p(\varrho,\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Доказательство. Первые два неравенства являются прямыми следствиями леммы 1.2.5. Для доказательства последнего неравенства, заметим, что по той же лемме

$$\begin{aligned}\sigma_p(\varrho,\varepsilon) &\leqslant (2\pi)^{-k/2}\int_{\mathbb{R}^k} \|\varrho(\cdot-\varepsilon z)-\varrho\|_p(1+|z|)e^{-\frac{|z|^2}{2}}\,dz \leqslant \\ &\leqslant (2\pi)^{-k/2}\int_{\mathbb{R}^k} \omega_p(\varrho,\varepsilon|z|)(1+|z|)e^{-\frac{|z|^2}{2}}\,dz = \\ &= (2\pi)^{-k/2}\int_{|z|\leqslant 1} \omega_p(\varrho,\varepsilon|z|)(1+|z|)e^{-\frac{|z|^2}{2}}\,dz + \\ &\qquad + (2\pi)^{-k/2}\int_{|z|>1} \omega_p(\varrho,\varepsilon|z|)(1+|z|)e^{-\frac{|z|^2}{2}}\,dz.\end{aligned}$$

Первый интеграл в предыдущем выражении оценивается сверху через

$$\omega_p(\varrho,\varepsilon)(2\pi)^{-k/2}\int_{|z|\leqslant 1}(1+|z|)e^{-\frac{|z|^2}{2}}\,dz \leqslant 2\omega_p(f,\varepsilon)$$

из-за монотонности функции $\omega_p(\varrho,\cdot)$. Второй интеграл по неравенству (1.2.2) не превосходит

$$\omega_p(\varrho,\varepsilon)(2\pi)^{-k/2}\int_{|z|>1} 2|z|(1+|z|)e^{-\frac{|z|^2}{2}}\,dz \leqslant \omega_p(f,\varepsilon)(2\sqrt{k}+2k).$$

Объединяя эти две оценки, получаем оставшееся неравенство. □

В качестве одной из иллюстраций применения введенных выше модулей непрерывности докажем одну оценку, которая будет полезна в следующих главах.

Лемма 1.2.7. *Пусть* $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$, *где* $p \in [1, k)$ *или* $k = p = 1$, *и пусть* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$, $\|u\|_{p'} \leqslant 1$. *Тогда*

$$\int_{\mathbb{R}^k} u(x)\varrho(x)\,dx \leqslant C(k,p)\sigma_p\big(\varrho, \|u\|_1^{p/k}\big),$$

где, при $p > 1$, *можно взять* $C(k,p) = 1 + \nu_k^{-1/p}\big(\frac{k-p}{p-1}\big)^{-1+1/p}$, *при* $p = 1$, $k > 1$, *можно взять* $C(k,1) = 1 + \nu_k^{-1}$, *а при* $p = k = 1$ *можно взять* $C(1,1) = 1$ *(ν_k — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^k$).*

Доказательство. Для произвольного отображения $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, для которого $\|\Phi\|_{p'} \leqslant \varepsilon$, $\|\mathrm{div}\Phi\|_{p'} \leqslant 1$, с помощью приближений получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^k} \varrho(x) \cdot \mathrm{div}\Phi(x)\,dx \leqslant \sigma_p(\varrho, \varepsilon).$$

Сначала рассмотрим случай $k > 2$. Пусть

$$\varphi(x) = -(k-2)^{-1}\nu_k^{-1}\int_{\mathbb{R}^k} |x-y|^{-k+2}u(y)\,dy.$$

Известно (см., например, [20, Лемма 4.2]), что $\mathrm{div}\nabla\varphi = \Delta\varphi = u$. Пусть R — произвольное положительное число, значение которого будет выбрано далее, и пусть

$$K_1(x) = |x|^{-k+1}\mathrm{I}_{\{|x|<R\}}(x), \quad K_2(x) = |x|^{-k+1}\mathrm{I}_{\{|x|\geqslant R\}}(x).$$

Оценим градиент $\nabla\varphi$:

$$|\nabla\varphi(x)| \leqslant \nu_k^{-1}\int_{\mathbb{R}^k} |x-y|^{-k+1}|u(y)|\,dy = \nu_k^{-1}\big(K_1 * |u|(x) + K_2 * |u|(x)\big).$$

Таким образом, при $p > 1$, получаем

$$\begin{aligned}\|\nabla\varphi\|_{p'} &\leqslant \nu_k^{-1}\big(\|K_1\|_1\|u\|_{p'} + \|K_2\|_{p'}\|u\|_1\big) \leqslant \\ &\leqslant \nu_k^{-1}\int_{\{|x|<R\}} |x|^{-k+1}\,dx + \nu_k^{-1}\|u\|_1\bigg(\int_{\{|x|\geqslant R\}} |x|^{-\frac{(k-1)p}{p-1}}\,dx\bigg)^{1-1/p} = \\ &= R + \nu_k^{-1/p}\Big(\frac{k-p}{p-1}\Big)^{-1+1/p}R^{1-k/p}\|u\|_1.\end{aligned}$$

Аналогично, при $p = 1$,

$$\|\nabla\varphi\|_\infty \leqslant R + \nu_k^{-1}R^{1-k}\|u\|_1.$$

Взяв теперь $R = \|u\|_1^{p/k}$, получаем при каждом $p \in [1, k)$ оценку

$$\|\nabla\varphi\|_{p'} \leqslant C(k,p)\|u\|_1^{p/k}.$$

Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^k} u(x)\varrho(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} [\mathrm{div}\nabla\varphi(x)]\cdot\varrho(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \sigma_p\Big(\varrho, C(k,p)\|u\|_1^{p/k}\Big) \leqslant C(k,p)\cdot\sigma_p\big(\varrho, \|u\|_1^{p/k}\big),$$

где в последнем переходе была использована вогнутость функции $\sigma_p(\varrho,\cdot)$ и тот факт, что $C(k,p) \geqslant 1$. Таким образом, интересующее нас неравенство получено в случае $k > 2$. При $k = 2$ нужно рассмотреть функцию

$$\varphi(x) = -(2\pi)^{-1}\int \ln|x-y|u(y)\,dy$$

и провести аналогичные рассуждения.

Таким образом, остался только случай $k = 1$. В этом случае рассмотрим функцию $\varphi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} u(t)\,dt$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\varrho(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\varrho(x)\,dx \leqslant \sigma_1(\varrho, \|\varphi\|_\infty) \leqslant \sigma_1(\varrho, \|u\|_1).$$

Лемма доказана. □

Теорема 1.2.8. *Пусть $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$, где $p \in [1,k)$ или $k = p = 1$. Тогда для всякого борелевского множества A в $\mathbb{R}^k$ имеем*

$$\left(\int_A |\varrho(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant C(k,p)\sigma_p\big(\varrho, \big(\lambda^k(A)\big)^{1/k}\big) \tag{1.2.3}$$

где, при $p > 1$, можно взять $C(k,p) = 1 + \nu_k^{-1/p}\big(\frac{k-p}{p-1}\big)^{-1+1/p}$, при $p = 1$, $k > 1$, можно взять $C(k,1) = 1 + \nu_k^{-1}$, а при $p = k = 1$ можно взять $C(1,1) = 1$ (ν_k — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^k$).

Доказательство. Предположим сначала, что A — ограниченное множество, $A \subset B(0,R)$, где $B(0,R)$ — шар радиуса R с центром в начале координат. Рассмотрим произвольную функцию $u \in L^{p'}(A)$, для которой $\|u\|_{L^{p'}(A)} \leqslant 1$. Существует последовательность функций $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ с

носителем в шаре $B(0,2R)$, для которой $\|u_m\|_{p'} \leqslant 1$ и $u_m \to u$ по норме $L^{p'}\big(B(0,2R)\big)$ (λ^k-п.в. в случае $p=1$), где $u(x)=0$ при $x \notin A$. Например, такую последовательность можно построить при помощи свертки с гладкой вероятностной плотностью с компактным носителем. Для каждой функции u_m по предыдущей лемме выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^k} u_m(x)\varrho(x)\,dx \leqslant C(k,p)\sigma_p\big(\varrho, \|u_m\|_1^{p/k}\big).$$

Так как $\|\cdot\|_1$ — непрерывная функция на пространстве $L^{p'}\big(B(0,2R)\big)$ при $p>1$ (по теореме Лебега о мажорируемой сходимости в случае $p=1$), предыдущая оценка выполнена также и для функции u. Таким образом, для всякой функции $u \in L^{p'}(A)$ с $\|u\|_{L^{p'}(A)} \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\int_A u(x)\varrho(x)\,dx \leqslant C(k,p)\sigma_p\big(\varrho, \|u\|_1^{p/k}\big) \leqslant C(k,p)\sigma_p\big(\varrho, \big(\lambda^k(A)\big)^{1/k}\big).$$

Взяв супремум по всем таким функциям u, что $\|u\|_{L^{p'}(A)} \leqslant 1$, приходим к неравенству (1.2.3) в случае ограниченного множества A. Случай произвольного множества A получается из доказанного переходом к пределу. Теорема доказана. □

Замечание 1.2.9. Отметим, что неравенство (1.2.3) эквивалентно следующей оценке из теории невозрастающих перестановок функций:

$$\Big(\int_0^s |\varrho^*(t)|^p dt\Big)^{1/p} \leqslant c(k,p)\omega_p(\varrho, s^{1/k}),$$

где ϱ^* — невозрастающая, равноизмеримая с ϱ перестановка, т. е.

$$\varrho^*(t) = \inf\{y>0 : \lambda^k(x\colon |\varrho(x)|>y) \leqslant t\}.$$

Это следует из того, что (см. [66, Лемма 3.3.4])

$$\int_0^s |\varrho^*(t)|^p dt = \sup_{\lambda^k(A)=s} \int_A |\varrho(x)|^p\,dx$$

и уже доказанной эквивалентности двух модулей непрерывности $\omega_p(\varrho,\cdot)$ и $\sigma_p(\varrho,\cdot)$. Подобные неравенства применяются при доказательстве различных теорем вложения, например, теорем вложения типа Ульянова (см.

[45], [46] и [25], [26], [27]) об условиях интегрируемости функции $U(|\varrho|)$ в терминах модуля непрерывности $\omega_p(\varrho,\cdot)$ (а значит и в терминах $\sigma_p(\varrho,\cdot)$).

Заметим, что полученный в теореме 1.2.8 в случае $p=1$ результат утверждает, что для меры μ с плотностью ϱ на $\mathbb{R}^k$ справедлива оценка

$$\mu(A)\leqslant C(k,1)\sigma_1\big(\varrho,\big(\lambda^k(A)\big)^{1/k}\big).$$

Оценки такого типа понадобятся нам в последующих главах (см. следствие 3.2.8 и доказательства теорем 3.3.1 и 6.1.1). Кроме того, еще раз подчеркнем, что оценки такого типа позволяют говорить об улучшении свойств интегрируемости плотности ϱ (например, благодаря теоремам вложения типа Ульянова).

1.3 Связь с теорией интерполяции и эквивалентное описание пространств Никольского – Бесова

Пространство Бесова (см. [5], [33], [38], [94], и [98]) $B^\alpha_{p,\theta}(\mathbb{R}^k)$ с параметрами $\alpha\in(0,1)$, $p\in[1,\infty)$, $\theta\in[1,\infty)$ состоит из всех таких функций ϱ из $L^p(\mathbb{R}^k)$, для которых конечна величина

$$[\varrho]_{B^\alpha_{p,\theta}(\mathbb{R}^k)}:=\Big(\int_0^{+\infty}\big[t^{-\alpha}\omega_p(\varrho,t)\big]^\theta t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta}.$$

При $\theta=\infty$ пространство $B^\alpha_{p,\infty}(\mathbb{R}^k)$ называется пространством Никольского и состоит из всех таких функций $\varrho\in L^p(\mathbb{R}^k)$, для которых конечна величина

$$[\varrho]_{B^\alpha_{p,\infty}(\mathbb{R}^k)}:=\sup_{t>0}t^{-\alpha}\omega_p(\varrho,t).$$

Иными словами, функция $\varrho\in L^p(\mathbb{R}^k)$ принадлежит пространству Никольского $B^\alpha_{p,\infty}(\mathbb{R}^k)$ тогда и только тогда, когда найдется число $C>0$, для которого

$$\|\varrho(\cdot-h)-\varrho\|_p\leqslant C|h|^\alpha\quad\forall h\in\mathbb{R}^k.$$

Далее, для краткости, всегда будем подразумевать, что, при $\theta=\infty$, выражение

$$\Big(\int_0^{+\infty}|g(t)|^\theta t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta}$$

совпадает с $\sup\limits_{t>0}|g(t)|$ для $g \in C(0,\infty)$.

В качестве следствия теоремы 1.2.6 получается равносильная характеризация пространств Никольского – Бесова на $\mathbb{R}^k$. Введем следующие обозначения.

Определение 1.3.1. *Пусть* $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$, $p \in [1,\infty)$, $\theta \in [1,\infty]$ *и* $\alpha \in (0,1)$. *Пусть*

$$V^{p,\theta,\alpha}(\varrho) = \Big(\int_0^\infty \big[t^{-\alpha}\sigma_p(\varrho,t)\big]^\theta t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta}.$$

Определение 1.3.2. *Пусть* $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$, $p \in [1,\infty)$, $\theta \in [1,\infty]$ *и* $\alpha \in (0,1)$. *Пусть*

$$\widetilde{V}^{p,\theta,\alpha}(\varrho) = \Big(\int_0^\infty \big[t^{-\alpha}\widetilde{\sigma}_p(\varrho,t)\big]^\theta t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta}.$$

Следствие 1.3.3. *Для всякой функции* $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^k)$ *следующие условия равносильны:*

(i) $\varrho \in B^\alpha_{p,\theta}(\mathbb{R}^k)$; (ii) $V^{p,\theta,\alpha}(\varrho) < \infty$; (iii) $\widetilde{V}^{p,\theta,\alpha}(\varrho) < \infty$.

Более того,

$$2^{\alpha-1}[\varrho]_{B^\alpha_{p,\theta}(\mathbb{R}^k)} \leqslant \widetilde{V}^{p,\theta,\alpha}(f) \leqslant V^{p,\theta,\alpha}(f) \leqslant 2(1+\sqrt{k}+k)[\varrho]_{B^\alpha_{p,\theta}(\mathbb{R}^k)}.$$

Хорошо известно (см. [66, Теорема 4.3.6], [94, Раздел 2.4.1], и [82, Пример 5.15]), что пространства Никольского – Бесова $B^\alpha_{p,\theta}(\mathbb{R}^k)$ могут быть получены по методу вещественной интерполяции между пространствами $L^p(\mathbb{R}^k)$ и пространствами Соболева $W^{1,p}(\mathbb{R}^k)$, где пространство Соболева определяется, как пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ по норме

$$\|\varrho\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^k)} := \|\varrho\|_p + [\varrho]_{W^{1,p}(\mathbb{R}^k)}, \quad [\varrho]_{W^{1,p}(\mathbb{R}^k)} := \|\nabla\varrho\|_p.$$

Напомним основные идеи метода вещественной интерполяции (см. [66], [82], [94], [29]). Рассмотрим пару некоторых нормированных пространств $(E_0,\|\cdot\|_0),(E_1,\|\cdot\|_1)$, причем будем считать, что пространство E_1 непрерывно и всюду плотно вложено в пространство E_0. Для каждого $t>0$ определим на E_0 норму

$$K_{E_0,E_1}(x,t) := \inf\{\|x_0\|_0 + t\|x_1\|_1 :\ x = x_0+x_1,\ x_0\in E_0,\ x_1\in E_1\},$$

которая называется K-интерполяционным функционалом. Интерполяционное пространство $(E_0, E_1)_{\alpha,\theta}$, $\alpha \in (0,1), \theta \in [1,\infty]$, состоит из всех таких векторов $x \in E_0$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{(E_0,E_1)_{\alpha,\theta}} := \Big(\int_0^{+\infty} \big[t^{-\alpha} K_{E_0,E_1}(x,t)\big]^\theta t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta}$$

и $\|\cdot\|_{(E_0,E_1)_{\alpha,\theta}}$ задает норму на этом пространстве. Как уже было отмечено, $B^\alpha_{p,\theta}(\mathbb{R}^k) = \big(L^p(\mathbb{R}^k), W^{1,p}(\mathbb{R}^k)\big)_{\alpha,\theta}$

По аналогии с определениями 1.2.2 и 1.2.3 для каждого $t > 0$ зададим функционал $\sigma_{E_0,E_1}(\cdot,t)$ по следующей формуле:

$$\sigma_{E_0,E_1}(x,t) := \sup\{l(x)\colon l \in E_0^*,\ \|l\|_{E_0^*} \leqslant 1,\ \|l\|_{E_1^*} \leqslant t\},$$

где E_0^* и E_1^* обозначают сопряженные пространства к пространствам E_0 и E_1 соответственно.

Покажем, что функционалы $K_{E_0,E_1}(x,t)$ и $\sigma_{E_0,E_1}(x,t)$ совпадают.

Лемма 1.3.4. *Для $l \in E_0^*$ и для $t > 0$ пусть $\|l\|_t^* := \max\{\|l\|_{E_0^*},\ t^{-1}\|l\|_{E_1^*}\}$. Тогда $(E_0, K_{E_0,E_1}(\cdot,t))^* = (E_0^*, \|\cdot\|_t^*)$.*

Доказательство. Пусть $l \in E_0^*$. Тогда для произвольных векторов x_0, x_1, для которых $x_1 \in E_1$ и $x = x_0 + x_1$, выполнены неравенства

$$l(x) = l(x_0) + l(x_1) \leqslant \|l\|_{E_0^*}\|x_0\|_0 + \|l\|_{E_1^*}\|x_1\|_1 \leqslant \|l\|_t^*(\|x_0\|_0 + t\|x_1\|_1).$$

Из этого получаем, что $\|l\|_{(E_0,K_{E_0,E_1}(\cdot,t))^*} \leqslant \|l\|_t^*$. Докажем обратную оценку. Пусть $l \in (E_0, K_{E_0,E_1}(\cdot,t))^*$. Тогда для каждого $x \in E_0$ выполнены неравенства

$$l(x) \leqslant \|l\|_{(E_0,K_{E_0,E_1}(\cdot,t))^*} K_{E_0,E_1}(x,t) \leqslant \|l\|_{(E_0,K_{E_0,E_1}(\cdot,t))^*}\|x\|_0,$$

а для каждого $x \in E_1$ выполнены неравенства

$$l(x) \leqslant \|l\|_{(E_0,K_{E_0,E_1}(\cdot,t))^*} K_{E_0,E_1}(x,t) \leqslant \|l\|_{(E_0,K_{E_0,E_1}(\cdot,t))^*} t\|x\|_1.$$

Таким образом, $\|l\|_{E_0^*} \leqslant \|l\|_{(E_0,K_{E_0,E_1}(\cdot,t))^*}$ и $\|l\|_{E_1^*} \leqslant t\|l\|_{(E_0,K_{E_0,E_1}(\cdot,t))^*}$. Лемма доказана. □

Отсюда получаем совпадение двух интерполяционных функционалов.

Следствие 1.3.5. *Для каждого $t > 0$ и для каждого $x \in E_0$ верно равенство $K_{E_0,E_1}(x,t) = \sigma_{E_0,E_1}(x,t)$.*

Доказательство. Действительно,

$$K_{E_0,E_1}(x,t) = \sup\{l(x)\colon l \in E_0^*, \|l\|_{(E_0,K_{E_0,E_1}(\cdot,t))^*} \leqslant 1\} = \\ = \sup\{l(x)\colon l \in E_0^*, \|l\|_t^* \leqslant 1\} = \sigma_{E_0,E_1}(x,t).$$

Следствие доказано. □

Кроме того, получаем альтернативное определение интерполяционных пространств.

Следствие 1.3.6. *Пространство $(E_0,E_1)_{\alpha,\theta}$, $\alpha \in (0,1), \theta \in [1,\infty]$, состоит из всех таких векторов $x \in E_0$, для которых конечна величина*

$$\|x\|_{\alpha,\theta} := \Big(\int_0^{+\infty} \big[t^{-\alpha}\sigma_{E_0,E_1}(x,t)\big]^\theta t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta},$$

причем $\|\cdot\|_{\alpha,\theta}$ совпадает с нормой $\|\cdot\|_{(E_0,E_1)_{\alpha,\theta}}$.

Замечание 1.3.7. Следствие 1.3.6 в означает, что вектор $x \in E_0$ принадлежит пространству $(E_0,E_1)_{\alpha,\infty}$ тогда и только тогда, когда найдется такое число $C > 0$, что для каждого функционала $l \in E_0^*$ выполнено неравенство

$$l(x) \leqslant C\|l\|_{E_0^*}^{1-\alpha}\|l\|_{E_1^*}^{\alpha},$$

а норма на пространстве $(E_0,E_1)_{\alpha,\infty}$ совпадает с

$$\|x\|_{\alpha,\infty} := \sup_{l\in E_0^*} \frac{l(x)}{\|l\|_{E_0^*}^{1-\alpha}\|l\|_{E_1^*}^{\alpha}}.$$

Отметим, что близким объектом является так называемая минимальная шкала пространств E_α (см. [29, стр. 263], [28] и [17]), каждое из которых определено, как пополнение пространства E_1 по норме $\|\cdot\|_{\alpha,\infty}$.

Пример 1.3.8. Посмотрим, какой вид примет интерполяционный функционал σ_{E_0,E_1} в случае, когда $E_0 = L^p(\mathbb{R}^k)$, $E_1 = W^{1,p}(\mathbb{R}^k)$. Как известно (см.

[48, стр. 63–64]), для каждого функционала l на пространстве $W^{1,p}(\mathbb{R}^k)$ найдутся такие функции $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k \in L^{p'}(\mathbb{R}^k)$, что

$$l(\varrho) = \int_{\mathbb{R}^k} \Phi_0(x)\varrho(x)\,dx + \sum_{j=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^k} \Phi_j(x)\partial_j\varrho(x)\,dx \tag{1.3.1}$$

для каждой функции $\varrho \in W^{1,p}(\mathbb{R}^k)$, где $\partial_j\varrho$ — соболевская производная функции ϱ. Кроме того, норма $\|l\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R}^k))^*}$ эквивалентна

$$\inf\bigl\{\|\Phi_0\|_{p'} + \|\Phi\|_{p'}\bigr\},$$

где $\Phi := (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$ и где инфимум берется по всевозможным наборам функций $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k \in L^{p'}(\mathbb{R}^k)$, для которых выполнено тождество (1.3.1). Так как каждый функционал l на $L^p(\mathbb{R}^k)$ задается интегралом с некоторой функцией $u \in L^{p'}(\mathbb{R}^k)$ то, проинтегрировав по частям в $(1.3.1)$ для всех гладких функций ϱ, получаем $u = \Phi_0 - \operatorname{div}\Phi$, где $\operatorname{div}\Phi$ понимается в смысле обобщенных функций. Отсюда

$$\begin{aligned}&\sigma_{L^p(\mathbb{R}^k),W^{1,p}(\mathbb{R}^k)}(\varrho,t) = \\ &= \sup\Bigl\{\int_{\mathbb{R}^k} \varrho\cdot[\Phi_0 - \operatorname{div}\Phi]\,dx\colon \|\Phi_0 - \operatorname{div}\Phi\|_{p'} \leqslant 1, \|\Phi_0\|_{p'} + \|\Phi\|_{p'} \leqslant t\Bigr\},\end{aligned}$$

что является некоторым аналогом определения 1.2.2. Отметим, что добавок Φ_0 появился из-за того, что при интерполяции мы использовали всю норму пространства $W^{1,p}(\mathbb{R}^k)$, а не полунорму $[\,\cdot\,]_{W^{1,p}(\mathbb{R}^k)}$.

Глава 2

Модули непрерывности и классы Никольского – Бесова на пространствах с гауссовскими мерами

2.1 Меры и их образы, гауссовские меры

2.1.1 Понятия, связанные с общими мерами

Пусть $(E, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, μ — вероятностная мера на нем (т. е. $\mu(A) \geqslant 0\ \forall A \in \mathcal{A}$ и $\mu(E) = 1$). Пусть $(F, \mathcal{B})$ — некоторое другое измеримое пространство и пусть $f\colon E \to F$ — измеримое отображение относительно σ-алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (в вероятностных терминах — случайный элемент, см. [47, стр. 251, определение 1]). Образом вероятностной меры μ при отображении f называется (см. [9, Раздел 3.6]) такая вероятностная мера $\mu \circ f^{-1}$, определенная на σ-алгебре $\mathcal{B}$, что

$$\mu \circ f^{-1}(B) := \mu(x \in E\colon f(x) \in B) \quad \forall B \in \mathcal{B}. \tag{2.1.1}$$

Мера $\mu \circ f^{-1}$ также иногда называется индуцированной отображением f. Напомним (см. [9, Теорема 3.6.1], [47, стр. 274, теорема 7]), что для образа меры справедлива следующая формула замены меры:

$$\int_E U(f(x))\,\mu(dx) = \int_F U(y)\,\mu \circ f^{-1}(dy),$$

если хотя бы одна из частей имеет смысл. В дальнейшем нас в основном будет интересовать ситуация, когда $F = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ — борелевская

σ-алгебра на $\mathbb{R}^k$. В этом случае отображение f также называется случайным вектором на вероятностном пространстве $(E, \mathcal{A}, \mu)$, а мера $\mu \circ f^{-1}$ — распределением этого случайного вектора f (см. [47, стр. 252]).

Говорят, что мера μ на $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ имеет плотность ϱ_μ (относительно меры Лебега), если $\varrho_\mu \in L^1(\mathbb{R}^k)$ и

$$\mu(B) = \int_B \varrho_\mu(x)\, dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k).$$

Меры, заданные плотностями, также называют абсолютно непрерывными относительно меры Лебега.

Для краткости везде далее, если это не вызывает путаницы, норму в пространстве $L^p(\mu)$ будем обозначать символом $\|\cdot\|_p$, т. е.

$$\|f\|_p := \|f\|_{L^p(\mu)} := \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}$$

для функции $f \in L^p(\mu)$. Кроме того,

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} |f(x)|.$$

2.1.2 Гауссовские меры и пространство Камерона – Мартина

Пусть E — вещественное хаусдорфово локально выпуклое пространство с топологическим сопряженным E^*. Неотрицательная борелевская мера μ на E называется радоновской, если для каждого борелевского множества $B \subset X$ и для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $K \subset B$, что $\mu(B \setminus K) < \varepsilon$. Вероятностная радоновская мера γ на E называется центрированной гауссовской мерой, если каждый функционал $\ell \in E^*$ либо равен нулю γ-п.в., либо его распределение задано плотностью вида

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\Big(-\frac{s^2}{2a^2}\Big), \quad a \in \mathbb{R},$$

т. е.

$$\gamma(x\colon \ell(x) \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\Big(-\frac{s^2}{2a^2}\Big)\, ds.$$

Далее считаем, что γ — центрированная радоновская гауссовская мера на E.

Пространство Камерона – Мартина $H(\gamma) \subset E$ меры γ состоит из всех таких векторов $h \in E$, что $|h|_{H(\gamma)} < \infty$, где

$$|h|_{H(\gamma)} = \sup\Big\{\ell(h)\colon \int_E \ell^2\, d\gamma \leqslant 1,\ \ell \in E^*\Big\}.$$

Норму $|\cdot|_{H(\gamma)}$ на H называют нормой Камерона – Мартина (см. [8, §2.1 и §2.3]).

Приведем несколько стандартных примеров гауссовских мер и их пространств Камерона – Мартина (см. [8, §2.2]).

Пример 2.1.1.

(i) Стандартная гауссовская мера γ_n на $\mathbb{R}^n$: мера γ_n задана плотностью

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{2}\Big)$$

относительно меры Лебега. В этом случае $H(\gamma_n) = \mathbb{R}^n$, $|h|_{H(\gamma_n)} = |h|$ — обычная евклидова норма на $\mathbb{R}^n$. Такая мера задает распределение случайного вектора с независимыми стандартными нормальными (гауссовскими) компонентами $\mathcal{N}(0,1)$.

(ii) Счетное произведение одномерных стандартных гауссовских мер: мера γ задана на пространстве $E = \mathbb{R}^\infty$ и для каждого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство

$$\gamma(B \times \mathbb{R}^\infty) := \gamma_n(B).$$

В этом случае $H(\gamma) = \ell^2$ и $|h|_{H(\gamma)} = \Big(\sum\limits_{j=1}^{\infty} h_j^2\Big)^{1/2}$. Такая мера соответствует последовательности независимых стандартных нормальных случайных величин.

(iii) Мера Винера P^W — такая центрированная гауссовская мера на пространстве $C_0[0,1]$ всех непрерывных функций, равных нулю в точке ноль, что $\mathbb{E}[x(t)x(s)] = \min(t,s)\ \forall\, t,s \in [0,1]$. В этом случае (см. [8, Лемма 2.2.10]) пространство Камерона – Мартина $H(P^W) = W_0^{1,2}[0,1]$, где $W_0^{1,2}[0,1]$ — пространство всех абсолютно непрерывных функций на $[0,1]$, чья производная интегрируема в квадрате и значение в нуле равно нулю (пространство Соболева на отрезке). Кроме того, $|h|_{H(P^W)} = \|h'\|_{L^2[0,1]}$. Мера Винера задает распределение Винеровского процесса.

Отметим, что для произвольной радоновской гауссовской меры γ пространство Камерона – Мартина всегда будет сепарабельным гильбертовым пространством (см. [8, Теорема 3.2.6 и Предложение 2.3.6]). Скалярное произведение в пространстве Камерона – Мартина $H(\gamma)$ будем обозначать символом $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H(\gamma)}$.

Элементы пространства $E^*_\gamma := (\overline{E^*}, \|\cdot\|_{L^2(\gamma)})$, где $\overline{E^*}$ — замыкание пространства E^* в $L^2(\gamma)$, и элементы пространства Камерон – Мартина $H(\gamma)$ находятся в двойственности (см. [8, §2.1, §2.3 и §3.2]), в частности для каждого функционала $\ell \in \overline{E^*}$ найдется такой элемент $h_\ell \in H(\gamma)$, что для каждого $q \in \overline{E^*}$

$$q(h_\ell) = \ell(h_q) = \langle h_\ell, h_q \rangle_{H(\gamma)} = \int_E \ell(x) q(x)\, \gamma(dx)$$

и наоборот, для каждого $h \in H(\gamma)$ найдется функционал $\ell := \ell_h \in \overline{E^*}$, для которого $h = h_\ell$. Кроме того, для каждой ортонормированной системы $\{\ell_i\}_{i=1}^\infty \subset E^*_\gamma$ в $L^2(\gamma)$ найдется такая ортонормированная система векторов $\{e_i\}_{i=1}^\infty \subset H(\gamma)$, что

$$\ell_i(e_j) = \begin{cases} 1, \, i = j \\ 0, \, i \neq j. \end{cases}$$

Если же $\{\ell_i\}_{i=1}^\infty$ — ортонормированный базис в E^*_γ, то соответствующая система $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ будет ортонормированным базисом в $H(\gamma)$. Из определения центрированной гауссовской меры и свойств гауссовских случайных векторов (см., например, замечание на стр. 415 в [47]) ясно, что для ортонормированного в $L^2(\gamma)$ набора $\ell_1, \ldots, \ell_n \subset E^*$ распределение случайного вектора $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ совпадает с мерой γ_n из примера 2.1.1 (i).

2.1.3 Пространство пробных функций, пространства Соболева по гауссовской мере, полугруппа и оператор Орнштейна–Уленбека

Пространство $\mathcal{FC}^\infty$ состоит из всех таких функций φ, что существуют число $n \in \mathbb{N}$, функционалы $\ell_1, \ldots, \ell_n \in E^*$ и функция $\widetilde{\varphi} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(\ell_1(x), \ldots, \ell_n(x)). \tag{2.1.2}$$

Ясно, что, не ограничивая общности, систему $\{\ell_j\}_{j=1}^n$ в этом представлении можно считать ортонормированной в $L^2(\gamma)$ (естественно, с другой функцией $\widetilde{\varphi}$). В дальнейшем мы в основном так и будем делать.

Для функции $\varphi \in \mathcal{FC}^\infty$ вида $\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(\ell_1(x), \dots, \ell_n(x))$ определим ее градиент вдоль пространства Камерона – Мартина $H(\gamma)$ следующим образом:

$$D^1\varphi(x) = \nabla\varphi(x) = \sum_{j=1}^n (\partial_j\widetilde{\varphi})(\ell_1(x), \dots, \ell_n(x))h_{\ell_j}.$$

Ясно, что, в силу описанной выше двойственности, для каждого вектора $h \in H(\gamma)$ выполнены равенства

$$\langle \nabla\varphi(x), h\rangle_{H(\gamma)} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x+th) - \varphi(x)}{t} = \partial_h\varphi(x)$$

и определение не зависит от выбора представления функции φ через функцию $\widetilde{\varphi}$ и функционалы ℓ_j. Отметим, что для гауссовской меры γ верна следующая формула интегрирования по частям (см. [8, Предложение 5.1.6]):

$$\int_E \partial_h\varphi \, d\gamma = \int_E \varphi \, \ell_h \, d\gamma, \quad \forall\varphi \in \mathcal{FC}^\infty.$$

Пространство Соболева $W^{1,p}(\gamma)$, определяется (см. [8, §5.2]), как пополнение пространства $\mathcal{FC}^\infty$ по норме

$$\|\varphi\|_{W^{1,p}(\gamma)} := \|\varphi\|_p + \|\nabla\varphi\|_p,$$

где $\|\nabla\varphi\|_p := \||\nabla\varphi|_{H(\gamma)}\|_p$. Таким образом, для каждой Соболевской функции $f \in W^{1,p}(\gamma)$ ее Соболевский градиент $\nabla f\colon E \to H(\gamma)$ определен как предел градиентов функций класса $\mathcal{FC}^\infty$, приближающих f по Соболевской норме.

Пусть $\mathcal{FC}^\infty(E, H)$ — пространство всех отображений (векторных полей) $\Phi\colon E \to H(\gamma)$ вида

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(x)h_j, \tag{2.1.3}$$

где $\Phi_j \in \mathcal{FC}^\infty$, $h_j \in H(\gamma)$. Пусть $\operatorname{div}_\gamma$ задает на $\mathcal{FC}^\infty(E, H)$ «двойственный» оператор к оператору градиента ∇ относительно меры γ, т. е.

$$\int_E \varphi \cdot \operatorname{div}_\gamma\Phi \, d\gamma = -\int_E \langle \nabla\varphi, \Phi\rangle_{H(\gamma)} \, d\gamma.$$

для произвольных $\Phi \in \mathcal{FC}^\infty(E,H)$ и $\varphi \in \mathcal{FC}^\infty$ (в частности, предельным переходом получаем, что аналогичная формула справедлива и для функций $\varphi \in W^{1,p}(\gamma)$). Несложно проверить, что

$$\operatorname{div}_\gamma \Phi(x) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_{h_j} \Phi_j - \ell_{h_j} \cdot \Phi_j)$$

для векторного поля $\Phi \in \mathcal{FC}^\infty(X,H)$ вида (2.1.2).

Для функции $f \in L^1(\gamma)$ полугруппа Орнштейна – Уленбека (см. [8, §2.8], [90, §1.4.1]) задается равенством

$$T_t f(x) := \int_E f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\,\gamma(dy).$$

Важным свойством полугруппы T_t является ее симметричность:

$$\int_E f \cdot T_t g\, d\gamma = \int_E T_t f \cdot g\, d\gamma \quad \forall f \in L^p(\gamma),\ g \in L^{p'}(\gamma).$$

Пусть L — генератор полугруппы Орнштейна – Уленбека, рассматриваемой на пространстве $L^2(\gamma)$. Оператор L называется оператором Орнштейна – Уленбека (см. [8, §5.2], [90, §1.4.2]) и для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{FC}^\infty$ имеет место следующее соотношение (см. [61, Замечание 5.8.7] или [90, Предложение 1.4.3]):

$$L\varphi(x) = \operatorname{div}_\gamma \nabla \varphi. \tag{2.1.4}$$

Кроме того, действие оператора L на функцию $\varphi \in \mathcal{FC}^\infty$ вида (2.1.2) с ортонормированными в $L^2(\gamma)$ функционалами ℓ_j задается равенством

$$L\varphi(x) = (\Delta\widetilde{\varphi})(\ell_1(x),\dots,\ell_n(x)) - \sum_{j=1}^{n} \ell_j(x)(\partial_j\widetilde{\varphi})(\ell_1(x),\dots,\ell_n(x)).$$

Пример 2.1.2. Пусть $\gamma = \gamma_n$ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$. В этом случае $\mathcal{FC}^\infty = C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ и для $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ее градиент вдоль пространства Камерона – Мартина $H(\gamma) = \mathbb{R}^n$ совпадает с обычным градиентом функции $\nabla\varphi = (\partial_1\varphi,\dots,\partial_n\varphi)$. Кроме того, в этом случае пространство $\mathcal{FC}^\infty(X,H) = C_b^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{div}_{\gamma_n}\Phi = \operatorname{div}\Phi - \langle x,\Phi\rangle$ для $\Phi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Наконец, для $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполнено $L\varphi = \Delta\varphi - \langle x, \nabla\varphi\rangle$.

В дальнейшем иногда будет удобно свести рассуждения к стандартной гауссовской мере γ_n. Для этого в общем случае зафиксируем ортонормированный базис $\{\ell_j\} \subset X^*$ в E^*_γ. Для функции $f \in L^1(\gamma)$ и для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим ее условное математическое ожидание $\mathbb{E}(f|\ell_1, \ldots, \ell_n)$, относительно σ-алгебры, порожденной функционалами $\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$, т. е. (см. [9, §10.1])

$$\int_E \psi(\ell_1, \ldots, \ell_n)\mathbb{E}(f|\ell_1, \ldots, \ell_n)\, d\gamma = \\ = \int_E \psi\big(\ell_1(x), \ldots, \ell_n(x)\big) f(x)\, \gamma(dx) \quad \forall\, \psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Заметим, что распределение случайного вектора $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ совпадает со стандартной гауссовской мерой γ_n на $\mathbb{R}^n$ и условное математическое ожидание $\mathbb{E}(f|\ell_1, \ldots, \ell_n)$ имеет вид $\widetilde{f}_n(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ для некоторой функции $\widetilde{f}_n \in L^1(\gamma_n)$. Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi \widetilde{f}_n\, d\gamma_n = \int_E \psi\big(\ell_1(x), \ldots, \ell_n(x)\big) f(x)\, \gamma(dx) \quad \forall\, \psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Известно (см. [9, §10.2], [8, §3.4]), что для всякой функции $f \in L^p(\gamma)$ верно следующее свойство:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \widetilde{f}_n(\ell_1, \ldots, \ell_n)\|_p \to 0.$$

Определим также следующие функции $C(p)$ и c_t, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$C(p) := \Big((2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} |s|^p e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds\Big)^{1/p} \quad \text{и} \quad c_t := \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{1 - e^{-2\tau}}}\, d\tau.$$

Отметим, что

$$\frac{e^{-\tau}}{\sqrt{1 - e^{-2\tau}}} \leqslant (2\tau)^{-1/2}, \quad c_t \leqslant (2t)^{1/2}, \quad \lim_{t\to\infty} c_t = \pi/2. \tag{2.1.5}$$

2.1.4 Измеримые многочлены по гауссовской мере и многочлены Эрмита

Пространство $\mathcal{P}_d(\gamma)$ измеримых многочленов степени не выше d определим, как замыкание в $L^2(\gamma)$ множества всех функций g вида

$$g(x) = P(\ell_1(x), \ldots, \ell_n(x)),\ \ell_1, \ldots, \ell_n \in E^*,\ n \in \mathbb{N},$$

где P — произвольный многочлен степени не выше d на $\mathbb{R}^n$. Отметим, что $\mathcal{P}_d(\gamma) \subset L^p(\gamma)$ для каждого $p \in [1, \infty)$. Кроме того, на пространстве $\mathcal{P}_d(\gamma)$ эквивалентны все L^p-нормы (см. [61, Следствие 5.5.4]) и они также эквивалентны всем соболевским нормам (см. [61, Следствие 5.5.5]). В частности, в определении множества $\mathcal{P}_d(\gamma)$ можно рассматривать замыкание относительно сходимости по мере (или в $L^p(\gamma)$) вместо замыкания по норме пространства $L^2(\gamma)$ (см. [8, Следствие 5.6.5]). При этом получались бы те же самые пространства.

Пусть $\mathcal{H}_d(\gamma)$ — ортогональное дополнение множества $\mathcal{P}_{d-1}(\gamma)$ до множества $\mathcal{P}_d(\gamma)$ в $L^2(\gamma)$. Заметим, что $\mathcal{H}_0(\gamma)$ — пространство всех постоянных функций. Множество $\mathcal{H}_d(\gamma)$ называется винеровским хаосом порядка d, а его элементы называются либо элементами этого винеровского хаоса, либо многочленами Эрмита степени (или порядка) d. Пространство $L^2(\gamma)$ представляется в виде прямой суммы $L^2(\gamma) = \bigoplus\limits_{d=0}^{\infty} \mathcal{H}_d(\gamma)$ (см. [8, Разделы 1.3 и 2.8] или [90, Раздел 1.1]). Важное для приложений свойство множества $\mathcal{H}_d(\gamma)$ заключается в том, что в случае меры Винера $\gamma = P^W$ на $C_0[0,1]$, множество $\mathcal{H}_d(P^W)$ оказывается областью значений кратного стохастического интеграла Ито для симметричной функции $\eta \in L^2([0,1]^d)$:

$$d! \int_0^1 \int_0^{t_d} \dots \int_0^{t_2} \eta(t_1, \dots, t_d)\, dW_{t_1} \dots dW_{t_d} \in \mathcal{H}_d(P^W)$$

и каждый элемент множества $\mathcal{H}_d(P^W)$ представим в таком виде (см. [90, Предложение 1.1.4 и обсуждение на стр. 23]).

Отметим, что $\mathcal{H}_d(\gamma)$ — собственное подпространство для оператора Орнштейна – Уленбека L (см., например, [8, Теорема 5.2.1]), т. е. для каждой функции $g \in \mathcal{H}_d(\gamma)$ выполнено тождество

$$Lg = -dg.$$

Кроме того, полугруппа Орнштейна – Уленбека действует на $\mathcal{H}_d(\gamma)$ следующим образом (см., например, [8, Теорема 1.4.4]): $\forall g \in \mathcal{H}_d(\gamma)$ верно равенство

$$T_t g = e^{-kt} g.$$

Пусть действие оператора $I_d\colon L^p(\gamma) \to \mathcal{H}_d$ на функцию $f \in L^p(\gamma)$ задано соотношением

$$\int_E fg\,d\gamma = \int_E I_d(f)g\,d\gamma,\ \forall g \in \mathcal{H}_d.$$

Для функции $f \in L^2(\gamma)$ оператор $I_d(f)$ совпадает с ортогональной проекцией в $L^2(\gamma)$ функции f на подпространство $\mathcal{H}_d$. Отметим, что при $p \in (1,\infty)$ оператор I_d — ограниченный оператор в пространстве $L^p(\gamma)$ (см. [8, следствие 5.5.4] или [90, стр. 63]).

2.2 Модули непрерывности на пространствах с гауссовскими мерами

В этом параграфе, развивая идеи главы 1, с помощью действия функции f на $\operatorname{div}_\gamma\Phi$ определяется гауссовский модуль непрерывности $\sigma_{\gamma,p}(f,\cdot)$, являющийся аналогом модуля непрерывности $\sigma_p(f,\cdot)$, определенного ранее на пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. определение 1.2.2). Кроме того, в случае $p > 1$ доказывается его эквивалентность интерполяционному функционалу $K_{L^p(\gamma),W^{1,p}(\gamma)}(f,\cdot)$ и еще одному введенному модулю непрерывности $a_{\gamma,p}(f,\cdot)$, в некотором смысле заменяющему ω_p. Отметим, что, в отличие от классической ситуации в пространстве $\mathbb{R}^n$, в случае гауссовской меры возникают проблемы со сдвигами функций, так как сдвиг функции из $L^p(\gamma)$ может уже не принадлежать пространству $L^p(\gamma)$.

Пример 2.2.1. Рассмотрим на $\mathbb{R}$ функцию $f_p(x) = \frac{1}{1+x^2}\exp(\frac{x^2}{2p})$. Тогда $f_p \in L^p(\gamma_1)$, но функция $g_p(x) := f_p(x+1)$ уже не принадлежит $L^p(\gamma)$.

Перейдем к сравнению модулей непрерывности. Напомним, $p' := \frac{p}{p-1}$ при $p \in (1,\infty)$ и $p' := \infty$ при $p = 1$.

Определение 2.2.2. *Пусть $f \in L^p(\gamma)$. Положим*

$$\sigma_{\gamma,p}(f,\varepsilon) := \sup\Big\{\int_E f\operatorname{div}_\gamma\Phi\,d\gamma\colon \Phi \in \mathcal{FC}^\infty(X,H), \|\operatorname{div}_\gamma\Phi\|_{p'} \leqslant 1, \|\Phi\|_{p'} \leqslant \varepsilon\Big\},$$

где $\|\Phi\|_{p'} := \||\Phi|_{H(\gamma)}\|_{p'}$.

Лемма 2.2.3. *Пусть $f \in L^p(\gamma)$. Тогда функция $\sigma_{\gamma,p}(f,\cdot)$ является неубывающей, субаддитивной, вогнутой и непрерывной на интервале $(0,+\infty)$.*

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.2.4. □

Определение 2.2.4. *Для функции $f \in L^p(\gamma)$, положим*

$$a_{\gamma,p}(f,t) := \Big(\iint\limits_{E\times E} \big|f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y)-f(x)\big|^p\,\gamma\otimes\gamma(dxdy)\Big)^{1/p}.$$

Отметим, что $\|f-T_tf\|_p \leqslant a_{\gamma,p}(f,t)$. В некотором смысле на функцию $a_{\gamma,p}(f,\cdot)$, использующую в своем определении сдвиги функции f, можно смотреть как на гауссовскую замену конечномерного модуля непрерывности $\omega_p(f,\cdot)$. Функция $a_{\gamma,p}(f,\cdot)$ рассматривалась в работе [53] при изучении эквивалентных определений гауссовского пространства функций ограниченной вариации. Покажем субаддитивность $a_{\gamma,p}(f,\cdot)$.

Лемма 2.2.5. *Функция $a_{\gamma,p}(f,\cdot)$ — субаддитивна.*

Доказательство. Заметим (см., например, [8, стр. 18]), что гауссовская мера γ совпадает с образом меры $\gamma\otimes\gamma$ при отображении

$$(u,v) \mapsto e^{-s}\frac{\sqrt{1-e^{-2t}}}{\sqrt{1-e^{-2t-2s}}}\,u + \frac{\sqrt{1-e^{-2s}}}{\sqrt{1-e^{-2t-2s}}}\,v.$$

Поэтому, для произвольных $s,t>0$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
&\Big(\iint\limits_{E\times E} \big|f(e^{-t-s}x+\sqrt{1-e^{-2t-2s}}y)-f(x)\big|^p\,\gamma\otimes\gamma(dxdy)\Big)^{1/p} = \\
&= \Big(\iiint\limits_{E\times E\times E} \big|f(e^{-t-s}x+e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}u+\sqrt{1-e^{-2s}}v)-f(x)\big|^p\gamma\otimes\gamma\otimes\gamma(dxdudv)\Big)^{1/p} \\
&\qquad \leqslant \Big(\iiint\limits_{E\times E\times E} \big|f(e^{-t-s}x+e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}u+\sqrt{1-e^{-2s}}v)- \\
&\qquad - f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}u)\big|^p\,\gamma\otimes\gamma\otimes\gamma(dxdudv)\Big)^{1/p} + \\
&\qquad\quad + \Big(\iint\limits_{E\times E} \big|f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}u)-f(x)\big|^p\,\gamma\otimes\gamma(dxdu)\Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Второй интеграл совпадает с $a_{\gamma,p}(f,t)$. Заметим (см., например, [8, стр. 18]), что гауссовская мера γ будет образом меры $\gamma\otimes\gamma$ при отображении

$$(x,u)\mapsto e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}u,$$

поэтому первый интеграл равен

$$\Big(\iint\limits_{E\times E}\big|f(e^{-s}z+\sqrt{1-e^{-2s}}v)-f(z)\big|^p\,\gamma\otimes\gamma(dzdv)\Big)^{1/p}=a_{\gamma,p}(f,s).$$

Таким образом, получена оценка $a_{\gamma,p}(f,t+s)\leqslant a_{\gamma,p}(f,s)+a_{\gamma,p}(f,t)$, что и означает субаддитивность. Лемма доказана. □

Замечание 2.2.6. Отметим, что модуль непрерывности $a_{\gamma,p}(f,\cdot)$ удобен при рассмотрении композиций $u\circ f$ для липшицевых функций u, так как в силу определения

$$a_{\gamma,p}(u\circ f,t)\leqslant \mathrm{Lip}(u)\cdot a_{\gamma,p}(f,t),$$

где $\mathrm{Lip}(u)$ — константа Липшица функции u.

Определение 2.2.7. *Для функции $f\in L^p(\gamma)$, положим*

$$K_{\gamma,p}(f,t):=\inf\big\{\|f_0\|_p+t\|\nabla f_1\|_p\colon f=f_0+f_1,\,f_0\in L^p(\gamma),\,f_1\in W^{1,p}(\gamma)\big\}.$$

Замечание 2.2.8. Отметим, что

$$K_{\gamma,p}(f,t)\leqslant K_{L^p(\gamma),W^{1,p}(\gamma)}(f,t)\leqslant(1+t)K_{\gamma,p}(f,t).$$

Начнем со следующей вспомогательной леммы в случае стандартной гауссовской меры на $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2.2.9. *Пусть γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$. Тогда для всякой функции $f\in L^p(\gamma_n)$ при $p\in[1,\infty)$ выполнено неравенство*

$$a_{\gamma_n,p}(f,t)\leqslant 2\sigma_{\gamma_n,p}(f,2^{-1}C(p)c_t).$$

Доказательство. Для всякой функции $\varphi\in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ верны следующие тождества:

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}}\varphi(x,y)[f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y)-f(x)]\,\gamma_n\otimes\gamma_n(dxdy)=$$

$$=\iint_{\mathbb{R}^{2n}}f(u)\big[\varphi(e^{-t}u-\sqrt{1-e^{-2t}}v,\sqrt{1-e^{-2t}}u+e^{-t}v)-\varphi(u,v)\big]\,\gamma_n(dv)\gamma_n(du)$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}f(u)\Big[\int_0^t\partial_s g_s(u)\,ds\Big]\,\gamma_n(du),$$

где

$$g_s(u) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(e^{-s}u - \sqrt{1-e^{-2s}}v, \sqrt{1-e^{-2s}}u + e^{-s}v)\,\gamma_n(dv)$$

и где при первом переходе был использован тот факт, что при замене $u = e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y$, $v = -\sqrt{1-e^{-2t}}x + e^{-t}y$ гауссовская мера $\gamma_n \otimes \gamma_n$ переходит в себя. Пусть $r(s) := \frac{e^{-s}}{\sqrt{1-e^{-2s}}}$. Заметим теперь, что для каждой функции $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ мы имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \psi(u)\partial_s g_s(u)\,\gamma_n(du) = \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(u)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(e^{-s}u-\sqrt{1-e^{-2s}}v, \sqrt{1-e^{-2s}}u+e^{-s}v)\,\gamma_n(dv)\,\gamma_n(du) = \\
&\qquad = \frac{\partial}{\partial s}\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(x,y)\psi(e^{-s}x + \sqrt{1-e^{-2s}}y)\,\gamma_n\otimes\gamma_n(dxdy) = \\
&= r(s)\iint_{\mathbb{R}^{2n}}\varphi(x,y)\langle\nabla\psi(e^{-s}x+\sqrt{1-e^{-2s}}y), e^{-s}y-\sqrt{1-e^{-2s}}x\rangle\gamma_n\otimes\gamma_n(dxdy) \\
&= r(s)\int_{\mathbb{R}^n}\Big\langle\nabla\psi(u), \int_{\mathbb{R}^n} v\varphi(e^{-s}u-\sqrt{1-e^{-2s}}v, \sqrt{1-e^{-2s}}u+e^{-s}v)\gamma_n(dv)\Big\rangle\gamma_n(du) \\
&\qquad = -\int_{\mathbb{R}^n}\psi(u)\,\mathrm{div}_{\gamma_n}G_s(u)\,\gamma_n(du),
\end{aligned}$$

где

$$G_s(u) := \frac{e^{-s}}{\sqrt{1-e^{-2s}}}\int_{\mathbb{R}^n} v\varphi(e^{-s}u - \sqrt{1-e^{-2s}}v, \sqrt{1-e^{-2s}}u + e^{-s}v)\,\gamma_n(dv).$$

Заметим, что $G_s \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Таким образом,

$$\partial_s g_s(u) = \mathrm{div}_\gamma\big(-G_s(u)\big),$$

а также

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\Big[\int_0^t \partial_s g_s\,ds\Big]\,d\gamma_n = \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\mathrm{div}_{\gamma_n}\Big(-\int_0^t G_s\,ds\Big)\,d\gamma_n.$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_{\gamma_n}\Big(-\int_0^t G_s\,ds\Big) &= \int_0^t \mathrm{div}_{\gamma_n}\big(-G_s\big)\,ds = \int_0^t \partial_s g_s(u)\,ds = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\varphi(e^{-t}u - \sqrt{1-e^{-2t}}v, \sqrt{1-e^{-2t}}u + e^{-t}v) - \varphi(u,v)\right]\gamma_n(dv),
\end{aligned}$$

откуда получаем, что

$$\Big\|\mathrm{div}_{\gamma_n}\Big(-\int_0^t G_s\,ds\Big)\Big\|_{p'}\leqslant 2\|\varphi\|_{L^{p'}(\gamma_n\otimes\gamma_n)}.$$

Кроме того,

$$\Big\|\int_0^t G_s\,ds\Big\|_{p'}\leqslant\int_0^t\big\|G_s\big\|_{p'}\,ds,$$

и остается только оценить $\big\|G_s\big\|_{p'}$. Чтобы это сделать, заметим, что для произвольного векторного поля $\Psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ мы имеем

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\langle\Psi,G_s\rangle\,d\gamma_n=\\ =&r(s)\iint_{\mathbb{R}^{2n}}\langle\Psi(u),v\rangle\varphi(e^{-s}u-\sqrt{1-e^{-2s}}v,\sqrt{1-e^{-2s}}u+e^{-s}v)\,\gamma_n(dv)\gamma_n(du)\\ &\leqslant r(s)\|\varphi\|_{L^{p'}(\gamma_n\otimes\gamma_n)}\Big(\iint_{\mathbb{R}^{2n}}|\langle\Psi(u),v\rangle|^p\,\gamma_n(dv)\gamma_n(du)\Big)^{1/p}\leqslant\\ &\leqslant r(s)C(p)\|\varphi\|_{L^{p'}(\gamma_n\otimes\gamma_n)}\|\Psi\|_p,\end{aligned}$$

где воспользовались тем, что

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\langle\Psi(u),v\rangle|^p\,\gamma_n(dv)=|\Psi(u)|^p(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}|s|^pe^{-\frac{s^2}{2}}\,ds.$$

Поэтому

$$\big\|G_s\big\|_{p'}\leqslant C(p)\frac{e^{-s}}{\sqrt{1-e^{-2s}}}\|\varphi\|_{L^{p'}(\gamma_n\otimes\gamma_n)},$$

и

$$\Big\|\int_0^t G_s\,ds\Big\|_{p'}\leqslant\int_0^t\big\|G_s\big\|_{p'}\,ds\leqslant C(p)c_t\|\varphi\|_{L^{p'}(\gamma_n\otimes\gamma_n)}.$$

Следовательно, для всякой функции $\varphi\in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ с $\|\varphi\|_{L^{p'}(\gamma_n\otimes\gamma_n)}=1$ имеем

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^{2n}}\varphi(x,y)[f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y)-f(x)]\,\gamma_n\otimes\gamma_n(dxdy)=\\ &\quad=\int_{\mathbb{R}^n}f\cdot\Big[\int_0^t\partial_sg_s\,ds\Big]\,d\gamma_n=\int_{\mathbb{R}^n}f\cdot\mathrm{div}_{\gamma_n}\Big(-\int_0^tG_s\,ds\Big)\,d\gamma_n\leqslant\\ &\leqslant 2\sigma_{\gamma_n,p}(f,2^{-1}C(p)c_t).\end{aligned}$$

Взяв супремум по всем функциям $\varphi\in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ с $\|\varphi\|_{L^{p'}(\gamma_n\otimes\gamma_n)}=1$, приходим к сформулированной в лемме оценке. □

Перейдем к сравнению модулей непрерывности в гауссовском случае. Следующая теорема является гауссовским аналогом теоремы 1.2.6.

Теорема 2.2.10. *Для произвольной функции $f \in L^p(\gamma)$ при $p \in [1, \infty)$ и при каждом $t > 0$ выполнены неравенства*

$$a_{\gamma,p}(f, t^2) \leqslant 2\sqrt{2}C(p) \cdot \sigma_{\gamma,p}(f, t) \quad \text{и} \quad \sigma_{\gamma,p}(f, t) \leqslant K_{\gamma,p}(f, t).$$

Если $p > 1$, то при каждом $t > 0$ имеет место оценка:

$$K_{\gamma,p}(f, t) \leqslant \big(1 + C(p')\big) \cdot a_{\gamma,p}(f, t^2).$$

Доказательство. Для доказательства первой оценки в теореме зафиксируем ортонормированный базис $\{\ell_n\} \subset X^*$ в X^*_γ и пусть $\widetilde{f}_n(\ell_1, \ldots, \ell_n) = \mathbb{E}(f|\ell_1, \ldots, \ell_n)$ — условное математическое ожидание, относительно σ-алгебры, порожденной $\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$. По лемме 2.2.9

$$a_{\gamma_n,p}(\widetilde{f}_n, t) \leqslant 2\sigma_{\gamma_n,p}(\widetilde{f}_n, 2^{-1}C(p)c_t).$$

Кроме того, заметим, что для произвольного отображения $\widetilde{\Phi} \in C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, для которого $\|\widetilde{\Phi}\|_{L^{p'}(\gamma_n)} \leqslant \varepsilon$, $\|\mathrm{div}_{\gamma_n}\widetilde{\Phi}\|_{L^{p'}(\gamma_n)} \leqslant 1$, выполнены соотношения

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}_n \cdot \mathrm{div}_{\gamma_n}\widetilde{\Phi}\, d\gamma_n = \int_E f \cdot \mathrm{div}_\gamma \Phi\, d\gamma \leqslant \sigma_{\gamma,p}(f, \varepsilon),$$

где $\Phi := \sum\limits_{j=1}^{n} \widetilde{\Phi}_j(\ell_1, \ldots, \ell_n) h_{\ell_j}$. Таким образом,

$$a_{\gamma_n,p}(\widetilde{f}_n, t) \leqslant 2\sigma_{\gamma,p}(f, 2^{-1}C(p)c_t).$$

Теперь заметим, что так как $\widetilde{f}_n(\ell_1, \ldots, \ell_n) \to f$ в $L^p(\gamma)$, то

$$a_{\gamma_n,p}(\widetilde{f}_n, t) = a_{\gamma,p}(\widetilde{f}_n(\ell_1, \ldots, \ell_n), t) \to a_{\gamma,p}(f, t)$$

при $n \to \infty$, откуда

$$a_{\gamma,p}(f, t) \leqslant 2\sigma_{\gamma,p}(f, 2^{-1}C(p)c_t).$$

Напомним, что $c_t \leqslant \sqrt{2}\sqrt{t}$ (см. (2.1.5)). Применим теперь оценку (1.2.2) к неубывающей и субаддитивной функции $\sigma_{\gamma,p}(f, \cdot)$ (см. лемму 2.2.3):

$$\sigma_{\gamma,p}(f, 2^{-1}C(p)c_t) \leqslant \sigma_{\gamma,p}(f, 2^{-1}\sqrt{2}C(p)\sqrt{t}) \leqslant \sqrt{2}C(p)\sigma_{\gamma,p}(f, \sqrt{t}),$$

что завершает доказательство первого неравенства.

Для доказательства второй оценки заметим, что для каждого отображения $\Phi \in \mathcal{FC}^\infty(X,H)$, для которого $\|\mathrm{div}_\gamma \Phi\|_{p'} \leqslant 1$, $\|\Phi\|_{p'} \leqslant t$, для произвольного разложения $f = f_0 + f_1$, $f_0 \in L^p(\gamma)$, $f_1 \in W^{1,p}(\gamma)$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\int_E f \cdot \mathrm{div}_\gamma \Phi \, d\gamma &= \int_E f_0 \cdot \mathrm{div}_\gamma \Phi \, d\gamma + \int_E f_1 \cdot \mathrm{div}_\gamma \Phi \, d\gamma = \\ &= \int_E f_0 \cdot \mathrm{div}_\gamma \Phi \, d\gamma - \int_E \langle \nabla f_1, \Phi \rangle_{H(\gamma)} \, d\gamma \leqslant \\ &\leqslant \|f_0\|_p \|\mathrm{div}_\gamma \Phi\|_{p'} + \|\nabla f_1\|_p \|\Phi\|_{p'} \leqslant \|f_0\|_p + t\|\nabla f_1\|_p.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma_{\gamma,p}(f,t) \leqslant K_{\gamma,p}(f,t).$$

Перейдем к доказательству третьего утверждения. Пусть $f \in L^p(\gamma)$ для некоторого $p > 1$. Напомним (см. [61, Предложение 5.4.8]), что для каждого $t > 0$ имеет место включение $T_t f \in W^{1,p}(\gamma)$ и

$$\langle \nabla T_t f(x), h \rangle_{H(\gamma)} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \int_E f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) \langle h, y \rangle_{H(\gamma)} \, \gamma(dy).$$

Поэтому, при каждом $t > 0$ выполнено равенство $f = (f - T_t f) + T_t f$ и $T_t f \in W^{1,p}(\gamma)$. Заметим, что

$$\|f - T_t f\|_p \leqslant a_{\gamma,p}(f,t)$$

и для каждого векторного поля $\Phi \in \mathcal{FC}^\infty(X,H)$ выполнено тождество

$$\begin{aligned}&\int_E \langle \nabla T_t f, \Phi \rangle_{H(\gamma)} \, d\gamma = \\ &\qquad = \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \iint\limits_{E\times E} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) \langle \Phi(x), y \rangle_{H(\gamma)} \, \gamma(dy)\gamma(dx).\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\int_E f(x) \langle \Phi(x), y \rangle_{H(\gamma)} \, \gamma(dy) = 0$$

для произвольной фиксированной точки x, поэтому,

$$\int_E \langle \nabla T_t f, \Phi \rangle_{H(\gamma)}\, d\gamma =$$
$$= \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \iint\limits_{E\times E} \langle \Phi(x), y\rangle_{H(\gamma)} \left[f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) - f(x)\right] \gamma(dy)\gamma(dx) \leqslant$$
$$\leqslant t^{-1/2} a_{\gamma,p}(f,t) \Big(\iint\limits_{E\times E} |\langle \Phi(x), y\rangle_{H(\gamma)}|^{p'} \gamma(dy)\gamma(dx)\Big)^{1/p'} =$$
$$= C(p') t^{-1/2} a_{\gamma,p}(f,t) \|\Phi\|_{p'}.$$

В силу произвольности Φ получаем, что

$$\|\nabla T_t f\|_p \leqslant C(p') t^{-1/2} a_{\gamma,p}(f,t).$$

Взяв $t = s^2$, получаем, что

$$K_{\gamma,p}(f,s) \leqslant \|f - T_{s^2} f\|_p + s\|\nabla T_{s^2} f\|_p \leqslant$$
$$\leqslant a_{\gamma,p}(f,s^2) + C(p') a_{\gamma,p}(f,s^2) = (1 + C(p')) a_{\gamma,p}(f,s^2).$$

Теорема доказана. □

2.3 Эквивалентные определения пространств Бесова относительно гауссовских мер

Аналоги пространств Бесова в случае гауссовских мер были впервые исследованы в работе Ш. Ватанабе [103], в которой, в эквивалентных терминах, были рассмотрены интерполяционные пространства

$$\mathcal{E}^{\alpha}_{p,p}(\gamma) := \big(L^p(\gamma), W^{1,p}(\gamma)\big)_{\alpha,p}.$$

Более общим образом, определим пространство Бесова по гауссовской мере, как интерполяционное пространство между $L_p(\gamma)$ и $W^{1,p}(\gamma)$.

Определение 2.3.1. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $p \in [1,\infty)$, $\theta \in [1,\infty]$. *Тогда*

$$\mathcal{E}^{\alpha}_{p,\theta}(\gamma) := \big(L^p(\gamma), W^{1,p}(\gamma)\big)_{\alpha,\theta},$$

и

$$\|f\|_{\mathcal{E}^{\alpha}_{p,\theta}(\gamma)} := \Big(\int_0^{+\infty} \big[t^{-\alpha} K_{L^p(\gamma), W^{1,p}(\gamma)}(f,t)\big]^{\theta} t^{-1}\, dt\Big)^{1/\theta}.$$

Напомним, что, как это было оговорено в параграфе 1.3, мы используем соглашение, согласно которому при $\theta = +\infty$ в выражении выше интегральную θ-норму следует заменить на $\sup\limits_{t>0}$.

Также, по аналогии с классическим случаем, можно использовать введенные в предыдущем параграфе модули непрерывности $\sigma_{\gamma,p}(f,\cdot)$ и $a_{\gamma,p}(f,\cdot)$ для определения гауссовских пространств Бесова.

Определение 2.3.2. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $p \in [1,\infty)$, $\theta \in [1,\infty]$. Будем говорить, что функция $f \in L^p(\gamma)$ принадлежит гауссовскому пространству Бесова $B^\alpha_{p,\theta}(\gamma)$, если величина*

$$V^{p,\theta,\alpha}_\gamma(f) = \Big(\int_0^\infty \big[s^{-\alpha}\sigma_{\gamma,p}(f,s)\big]^\theta s^{-1}\,ds\Big)^{1/\theta}$$

конечна. Норма в пространстве $B^\alpha_{p,\theta}(\gamma)$ задается формулой

$$\|f\|_{B^\alpha_{p,\theta}(\gamma)} := \|f\|_p + V^{p,\theta,\alpha}_\gamma(f).$$

Заметим, что если в предыдущем определении взять $p = 1$, $\alpha = 1$, $\theta = +\infty$, то получится определение гауссовского пространства функций ограниченной вариации (см. [70], [71], [50], [51], [53]).

Определение 2.3.3. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $p \in [1,\infty)$, $\theta \in [1,\infty]$. Пусть для функции $f \in L^p(\gamma)$*

$$A^{p,\theta,\alpha}_\gamma(f) := \Big(\int_0^\infty \big[t^{-\alpha/2}a_{\gamma,p}(f,t)\big]^\theta t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta}.$$

Класс Бесова $\mathfrak{B}^\alpha_{p,\theta}(\gamma)$ состоит из всех функций $f \in L^p(\gamma)$, для которых $A^{p,\theta,\alpha}_\gamma(f) < \infty$. Норма в пространстве $\mathfrak{B}^\alpha_{p,\theta}(\gamma)$ задается формулой

$$\|f\|_{\mathfrak{B}^\alpha_{p,\theta}(\gamma)} := \|f\|_p + A^{p,\theta,\alpha}_\gamma(f).$$

В качестве следствия теоремы 2.2.10 получаем следующую эквивалентность определений гауссовских пространств Бесова.

Следствие 2.3.4. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$, $\theta \in [1,\infty]$. Тогда пространства $B^\alpha_{p,\theta}(\gamma)$, $\mathfrak{B}^\alpha_{p,\theta}(\gamma)$ и $\mathcal{E}^\alpha_{p,\theta}(\gamma)$ совпадают, как множества, а нормы $\|\cdot\|_{B^\alpha_{p,\theta}(\gamma)}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}^\alpha_{p,\theta}(\gamma)}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}^\alpha_{p,\theta}(\gamma)}$ эквивалентны:*

$$\|f\|_{\mathfrak{B}^\alpha_{p,\theta}(\gamma)} \leqslant 4\sqrt{2}C(p)\|f\|_{B^\alpha_{p,\theta}(\gamma)},\ \|f\|_{B^\alpha_{p,\theta}(\gamma)} \leqslant c(\alpha,\theta)\|f\|_{\mathcal{E}^\alpha_{p,\theta}(\gamma)},$$

$$\|f\|_{\mathcal{E}^{\alpha}_{p,\theta}(\gamma)} \leqslant C(\alpha,p,\theta)\|f\|_{\mathfrak{B}^{\alpha}_{p,\theta}(\gamma)},$$

где $c(\alpha,\theta) = 1 + (\alpha\theta)^{1/\theta}$, $C(\alpha,p,\theta) = 2 + 2C(p') + (\alpha\theta)^{-1/\theta}$ *при* $\theta \neq +\infty$, $c(\alpha,+\infty) = 2$ *и* $C(\alpha,p,+\infty) = 2 + 2C(p') + 1$.

Доказательство. По теореме 2.2.10

$$a_{\gamma,p}(f,t^2) \leqslant 2\sqrt{2}C(p)\cdot\sigma_{\gamma,p}(f,t), \quad \sigma_{\gamma,p}(f,t) \leqslant K_{\gamma,p}(f,t),$$

$$K_{\gamma,p}(f,t) \leqslant \big(1 + C(p')\big)\cdot a_{\gamma,p}(f,t^2).$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} A^{p,\theta,\alpha}_{\gamma}(f) &= \Big(\int_0^{\infty}\big[t^{-\alpha/2}a_{\gamma,p}(f,t)\big]^{\theta}t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta} \leqslant \\ &\leqslant 2\sqrt{2}C(p)\Big(\int_0^{\infty} t^{-\alpha\theta/2}\big[\sigma_{\gamma,p}(f,t^{1/2})\big]^{\theta}t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta} = \\ &= 2^{1+1/\theta}\sqrt{2}C(p)\Big(\int_0^{\infty} r^{-\alpha\theta}\big[\sigma_{\gamma,p}(f,r)\big]^{\theta}r^{-1}\,dr\Big)^{1/\theta} \leqslant 4\sqrt{2}C(p)V^{p,\theta,\alpha}_{\gamma}(f), \end{aligned}$$

что влечет первую оценку следствия.

Для доказательства второй оценки заметим, что при $t \geqslant 1$ для каждого разложения $f = f_0 + f_1$, $f_0 \in L^p(\gamma)$, $f_1 \in W^{1,p}(\gamma)$ имеет место неравенство

$$\|f\|_p \leqslant \|f_0\|_p + \|f_1\|_p \leqslant \|f_0\|_p + t\|f_1\|_p \leqslant \|f_0\|_p + t\|f_1\|_{W^{1,p}(\gamma)}.$$

Поэтому при $t \geqslant 1$ выполнена оценка $K_{L^p(\gamma),W^{1,p}(\gamma)}(f,t) \geqslant \|f\|_p$ и

$$\begin{aligned} &\Big(\int_0^{+\infty}\big[t^{-\alpha}K_{L^p(\gamma),W^{1,p}(\gamma)}(f,t)\big]^{\theta}t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta} \geqslant \\ &\qquad\geqslant \Big(\int_1^{+\infty}\big[t^{-\alpha}K_{L^p(\gamma),W^{1,p}(\gamma)}(f,t)\big]^{\theta}t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta} \geqslant (\alpha\theta)^{-1/\theta}\|f\|_p, \end{aligned}$$

где выражение $(\alpha\theta)^{-1/\theta}$ при $\theta = +\infty$ совпадает с 1. Кроме того,

$$K_{L^p(\gamma),W^{1,p}(\gamma)}(f,t) \geqslant K_{\gamma,p}(f,t) \geqslant \sigma_{\gamma,p}(f,t),$$

что доказывает вторую оценку следствия.

Наконец,

$$\Big(\int_0^{+\infty}\big[t^{-\alpha}K_{L^p(\gamma),W^{1,p}(\gamma)}(f,t)\big]^\theta t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta}\leqslant$$
$$\leqslant\Big(\int_0^{1}\big[t^{-\alpha}K_{L^p(\gamma),W^{1,p}(\gamma)}(f,t)\big]^\theta t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta}+$$
$$+\Big(\int_1^{+\infty}\big[t^{-\alpha}K_{L^p(\gamma),W^{1,p}(\gamma)}(f,t)\big]^\theta t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta}\leqslant$$
$$\leqslant 2\Big(\int_0^{1}\big[t^{-\alpha}K_{\gamma,p}(f,t)\big]^\theta t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta}+(\alpha\theta)^{-1/\theta}\|f\|_p\leqslant$$
$$\leqslant 2\big(1+C(p')\big)\Big(\int_0^{+\infty}\big[t^{-\alpha}a_{\gamma,p}(f,t^2)\big]^\theta t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta}+(\alpha\theta)^{-1/\theta}\|f\|_p.$$

После замены $r=t^2$ в первом интеграле получаем третью оценку следствия. Следствие доказано. □

Замечание 2.3.5. Отметим, что вложения $\mathcal{E}^\alpha_{p,\theta}(\gamma)\subset B^\alpha_{p,\theta}(\gamma)\subset\mathfrak{B}^\alpha_{p,\theta}(\gamma)$ и оценки

$$\|f\|_{\mathfrak{B}^\alpha_{p,\theta}(\gamma)}\leqslant 4\sqrt{2}C(p)\|f\|_{B^\alpha_{p,\theta}(\gamma)},\ \|f\|_{B^\alpha_{p,\theta}(\gamma)}\leqslant c(\alpha,\theta)\|f\|_{\mathcal{E}^\alpha_{p,\theta}(\gamma)}$$

остаются в силе и при $p=1$.

Теперь обсудим эквивалентность гауссовских пространств Бесова из определений 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 и гауссовских пространств Бесова, введенных в работе [92].

Напомним (см. [92, формула (6)]), что для функции $f\in L^1(\gamma)$ полугруппа Пуассона – Эрмита (также называемая полугруппой Коши, см. [90, стр. 61]) задана равенством

$$Q_tf(x):=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}T_{\frac{t^2}{4s}}f(x)\,ds=\frac{t}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{t^2}{4s}}}{s^{3/2}}T_sf(x)\,ds,$$

где T_t — полугруппа Орнштейна – Уленбека. Важное свойство полугруппы Q_t заключается в том, что для функции $f\in L^p(\gamma)$ выполнено равенство $Q_tf=\sum\limits_{n=0}^\infty e^{-t\sqrt{n}}I_n(f)$.

Напомним определение гауссовских пространств Бесова, используемое в работе [92].

Определение 2.3.6. *(см. [92, определение 2.1]) Функция $f \in L^p(\gamma)$ принадлежит классу Бесова по гауссовской мере с параметрами $\alpha \in (0,1)$, $p \in [1,\infty)$, $\theta \in [1,\infty]$, тогда и только тогда, когда*

$$\Big(\int_0^{+\infty} \big[t^{1-\alpha}\|\tfrac{\partial}{\partial t}Q_t f\|_p\big]^\theta t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta} < \infty.$$

Сначала докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 2.3.7. *Для произвольного числа $p \in (1,\infty)$ найдется такое число c_p, зависящее только от p, что для каждой функции $f \in L^p(\gamma)$ выполнено неравенство*

$$\|\nabla Q_t f\|_p \leqslant c_p \|\tfrac{\partial}{\partial t}Q_t f\|_p.$$

Доказательство. Напомним следующую теорему Мейера о мультипликаторах (см. [8, теорема 5.6.2] или [90, Теорема 1.4.2]). Пусть a_k такие числа, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| N^{-k} < \infty$ при некотором $N \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\varphi(0) = 0$ и что $\varphi(n) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k n^{-k}$ при $n \geqslant N$. Тогда оператор

$$\Psi_\varphi f = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) I_n(f)$$

ограничен на пространстве $L^p(\gamma)$ при каждом $p \in (1,\infty)$.

Рассмотрим функцию $\varphi(n) = \sqrt{1+1/n}$ и $\varphi(0) = 0$. Заметим, что

$$\sqrt{1+1/n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!} n^{-k}.$$

Таким образом, для данной функции $\varphi(n)$ имеем

$$a_0 = 1, \quad a_k = \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}.$$

Так как $|a_k| \sim Ck^{-3/2}$, то оператор Ψ_φ с данной функцией φ ограничен на пространстве $L^p(\gamma)$.

Напомним (см. [61, теорема 5.7.1]), найдется такое число m_p, что

$$\|\nabla Q_t f\|_p \leqslant m_p \|(I-L)^{1/2} Q_t f\|_p.$$

Для произвольного элемента $f_n \in \mathcal{H}_n$ выполнены равенства

$$Q_t f_n = e^{-t\sqrt{n}} f_n;\ (I-L)^{1/2} Q_t f_n = \sqrt{n+1} e^{-t\sqrt{n}} f_n;\ \tfrac{\partial}{\partial t} Q_t f_n = -\sqrt{n} e^{-t\sqrt{n}} f_n.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\int_E f \, d\gamma = 0$. Тогда

$$(I-L)^{1/2} Q_t f = -\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) I_n(\tfrac{\partial}{\partial t} Q_t f) = -\Psi_\varphi\big(\tfrac{\partial}{\partial t} Q_t f\big).$$

Из-за ограниченности оператора Ψ_φ существует такая постоянная M_p, что

$$\|(I-L)^{1/2} Q_t f\|_p \leqslant M_p \|\tfrac{\partial}{\partial t} Q_t f\|_p.$$

Таким образом,

$$\|\nabla Q_t f\|_p \leqslant m_p \|(I-L)^{1/2} Q_t f\|_p \leqslant m_p M_p \|\tfrac{\partial}{\partial t} Q_t f\|_p$$

и лемма доказана. □

Нам также понадобится следующая несложная техническая лемма.

Лемма 2.3.8. *Для всякой функции $\varphi \in \mathcal{FC}^\infty$ выполнено неравенство*

$$\|\nabla T_t \varphi\|_p \leqslant C\big(p'\big) \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \|\varphi\|_p \quad \forall\, p \in (1, \infty].$$

Для всякого отображения $\Phi \in \mathcal{FC}^\infty(E, H)$ выполнено неравенство

$$\|\mathrm{div}_\gamma T_t \Phi\|_p \leqslant C(p)(1-e^{-2t})^{-1/2} \|\Phi\|_p \quad \forall\, p \in [1, \infty),$$

где

$$C(p) := \left((2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} |s|^p e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds \right)^{1/p}.$$

Доказательство. Напомним, что

$$\langle \nabla T_t \varphi(x), h \rangle_{H(\gamma)} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \int_E \varphi(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}} y) \langle h, y \rangle_{H(\gamma)} \, \gamma(dy).$$

Теперь заметим, что

$$\|\nabla\varphi\|_p = \sup_{\substack{\Phi\in\mathcal{FC}^\infty(E,H)\\ \|\Phi\|_{p'}\leqslant 1}} \int_E \langle \nabla T_t\varphi(x), \Phi(x)\rangle_{H(\gamma)}\,\gamma(dx) =$$

$$= \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \sup_{\substack{\Phi\in\mathcal{FC}^\infty(E,H)\\ \|\Phi\|_{p'}\leqslant 1}} \iint\limits_{E\times E} \varphi(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y)\langle\Phi(x),y\rangle_{H(\gamma)}\,\gamma\otimes\gamma(dxdy)$$

$$\leqslant \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\|\varphi\|_p \sup_{\substack{\Phi\in\mathcal{FC}^\infty(E,H)\\ \|\Phi\|_{p'}\leqslant 1}} \Big(\iint\limits_{E\times E} \big|\langle\Phi(x),y\rangle_{H(\gamma)}\big|^{p'}\,\gamma\otimes\gamma(dxdy)\Big)^{1/p'} =$$

$$= C(p')\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\|\varphi\|_p.$$

Первая оценка леммы доказана.

Для доказательства второй части заметим, что

$$\|\mathrm{div}_\gamma T_t\Phi\|_p = \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{FC}^\infty\\ \|\varphi\|_{p'}\leqslant 1}} \int_E \varphi\,\mathrm{div}_\gamma T_t\Phi\,d\gamma = \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{FC}^\infty\\ \|\varphi\|_{p'}\leqslant 1}} \int_E \langle T_t\nabla\varphi,\Phi\rangle_{H(\gamma)}\,d\gamma.$$

Напомним (см., например, [8, Предложение 1.5.6]), что $T_t\nabla\varphi = e^t\nabla T_t\varphi$. Поэтому,

$$\int_E \langle T_t\nabla\varphi,\Phi\rangle_{H(\gamma)}\,d\gamma = e^t\int_E \langle\nabla T_t\varphi,\Phi\rangle_{H(\gamma)}\,d\gamma \leqslant e^t\|\nabla T_t\varphi\|_{p'}\|\Phi\|_p.$$

Как уже было доказано,

$$\|\nabla T_t\varphi\|_{p'} \leqslant C(p)\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\|\varphi\|_{p'},$$

что завершает доказательство второй части леммы. □

Для сокращения выкладок для функции $\sigma\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ далее будем использовать обозначение:

$$\|\sigma\|_{*,\theta} := \Big(\int_0^\infty |\sigma(t)|^\theta t^{-1}\,dt\Big)^{1/\theta}, \text{ при } \theta\in[1,\infty);$$

$$\|\sigma\|_{*,\infty} := \operatorname{ess\,sup}|\sigma(t)|.$$

Отметим, что при $\theta\in[1,+\infty]$ выполнено равенство

$$\|\sigma(t)\|_{*,\theta} = 2^{1/\theta}\|\sigma(s^2)\|_{*,\theta},$$

где $2^{1/+\infty} := 1$.

Теперь приступим к доказательству эквивалентного описания гауссовских пространств Бесова через полугруппы T_t и Q_t и определения 2.3.6.

Теорема 2.3.9. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$, $\theta \in [1,\infty]$. Тогда для каждой функции $f \in L^p(\gamma)$ следующие выражения конечны или бесконечны одновременно:*

$$\|t^{-\alpha}\sigma_{\gamma,p}(f,t)\|_{*,\theta}, \big\|t^{\frac{1-\alpha}{2}}\|\nabla T_t f\|_p\big\|_{*,\theta}, \big\|t^{1-\frac{\alpha}{2}}\|\tfrac{\partial}{\partial t}T_t f\|_p\big\|_{*,\theta}, \big\|t^{1-\alpha}\|\tfrac{\partial}{\partial t}Q_t f\|_p\big\|_{*,\theta}$$

В случае, когда они конечны, то они оценивают друг друга с константами, зависящими только от α, p, θ.

Доказательство. Будем рассматривать случай $\theta < \infty$. Случай $\theta = \infty$ разбирается аналогично.

Предположим, что $V_\gamma^{p,\theta,\alpha}(f) := \|t^{-\alpha}\sigma_{\gamma,p}(f,t)\|_{*,\theta} < \infty$. Зафиксируем векторное поле $\Phi \in \mathcal{FC}^\infty(E,H)$ с нормой $\|\Phi\|_{p'} \leqslant 1$. Заметим сначала, что $T_t\mathrm{div}_\gamma\Phi = e^{-t}\mathrm{div}_\gamma\big(T_t\Phi\big)$. Поэтому,

$$\int_E \langle \nabla T_t f, \Phi\rangle_{H(\gamma)}\, d\gamma = -e^{-t}\int_E f\cdot \mathrm{div}_\gamma\big(T_t\Phi\big)\, d\gamma \leqslant \tfrac{C(p')}{\sqrt{2t}}\sigma_{\gamma,p}\big(f, \tfrac{\sqrt{2t}}{C(p')}\big).$$

Действительно,

$$\|-e^{-t}T_t\Phi\|_{p'} \leqslant \|\Phi\|_{p'} \leqslant 1$$

и

$$\|\mathrm{div}_\gamma[-e^{-t}T_t\Phi]\|_{p'} \leqslant C(q)e^{-t}(1-e^{-2t})^{-1/2}\|\Phi\|_{p'} \leqslant \tfrac{C(p')}{\sqrt{2t}}.$$

Таким образом,

$$\|\nabla T_t f\|_p \leqslant \tfrac{C(p')}{\sqrt{2t}}\sigma_{\gamma,p}\big(f, \tfrac{\sqrt{2t}}{C(p')}\big).$$

Поэтому

$$\big\|t^{\frac{1-\alpha}{2}}\|\nabla T_t f\|_p\big\|_{*,\theta} \leqslant 2^{-1/2}C(p')\|t^{-\alpha/2}\sigma_{\gamma,p}\big(f, \tfrac{\sqrt{2t}}{C(p')}\big)\|_{*,\theta} = \\ = 2^{\frac{1-\alpha}{2}+1/\theta}C(p')^{1-\alpha}\|s^{-\alpha}\sigma_{\gamma,p}(f,s)\|_{*,\theta},$$

где была сделана замена переменной $s = \frac{\sqrt{2t}}{C(p')}$.

Для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{FC}^\infty$ верны равенства

$$\int_E \varphi \tfrac{\partial}{\partial t} T_t f \, d\gamma = \int_E \tfrac{\partial}{\partial t} T_t \varphi f \, d\gamma$$
$$= \int_E L T_t \varphi f \, d\gamma = \int_E (L T_{t/2}\varphi)(T_{t/2} f) \, d\gamma = \int (\mathrm{div}_\gamma \nabla T_{t/2}\varphi)(T_{t/2}\, f) \, d\gamma.$$

Применяя оценку из леммы 2.3.8, получаем, что

$$\|\nabla T_{t/2}\varphi\|_{p'} \leqslant C(p) \frac{e^{-(t/2)}}{\sqrt{1-e^{-t}}} \|\varphi\|_q \leqslant C(p) \tfrac{1}{\sqrt{t}} \|\varphi\|_{p'},$$

что дает оценку

$$\int_E \varphi \tfrac{\partial}{\partial t} T_t f \, d\gamma = -\int_E \langle \nabla T_{t/2}\varphi, \nabla T_{t/2} f \rangle_{H(\gamma)} \, d\gamma \leqslant C(p) \|\varphi\|_{p'} t^{-1/2} \|\nabla T_{t/2} f\|_p.$$

Таким образом,

$$t \|\tfrac{\partial}{\partial t} T_t f\|_p \leqslant \sqrt{2} C(p) \sqrt{t/2} \|\nabla T_{t/2} f\|_p,$$

что дает оценку

$$\big\| t^{1-\frac{\alpha}{2}} \|\tfrac{\partial}{\partial t} T_t f\|_p \big\|_{*,\theta} \leqslant 2^{(1+\alpha)/2} C(p) \big\| (t/2)^{\frac{1-\alpha}{2}} \|\nabla T_{t/2} f\|_p \big\|_{*,\theta} =$$
$$= 2^{(1+\alpha)/2} C(p) \big\| s^{\frac{1-\alpha}{2}} \|\nabla T_s f\|_p \big\|_{*,\theta}.$$

Теперь заметим, что

$$\tfrac{\partial}{\partial t} Q_t f(x) := \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{s^{3/2}} [\tfrac{\partial}{\partial \tau} T_\tau f(x)]\Big|_{\tau = \frac{t^2}{4s}} ds.$$

Таким образом,

$$\|\tfrac{\partial}{\partial t} Q_t f\|_p \leqslant \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{s^{3/2}} \big\| [\tfrac{\partial}{\partial \tau} T_\tau f]\Big|_{\tau = \frac{t^2}{4s}} \big\|_p \, ds,$$

что влечет оценку

$$\big\| t^{1-\alpha} \|\tfrac{\partial}{\partial t} Q_t f\|_p \big\|_{*,\theta} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{s^{3/2}} \Big\| t^{2-\alpha} \big\| [\tfrac{\partial}{\partial \tau} T_\tau f]\Big|_{\tau = \frac{t^2}{4s}} \big\|_p \Big\|_{*,\theta} ds.$$

Теперь оценим выражение $\Big\| t^{2-\alpha} \big\| [\tfrac{\partial}{\partial \tau} T_\tau f]\Big|_{\tau = \frac{t^2}{4s}} \big\|_p \Big\|_{*,\theta}$:

$$\Big\| t^{2-\alpha} \big\| [\tfrac{\partial}{\partial \tau} T_\tau f]\Big|_{\tau = \frac{t^2}{4s}} \big\|_p \Big\|_{*,\theta}^\theta = \int_0^\infty \big[t^{2-\alpha} \big\| [\tfrac{\partial}{\partial \tau} T_\tau f]\Big|_{\tau = \frac{t^2}{4s}} \big\|_p \big]^\theta t^{-1} \, dt =$$
$$= 2^{-1+(2-\alpha)\theta} s^{(1-\alpha/2)\theta} \int_0^\infty \big[\tau^{1-\alpha/2} \big\| \tfrac{\partial}{\partial \tau} T_\tau f \big\|_p \big]^\theta \tau^{-1} \, d\tau.$$

Поэтому

$$\big\|t^{1-\alpha}\|\tfrac{\partial}{\partial t}Q_tf\|_p\big\|_{*,\theta}\leqslant\frac{2^{2-\alpha-1/\theta}}{2\sqrt{\pi}}\Big[\int_0^\infty\frac{e^{-s}}{s^{3/2}}s^{1-\alpha/2}\,ds\Big]\big\|\tau^{1-\alpha/2}\big\|\tfrac{\partial}{\partial\tau}T_\tau f\big\|_p\big\|_{*,\theta}\leqslant$$
$$\leqslant\tfrac{8}{\sqrt{\pi}(1-\alpha)}\big\|\tau^{1-\alpha/2}\big\|\tfrac{\partial}{\partial\tau}T_\tau f\big\|_p\big\|_{*,\theta}.$$

Наконец заметим, что

$$\int_E f\cdot\operatorname{div}_\gamma\Phi\,d\gamma=\int_E(f-Q_tf)\cdot\operatorname{div}_\gamma\Phi\,d\gamma+\int_E Q_tf\cdot\operatorname{div}_\gamma\Phi\,d\gamma.$$

для произвольного отображения $\Phi\in\mathcal{FC}^\infty(E,H)$. Первое слагаемое не превосходит

$$\|f-Q_tf\|_p\|\operatorname{div}_\gamma\Phi\|_{p'}\leqslant\|\operatorname{div}_\gamma\Phi\|_{p'}\cdot\int_0^t\|\tfrac{\partial}{\partial s}Q_sf\|_p\,ds.$$

Второе слагаемое по лемме 2.3.7 оценивается следующим образом:

$$\int_E Q_tf\cdot\operatorname{div}_\gamma\Phi\,d\gamma=-\int_E\langle\nabla Q_tf,\Phi\rangle\,d\gamma\leqslant\|\nabla Q_tf\|_p\|\Phi\|_{p'}\leqslant c_p\|\tfrac{\partial}{\partial t}Q_tf\|_p\|\Phi\|_{p'}.$$

Таким образом,

$$\sigma_{\gamma,p}(f,t)\leqslant\int_0^t\|\tfrac{\partial}{\partial s}Q_sf\|_p\,ds+c_pt\|\tfrac{\partial}{\partial t}Q_tf\|_p$$

и, тем самым,

$$\|t^{-\alpha}\sigma_{\gamma,p}(f,t)\|_{*,\theta}\leqslant\Big\|t^{-\alpha}\int_0^t\|\tfrac{\partial}{\partial s}Q_sf\|_p\,ds\Big\|_{*,\theta}+c_p\big\|t^{1-\alpha}\|\tfrac{\partial}{\partial t}Q_tf\|_p\big\|_{*,\theta}.$$

Пусть $u(s):=\|\frac{\partial}{\partial s}Q_sf\|_p$, тогда

$$\Big\|t^{-\alpha}\int_0^t\|\tfrac{\partial}{\partial s}Q_sf\|_p\,ds\Big\|_{*,\theta}=\Big\|t^{-\alpha}\int_0^t u(s)\,ds\Big\|_{*,\theta}=\Big\|t^{1-\alpha}\int_0^1 u(t\tau)\,d\tau\Big\|_{*,\theta}$$
$$\leqslant\int_0^1\|t^{1-\alpha}u(t\tau)\|_{*,\theta}\,d\tau=\Big[\int_0^1\tau^{\alpha-1}\,d\tau\Big]\|s^{1-\alpha}u(s)\|_{*,\theta}=\alpha^{-1}\|s^{1-\alpha}u(s)\|_{*,\theta}.$$

Таким образом,

$$\|t^{-\alpha}\sigma_{\gamma,p}(f,t)\|_{*,\theta}\leqslant(\alpha^{-1}+c_p)\big\|t^{1-\alpha}\|\tfrac{\partial}{\partial t}Q_tf\|_p\big\|_{*,\theta}.$$

Теорема доказана. □

Глава 3

Регулярность распределений и оценки между различными расстояниями на пространстве распределений

3.1 Определения и обозначения

В этом параграфе будут рассматриваться подходы к исследованию свойств индуцированных мер. Напомним (см. подраздел 2.1.1, формула (2.1.1)), что для измеримого отображения $f\colon (E,\mathcal{A}) \to (F,\mathcal{B})$ образом вероятностной меры μ на σ-алгебре $\mathcal{A}$ называется такая мера $\mu \circ f^{-1}$ на σ-алгебре $\mathcal{B}$, что

$$\mu \circ f^{-1}(B) := \mu(x \in E\colon f(x) \in B) \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

В случае, когда $F = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^k$ отображение f также будем иногда называть случайным вектором на вероятностном пространстве $(E,\mathcal{A},\mu)$, а меру $\mu \circ f^{-1}$ — его распределением. В этой и последующих главах мы в основном будем исследовать вопросы о регулярности плотности распределения случайного вектора f в зависимости от свойств отображения f и μ. Кроме того, часто будет удобно рассматривать измеримые функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, как случайные величины на вероятностном пространстве $(E,\mathcal{A},\mu)$, и использовать вероятностные обозначения:

$$\mathbb{E}f := \int_E f(x)\,\mu(dx), \quad \mathbb{D}f := \mathbb{E}\big(f(X) - \mathbb{E}f(X)\big)^2.$$

Для меры $\nu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \to (-\infty, \infty)$ на $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ (такие меры будем называть ограниченными борелевскими мерами на $\mathbb{R}^k$) ее норма по вариации определяется формулой

$$\|\nu\|_{\mathrm{TV}} := \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^k} \varphi\, d\nu,\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k),\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\Big\},$$

а норма Канторовича – Рубинштейна — формулой

$$\|\nu\|_{\mathrm{KR}} := \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^k} \varphi\, d\nu : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k),\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1,\ \|\nabla\varphi\|_\infty \leqslant 1\Big\}.$$

Между распределениями случайных векторов f и g со значениями в $\mathbb{R}^k$ естественным образом определяются расстояния по вариации и Канторовича – Рубинштейна:

$$\begin{aligned}
&d_{\mathrm{TV}}(f,g) := \|\mu\circ f^{-1} - \mu\circ g^{-1}\|_{\mathrm{TV}} = \\
&= \sup\Big\{\mathbb{E}\big[\varphi(f) - \varphi(g)\big] : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k),\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\Big\}, \\
&d_{\mathrm{KR}}(f,g) := \|\mu\circ f^{-1} - \mu\circ g^{-1}\|_{\mathrm{KR}} = \\
&= \sup\Big\{\mathbb{E}\big[\varphi(f) - \varphi(g)\big] : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k),\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1,\ \|\nabla\varphi\|_\infty \leqslant 1\Big\}.
\end{aligned}$$

Говорят (см. [11, §1.4]), что последовательность борелевских мер ν_n на $\mathbb{R}^k$ слабо сходится к борелевской мере ν, если для каждой непрерывной и ограниченной функции η имеет место сходимость

$$\int_{\mathbb{R}^k} \eta(x)\,\nu_n(dx) \to \int_{\mathbb{R}^k} \eta(x)\,\nu(dx).$$

Напомним (см. [11, §3.2] или [47, стр. 480]), что слабая сходимость вероятностных мер ν_n к вероятностной мере ν на $\mathbb{R}^k$ совпадает со сходимостью этих мер по норме Канторовича – Рубинштейна. В случае, когда меры ν_n получены, как распределения случайных векторов f_n, т. е. $\nu_n = \mu\circ f_n^{-1}$, слабую сходимость распределений ν_n часто называют сходимостью случайных векторов f_n по распределению (см. [47, стр. 355]).

Также напомним (см. [10, §1.2]), что сверткой двух ограниченных борелевских мер ν и η на $\mathbb{R}^k$ называется борелевская мера $\nu * \eta$, задаваемая равенством

$$\nu * \eta(B) := \int_{\mathbb{R}^k} \nu(B - y)\,\eta(dy) \quad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k).$$

Ясно, что $\nu*\eta = \eta*\nu$ и что для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^k} \varphi(z)\, \nu * \eta(dz) = \int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x+y)\, \nu(dx)\, \eta(dy).$$

3.2 Применение модулей непрерывности для исследования свойств распределений

Как уже было отмечено выше, наша цель заключается в исследовании свойств регулярности плотностей распределений случайных векторов, заданных отображением f на вероятностном пространстве $(E, \mathcal{A}, \mu)$, в зависимости от гладкости меры μ и от невырожденности отображения f Ясно, что самая «плохая» ситуация с точки зрения регулярности распределения будет в случае вырожденного отображения $f \equiv const$, когда распределение — мера Дирака. Также ясно, что без каких-либо дополнительных предположений о регулярности исходной меры μ нельзя ожидать хороших свойств индуцированных мер, так как, например, у тождественного отображения распределением будет сама мера μ. Базовая идея, применяемая при исследовании регулярности индуцированных мер, восходит к классической работе П. Маллявэна [83] (см. также [10], [84], [90], [96], [97], [102]) и заключается в следующем. Предположим, что для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ и каждого мультииндекса $(j_1, \ldots, j_k)$ удалось проверить, что

$$\mathbb{E}[\partial^{(j_1,\ldots,j_k)}\varphi(f)] \leqslant C_{j_1,\ldots,j_k}\|\varphi\|_\infty, \tag{3.2.1}$$

где $\partial^{(j_1,\ldots,j_k)}\varphi := \partial_1^{j_1}\ldots\partial_k^{j_k}$. Тогда случайный вектор f обладает бесконечно дифференцируемой плотностью. Для того, чтобы проверить оценки (3.2.1), обычно, ожидание из левой части неравенства записывают, как интеграл по мере μ

$$\mathbb{E}[\partial^{(j_1,\ldots,j_k)}\varphi(f)] = \int_E \partial^{(j_1,\ldots,j_k)}\varphi\big(f(x)\big)\, \mu(dx)$$

и, используя гладкость самой меры μ и невырожденность отображения f, пытаются проинтегрировать по частям достаточное число раз.

Проиллюстрируем описанный процесс на простейшем примере.

Пример 3.2.1. Пусть мера μ на $\mathbb{R}$ задана плотностью $\varrho_\mu \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Посмотрим, как можно применить описанный выше метод для исследования регулярности образа меры μ под действием гладкой функции f. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, тогда

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'\big(f(x)\big)\,\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}\big[\varphi\big(f(x)\big)\big]\frac{1}{f'(x)}\varrho_\mu(x)\,dx = \\ = \int_{\mathbb{R}} \varphi\big(f(x)\big)\Big[\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} - \frac{1}{f'(x)}\frac{\varrho_\mu'(x)}{\varrho_\mu(x)}\Big]\varrho_\mu(x)\,dx,$$

где мы предполагаем, что интегрирование по частям возможно. Допустим, что $\frac{1}{f'}$ и $\frac{\varrho_\mu'}{\varrho_\mu}$ принадлежат пространству $L^2(\mu)$, тогда для производной первого порядка доказано неравенство типа (3.2.1). Если подобную процедуру возможно повторять сколько угодно раз, то будет доказана бесконечная дифференцируемость плотности распределения $\mu \circ f^{-1}$.

Из приведенного примера видно, что для получения неравенств типа (3.2.1) с производными хотя бы первого порядка обычно приходится накладывать довольно ограничительные условия на невырожденность отображения f, а именно предполагать интегрируемость $\frac{1}{f'}$ в степени выше 1 (см. [10, Теоремы 9.3.1, 9.3.2, 9.3.3], [90, Предложение 2.1.1, Теорема 2.1.1] [97, Теорема 5.9] и [74, Теорема 3.1]). Отметим, что данное условие может не выполняться даже для простейших отображений f, представляющих естественный интерес. Например, в случае $f(x) = x^d$ функция $\frac{1}{f'}$ будет интегрируемой только в степени $\alpha < \frac{1}{d-1}$ (для мер μ на $\mathbb{R}$ с отделенной от нуля плотностью в окрестности точки нуль, например, для гауссовской меры γ_1).

Заметим, что выполнение неравенств типа (3.2.1) для всех производных первого порядка означает, что для некоторого числа $C > 0$

$$\widetilde{\sigma}_1(\varrho_f, t) \leqslant C \cdot t,$$

где ϱ_f — плотность случайного вектора f, что равносильно принадлежности плотности ϱ_f классу BV функций ограниченной вариации (см. [49], [10] и следующий параграф данной главы). Это наблюдение приводит к идее, что, в случае более “слабой” невырожденности отображения f

по сравнению с классической ситуацией, хотя распределение $\mu \circ f^{-1}$ и не будет обладать бесконечно гладкой плотностью (и даже плотностью ограниченной вариации), какие-то оценки модуля непрерывности $\widetilde{\sigma}_1(\varrho_f, \cdot)$ получить возможно, что несет в себе информацию о регулярности плотности ϱ_f в силу установленной эквивалентности модулей непрерывности $\widetilde{\sigma}_1(\varrho_f, \cdot)$ и $\omega_1(\varrho_f, \cdot)$ (см. теорему 1.2.6). В частности, если предположить, что для некоторого $\alpha \in (0, 1)$ и для некоторого числа $C > 0$ для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ и для каждого вектора $e \in \mathbb{R}^k$ единичной длины выполнена оценка

$$\mathbb{E}[\partial_e \varphi(f)] \leqslant C \|\partial_e \varphi\|_\infty^{1-\alpha} \|\varphi\|_\infty^\alpha,$$

то плотность ϱ_f принадлежит пространству Никольского $B^\alpha_{1,\infty}(\mathbb{R}^k)$. Отметим, что принадлежность плотности распределения пространству Никольского влечет повышение интегрируемости этой самой плотности в силу теорем вложения для пространств Никольского – Бесова ([38, §6.3]):

$$B^\alpha_{1,\infty}(\mathbb{R}^k) \subset L^p(\mathbb{R}^k), \quad \forall\, p < \frac{k}{k-\alpha}. \tag{3.2.2}$$

Все вышесказанное приводит нас к следующему естественному аналогу модуля непрерывности $\widetilde{\sigma}_1(\varrho, \cdot)$ для мер.

Определение 3.2.2. *Для ограниченной борелевской меры ν на $\mathbb{R}^k$ положим*

$$\sigma(\nu, t) := \sup \int_{\mathbb{R}^k} \partial_e \varphi(x)\, \nu(dx),$$

где супремум берется по всевозможным векторам $e \in \mathbb{R}^k$ единичной длины, и по всевозможным функциям $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$, удовлетворяющим условиям $\|\partial_e \varphi\|_\infty \leqslant 1$, $\|\varphi\|_\infty \leqslant t$.

Заметим, что в случае, когда мера $\nu = \mu \circ f^{-1}$ является распределением случайного вектора f, справедливо равенство

$$\sigma(\mu \circ f^{-1}, t) = \sup\Big\{\mathbb{E}[\partial_e \varphi(f)] : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k), |e| = 1, \|\partial_e \varphi\|_\infty \leqslant 1, \|\varphi\|_\infty \leqslant t\Big\}.$$

Также отметим, что для $\sigma(\nu, \cdot)$ сохраняются свойства монотонности, вогнутости и субаддитивности из леммы 1.2.4.

Теорема 1.2.6 влечет следующее утверждение.

Теорема 3.2.3. *Для произвольной конечной борелевской меры ν на $\mathbb{R}^k$ справедливы оценки*

$$\|\nu(\cdot - h) - \nu\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 2\sigma(\nu, |h|/2), \quad \sigma(\nu, t) \leqslant 6k \sup_{|h| \leqslant t} \|\nu(\cdot - h) - \nu\|_{\mathrm{TV}},$$

где $\nu(\cdot - h)(B) := \nu(B - h)\, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$.

Доказательство. Рассмотрим на $\mathbb{R}^k$ семейство мер γ_ε, каждая из которых задана плотностью $\varrho_\varepsilon(y) := \varepsilon^{-k}\varrho(y/\varepsilon)$, где

$$\varrho(y) := (2\pi)^{-k/2} e^{-|y|^2/2}.$$

Так как мера γ_ε имеет плотность относительно меры Лебега, то и свертка $\nu * \gamma_\varepsilon$ также обладает плотностью, которую мы обозначим $\varrho_{\nu*\gamma_\varepsilon}$. Теперь заметим, что для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ с $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x + \varepsilon y)\, [\nu(\cdot - h) - \nu](dx)\, \gamma_1(dy) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(z)\, [\nu * \gamma_\varepsilon(\cdot - h) - \nu * \gamma_\varepsilon](dz) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(z) [\varrho_{\nu*\gamma_\varepsilon}(z - h) - \varrho_{\nu*\gamma_\varepsilon}(z)]\, dz \leqslant \\
&\leqslant \|\varrho_{\nu*\gamma_\varepsilon}(\cdot - h) - \varrho_{\nu*\gamma_\varepsilon}\|_{L^1(\mathbb{R}^k)} \leqslant 2\widetilde{\sigma}_1(\varrho_{\nu*\gamma_\varepsilon}, |h|/2),
\end{aligned}$$

где в последнем переходе мы применили теорему 1.2.6. Теперь заметим, что для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ выполнена оценка

$$\int_{\mathbb{R}^k} \varphi(z)\, \nu * \gamma_\varepsilon(dz) \leqslant \sup_{y \in \mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x + y)\, \nu(dx). \tag{3.2.3}$$

В частности, $\widetilde{\sigma}_1(\varrho_{\nu*\gamma_\varepsilon}, t) \leqslant \sigma(\nu, t)\ \forall t > 0$. Таким образом, перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем, что для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ выполнена оценка

$$\int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x)\, [\nu(\cdot - h) - \nu](dx) \leqslant 2\sigma(\nu, |h|/2).$$

Взяв супремум по всем функциям $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ с $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$, получаем первую оценку из формулировки теоремы.

Для доказательства второй оценки заметим, что для каждого вектора $e \in \mathbb{R}^k$ единичной длины и для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$, удовлетворяющей условиям $\|\partial_e \varphi\|_\infty \leqslant 1$, $\|\varphi\|_\infty \leqslant t$, верны следующие соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^k} \partial_e\varphi(x+\varepsilon y)\,\nu(dx)\,\gamma_1(dy) = \int_{\mathbb{R}^k} \partial_e\varphi(z)\,\nu * \gamma_\varepsilon(dz) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^k} \partial_e\varphi(z)\varrho_{\nu*\gamma_\varepsilon}\,dz \leqslant 6k\omega_1(\varrho_{\nu*\gamma_\varepsilon}, t) = 6k \sup_{|h|\leqslant t} \|\varrho_{\nu*\gamma_\varepsilon}(\cdot - h) - \varrho_{\nu*\gamma_\varepsilon}\|_{L^1(\mathbb{R}^k)},$$

где в предпоследнем переходе была использована теорема 1.2.6. Из оценки (3.2.3) следует, что

$$\|\varrho_{\nu*\gamma_\varepsilon}(\cdot - h) - \varrho_{\nu*\gamma_\varepsilon}\|_{L^1(\mathbb{R}^k)} \leqslant \|\nu(\cdot - h) - \nu\|_{\mathrm{TV}},$$

поэтому опять перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем второе неравенство из формулировки теоремы. □

Известно (см. [10, Предложение 3.4.3(i)]), что ограниченная борелевская мера ν на $\mathbb{R}^k$, для которой $\lim\limits_{|h|\to 0} \|\nu(\cdot - h) - \nu\|_{\mathrm{TV}} = 0$, будет абсолютно непрерывной относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^k$. Поэтому из предыдущей теоремы, в частности, следует, что при исследовании регулярности плотностей индуцированных мер $\mu \circ f^{-1}$ с помощью модуля непрерывности $\sigma(\mu \circ f^{-1}, \cdot)$ нет необходимости дополнительно проверять наличие плотности у меры $\mu \circ f^{-1}$, а достаточно лишь установить, что $\lim\limits_{t\to 0} \sigma(\mu \circ f^{-1}, t) = 0$.

Замечание 3.2.4. Отметим, также, что модуль непрерывности $\sigma(\nu, \cdot)$ дает оценку модуля преобразования Фурье меры ν (или, в вероятностных терминах, ее характеристической функции). Действительно,

$$\widehat{\nu}(t) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\langle x,t\rangle}\,\nu(dx) = \int_{\mathbb{R}^k} \cos(\langle x,t\rangle)\,\nu(dx) + i\int_{\mathbb{R}^k} \sin(\langle x,t\rangle)\,\nu(dx)$$

Заметим, что

$$\cos(\langle x,t\rangle) = \partial_{|t|^{-1}t}\tfrac{1}{|t|}\sin(\langle x,t\rangle); \quad \sin(\langle x,t\rangle) = \partial_{|t|^{-1}t}\tfrac{-1}{|t|}\cos(\langle x,t\rangle).$$

Таким образом,

$$|\widehat{\nu}(t)| \leqslant 2\sigma(\nu, \tfrac{1}{|t|}).$$

Теперь обсудим, как модуль непрерывности σ может быть использован при исследовании связи между различными нормами на пространстве мер.

Теорема 3.2.5. *Пусть ν — ограниченная борелевская мера на $\mathbb{R}^k$. Тогда для каждого $\varepsilon \in (0,1]$ выполнена оценка*

$$\|\nu\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 3\sqrt{k}\sigma(\nu,\varepsilon) + \sqrt{k}\varepsilon^{-1}\|\nu\|_{\mathrm{KR}}.$$

Доказательство. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, рассмотрим на $\mathbb{R}^k$ семейство вероятностных мер γ_ε, заданных плотностями

$$\varrho_\varepsilon(y) := \varepsilon^{-k}\varrho(y/\varepsilon), \quad \varrho(y) := (2\pi)^{-k/2}e^{-|y|^2/2}.$$

Теперь заметим, что

$$\|\nu\|_{\mathrm{TV}} \leqslant \|\nu - \nu * \gamma_\varepsilon\|_{\mathrm{TV}} + \|\nu * \gamma_\varepsilon\|_{\mathrm{TV}},$$

С помощью предыдущей теоремы оцениваем первое слагаемое следующим образом:

$$\begin{aligned}\|\nu - \nu * \gamma_\varepsilon\|_{\mathrm{TV}} &= \sup_{\substack{\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)\\ \|\varphi\|_\infty\leqslant 1}} \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(z)\,[\nu - \nu*\gamma_\varepsilon](dz) = \\ &= \sup_{\substack{\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)\\ \|\varphi\|_\infty\leqslant 1}} \int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^k} [\varphi(x) - \varphi(x+\varepsilon y)]\nu(dx)\,\gamma_1(dy) \leqslant \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^k} \|\nu(\cdot - \varepsilon y) - \nu\|_{\mathrm{TV}}\,\gamma_1(dy) \leqslant 2\int_{\mathbb{R}^k} \sigma(\nu,\varepsilon|y|/2)\,\gamma_1(dy).\end{aligned}$$

Для оценки второго слагаемого заметим, что

$$\begin{aligned}\|\nu * \rho_\varepsilon\|_{\mathrm{TV}} &= \sup_{\substack{\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)\\ \|\varphi\|_\infty\leqslant 1}} \int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x+y)\,\nu(dx)\,\gamma_\varepsilon(dy) \\ &= \sup_{\substack{\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)\\ \|\varphi\|_\infty\leqslant 1}} \int_{\mathbb{R}^k}\Big[\int_{\mathbb{R}^k} \varphi(z)\varrho_\varepsilon(z-x)\,dz\Big]\,\nu(dx).\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(x) := \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(z)\varrho_\varepsilon(z-x)\,dz$$

и оценим ее градиент:

$$\nabla\psi(x) = \nabla \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(z)\varrho_\varepsilon(z-x)\,dz = -\varepsilon^{-k}\int_{\mathbb{R}^k} \varphi(z)\varepsilon^{-1}(\nabla\varrho)((z-x)/\varepsilon)\,dz,$$

откуда

$$\|\nabla\psi\|_\infty \leqslant \varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}^k} |\nabla\varrho(z)|\,dz \leqslant \varepsilon^{-1}\sqrt{k}.$$

Кроме того,

$$\|\psi\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^k}\left|\int_{\mathbb{R}^k} \varphi(z)\varrho_\varepsilon(z-x)\,dz\right| \leqslant 1 \leqslant \varepsilon^{-1}\sqrt{k}$$

для $\varepsilon \in (0,1]$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\|\nu\|_{\mathrm{TV}} &\leqslant 2\int_{\mathbb{R}^k} \sigma(\nu,\varepsilon|y|/2)\rho(y)\,dy + \sqrt{k}\varepsilon^{-1}\|\nu\|_{\mathrm{KR}}\\ &= 2\int_{|y|\leqslant 2} \sigma(\nu,\varepsilon|y|/2)\rho(y)\,dy + 2\int_{|y|>2} \sigma(\nu,\varepsilon|y|/2)\rho(y)\,dy + \sqrt{k}\varepsilon^{-1}\|\nu\|_{\mathrm{KR}}.\end{aligned}$$

Теперь заметим, что в первом интеграле, из-за монотонности функции $\sigma(\nu,\cdot)$, верно неравенство

$$\sigma(\nu,\varepsilon|y|/2) \leqslant \sigma(\nu,\varepsilon),$$

а во втором интеграле

$$\sigma(\nu,\varepsilon|y|/2) \leqslant \tfrac{|y|}{2}\sigma(\nu,\varepsilon),$$

так как из-за вогнутости $\sigma(\nu,t\varepsilon) \leqslant t\sigma(\nu,\varepsilon)$ при $t \geqslant 1$. В итоге получаем оценку

$$\|\nu\|_{\mathrm{TV}} \leqslant c_k\sigma(\nu,\varepsilon) + \sqrt{k}\varepsilon^{-1}\|\nu\|_{\mathrm{KR}},$$

где

$$c_k = 2\int_{|y|\leqslant 2}\rho(y)dy + \int_{|y|>2}|y|\rho(y)dy \leqslant 2+\sqrt{k} \leqslant 3\sqrt{k}.$$

Теорема доказана. □

Посмотрим, что дает предыдущая теорема в случае, когда плотность меры ν принадлежат пространству Никольского.

Следствие 3.2.6. *Предположим, что для некоторого $\alpha \in (0,1)$ плотность ограниченной борелевской меры ν на $\mathbb{R}^k$ принадлежит пространству Никольского $B^{\alpha}_{1,\infty}(\mathbb{R}^k)$, т. е.*

$$[\nu]_\alpha := \sup_{t>0} t^{-\alpha}\sigma(\nu,t) < \infty. \tag{3.2.4}$$

Тогда имеет место оценка

$$\|\nu\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 3\sqrt{k}\big([\nu]_\alpha + \|\nu\|_{\mathrm{TV}} + 1\big)\|\nu\|_{\mathrm{KR}}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Доказательство. По теореме 3.2.3 при каждом $\varepsilon \in (0,1)$ выполнена оценка

$$\|\nu\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 3\sqrt{k}[\nu]_\alpha\varepsilon^\alpha + \sqrt{k}\varepsilon^{-1}\|\nu\|_{\mathrm{KR}}.$$

Так как $\|\nu\|_{\mathrm{KR}} \leqslant \|\nu\|_{\mathrm{TV}}$, то можно взять

$$\varepsilon = \Big(\frac{\|\nu\|_{\mathrm{KR}}}{\|\nu\|_{\mathrm{TV}}+1}\Big)^{\frac{1}{1+\alpha}} < 1.$$

Подставляя данное ε в оценку выше, получаем

$$\|\nu\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 3\sqrt{k}\Big([\nu]_\alpha(\|\nu\|_{\mathrm{TV}}+1)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + (\|\nu\|_{\mathrm{TV}}+1)^{\frac{1}{1+\alpha}}\Big)\|\nu\|_{\mathrm{KR}}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \leqslant$$
$$\leqslant 3\sqrt{k}\big([\nu]_\alpha + \|\nu\|_{\mathrm{TV}} + 1\big)\|\nu\|_{\mathrm{KR}}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Следствие доказано. □

Нам также будет удобно сразу переформулировать полученные выше результаты для мер в терминах расстояний между распределениями.

Следствие 3.2.7. *Пусть f, g — два случайных k-мерных вектора, определенных на вероятностном пространстве $(E,\mathcal{A},\mu)$. Тогда для каждого $\varepsilon \in (0,1]$ выполнено неравенство*

$$d_{\mathrm{TV}}(f,g) \leqslant 6\sqrt{k}\max\{\sigma(\mu\circ f^{-1},\varepsilon),\sigma(\mu\circ g^{-1},\varepsilon)\} + \sqrt{k}\varepsilon^{-1}d_{\mathrm{KR}}(f,g).$$

В частности, если плотности распределений векторов f и g принадлежат пространству Никольского $B^{\alpha}_{1,\infty}(\mathbb{R}^k)$, то

$$d_{\mathrm{TV}}(f,g) \leqslant 9\sqrt{k}\big(\max\{[\mu\circ f^{-1}]_\alpha,[\mu\circ g^{-1}]_\alpha\}+1\big)d_{\mathrm{KR}}(f,g)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

где величина $[\,\cdot\,]_\alpha$ определена формулой (3.2.4).

Доказательство. Утверждение следует из оценок

$$\sigma(\mu\circ f^{-1}-\mu\circ g^{-1},\varepsilon)\leqslant\sigma(\mu\circ f^{-1},\varepsilon)+\sigma(\mu\circ g^{-1},\varepsilon)$$
$$[\mu\circ f^{-1}-\mu\circ g^{-1}]_\alpha\leqslant[\mu\circ f^{-1}]_\alpha+[\mu\circ g^{-1}]_\alpha.$$

Следствие доказано. □

Наконец, заметим, что теорема 1.2.8 (в комбинации с теоремой 1.2.6) дает следующую оценку на меру попадания случайного вектора f в борелевское множество A в терминах модуля непрерывности σ.

Следствие 3.2.8. *Пусть f — k-мерный случайный вектор на вероятностном пространстве $(E,\mathcal{A},\mu)$. Тогда для каждого борелевского множества A в $\mathbb{R}^k$, при $k>1$, имеем*

$$\mu(f\in A)\leqslant 12\sqrt{k}(1+\nu_k^{-1})\sigma\big(\mu\circ f^{-1},\tfrac{1}{2}\big(\lambda^k(A)\big)^{1/k}\big),$$

где ν_k — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^k$, а, при $k=1$,

$$\mu(f\in A)\leqslant\sigma\big(\mu\circ f^{-1},\lambda(A)\big).$$

В заключение данного параграфа докажем одну техническую лемму, которая будет часто применяться в дальнейшем.

Лемма 3.2.9. *Пусть μ — вероятностная мера на измеримом пространстве $(E,\mathcal{A})$ и пусть $g\geqslant 0$ измеримая относительно меры μ функция. Тогда для всех чисел $r\geqslant 1,\varepsilon>0$ выполнена оценка*

$$\mathbb{E}(g+\varepsilon)^{-r}\leqslant r\varepsilon^{-r}u_\mu(g,\varepsilon),$$

где

$$u_\mu(g,\varepsilon):=\int_0^\infty(s+1)^{-2}\mu(g\leqslant\varepsilon s)\,ds.$$

Доказательство. Применяя теорему Фубини и неравенство Чебышева, получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g+\varepsilon)^{-r}&=r\int_0^{\varepsilon^{-1}}t^{r-1}\mu\big((g+\varepsilon)^{-1}\geqslant t\big)\,dt\\&=r\int_0^\infty(s+\varepsilon)^{-r-1}\mu(g\leqslant s)\,ds\leqslant r\varepsilon^{-r}\int_0^\infty(s+1)^{-r-1}\mu\big(g\leqslant\varepsilon s\big)\,ds\\&\leqslant r\varepsilon^{-r}\int_0^\infty(s+1)^{-2}\mu\big(g\leqslant\varepsilon s\big)\,ds.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

В следующем параграфе будет разобран пример исследования регулярности образов с помощью идей, развитых в этом параграфе.

3.3 Принадлежность пространствам Никольского полиномиальных образов дифференцируемых по Скороходу мер

Применим идеи предыдущего параграфа для исследования регулярности плотностей распределений многочленов, определенных на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$, где мера μ — дифференцируема по Скороходу вдоль каждого направления. В некотором смысле это базовый пример, когда отображение f является "слабо" невырожденным, а мера μ обладает минимальной гладкостью.

Напомним (см. [10], [43]), что ограниченная меря μ на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ называется дифференцируемой по Скороходу вдоль вектора $\theta \in \mathbb{R}^n$, если существует ограниченная борелевская мера $D_\theta\mu$ на $\mathbb{R}^n$, с которой справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_\theta\varphi \, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d(D_\theta\mu) \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Пространство BV функций ограниченной вариации состоит из всех таких функций $\varrho \in L^1(\mathbb{R}^n)$, что ее производная в смысле обобщенных функций $\partial_\theta\varrho$ вдоль каждого вектора $\theta \in \mathbb{R}^n$ задается некоторой ограниченной борелевской мерой на $\mathbb{R}^n$ (см. [49, Определение 3.1]). Таким образом, мера μ дифференцируема по Скороходу вдоль каждого вектора $\theta \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда она обладает плотностью ϱ_μ, принадлежащей пространству BV функций ограниченной вариации. Кроме того, известно (см. [49, Предложение 3.6]), что мера μ на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ обладает плотностью ограниченной вариации тогда и только тогда, когда для некоторого числа $C > 0$ выполнено неравенство

$$\sigma(\mu, t) \leqslant C \cdot t.$$

Меру, дифференцируемую по Скороходу вдоль каждого вектора $\theta \in \mathbb{R}^n$, будем для краткости называть просто дифференцируемой по Скороходу.

В этом параграфе исследуется регулярность плотностей образов дифференцируемых по Скороходу мер под действием многочленов, т. е. функций вида

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j_1+\ldots+j_n \leqslant d} a_{j_1,\ldots,j_n}\, x_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{j_n}. \tag{3.3.1}$$

Будем говорить, что функция f вида (3.3.1) — многочлен степени не выше d на $\mathbb{R}^n$. Пусть $d[f]$ — реальная степень многочлена f, т. е.

$$d[f] := \max\{j_1 + \ldots + j_n \colon a_{j_1,\ldots,j_n} \neq 0\}$$

Пусть

$$f_j(x) := \sum_{j_1+\ldots+j_n=j} a_{j_1,\ldots,j_n}\, x_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{j_n},$$

тогда $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{d} f_j(x)$. Можно считать, что $f_j(x) = B_j[f](x, \ldots, x)$, где $B_j[f] \colon (\mathbb{R}^n)^j \to \mathbb{R}$ — симметричная j-линейная функция на $(\mathbb{R}^n)^j$. Для такой j-линейной функции $B \colon (\mathbb{R}^n)^j \to \mathbb{R}$ пусть

$$\|B\| := \sup\bigl\{|B(x^1, \ldots, x^j)| \colon x^1, \ldots, x^j \in \mathbb{R}^n; |x^1| = 1, \ldots, |x^j| = 1\bigr\}.$$

Основной результат данного параграфа представлен в следующей теореме.

Теорема 3.3.1. *Пусть $d \in \mathbb{N}$. Пусть μ — дифференцируемая по Скороходу вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ и пусть f — многочлен степени d на $\mathbb{R}^n$ (т. е. $d[f] = d$). Тогда*

$$\sigma(\mu \circ f^{-1}, t) \leqslant 2^{d+4} \sup_{|\theta|=1} \|D_\theta \mu\|_{\mathrm{TV}} \|B_d[f]\|^{-1/d} \cdot t^{1/d}, \tag{3.3.2}$$

т. е. мера $\mu \circ f^{-1}$ обладает плотностью, принадлежащей пространству Никольского $B^{1/d}_{1,\infty}(\mathbb{R})$. Кроме того,

$$\mu(f \in A) \leqslant 2^{d+4} \sup_{|\theta|=1} \|D_\theta \mu\|_{\mathrm{TV}} \|B_d[f]\|^{-1/d} \cdot [\lambda(A)]^{1/d} \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{3.3.3}$$

Как было отмечено в предыдущем параграфе, важной частью исследования регулярности распределений являются формулы интегрирования

по частям на исходном вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$, на котором определена случайная величина f, и оценки, которые можно с помощью этих формул получить. Первым шагом как раз и будут оценки такого типа, представленные в следующей лемме и ее следствии.

Лемма 3.3.2. *Пусть μ — дифференцируемая по Скороходу вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Пусть $\alpha > 0$, f — многочлен степени не выше d на $\mathbb{R}^n$ и пусть*

$$F := \frac{f}{f^2 + \alpha^2}.$$

Предположим, что

$$g \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ и } F\partial_\theta g \in L^1(\mu).$$

Тогда

$$\mathbb{E}[F\partial_\theta g] \leqslant (d\pi + 1)\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}\alpha^{-1}\|g\|_\infty.$$

Доказательство. В силу однородности можно считать, что $\alpha = 1$. Для каждой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F\partial_\theta\psi] &= \int_{\mathbb{R}^n} F\partial_\theta\psi \, d\mu = \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \psi \left[\frac{\partial_\theta f}{f^2+1} - \frac{2f^2\partial_\theta f}{(f^2+1)^2}\right] d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} \psi F \, d(D_\theta\mu) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi \, \frac{\partial_\theta f}{f^2+1} \cdot \frac{f^2-1}{f^2+1} \, d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} \psi F \, d(D_\theta\mu) \leqslant \\
&\leqslant \|\psi\|_\infty \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\partial_\theta f|}{f^2+1} d\mu + \|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}} \Big),
\end{aligned}$$

где в последнем переходе было использовано, что $|F| \leqslant \frac{1}{2\alpha} \leqslant 1$ при $\alpha = 1$. Оценим первое слагаемое. Сначала предположим, что μ задана плотностью $\varrho_\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\langle\theta\rangle^\perp$ — плоскость, ортогональная вектору θ,

тогда по теореме Фубини

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\partial_\theta f|}{f^2+1}\,d\mu = \int_{\langle\theta\rangle^\perp}\int_{\mathbb{R}} \Big|\frac{d}{dt}\mathrm{arctg}(f(y+t\theta))\Big|\varrho_\mu(y+t\theta)\,dtdy$$
$$\leqslant d\pi \int_{\langle\theta\rangle^\perp} \sup_\tau \varrho_\mu(y+\tau\theta)\,dy \leqslant$$
$$\leqslant d\pi \int_{\langle\theta\rangle^\perp}\int_{\mathbb{R}} \Big|\frac{d}{d\tau}\varrho_\mu(y+\tau\theta)\Big|\,d\tau\,dy =$$
$$= d\pi \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_\theta \varrho_\mu(x)|\,dx = d\pi\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}},$$

где второй переход следует из того, что у многочлена $t \mapsto f(y+t\theta)$ не более чем d участков монотонности на $\mathbb{R}$, на каждом из которых интеграл от функции $\big|\frac{d}{dt}\mathrm{arctg}(f(y+t\theta))\big|$ не превосходит π. Для общих дифференцируемых по Скороходу мер μ применим полученную оценку к мерам $\mu * \gamma_\varepsilon$, где меры γ_ε заданны плотностями

$$\varrho_\varepsilon(y) := \varepsilon^{-n}\varrho(y/\varepsilon), \quad \varrho(y) := (2\pi)^{-n/2}e^{-|y|^2/2}.$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\partial_\theta f|}{f^2+1}\,d(\mu*\gamma_\varepsilon) \to \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\partial_\theta f|}{f^2+1}\,d\mu$$

при $\varepsilon \to 0$, а

$$\|D_\theta(\mu*\gamma_\varepsilon)\|_{\mathrm{TV}} = \sup_{\substack{\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)\\ \|\varphi\|_\infty\leqslant 1}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} -\partial_\theta\varphi(x+y)\,\mu(dx)\,\gamma_\varepsilon(dy) =$$
$$= \sup_{\substack{\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)\\ \|\varphi\|_\infty\leqslant 1}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+y)\,D_\theta\mu(dx)\,\gamma_\varepsilon(dy) \leqslant \|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}[F\partial_\theta\psi] \leqslant (d\pi+1)\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}\|\psi\|_\infty \tag{3.3.4}$$

для каждой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим теперь последовательность функций $\psi_j(x) = \psi(x/j)$, где $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая функция, что $\psi(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$, $\psi(x) = 0$ при $|x| > 2$ и $\psi(x) \in [0,1]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Применим оценку (3.3.4) к функции $\psi_k g$:

$$\mathbb{E}[F\partial_\theta(\psi_j g)] \leqslant (d\pi+1)\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}\|g\|_\infty.$$

Теперь заметим, что

$$\mathbb{E}[F\partial_\theta(\psi_k g)] = \mathbb{E}[Fg\partial_\theta\psi_j] + \mathbb{E}[F\psi_j\partial_\theta g],$$

где первое слагаемое стремится к нулю, а второе слагаемое стремится к $\mathbb{E}[F\partial_\theta g]$. Таким образом, лемма доказана. □

Следствие 3.3.3. *Пусть μ — дифференцируемая по Скороходу вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ и пусть f — многочлен степени не выше d на $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, для каждого вектора $\theta \in \mathbb{R}^n$ единичной длина и для каждого $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\mathbb{E}\Big[\varphi'(f)\partial_\theta f \frac{\partial_\theta f}{(\partial_\theta f)^2 + \varepsilon}\Big] \leqslant (\pi(d-1)+1)\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}\|\varphi\|_\infty \cdot \varepsilon^{-1/2}.$$

Доказательство. Достаточно применить лемму 3.3.2 к функции $\varphi(f)$ и многочлену $\partial_\theta f$ степени не выше $d-1$. □

Приступим к доказательству теоремы 3.3.1.

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по степени многочлена d.

База индукции $d = 1$. В этом случае

$$f(x) = \langle a, x\rangle + b = \sum_{j=1}^n a_j x_j + b$$

для некоторого вектора $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ и числа $b \in \mathbb{R}$. Заметим, что для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi'(f)] = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi'(f)\, d\mu = -|a|^{-2}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\Big(\sum_{k=1}^n a_k x_k + b\Big)\, D_a\mu(dx) \leqslant \\ \leqslant |a|^{-2}\|D_a\mu\|_{\mathrm{TV}}\|\varphi\|_\infty = |a|^{-1}\|D_{|a|^{-1}a}\mu\|_{\mathrm{TV}}\|\varphi\|_\infty \leqslant \\ \leqslant |a|^{-1}\sup_{|\theta|=1}\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}\|\varphi\|_\infty.\end{aligned}$$

Таким образом, по определению модуля непрерывности $\sigma(\mu\circ f^{-1}, \cdot)$ (см. определение 3.2.2 и комментарий после), получаем, что

$$\sigma(\mu\circ f^{-1}, t) \leqslant |a|^{-1}\sup_{|\theta|=1}\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}} \cdot t,$$

причем $|a| = \sup\limits_{|x|=1} |\langle a, x\rangle|$. База доказана.

Перейдем теперь к доказательству шага индукции. Во-первых, заметим, что оценка (3.3.3) на меру попадания f в борелевское множество следует из оценки (3.3.2) на модуль непрерывности в силу следствия 3.2.8. Теперь, предположим, что оценка (3.3.2) (а значит и (3.3.3)) выполнена для каждого многочлена степени не выше d и пусть f — многочлен степени не выше $d+1$. Тогда заметим, что для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, для каждого вектора $\theta \in \mathbb{R}^n$ единичной длины и для каждого числа $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\mathbb{E}[\varphi'(f)] = \mathbb{E}\Big[\varphi'(f)\partial_\theta f \frac{\partial_\theta f}{(\partial_\theta f)^2 + \varepsilon}\Big] + \varepsilon \mathbb{E}\Big[\varphi'(f(x))\left((\partial_\theta f)^2 + \varepsilon\right)^{-1}\Big]. \quad (3.3.5)$$

Оценим каждое из этих двух слагаемых по отдельности. Для первого слагаемого применим следствие 3.3.3 и получим оценку

$$\mathbb{E}\Big[\varphi'(f)\partial_\theta f \frac{\partial_\theta f}{(\partial_\theta f)^2 + \varepsilon}\Big] \leqslant (\pi d + 1) \sup_{|h|=1} \|D_h\mu\|_{\mathrm{TV}} \|\varphi\|_\infty \cdot \varepsilon^{-1/2}.$$

Для оценки второго слагаемого, заметим, что производная $\partial_\theta f$ сама является многочленом, но уже степени не выше d, а именно:

$$\partial_\theta f(x) = \sum_{j=1}^{d+1} j B_j[f](x, \dots, x, \theta),$$

где $B_j[f]$ — такие j-линейные функции на $(\mathbb{R}^n)^j$, что

$$f(x) = \sum_{j=0}^{d+1} B_j[f](x, \dots, x).$$

Применяя лемму 3.2.9 и предположение индукции к многочлену $\partial_\theta f$, для второго слагаемого в (3.3.5) получаем

$$\varepsilon \mathbb{E}\Big[\varphi'(f)((\partial_\theta f)^2 + \varepsilon)^{-1}\Big] \leqslant \varepsilon \|\varphi'\|_\infty \mathbb{E}((\partial_\theta f)^2 + \varepsilon)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi'\|_\infty \int_0^\infty (s+1)^{-2} \mu(|\partial_\theta f| \leqslant \sqrt{\varepsilon s})\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{\frac{1}{2d}} \|\varphi'\|_\infty C_d \sup_{|h|=1} \|D_h\mu\|_{\mathrm{TV}} \|B_{d+1}[f](\cdot, \dots, \cdot, \theta)\|^{-1/d} \int_0^\infty (s+1)^{-2} s^{1/2d}\, ds,$$

где $C_d = 2^{d+4}(d+1)^{-1/d}2^{1/d}$. Кроме того, заметим, что

$$\int_0^\infty (s+1)^{-2}s^{1/2d}ds \leqslant \Big(\int_0^\infty (s+1)^{-2}s^{1/2}ds\Big)^{1/d} = (\pi/2)^{1/d} \leqslant 2^{1/d}$$

Таким образом, имеет место оценка

$$\mathbb{E}[\varphi'(f)] \leqslant \varepsilon^{-1/2}(\pi d+1)\sup_{|h|=1}\|D_h\mu\|_{\mathrm{TV}}\|\varphi\|_\infty$$
$$+\,\varepsilon^{1/2d}\|\varphi'\|_\infty 2^{d+4}(d+1)^{-1/d}4^{1/d}\sup_{|h|=1}\|D_h\mu\|_{\mathrm{TV}}\|B_{d+1}[f](\cdot,\dots,\cdot,\theta)\|^{-1/d}.$$

Подставив в предыдущую оценку

$$\varepsilon = [(\pi d+1)\|\varphi\|_\infty]^{\frac{2d}{d+1}}\Big(\|\varphi'\|_\infty 2^{d+4}(d+1)^{-1/d}4^{1/d}\|B_{d+1}(\cdot,\dots,\cdot,\theta)\|^{-1/d}\Big)^{-\frac{2d}{d+1}},$$

получаем

$$\mathbb{E}[\varphi'(f)] \leqslant c_{d+1}\sup_{|h|=1}\|D_h\mu\|_{\mathrm{TV}}\|B_{d+1}[f](\cdot,\dots,\cdot,\theta)\|^{-1/(d+1)}\|\varphi\|_\infty^{\frac{1}{d+1}}\|\varphi'\|_\infty^{\frac{d}{d+1}},$$

где

$$c_{d+1} = 2(\pi d+1)^{\frac{1}{d+1}}\big(2^{d+4}(d+1)^{-1/d}4^{1/d}\big)^{\frac{d}{d+1}} =$$
$$= 2\Big(4\cdot\frac{\pi d+1}{d+1}\Big)^{\frac{1}{d+1}}\big(2^{d+4}\big)^{\frac{d}{d+1}} \leqslant 2^{d+1+4}.$$

Взяв инфимум по всем векторам $\theta \in \mathbb{R}^n$ единичной длины получаем оценку (3.3.2) (а значит и (3.3.3)) для всех многочленов степени не выше $d+1$. Теорема доказана. □

Как мы уже отмечали в предыдущем параграфе, установленная регулярность распределения $\mu \circ f^{-1}$ теперь автоматически влечет несколько полезных следствий.

Во-первых, это повышение интегрируемости плотности распределения в силу теоремы вложения для пространств Никольского (3.2.2).

Следствие 3.3.4. *Пусть μ — дифференцируемая по Скороходу вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ и пусть f — многочлен на $\mathbb{R}^n$. Тогда мера $\mu \circ f^{-1}$ обладает плотностью ϱ_f, интегрируемой в любой степени $p \in \big[1, \frac{d[f]}{d[f]-1}\big)$. Кроме того, для каждого $p \in \big[1, \frac{d[f]}{d[f]-1}\big)$ найдется такое число $c(p) > 0$, что*

$$\|\rho_f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant c(p)\Big(1 + \sup_{|\theta|=1} \|D_\theta \mu\|_{\mathrm{TV}} \|B_{d[f]}[f]\|^{-1/d[f]}\Big).$$

Во-вторых, установленная регулярность и следствие 3.2.7 влекут оценку между расстояниями по вариации и Канторовича – Рубинштейна для распределений многочленов, заданных на пространстве с дифференцируемой по Скороходу мерой.

Следствие 3.3.5. *Пусть $d \in \mathbb{N}$. Пусть μ — дифференцируемая по Скороходу вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ и пусть f, g — два многочлена степени d на $\mathbb{R}^n$ (т. е. $d[f] = d[g] = d$). Тогда*

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C \cdot d_{\mathrm{KR}}(f, g)^{\frac{1}{1+d}},$$

где

$$C = 9\Big(1 + 2^{d+4} \sup_{|\theta|=1} \|D_\theta \mu\|_{\mathrm{TV}} \big(\|B_d[f]\|^{-1/d} + \|B_d[g]\|^{-1/d}\big)\Big).$$

Также отметим, что оценка на меру попадания многочлена в борелевское множество из теоремы 3.3.1 влечет следующую оценку на меру малых значений (small ball probability).

Следствие 3.3.6. *Пусть $d \in \mathbb{N}$. Пусть μ — дифференцируемая по Скороходу вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ и пусть f — многочлен степени d на $\mathbb{R}^n$ (т. е. $d[f] = d$). Тогда при каждом $t > 0$ верно неравенство*

$$\mu(|f| \leqslant t) \leqslant 2^{d+5} \sup_{|\theta|=1} \|D_\theta \mu\|_{\mathrm{TV}} \|B_d[f]\|^{-1/d} \cdot t^{1/d}.$$

Именно эта оценка, примененная к производной многочлена, использовалась в доказательстве для индуктивного перехода и играла роль показателя невырожденности исходного многочлена. Отметим, что данная оценка близка к неравенству Карбери – Райта (см. [67] и главу 5) для многочленов на пространстве с логарифмически вогнутой мерой, которое будет применяться при исследовании регулярности распределений многочленов в следующих главах (см. главу 5).

Для дальнейшего полезно отметить некоторые достоинства и недостатки полученных в теореме 3.3.1 оценок регулярности. Во-первых, заметим,

что все полученные оценки не зависят от количества переменных, т. е. от размерности пространства, на котором определена мера μ. В частности, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.3.7. *Пусть $d \in \mathbb{N}$, $a, b > 0$. Пусть μ_m — последовательность дифференцируемых по Скороходу вероятностных мер на $(\mathbb{R}^{n_m}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_m}))$ и пусть f_m — последовательность многочленов степени d на $\mathbb{R}^{n_m}$ (т. е. $d[f_m] = d$). Предположим, что*

$$a \leqslant \sup_m \|B_d[f_m]\|, \quad \sup_m \sup_{|\theta|=1} \|D_\theta \mu_m\|_{\mathrm{TV}} \leqslant b.$$

Тогда из сходимости последовательности случайных величин f_m по распределению следует сходимость их распределений по вариации.

Также независимость оценок от размерности позволяет говорить об их переносе на бесконечномерный случай (т. е. на случай, когда мера μ задана на бесконечномерном локально выпуклом пространстве). Результаты такого типа будут обсуждаться в последующих двух главах для специальных классов мер (гауссовских и общих логарифмически вогнутых).

Отметим, однако, что величина $\|B_d[f]\|$, во-первых, является структурной характеристикой самой случайной величины f, а не ее распределения, и, во-вторых, может стремиться к нулю даже для последовательности многочленов с фиксированной дисперсией. Например так происходит для последовательности

$$f_n(X_1, \ldots, X_n) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (X_j^2 - \mathbb{E}[X_j^2]),$$

$X_1, \ldots, X_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным четвертым моментом. В этом случае

$$B_2[f_n] = \sup\Big\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \colon \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1, \sum_{j=1}^{n} y_j^2 = 1 \Big\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,$$

дисперсия $\mathbb{D} f_n = \mathbb{D}[X_1^2] = const$ и последовательность $f_n(X_1, \ldots, X_n)$ сходится по распределению к $\sqrt{\mathbb{D}[X_1^2]} \cdot Z$, где $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, т. е.

$$d_{\mathrm{KR}}\big(f_n(X_1, \ldots, X_n), \sqrt{\mathbb{D}[X_1^2]} \cdot Z\big) \to 0.$$

В этом случае следствия 3.3.5 и 3.3.6 не дают информации о сходимости распределений по вариации даже в случае наличия бесконечно гладкой плотности распределения случайной величины X_1.

В следующих главах для более узких классов мер (гауссовские и логарифмически вогнутые) будут получены более точные оценки, усиливающие теорему 3.3.1, в которых, в частности, характеристика $\|B_d[f]\|$ будет заменена квадратным корнем из дисперсии f.

Глава 4

Регулярность образов гауссовских мер под действием соболевских отображений

4.1 Определения и обозначения

В настоящей главе рассматриваются вопросы дробной регулярности образов гауссовских мер под действием соболевских отображений. Основные определения и объекты, связанные с гауссовскими мерами на локально выпуклых пространствах были введены в параграфе 2.1 главы 2. Здесь мы дополним содержание подразделов 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 понятиями, которые будут использоваться в этой главе.

Как и в главе 2 мы рассматриваем центрированную гауссовскую меру на некотором хаусдорфовом локально выпуклом пространстве E и символом $H(\gamma)$ обозначаем пространство Камерона – Мартина этой меры (см. подраздел 2.1.2).

Пусть фиксирован некоторый ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ в пространстве $H(\gamma)$. Пространство Соболева $W^{2,p}(\gamma)$, определяется (см. [8, §5.2]), как замыкание пространства $\mathcal{FC}^{\infty}$ по норме

$$\|\varphi\|_{W^{2,p}(\gamma)} := \|\varphi\|_p + \|\nabla\varphi\|_p + \Big\| \Big(\sum_{i,j=1}^{\infty} (\partial_{e_i}\partial_{e_j}\varphi)^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p .$$

Т.е. в третьем слагаемом записана $L^p(\gamma)$-норма Гильберт – Шмидтовской нормы $|\cdot|_{HS}$ матрицы вторых производных $D^2\varphi$ с элементами $\partial_{e_i}\partial_{e_j}\varphi$.

Заметим, что для функции $\varphi \in \mathcal{FC}^\infty$ вида $\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(\ell_1(x), \dots, \ell_n(x))$ имеет место равенство

$$\partial_{e_i}\partial_{e_j}\varphi = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}(\partial^2_{m,k}\widetilde{\varphi})(\ell_1(x), \dots, \ell_n(x))\ell_k(e_i)\ell_m(e_j).$$

Из этого равенства следует, что в случае, когда система $\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ ортонормирована в $L^2(\gamma)$,

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}(\partial_{e_i}\partial_{e_j}\varphi)^2 = \sum_{k,m=1}^{n}\left[(\partial^2_{m,k}\widetilde{\varphi})(\ell_1(x), \dots, \ell_n(x))\right]^2$$

Отметим также, что для функции $f \in W^{2,p}(\gamma)$ предельным переходом корректно определена соболевская матрица вторых производных $D^2 f$. Также нам будет важно, что оператор Орнштейна – Уленбека L (см. подраздел 2.1.3) корректно определен на пространстве Соболева $W^{2,p}(\gamma)$, $p > 1$, и (см. [8, Теорема 5.4.1]) для каждого $p > 1$ найдется такое число $c(p) > 0$, что

$$\|Lf\|_{L^p(\gamma)} \leqslant c(p)\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} \quad \forall f \in W^{2,p}(\gamma). \tag{4.1.1}$$

Пусть $f = (f_1, \dots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$ — такое измеримое отображение, что его компоненты $f_1, \dots, f_k$ принадлежат пространству Соболева $W^{1,1}(\gamma)$. Компонентами матрицы Маллявэна M_f отображения f являются скалярные произведения

$$m_{i,j}(x) := \langle \nabla f_i(x), \nabla f_j(x)\rangle_{H(\gamma)}.$$

Пусть $A_f := \{a_f^{i,j}\}$ — присоединенная матрица для матрицы M_f, т. е. ее элементы $a_f^{i,j} = M_f^{j,i}$, где $M_f^{j,i}$ — алгебраическое дополнение элемента $m_f^{j,i}$ матрицы M_f. Если $\Delta_f := \det M_f$, то справедливо тождество

$$\Delta_f \cdot M_f^{-1} = A_f. \tag{4.1.2}$$

Отметим, что в случае, когда $k = 1$, $M_f(x) = \Delta_f = |\nabla f(x)|^2_{H(\gamma)}$. Определитель Δ_f отвечает за невырожденность отображения f, необходимую при исследовании регулярности распределения случайного вектора f.

Напомним (см. формулировку леммы 3.2.9), что для неотрицательной измеримой функции g на E мы определили следующую функцию:

$$u_\gamma(g,\varepsilon) := \int_0^\infty (s+1)^{-2}\gamma(g \leqslant \varepsilon s)\, ds.$$

Описанный в предыдущей главе подход Маллявэна изначально использовался для исследования бесконечной гладкости или принадлежности пространствам Соболева плотностей распределений функционалов и случайных векторов, заданных именно на пространстве с гауссовской мерой, и нашел приложения при исследовании регулярности плотностей решений стохастических дифференциальных уравнений (см. [84], [90], [97]). Важную роль при получении описанных результатов играет невырожденность отображения f, а именно интегрируемость функции $\Delta_f^{-\theta}$ при $\theta \geqslant 1$. Кроме того, хорошо известно (см. [10, Теорема 9.2.4], [90, Теорема 2.1.1], [96]), что распределения соболевских отображений $f = (f_1, \ldots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$, $f_j \in W^{1,1}(\gamma)\ \forall j \in \{1, \ldots, k\}$, обладают плотностью при условии, что определитель матрицы Маллявэна $\Delta_f(x)$ отличен от нуля для γ-п.в. точек $x \in E$. В этой главе, при некоторых дополнительных условиях на отображение f, доказаны обобщения этого результата о существовании плотности, а именно, получены оценки регулярности плотности распределения в терминах функции $t \mapsto \gamma(\Delta_f \leqslant t)$, $t > 0$. Кроме того, исследованы вопросы регулярности плотности распределения соболевского отображения $f \in W^{2,p}(\gamma)$ при условии слабой невырожденности отображения, а именно интегрируемости функции $\Delta_f^{-\theta}$ при $\theta \in (0,1)$. Оказывается, в этом случае плотность распределения случайного вектора f принадлежит пространству Никольского с показателем регулярности, зависящем от p и θ.

4.2 Случай одной соболевской функции

Начнем с исследования регулярности плотности распределения одной соболевской функции f (т. е. $k = 1$).

Как и в §3.3, важную роль при исследовании регулярности образов гауссовских мер играют оценки, получаемые с помощью интегрирования

по частям на исходном вероятностном пространстве $(E,\mathcal{B}(E),\gamma)$. В следующей лемме представлена такая оценка, аналогичная оценке из леммы 3.3.2 и следствия 3.3.3.

Лемма 4.2.1. *Пусть $p > 1$, $r > 1$, $a > 0$. Тогда найдется такое число $c(p) > 0$, зависящее только от p, что для каждой функции $f \in W^{2,p}(\gamma)$ с ограниченной числом a соболевской нормой $\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a$, и для каждой функции $g \in W^{1,r}(\gamma) \cap L^\infty(\gamma)$ при каждом $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\mathbb{E}\Big[\frac{\langle \nabla g, \nabla f\rangle_{H(\gamma)}}{|\nabla f|^2_{H(\gamma)} + \varepsilon^2}\Big] \leqslant c(p) a \|g\|_\infty \varepsilon^{-2} u_\gamma(|\nabla f|_{H(\gamma)}, \varepsilon)^{1-1/p}.$$

Доказательство. Для начала предположим, что f, g принадлежат пространству $\mathcal{FC}^\infty$ и имеют вид $f = \widetilde{f}(\ell_1, \dots, \ell_n)$, $g = \widetilde{g}(\ell_1, \dots, \ell_n)$ с ортонормированными ℓ_j в $L^2(\gamma)$. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\frac{\langle \nabla g, \nabla f\rangle_{H(\gamma)}}{|\nabla f|^2_{H(\gamma)} + \varepsilon^2}\Big] &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle \nabla \widetilde{g}, \nabla \widetilde{f}\rangle}{\langle \nabla \widetilde{f}, \nabla \widetilde{f}\rangle + \varepsilon^2}\, d\gamma_n \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{g}\Big(\frac{L\widetilde{f}}{\langle \nabla \widetilde{f}, \nabla \widetilde{f}\rangle + \varepsilon^2} - 2\frac{\langle D^2\widetilde{f}\cdot \nabla \widetilde{f}, \nabla \widetilde{f}\rangle}{(\langle \nabla \widetilde{f}, \nabla \widetilde{f}\rangle + \varepsilon^2)^2}\Big)\, d\gamma_n \\
&\leqslant \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|L\widetilde{f}|}{\langle \nabla \widetilde{f}, \nabla \widetilde{f}\rangle + \varepsilon^2}\, d\gamma_n + 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|D^2\widetilde{f}|_{HS}}{\langle \nabla \widetilde{f}, \nabla \widetilde{f}\rangle + \varepsilon^2}\, d\gamma_n \\
&\leqslant \|g\|_\infty \big(\|L\widetilde{f}\|_{L^p(\gamma_n)} + 2\|D^2\widetilde{f}\|_{L^p(\gamma_n)}\big)\big\|\big(|\nabla \widetilde{f}|^2 + \varepsilon^2\big)^{-1}\big\|_{L^{p'}(\gamma_n)} \\
&\leqslant (c(p)+2)\|g\|_\infty \|f\|_{W^{2,p}(\gamma)}\big\|\big(|\nabla f|^2_H + \varepsilon^2\big)^{-1}\big\|_{p'},
\end{aligned}$$

где был использован оператор Орнштейна – Уленбека L, ассоциированный со стандартной гауссовской мерой γ_n на $\mathbb{R}^n$ и применена оценка (4.1.1). Таким образом,

$$\mathbb{E}\Big[\frac{\langle \nabla g, \nabla f\rangle_{H}}{|\nabla f|^2_{H} + \varepsilon^2}\Big] \leqslant c_1(p)\|g\|_\infty \|f\|_{W^{2,p}(\gamma)}\big\|\big(|\nabla f|^2_H + \varepsilon^2\big)^{-1}\big\|_{p'} \tag{4.2.1}$$

для произвольных функций $f, g \in \mathcal{FC}^\infty$.

Теперь для произвольной функции $f \in W^{2,p}(\gamma)$ рассмотрим последовательность $f^n \in \mathcal{FC}^\infty$, которая сходится к f в $W^{2,p}(\gamma)$. Переходя к подпоследовательности можно считать, что $|\nabla f^n(x) - \nabla f(x)|_{H(\gamma)} \to 0$ для γ-п.в. $x \in E$. Теперь, перейдя к пределу в неравенстве (4.2.1), получаем тоже самое неравенство для произвольной функции $f \in W^{2,p}(\gamma)$ и

произвольной функции $g \in \mathcal{FC}^\infty$. Наконец, для произвольной функции $g \in W^{1,r}(\gamma) \cap L^\infty(\gamma)$ рассмотрим последовательность функций $g^n \in \mathcal{FC}^\infty$, которая сходится к g по норме пространства $W^{1,r}(\gamma)$. Как и ранее, перейдя к подпоследовательности, можно считать, что $g^n(x) \to g(x)$ и $|\nabla g^n(x) - \nabla g(x)|_{H(\gamma)} \to 0$ для γ-п.в. $x \in E$. Рассмотрим такую функцию $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, что $\eta(t) = t$ при $t \in [-\|g\|_\infty, \|g\|_\infty]$ и $|\eta(t)| \leqslant 2\|g\|_\infty$, и рассмотрим новую последовательность функций $\widetilde{g}^n(x) := \eta(g^n(x))$. Тогда

$$|\widetilde{g}^n(x) - g(x)| = |\eta(g^n(x)) - \eta(g(x))| \leqslant C_1 |g^n(x) - g(x)|,$$

где последнее неравенство следует из того, что производная функции η ограничена на $\mathbb{R}$. Кроме того, так как $\eta'(g(x)) = 1$, то

$$\begin{aligned} |\nabla \widetilde{g}^n(x) - \nabla g(x)|_{H(\gamma)} &= |\eta'(g^n(x))\nabla g^n(x) - \eta'(g(x))\nabla g(x)|_{H(\gamma)} \leqslant \\ &\leqslant |\eta'(g^n(x)) - \eta'(g(x))| \cdot |\nabla g^n(x)|_{H(\gamma)} + |\nabla g^n(x) - \nabla g(x)|_{H(\gamma)}. \end{aligned}$$

Из этих оценок получаем, что $\widetilde{g}^n \to g$ п.в. и в $W^{1,r}(\gamma)$. Кроме того, $|\nabla \widetilde{g}^n(x) - \nabla g(x)|_{H(\gamma)} \to 0$ для γ-п.в. $x \in E$ и $\|\widetilde{g}^n\|_\infty \leqslant 2\|g\|_\infty$. Опять перейдем к пределу в неравенстве 4.2.1, получаем аналогичную оценку для каждой функции $f \in W^{2,p}(\gamma)$ и $g \in W^{1,r}(\gamma) \cap L^\infty(\gamma)$. По лемме 3.2.9 имеет место оценка

$$\|(|\nabla f|_H^2 + \varepsilon^2)^{-1}\|_{p'} \leqslant 2\|(|\nabla f|_H + \varepsilon)^{-2}\|_{p'} \leqslant c_2(p)\varepsilon^{-2} u_\gamma(|\nabla f|_H, \varepsilon)^{1-1/p}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}\Big[\frac{\langle \nabla g, \nabla f\rangle_H}{|\nabla f|_H^2 + \varepsilon^2}\Big] \leqslant c(p) a \|g\|_\infty \varepsilon^{-2} u_\gamma(|\nabla f|_H, \varepsilon)^{1-1/p}.$$

для всех функции $f \in W^{2,p}(\gamma)$ и $g \in W^{1,r}(\gamma) \cap L^\infty(\gamma)$. Лемма доказана. $\square$

Получим теперь оценку модуля непрерывности $\sigma(\gamma \circ f^{-1}, \cdot)$.

Теорема 4.2.2. *Пусть $p > 1$, $a > 0$. Тогда найдется такое число $c(p) > 0$, зависящее только от p, что для каждой функции $f \in W^{2,p}(\gamma)$ с ограниченной числом a соболевской нормой $\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a$ при каждом $\varepsilon > 0$ и при каждом $t > 0$ справедлива оценка*

$$\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t) \leqslant c(p) a\, t \varepsilon^{-2} u_\gamma(|\nabla f|_{H(\gamma)}, \varepsilon)^{1-1/p} + 4u_\gamma(|\nabla f|_{H(\gamma)}, \varepsilon).$$

В частности, так как $u_\gamma(|\nabla f|_{H(\gamma)}, \varepsilon) \leqslant 1$, *взяв* $\varepsilon = \sqrt{t}$, *получаем*

$$\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t) \leqslant (c(p)a + 4) u_\gamma\big(|\nabla f|_{H(\gamma)}, \sqrt{t}\big)^{1-1/p}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\varepsilon > 0$, тогда

$$\mathbb{E}[\varphi'(f)] = \mathbb{E}\Big[\varphi'(f)\frac{\langle \nabla f, \nabla f\rangle_{H(\gamma)}}{|\nabla f|^2_{H(\gamma)} + \varepsilon^2}\Big] + \varepsilon^2 \mathbb{E}\Big[\frac{\varphi'(f)}{|\nabla f|^2_{H(\gamma)} + \varepsilon^2}\Big].$$

Первое слагаемое оценим по лемме 4.2.1

$$\mathbb{E}\Big[\varphi'(f)\frac{\langle \nabla f, \nabla f\rangle_{H(\gamma)}}{|\nabla f|^2_{H(\gamma)} + \varepsilon^2}\Big] = \mathbb{E}\Big[\frac{\langle \nabla(\varphi \circ f), \nabla f\rangle_{H(\gamma)}}{|\nabla f|^2_{H(\gamma)} + \varepsilon^2}\Big] \leqslant$$
$$\leqslant c(p)a\|\varphi\|_\infty \varepsilon^{-2} u_\gamma(|\nabla f|_{H(\gamma)}, \varepsilon)^{1-1/p}.$$

Для оценки второго слагаемого применим лемму 3.2.9

$$\mathbb{E}\Big[\frac{\varphi'(f)}{|\nabla f|^2_{H(\gamma)} + \varepsilon^2}\Big] \leqslant 2\|\varphi'\|_\infty \mathbb{E}\Big[\frac{1}{(|\nabla f|_{H(\gamma)} + \varepsilon)^2}\Big] \leqslant$$
$$\leqslant 4\varepsilon^{-2}\|\varphi'\|_\infty u_\gamma(|\nabla f|_{H(\gamma)}, \varepsilon).$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}[\varphi'(f)] \leqslant c(p)a\|\varphi\|_\infty \varepsilon^{-2} u_\gamma(|\nabla f|_{H(\gamma)}, \varepsilon)^{1-1/p} + 4\|\varphi'\|_\infty u_\gamma(|\nabla f|_{H(\gamma)}, \varepsilon).$$

По определению 3.2.2 модуля непрерывности $\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t)$, получаем, что теорема доказана. □

Из предыдущей теоремы получаем следующий условный результат для оценки модуля непрерывности плотности распределения соболевской функции.

Следствие 4.2.3. *Пусть* $p > 1$, $a > 0$ *и пусть* $u\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *— некоторая функция. Тогда найдется такое число* $c(p) > 0$, *зависящее только от* p, *что для каждой функции* $f \in W^{2,p}(\gamma)$, *для которой*

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a, \quad u_\gamma\big(|\nabla f|_{H(\gamma)}, t\big) \leqslant u(t)\ \forall\, t > 0,$$

при каждом $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\sigma\big(\gamma \circ f^{-1}, \varepsilon^2 u(\varepsilon)^{1/p}\big) \leqslant (c(p)a + 4)u(\varepsilon).$$

Доказательство. По теореме 4.2.2 имеем

$$\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t) \leqslant c(p) a\, t\varepsilon^{-2} u(\varepsilon)^{1-1/p} + 4u(\varepsilon).$$

Подставляя $t = \varepsilon^2 u(\varepsilon)^{1/p}$, получаем утверждение следствия. □

Отсюда получаем принадлежность плотности распределения соболевской функции пространству Никольского при условии слабой невырожденности отображения, т. е. при условии интегрируемости $|\nabla f|_{H(\gamma)}^{-1}$ в степени $\theta \in (0,1)$.

Следствие 4.2.4. *Пусть $p > 1$, $a, b > 0$, $\theta \in (0,1)$ и пусть $\alpha := \frac{p\theta}{2p+\theta}$. Существует такое число $C := C(p,a,b,\theta) > 0$, что для каждой соболевской функции $f \in W^{2,p}(\gamma)$, для которой*

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a, \quad \mathbb{E}\big[|\nabla f|_{H(\gamma)}^{-\theta}\big] \leqslant b,$$

плотность ϱ_f распределения $\gamma \circ f^{-1}$ принадлежит пространству Никольского $B_{1,\infty}^{\alpha}(\mathbb{R})$ и при каждом $t > 0$ выполнено неравенство

$$\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t) \leqslant C \cdot t^{\alpha}.$$

Доказательство. Заметим, что условие интегрируемости $|\nabla f|_H^{-\theta}$ влечет оценку

$$u_\gamma(|\nabla f|_{H(\gamma)}, \varepsilon) := \int_0^\infty (s+1)^{-2} \gamma\big(|\nabla f|_{H(\gamma)} \leqslant \varepsilon s\big)\, ds$$
$$\leqslant \varepsilon^\theta b \int_0^\infty s^\theta (s+1)^{-2}\, ds = c(b,\theta)\varepsilon^\theta.$$

Согласно предыдущему следствию 4.2.3 верно неравенство

$$\sigma\big(\gamma \circ f^{-1}, c(b,\theta)\varepsilon^{2+\theta/p}\big) \leqslant (c(p)a + 4) c(b,\theta)\varepsilon^\theta.$$

Взяв $t = c(b,\theta)\varepsilon^{2+\theta/p}$, получаем доказываемую оценку. □

Отметим, что полученный в предыдущем следствии результат о регулярности плотности распределения дает повышение ее интегрируемости в силу теоремы вложения для пространств Никольского – Бесова (см.

включение (3.2.2)), а именно, в условиях предыдущего следствия, плотность $\varrho_f \in L^r(\mathbb{R})$ при $r \in \bigl[1, \frac{2p+\theta}{2p+\theta-p\theta}\bigr)$.

Обсудим теперь результаты о сходимости по вариации слабо сходящейся последовательности распределений соболевских функций. Следующий результат дает простую количественную оценку такому утверждению из работы [13]: сходимость по распределению случайных величин f_n из некоторого фиксированного соболевского класса по гауссовской мере влечет их сходимость по вариации при дополнительном условии равномерной невырожденности функций f_n и равномерной ограниченности их соболевских норм. Отметим, что в работе [13] также был получен аналогичный результат и для случайных векторов с соболевскими компонентами, что будет обсуждаться в следующем параграфе данной главы.

Следствие 4.2.5. *Пусть $p > 1$ и пусть $f_n \in W^{2,p}(\gamma)$ такая последовательность, что*

$$\sup_n \|f_n\|_{W^{2,p}(\gamma)} = a < \infty, \quad \delta(\varepsilon) := \sup_n \gamma(|\nabla f_n|_{H(\gamma)} \leqslant \varepsilon) \to 0.$$

Предположим, что последовательность f_n сходится по распределению к некоторой случайной величине f. Тогда последовательность распределений случайных величин f_n сходятся к распределению случайной величины f по вариации и найдется такое число $C(p,a) > 0$, зависящее лишь от p и от a, что

$$d_{\mathrm{TV}}(f_n, f) \leqslant C(p,a)\Bigl(\bigl[\delta\bigl(d_{\mathrm{KR}}(f_n,f)^{1/8}\bigr)\bigr]^{1-1/p} + d_{\mathrm{KR}}(f_n,f)^{(p-1)/(8p)}\Bigr).$$

Доказательство. По следствию 3.2.7 получаем

$$d_{\mathrm{TV}}(f_n, f_m) \leqslant 6 \sup_n \sigma(\mu \circ f_n^{-1}, \varepsilon) + \varepsilon^{-1} d_{\mathrm{KR}}(f_n, f_m).$$

По теореме 4.2.2

$$\sup_n \sigma(\mu \circ f_n^{-1}, \varepsilon) \leqslant (c(p)a + 4)\Bigl(\int_0^\infty (s+1)^{-2}\delta(s\sqrt{\varepsilon})\, ds\Bigr)^{1-1/p}.$$

Оценим последний интеграл

$$\int_0^\infty (s+1)^{-2}\delta(s\sqrt{\varepsilon})\,ds$$
$$= \int_0^{\varepsilon^{-1/4}} (s+1)^{-2}\delta(s\sqrt{\varepsilon})\,ds + \int_{\varepsilon^{-1/4}}^\infty (s+1)^{-2}\delta(s\sqrt{\varepsilon})\,ds$$
$$\leqslant \delta(\varepsilon^{1/4}) + \frac{\varepsilon^{1/4}}{\varepsilon^{1/4}+1} \leqslant \delta(\varepsilon^{1/4}) + \varepsilon^{1/4}.$$

Подставив $\varepsilon = 2^{-1/2} d_{\mathrm{KR}}(f_n, f_m)^{1/2}$, получаем

$$d_{\mathrm{TV}}(f_n, f_m) \leqslant C(p,a)\Big(\big[\delta\big(d_{\mathrm{KR}}(f_n, f_m)^{1/8}\big)\big]^{1-1/p} + d_{\mathrm{KR}}(f_n, f_m)^{1/8-1/8p}\Big).$$

Перейдя к пределу по m, получаем сформулированную оценку. Следствие доказано. □

В случае условия слабой невырожденности и принадлежности плотности распределения пространству Никольского получаем следующее неравенство между расстояниями Канторовича – Рубинштейна и полной вариации, аналогичное результатам следствий 3.3.5 и 3.3.7.

Следствие 4.2.6. *Пусть $p > 1$, $a, b > 0$, $\theta \in (0,1)$ и пусть $\beta := \frac{p\theta}{(2+\theta)p+\theta}$. Существует такое число $C := C(p,a,b,\theta) > 0$, что для произвольных функций $f, g \in W^{2,p}(\gamma)$, при условии, что*

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a, \quad \|g\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a, \quad \mathbb{E}\big[|\nabla f|_{H(\gamma)}^{-\theta}\big] \leqslant b, \quad \mathbb{E}\big[|\nabla g|_{H(\gamma)}^{-\theta}\big] \leqslant b,$$

выполнено неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(f,g) \leqslant C \cdot d_{\mathrm{KR}}(f,g)^\beta.$$

Доказательство. По следствиям 3.2.7 и 4.2.4 имеет место неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(f,g) \leqslant C(p,a,b,\theta) \cdot d_{\mathrm{KR}}(f,g)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

где $\alpha = \frac{p\theta}{2p+\theta}$. Остается заметить, что $\frac{\alpha}{1+\alpha} = \beta$. Следствие доказано. □

4.3 Случай многомерного отображения с компонентами из пространств Соболева

Перейдем к исследованию регулярности плотности распределения случайного вектора $f = (f_1, \dots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$ с соболевскими компонентами $f_j \in W^{2,p}(\gamma)$.

Начнем со следующего аналога леммы 4.2.1.

Лемма 4.3.1. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $p > 1$, $q > 1$, $r > 1$, $a > 0$, причем*

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 - \frac{1}{q} - \frac{2k+1}{p} > 0.$$

Существует такое число $C := C(k, p, q, a) > 0$, что для каждого отображения $f = (f_1, \dots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$, у которого компоненты $f_i \in W^{2,p}(\gamma)$ и у которого

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} := \max_{i=1,\dots,k} \|f_i\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a,$$

и для каждой пары функций $u \in W^{1,r}(\gamma) \cap L^\infty(\gamma)$, $v \in W^{1,q}(\gamma)$ при каждом $\varepsilon \in (0,1)$ верна оценка

$$\mathbb{E}\Big[\frac{\langle \nabla u, \nabla f_j\rangle_H v}{\Delta_f + \varepsilon}\Big] \leqslant C\|u\|_\infty \|v\|_{W^{1,q}(\gamma)} \varepsilon^{-2} u_\gamma(\Delta_f, \varepsilon)^{1-\frac{1}{q}-\frac{2k+1}{p}}.$$

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 4.2.1, сначала предположим, что u, v, f_i, $i = 1, 2, \dots, k$, принадлежат пространству $\mathcal{FC}^\infty$ и имеют вид $u = \widetilde{u}(\ell_1, \dots, \ell_n)$, $v = \widetilde{v}(\ell_1, \dots, \ell_n)$, $f_i = \widetilde{f}_i(\ell_1, \dots, \ell_n)$ с ортонормированными ℓ_i в $L^2(\gamma)$. Перейдя к распределению вектора $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ и проинтегрировав на $\mathbb{R}^n$ по частям, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\frac{\langle \nabla u, \nabla f_j\rangle_{H(\gamma)} v}{\Delta_f + \varepsilon}\Big] &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle \nabla \widetilde{u}, \nabla \widetilde{f}_j\rangle \widetilde{v}}{\Delta_{\widetilde{f}} + \varepsilon}\, d\gamma_n = \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u}\Big(\frac{\widetilde{v} L\widetilde{f}_j}{\Delta_{\widetilde{f}} + \varepsilon} - \frac{\widetilde{v}\langle \nabla \widetilde{f}_j, \nabla \Delta_{\widetilde{f}}\rangle}{(\Delta_{\widetilde{f}} + \varepsilon)^2} + \frac{\langle \nabla \widetilde{f}_j, \nabla \widetilde{v}\rangle}{\Delta_{\widetilde{f}} + \varepsilon}\Big)\, d\gamma_n \leqslant \\
\leqslant \|u\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{v}||L\widetilde{f}_j|(\Delta_{\widetilde{f}} + \varepsilon)^{-1}\, d\gamma_n &+ \|u\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{v}||\langle \nabla \widetilde{f}_j, \nabla \Delta_{\widetilde{f}}\rangle|(\Delta_{\widetilde{f}} + \varepsilon)^{-2}\, d\gamma_n \\
&+ \|u\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\langle \nabla \widetilde{f}_j, \nabla \widetilde{v}\rangle|(\Delta_{\widetilde{f}} + \varepsilon)^{-1}\, d\gamma_n,
\end{aligned}$$

где L — это оператор Орнштейна – Уленбека, ассоциированный со стандартной гауссовской мерой γ_n на $\mathbb{R}^n$. Оценим теперь каждое слагаемое по отдельности. Для первого слагаемого, применяя неравенство Гельдера и оценку (4.1.1), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{v}||L\widetilde{f}_j|(\Delta_{\widetilde{f}}+\varepsilon)^{-1}\,d\gamma_n \leqslant \|\widetilde{v}\|_q \|L\widetilde{f}_j\|_p \|(\Delta_{\widetilde{f}}+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{1}{1-1/p-1/q}}$$
$$\leqslant c(p)\|v\|_{W^{1,q}(\gamma)}\|f_j\|_{W^{2,p}(\gamma)}\|(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{1}{1-1/p-1/q}}.$$

Аналогично, для третьего слагаемого получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle\nabla\widetilde{f}_j, \nabla\widetilde{v}\rangle|(\Delta_{\widetilde{f}}+\varepsilon)^{-1}\,d\gamma_n \leqslant \|\nabla\widetilde{f}_j\|_p \|\nabla\widetilde{v}\|_q \|(\Delta_{\widetilde{f}}+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{1}{1-1/p-1/q}}$$
$$\leqslant \|f_j\|_{W^{2,p}(\gamma)}\|v\|_{W^{1,q}(\gamma)}\|(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{1}{1-1/p-1/q}},$$

Наконец, для оценки второго слагаемого нам необходимо оценить градиент определителя матрицы. Для начала заметим, что для произвольной матрицы C ее определитель можно оценить следующим образом:

$$|\det C| \leqslant \prod_m |c^m|,$$

где $\{c^m\}$ — столбцы C. В нашем случае $\langle\nabla\widetilde{f}_j, \nabla\Delta_{\widetilde{f}}\rangle = \sum\limits_i \det C_i$, где матрица $C_i = \{c_i^{l,m}\}$ устроена следующим образом: $c_i^{l,m} = \langle\nabla\widetilde{f}_l, \nabla\widetilde{f_m}\rangle$ при $m \neq i$ и $c_i^{l,i} = \langle D^2\widetilde{f}_l\cdot\nabla\widetilde{f}_i, \nabla\widetilde{f}_j\rangle + \langle D^2\widetilde{f}_i\cdot\nabla\widetilde{f}_l, \nabla\widetilde{f}_j\rangle$.

Таким образом,

$$|\langle\nabla\widetilde{f}_j, \nabla\Delta_{\widetilde{f}}\rangle| \leqslant \sum_i |\det C_i| \leqslant \sum_i \prod_r |c_i^m| =$$
$$= \sum_i \Big(\sum_l [\langle D^2\widetilde{f}_l\cdot\nabla\widetilde{f}_i, \nabla\widetilde{f}_j\rangle + \langle D^2\widetilde{f}_i\cdot\nabla\widetilde{f}_l, \nabla\widetilde{f}_j\rangle]^2\Big)^{1/2} \cdot \prod_{m\neq i}\Big(\sum_l \langle\nabla\widetilde{f}_l, \nabla\widetilde{f_m}\rangle^2\Big)^{1/2}$$
$$\leqslant \sum_i \Big(\sum_l |D^2\widetilde{f}_l|_{HS}|\nabla\widetilde{f}_i| + |D^2\widetilde{f}_i|_{HS}|\nabla\widetilde{f}_l|\Big)|\nabla\widetilde{f}_j| \prod_{m\neq i}|\nabla\widetilde{f_m}|\Big(\sum_l |\nabla\widetilde{f}_l|\Big)^{k-1}$$
$$\leqslant \sum_i \Big(\sum_l |D^2\widetilde{f}_l|_{HS}|\nabla\widetilde{f}_i| + |D^2\widetilde{f}_i|_{HS}|\nabla\widetilde{f}_l|\Big)\Big(\sum_l |\nabla\widetilde{f}_l|\Big)^{2k-1} =$$
$$= 2\Big(\sum_i |D^2\widetilde{f}_i|_{HS}\Big)\Big(\sum_l |\nabla\widetilde{f}_l|\Big)^{2k}.$$

Из полученных оценок следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{v}||\langle\nabla\widetilde{f}_j,\nabla\Delta_{\widetilde{f}}\rangle|(\Delta_{\widetilde{f}}+\varepsilon)^{-2}\,d\gamma_n \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_{\mathbb{R}^n}|\widetilde{v}|\Big(\sum_l|\nabla\widetilde{f}_l|\Big)^{2k}\Big(\sum_i|D^2\widetilde{f}_i|_{HS}\Big)(\Delta_{\widetilde{f}}+\varepsilon)^{-2}\,d\gamma_n \leqslant$$
$$\leqslant 2\|\widetilde{v}\|_q\Big\|\sum_l|\nabla\widetilde{f}_l|\Big\|_p^{2k}\Big\|\sum_i|D^2\widetilde{f}_i|_{HS}\Big\|_p\|(\Delta_{\widetilde{f}}+\varepsilon)^{-2}\|_{\frac{1}{1-1/q-(2k+1)/p}} \leqslant$$
$$\leqslant c(k)\|v\|_{W^{1,q}(\gamma)}\|f\|^{2k+1}_{W^{2,p}(\gamma)}\|(\Delta_f+\varepsilon)^{-2}\|_{\frac{1}{1-1/q-(2k+1)/p}},$$

где $c(k)$ — некоторое число, зависящее только от k.

Тем самым, доказано неравенство

$$\mathbb{E}\Big[\frac{\langle\nabla u,\nabla f_j\rangle_H v}{\Delta_f+\varepsilon}\Big] \leqslant$$
$$\leqslant \big(c(p)+1\big)\|u\|_\infty\|v\|_{W^{1,q}(\gamma)}\|f_j\|_{W^{2,p}(\gamma)}\|(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{1}{1-1/p-1/q}}+$$
$$+c(k)\|u\|_\infty\|v\|_{W^{1,q}(\gamma)}\|f\|^{2k+1}_{W^{2,p}(\gamma)}\|(\Delta_f+\varepsilon)^{-2}\|_{\frac{1}{1-1/q-(2k+1)/p}}$$

для произвольных функций $u,v,f_i\in\mathcal{FC}^\infty$, $i=1,2,\ldots,k$. Теперь, для общих функций $f_i\in W^{2,p}(\gamma)$, $v\in W^{1,q}(\gamma)$ возьмем такие последовательности $f_i^n\in\mathcal{FC}^\infty$, $v^n\in\mathcal{FC}^\infty$, что $f_i^n\to f_i$ в $W^{2,p}(\gamma)$, $v^n\to v$ в $W^{1,q}(\gamma)$. Кроме того, не ограничивая общности, можем считать, что $f_i^n(x)\to f_i(x)$, $|\nabla f_i^n(x)-\nabla f_i(x)|_{H(\gamma)}\to 0$ и $v^n(x)\to v(x)$ при γ-п.в. $x\in E$. Переходя к пределу в неравенстве выше, получаем его же, но для произвольных функций $f_i\in W^{2,p}(\gamma)$, $1\leqslant i\leqslant k$, $v\in W^{1,q}(\gamma)$, $u\in\mathcal{FC}^\infty$. Теперь, для произвольной функции $u\in W^{1,r}(\gamma)\cap L^\infty(\gamma)$ возьмем такую последовательность функций $u^n\in\mathcal{FC}^\infty$, что $u^n\to u$ в $W^{1,r}(\gamma)$. Опять, не ограничивая общности, будем считать, что $u^n(x)\to u(x)$ при γ-п.в. $x\in E$. Рассмотрим такую функцию $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, что $\eta(t)=t$ при $t\in[-\|u\|_\infty,\|u\|_\infty]$ и $|\eta(t)|\leqslant 2\|u\|_\infty$. Тогда новая последовательность функций $\eta(u^n)\in\mathcal{FC}^\infty$ также сходится к функции u в $W^{1,r}(\gamma)$ и γ-п.в. Кроме того, $\|\eta(u^n)\|_\infty\leqslant 2\|u\|_\infty$. Вновь перейдя к пределу, получаем, что для произвольных функций $f_i\in W^{2,p}(\gamma)$, $i=1,2,\ldots,k$, $v\in W^{1,q}(\gamma)$,

$u \in W^{1,r}(\gamma) \cap L^\infty(\gamma)$ имеет место неравенство

$$\mathbb{E}\Big[\frac{\langle \nabla u, \nabla f_j\rangle_H v}{\Delta_f + \varepsilon}\Big] \leqslant c(k,p)\|u\|_\infty \|v\|_{W^{1,q}(\gamma)} \big(\|f_j\|_{W^{2,p}(\gamma)} \|(\Delta_f + \varepsilon)^{-1}\|_{\frac{1}{1-1/p-1/q}} + \|f\|^{2k+1}_{W^{2,p}(\gamma)} \|(\Delta_f + \varepsilon)^{-2}\|_{\frac{1}{1-1/q-(2k+1)/p}}\big),$$

где $c(k,p) = 2\big(c(p)+1\big) + 2c(k)$.

По лемме 3.2.9

$$\|(\Delta_f + \varepsilon)^{-1}\|_{\frac{1}{1-1/p-1/q}} \leqslant \varepsilon^{-1} u_\gamma(\Delta_f, \varepsilon)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

и

$$\|(\Delta_f + \varepsilon)^{-2}\|_{\frac{1}{1-1/q-(2k+1)/p}} \leqslant 2\varepsilon^{-2} u_\gamma(\Delta_f, \varepsilon)^{1-\frac{1}{q}-\frac{2k+1}{p}}.$$

Поскольку по условия мы рассматриваем $\varepsilon \leqslant 1$ и $u_\gamma(\Delta_f, \varepsilon) \leqslant 1$, то

$$\varepsilon^{-1} u_\gamma(\Delta_f, \varepsilon)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \leqslant \varepsilon^{-2} u_\gamma(\Delta_f, \varepsilon)^{1-\frac{1}{q}-\frac{2k+1}{p}}.$$

В итоге получаем оценку

$$\mathbb{E}\Big[\frac{\langle \nabla u, \nabla f_j\rangle_H v}{\Delta_f + \varepsilon}\Big] \leqslant C(k,p,q,a)\|u\|_\infty \|v\|_{W^{1,q}(\gamma)} \varepsilon^{-2} u_\gamma(\Delta_f, \varepsilon)^{1-1/q-(2k+1)/p},$$

где $C(k,p,q,a) = c(k,p)(a + 2a^{2k+1})$. Лемма доказана. □

В следующей теореме, с помощью предыдущей леммы, доказывается оценка модуля непрерывности $\sigma(\gamma \circ f^{-1}, \cdot)$ для многомерного соболевского отображения f, аналогичная теореме 4.2.2.

Теорема 4.3.2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $a, p \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $p > 4k-1$. Тогда существует такое число $C := C(p,k,a) > 0$, что для каждого отображения $f = (f_1, \dots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$, для которого $f_i \in W^{2,p}(\gamma)$ и*

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} := \max_{i=1,\dots,k} \big(\|f_i\|_{W^{2,p}(\gamma)}\big) \leqslant a,$$

при каждом $\varepsilon \in (0,1)$ выполнено неравенство

$$\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t) \leqslant Ct\varepsilon^{-2} u_\gamma(\Delta_f, \varepsilon)^{1-\frac{4k-1}{p}} + u_\gamma(\Delta_f, \varepsilon).$$

Доказательство. Пусть вектор $e \in \mathbb{R}^k$, $|e| = 1$, и функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$, $\|\varphi\|_\infty \leqslant t$, $\|\partial_e \varphi\|_\infty \leqslant 1$. Заметим, что справедливо тождество

$$M_f([\partial_1\varphi](f), \dots, [\partial_k\varphi](f)) = \big(\langle \nabla(\varphi\circ f), \nabla f_1\rangle_{H(\gamma)}, \dots, \langle \nabla(\varphi\circ f), \nabla f_k\rangle_{H(\gamma)}\big),$$

где в левой части равенства имеется ввиду обычное произведение матрицы на вектор-столбец. Отсюда, с помощью тождества (4.1.2), получаем

$$[\partial_e\varphi](f)\Delta_f = \big\langle v, A_f e\big\rangle, \quad v = \big(\langle \nabla(\varphi\circ f), \nabla f_1\rangle_{H(\gamma)}, \dots, \langle \nabla(\varphi\circ f), \nabla f_k\rangle_{H(\gamma)}\big),$$

что дает следующее равенство:

$$[\partial_e\varphi](f)\Delta_f = \sum_{i,j} \langle \nabla(\varphi\circ f), \nabla f_j\rangle_{H(\gamma)} a_f^{i,j} e_i,$$

где e_i — координаты вектора $e = (e_1, \dots, e_k)$. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ — фиксировано, тогда

$$\mathbb{E}[\partial_e\varphi(f)] = \mathbb{E}\Big[\partial_e\varphi(f)\frac{\Delta_f}{\Delta_f+\varepsilon}\Big] + \varepsilon\mathbb{E}\Big[\partial_e\varphi(f)(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\Big]. \tag{4.3.1}$$

Рассмотрим первое слагаемое, для которого, как было описано выше, справедливо равенство

$$\mathbb{E}\Big[\partial_e\varphi(f)\frac{\Delta_f}{\Delta_f+\varepsilon}\Big] = \sum_{i,j}\mathbb{E}\Big[\frac{\langle \nabla(\varphi\circ f), \nabla f_j\rangle_H a_f^{i,j} e_i}{\Delta_f+\varepsilon}\Big].$$

Заметим, что элементы $a_f^{i,j}$ матрицы A_f имеют вид

$$\sum \langle \nabla f_{i_1}, \nabla f_{j_1}\rangle_{H(\gamma)} \cdot \ldots \cdot \langle \nabla f_{i_{k-1}}, \nabla f_{j_{k-1}}\rangle_{H(\gamma)}.$$

Поэтому $a_f^{i,j} e_i \in W^{1,\frac{p}{2k-2}}(\gamma)$ и

$$\|a_f^{i,j}e_i\|_{W^{1,\frac{p}{2k-2}}(\gamma)} \leqslant c(k)\|f\|^{2k-2}_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant c(k)a^{2k-2}$$

для некоторого числа $c(k)$, зависящего только от k. Кроме того, функция $\varphi\circ f \in W^{1,p}(\gamma)$ и $\frac{2k-2}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \leqslant 1$, откуда получаем, что

$$\varphi\circ f \in W^{1,\frac{1}{1-(2k-1)/p}}(\gamma)$$

и

$$\|\varphi\circ f\|_{W^{1,\frac{1}{1-(2k-1)/p}}(\gamma)} \leqslant \|\varphi\circ f\|_{W^{1,p}(\gamma)}.$$

Также заметим, что

$$1-\frac{2k-2}{p}-\frac{2k+1}{p}=1-\frac{4k-1}{p}>0.$$

Применив теперь оценку из леммы 4.3.1 с

$$r=(1-(2k-1)/p)^{-1},\quad q=\frac{p}{2k-2},$$

получаем

$$\mathbb{E}\Big[\partial_e\varphi(f)\frac{\Delta_f}{\Delta_f+\varepsilon}\Big]\leqslant C_1(k,p,a)\|\varphi\|_\infty\varepsilon^{-2}u_\gamma(\Delta_f,\varepsilon)^{1-(4k-1)/p},$$

где $C_1(p,k,a)=k^2c(k)C(k,p,p/(2k-2),a)a^{2k-2}$ и где C — константа из оценки в лемме 4.3.1.

Ко второму слагаемому в (4.3.1) применим лемму 3.2.9, которая в этом случае дает оценку

$$\varepsilon\mathbb{E}\Big[\partial_e\varphi(f)(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\Big]\leqslant\|\partial_e\varphi\|_\infty u_\gamma(\Delta_f,\varepsilon)\leqslant u_\gamma(\Delta_f,\varepsilon).$$

Таким образом, сложив две полученных оценки, имеем

$$\mathbb{E}[\partial_e\varphi(f)]\leqslant C_1(p,k,a)\|\varphi\|_\infty\varepsilon^{-2}u_\gamma(\Delta_f,\varepsilon)^{1-(4k-1)/p}+u_\gamma(\Delta_f,\varepsilon).$$

Так как $\|\varphi\|_\infty\leqslant t$, по определению 3.2.2, получаем сформулированную в теореме оценку модуля непрерывности $\sigma(\gamma\circ f^{-1},\cdot)$. Теорема доказана. □

В частности, подставляя в предыдущей теореме $\varepsilon=\sqrt{t}$, получаем следующее утверждение о зависимости регулярности распределения соболевского отображения от скорости стремления к нулю меры $\gamma(\Delta_f\leqslant s)$.

Следствие 4.3.3. *Пусть $k\in\mathbb{N}$, $a>0$ и $p>4k-1$. Тогда найдется такое число $C:=C(p,k,a)>0$, что для каждого соболевского отображения $f=(f_1,\ldots,f_k)\colon E\to\mathbb{R}^k$, $f_i\in W^{2,p}(\gamma)$,*

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)}:=\max_{i=1,\ldots,k}\big(\|f_i\|_{W^{2,p}(\gamma)}\big)\leqslant a,$$

при каждом $t\in(0,1)$ верно неравенство

$$\sigma(\gamma\circ f^{-1},t)\leqslant C(p,k,a)u_\gamma(\Delta_f,\sqrt{t})^{1-(4k-1)/p}.$$

Отметим, что, хотя приведенное выше следствие и иллюстрируют общую зависимость регулярности индуцированной меры от поведения величины $\gamma(\Delta_f \leqslant s)$, тем не менее в конкретных ситуациях оно не дает наилучшую оценку, возможную получить с помощью применения теоремы 4.3.2, и обычно нужно оптимизировать по ε правую часть неравенства из теоремы 4.3.2. Сделаем это в случае условия слабой невырожденности отображения f: функция Δ_f^{-1} интегрируема по мере γ в некоторой малой степени $\theta \in (0,1)$. В этом случае, как и в одномерной ситуации из следствия 4.2.4, получаем принадлежность плотности распределения пространству Никольского.

Следствие 4.3.4. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$, $\theta \in (0,1)$, $p > 4k-1$, и пусть $\alpha := \frac{p\theta}{2p+(4k-1)\theta}$. Найдется такое число $C := C(p,k,a,b,\theta) > 0$, что для каждого отображения $f = (f_1, \ldots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$, где $f_i \in W^{2,p}(\gamma)$,*

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} := \max_{i=1,\ldots,k} \bigl(\|f_i\|_{W^{2,p}(\gamma)}\bigr) \leqslant a, \quad \mathbb{E}[\Delta_f^{-\theta}] \leqslant b,$$

выполнено неравенство

$$\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t) \leqslant C \cdot t^{\alpha} \quad \forall t > 0.$$

В частности, плотность распределения $\gamma \circ f^{-1}$ принадлежит пространству Никольского $B^{\alpha}_{1,\infty}(\mathbb{R}^k)$.

Доказательство. Оценим $u_\gamma(\Delta_f, \varepsilon)$:

$$u_\gamma(\Delta_f, \varepsilon) := \int_0^\infty (s+1)^{-2} \gamma\bigl(\Delta_f \leqslant \varepsilon s\bigr)\, ds \leqslant \varepsilon^\theta b \int_0^\infty s^\theta (s+1)^{-2}\, ds = c_1(b,\theta)\varepsilon^\theta.$$

По теореме 4.3.2 при каждом $\varepsilon \in (0,1)$ выполнены оценки

$$\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t) \leqslant C_1(p,k,a) t\varepsilon^{-2} u_\gamma(\Delta_f, \varepsilon)^{1-(4k-1)/p} + u_\gamma(\Delta_f, \varepsilon) \leqslant C_2(p,k,a,b,\theta)(t\varepsilon^{-2+(1-(4k-1)/p)\theta} + \varepsilon^\theta).$$

Подставив $\varepsilon = t^{\frac{p}{2p+(4k-1)\theta}}$ при $t < 1$ и заметив, что $\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t) \leqslant 1 \leqslant t^\alpha$ при $t \geqslant 1$, получаем заявленную оценку и включение плотности распределения в пространство Никольского. Следствие доказано. $\square$

Теперь мы получим многомерный аналог следствия 4.2.5, дающий количественную оценку скорости сходимости по вариации, сходящейся по распределению последовательности случайных векторов с соболевскими компонентами, при дополнительном условии равномерной невырожденности и равномерной ограниченности соболевских норм. Это усиливает качественные результаты работы [13].

Следствие 4.3.5. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$ и $p > 4k - 1$. Рассмотрим последовательность $f_n = (f_{n,1}, \dots, f_{n,k}) \in W^{2,p}(\gamma)$, для которой*

$$\sup_n \|f_n\|_{W^{2,p}(\gamma)} = a < \infty, \quad \delta(\varepsilon) := \sup_n \gamma(\Delta_{f_n} \leqslant \varepsilon) \to 0.$$

Предположим, что последовательность случайных векторов f_n сходится по распределению к некоторому случайному вектору f. Тогда распределения случайных векторов f_n сходятся по вариации к распределению f и существует такое число $C(p,k,a) > 0$, зависящее только от p, k и a, что выполнена оценка

$$d_{\mathrm{TV}}(f_n, f) \leqslant C(p,k,a)\Big(\big[\delta\big(d_{\mathrm{KR}}(f_n,f)^{\frac{1}{8}}\big)\big]^{1-(4k-1)/p} + d_{\mathrm{KR}}(f_n,f)^{\frac{1-(4k-1)/p}{8}} \Big).$$

Доказательство. По следствию 3.2.7 получаем

$$d_{\mathrm{TV}}(f_n, f_m) \leqslant 6\sqrt{k} \sup_n \sigma(\mu \circ f_n^{-1}, \varepsilon) + \sqrt{k}\varepsilon^{-1} d_{\mathrm{KR}}(f_n, f_m).$$

По следствию 4.3.3 имеем

$$\sup_n \sigma(\mu \circ f_n^{-1}, \varepsilon) \leqslant C_1(p,k,a)\Big(\int_0^\infty (s+1)^{-2} \delta(s\sqrt{\varepsilon})\, ds \Big)^{1-(4k-1)/p}$$

Оценим данный интеграл, как и в следствие 4.2.5:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty (s+1)^{-2}\delta(s\sqrt{\varepsilon})\, ds \\ &\quad = \int_0^{2^{1/8}\varepsilon^{-1/4}} (s+1)^{-2}\delta(s\sqrt{\varepsilon})\, ds + \int_{2^{1/8}\varepsilon^{-1/4}}^\infty (s+1)^{-2}\delta(s\sqrt{\varepsilon})\, ds \\ &\qquad \leqslant \delta(2^{1/8}\varepsilon^{1/4}) + \frac{\varepsilon^{1/4}}{\varepsilon^{1/4} + 2^{1/8}} \leqslant \delta(2^{1/8}\varepsilon^{1/4}) + 2^{-1/8}\varepsilon^{1/4}. \end{aligned}$$

Подставляя $\varepsilon = 2^{-1/2} d_{\mathrm{KR}}(f_n, f_m)^{1/2} \leqslant 1$, получаем

$$d_{\mathrm{TV}}(f_n, f_m) \leqslant C_2(p,k,a)\Big(\big[\delta\big(d_{\mathrm{KR}}(f_n, f_m)^{1/8}\big)\big]^{1-(4k-1)/p} + \\ + d_{\mathrm{KR}}(f_n, f_m)^{1/8-(4k-1)/8p}\Big).$$

Перейдя к пределу при $m \to \infty$, получаем объявленную оценку. Следствие доказано. □

При условии слабой невырожденности получаем более простую оценку между расстояниями по вариации и Канторовича – Рубинштейна, аналогичную следствию 4.2.6 в одномерном случае.

Следствие 4.3.6. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$, $\theta \in (0,1)$, $p > 4k-1$, и пусть*

$$\beta := \frac{p\theta}{(2+\theta)p + (4k-1)\theta}.$$

Существует такое число $C := C(p,k,a,b,\theta) > 0$, что для произвольных отображений $f = (f_1, \ldots, f_k), g = (g_1, \ldots, g_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$, $f_j, g_j \in W^{2,p}(\gamma)$, для которых

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a, \quad \|g\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a, \quad \mathbb{E}[\Delta_f^{-\theta}] \leqslant b, \quad \mathbb{E}[\Delta_g^{-\theta}] \leqslant b,$$

выполнено неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(f,g) \leqslant C d_{\mathrm{KR}}(f,g)^{\beta}.$$

Доказательство. Достаточно применить следствия 3.2.7 и 4.3.4. □

4.4 Оценки расстояния по вариации для соболевских образов гауссовских мер через расстояние в $W^{1,p}(\gamma)$

Пусть $f = (f_1, \ldots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$ и $g = (g_1, \ldots, g_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$ два отображения с соболевикими компонентами. В предыдущем параграфе для случайных векторов такого вида были установлены оценки расстояния по вариации $d_{\mathrm{TV}}(f,g)$ через расстояние Канторовича – Рубинштейна $d_{\mathrm{KR}}(f,g)$ при условии слабой невырожденности отображений. В частности, были получены оценки вида: $d_{\mathrm{TV}}(f,g) \leqslant C d_{\mathrm{KR}}(f,g)^{\beta}$. В данном параграфе

обсудим идейно близкие оценки, в которых вместо расстояния Канторовича – Рубинштейна используется расстояние в $W^{p,1}(\gamma)$.

Начнем с рассмотрения случая $k = 1$, в котором, в частности, усилена оценка из [89, Теорема 4.2].

Теорема 4.4.1. *Пусть $a > 0$, $b > 0$, $\theta \in (0, 2)$, $q \geqslant p > 1$, $1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$, и пусть*

$$\beta := \frac{\theta}{2 + \theta/p + \theta/q}.$$

Существует такое число $C := C(\theta, p, q, a, b) > 0$, что для произвольного отображения $g \in W^{2,q}(\gamma)$, для которого

$$\|g\|_{W^{2,q}(\gamma)} \leqslant a, \quad \mathbb{E}[|\nabla g|^{-\theta}] \leqslant b,$$

и для произвольного $f \in W^{1,p}(\gamma)$ выполнено неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C\|f - g\|^{\beta}_{W^{1,p}(\gamma)}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, причем $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$. Для начала предположим, что $\gamma = \gamma_n$ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$, а функции $f, g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(\tau) d\tau$$

Заметим, что

$$\nabla(\Phi(f) - \Phi(g)) = \varphi(f)\nabla f - \varphi(g)\nabla g = (\varphi(f) - \varphi(g))\nabla g + \varphi(f)(\nabla f - \nabla g).$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$ верны тождества

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\varphi(f) - \varphi(g)] = \\
&\quad = \mathbb{E}\Big[(\varphi(f) - \varphi(g))\frac{|\nabla g|^2}{|\nabla g|^2 + \varepsilon}\Big] + \varepsilon\mathbb{E}\big[(\varphi(f) - \varphi(g))(|\nabla g|^2 + \varepsilon)^{-1}\big] \\
&\qquad = \mathbb{E}\Big[\frac{\langle \nabla(\Phi(f) - \Phi(g)), \nabla g\rangle}{|\nabla g|^2 + \varepsilon}\Big] - \mathbb{E}\Big[\frac{\varphi(f)\langle \nabla f - \nabla g, \nabla g\rangle}{|\nabla g|^2 + \varepsilon}\Big] \\
&\qquad\qquad + \varepsilon\mathbb{E}\big[(\varphi(f) - \varphi(g))(|\nabla g|^2 + \varepsilon)^{-1}\big].
\end{aligned}$$

Оценим теперь каждое слагаемое по отдельности. Для последнего слагаемого имеем оценку

$$\varepsilon\mathbb{E}\big[(\varphi(f)-\varphi(g))(|\nabla g|^2+\varepsilon)^{-1}\big]\leqslant 2\varepsilon\mathbb{E}\big[(|\nabla g|^2+\varepsilon)^{-1}\big].$$

Второе слагаемое оценим следующим образом:

$$\begin{aligned}-\mathbb{E}\Big[\frac{\varphi(f)\langle\nabla f-\nabla g,\nabla g\rangle}{|\nabla g|^2+\varepsilon}\Big]&\leqslant\mathbb{E}\Big[\frac{|\nabla f-\nabla g|\cdot|\nabla g|}{|\nabla g|^2+\varepsilon}\Big]\leqslant\\&\leqslant\|\nabla f-\nabla g\|_p\|\nabla g\|_q\|(|\nabla g|^2+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{1}{1-1/p-1/q}}\leqslant\\&\leqslant\|f-g\|_{W^{1,p}(\gamma)}\|g\|_{W^{2,q}(\gamma)}\|(|\nabla g|^2+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{1}{1-1/p-1/q}}.\end{aligned}$$

Перейдем к оценке первого слагаемого, в котором мы проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\frac{\langle\nabla(\Phi(f)-\Phi(g)),\nabla g\rangle}{|\nabla g|^2+\varepsilon}\Big]&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\langle\nabla(\Phi(f)-\Phi(g)),\nabla g\rangle}{|\nabla g|^2+\varepsilon}\,d\gamma_n=\\&=-\int_{\mathbb{R}^n}(\Phi(f)-\Phi(g))\Big[\frac{Lg}{|\nabla g|^2+\varepsilon}-2\frac{\langle D^2g\cdot\nabla g,\nabla g\rangle}{(|\nabla g|^2+\varepsilon)^2}\Big]d\gamma_n\leqslant\\&\leqslant\|f-g\|_p(\|Lg\|_q+2\||D^2g|_{HS}\|_q)\|(|\nabla g|^2+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{1}{1-1/p-1/q}}\leqslant\\&\leqslant c(p)\|f-g\|_{W^{1,p}(\gamma)}\|g\|_{W^{2,q}(\gamma)}\|(|\nabla g|^2+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{1}{1-1/p-1/q}},\end{aligned}$$

где мы воспользовались оценкой (4.1.1) и липшицевостью функции Φ:

$$|\Phi(f)-\Phi(g)|\leqslant|f-g|.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(f)-\varphi(g)]\leqslant c_1(p)\|f-g\|_{W^{1,p}(\gamma)}\|g\|_{W^{q,2}(\gamma)}\|(|\nabla g|^2+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{1}{1-1/p-1/q}}+\\+2\varepsilon\mathbb{E}\big[(|\nabla g|^2+\varepsilon)^{-1}\big].\end{aligned}$$

Также, как и в доказательстве леммы 4.2.1, предельным переходом обосновывается наличие аналогичной оценки и в случае общей гауссовской меры γ для произвольных $f\in W^{1,p}(\gamma)$, $g\in W^{2,q}(\gamma)$, т. е.

$$\begin{aligned}d_{\mathrm{TV}}(f,g)\leqslant c_1(p)\|f-g\|_{W^{1,p}(\gamma)}\|g\|_{W^{2,q}(\gamma)}\|(|\nabla g|^2_{H(\gamma)}+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{1}{1-1/p-1/q}}+\\+2\varepsilon\mathbb{E}\big[(|\nabla g|^2_{H(\gamma)}+\varepsilon)^{-1}\big].\end{aligned}$$

Теперь заметим, что по лемме 3.2.9

$$2\varepsilon\mathbb{E}\big[(|\nabla g|_H^2+\varepsilon)^{-1}\big]\leqslant$$
$$\leqslant 2u_\gamma(|\nabla g|_H^2,\varepsilon)\leqslant 2\int_0^\infty (s+1)^{-2}\gamma(|\nabla g|_H^2\leqslant\varepsilon s)\,ds\leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon^{\theta/2}\int_0^\infty s^{\theta/2}(s+1)^{-2}\,ds\,\mathbb{E}\big[|\nabla g|_{H(\gamma)}^{-\theta}\big]$$

и

$$\|(|\nabla g|_H^2+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{1}{1-1/p-1/q}}\leqslant e\varepsilon^{-1}\big(u_\gamma(|\nabla g|_H^2,\varepsilon)\big)^{1-1/p-1/q}\leqslant$$
$$\leqslant e\varepsilon^{-1}\varepsilon^{(1-1/p-1/q)\theta/2}\Big(\int_0^\infty s^{\theta/2}(s+1)^{-2}\Big)^{1-1/p-1/q}\big(\mathbb{E}|\nabla g|_H^{-\theta}\big)^{1-1/p-1/q}.$$

Таким образом,

$$d_{\mathrm{TV}}(f,g)\leqslant aC_1(\theta,p,q,b)\|f-g\|_{W^{1,p}(\gamma)}\varepsilon^{-1+(1-1/p-1/q)\theta/2}+C_2(\theta,b)\varepsilon^{\theta/2}.$$

Пусть $\varkappa:=1-(1-1/p-1/q)\theta/2$, тогда возьмем $\varepsilon=\|f-g\|_{W^{1,p}(\gamma)}^{\frac{1}{\varkappa+\theta/2}}$, что даст оценку

$$d_{\mathrm{TV}}(f,g)\leqslant C(\theta,p,q,a,b)\|f-g\|_{W^{p,1}(\gamma)}^{\frac{\theta/2}{\varkappa+\theta/2}}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 4.4.2. *Пусть $a>0$, $b>0$, $\theta\in(0,2)$, $p>2$. Существует такое число $C:=C(\theta,p,a,b)>0$, что для произвольной функции $g\in W^{2,p}(\gamma)$, для которой*

$$\|g\|_{W^{2,p}(\gamma)}\leqslant a,\quad \mathbb{E}[|\nabla g|^{-\theta}]\leqslant b,$$

и для произвольного $f\in W^{1,p}(\gamma)$ выполнено неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(f,g)\leqslant C\|f-g\|_{W^{1,p}(\gamma)}^{\frac{p\theta}{2p+2\theta}}.$$

Перейдем к рассмотрению случая $k>1$. В этом случае нам понадобится следующая техническая лемма об оценке разности определителей двух матриц.

Лемма 4.4.3. *Пусть A и B — две квадратные $k\times k$-матрицы. Тогда*

$$|\det A-\det B|\leqslant k|A-B|_{HS}\big(|A|_{HS}^2+|B|_{HS}^2\big)^{(k-1)/2}.$$

Доказательство. Пусть a_i и b_i, $i = 1, \dots, k$, столбцы матриц A и B соответственно. Определитель матрицы A это полилинейная функция от столбцов матрицы $a_1, \dots, a_k$. Обозначим эту функцию $\Delta(a_1, \dots, a_k)$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
|\det A - \det B| &= |\Delta(a_1, \dots, a_k) - \Delta(b_1, \dots, b_k)| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k} |\Delta(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_k) - \Delta(b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots a_k)| = \\
&= \sum_{i=1}^{k} |\Delta(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i - b_i, a_{i+1}, \dots, a_k)| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k} |b_1| \dots |b_{i-1}||a_i - b_i||a_{i+1}| \dots |a_k| \leqslant \\
&\leqslant k \Big(\sum_{i=1}^{k} |a_i - b_i|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{k} (|a_i|^2 + |b_i|^2) \Big)^{(k-1)/2} = \\
&= k |A - B|_{HS} (|A|_{HS}^2 + |B|_{HS}^2)^{(k-1)/2},
\end{aligned}
$$

где при четвертом переходе мы воспользовались тем, что модуль определителя — это объем параллелепипеда, натянутого на столбцы матрицы. Лемма доказана. □

Перейдем теперь к основной теореме в случае $k > 1$.

Теорема 4.4.4. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$, $\theta \in (0, 1)$, $p > 4k$, и пусть*

$$\beta := \frac{p\theta}{2p + 4\theta k}.$$

Существует такое число $C := C(p, k, a, b, \theta) > 0$, что для произвольного отображения $f = (f_1, \dots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$, $f_j \in W^{2,p}(\gamma)$, для которого

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} := \max \|f_j\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a, \quad \mathbb{E}[\Delta_f^{-\theta}] \leqslant b,$$

и для произвольного отображения $g = (g_1, \dots, g_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$, $g_j \in W^{2,p}(\gamma)$, для которого $\|g\|_{W^{2,p}(\gamma)} := \max \|g_j\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant a$, выполнена оценка

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C \|f - g\|_{W^{1,p}(\gamma)}^{\beta}.$$

Доказательство. Рассмотрим $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$, для которой $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$. Как и в доказательстве предыдущей теоремы 4.4.1, сначала предположим, что $\gamma = \gamma_n$ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$, а $f_j, g_j \in C_b^\infty(\mathbb{R}^k)$. Положим $f^i = (g_1, \ldots, g_i, f_{i+1}, \ldots, f_k)$, $f^0 = f$, $f^k = g$. Заметим, что

$$(\varphi(f) - \varphi(g))\Delta_f = \varphi(f)\Delta_f - \varphi(g)\Delta_g + \varphi(g)(\Delta_g - \Delta_f) =$$
$$= \sum_{i=1}^k (\varphi(f^{i-1})\Delta_{f^{i-1}} - \varphi(f^i)\Delta_{f^i}) + \varphi(g)(\Delta_g - \Delta_f) =$$
$$= \sum_{i=1}^k (\varphi(f^{i-1}) - \varphi(f^i))\Delta_{f^{i-1}} + \sum_{i=1}^k \varphi(f^i)(\Delta_{f^{i-1}} - \Delta_{f^i}) + \varphi(g)(\Delta_g - \Delta_f),$$

где Δ_{f^i} — определитель матрицы Маллявэна отображения f^i. Таким образом, приходим к соотношению

$$\mathbb{E}[\varphi(f) - \varphi(g)] =$$
$$= \sum_{i=1}^k \mathbb{E}\Big[\frac{\Delta_{f^{i-1}}(\varphi(f^{i-1}) - \varphi(f^i))}{\Delta_f + \varepsilon}\Big] + \sum_{i=1}^k \mathbb{E}\Big[\frac{(\Delta_{f^{i-1}} - \Delta_{f^i})\varphi(f^i)}{\Delta_f + \varepsilon}\Big] +$$
$$+ \mathbb{E}\Big[\frac{(\Delta_g - \Delta_f)\varphi(g)}{\Delta_f + \varepsilon}\Big] + \mathbb{E}\big[\varepsilon(\varphi(f) - \varphi(g))(\Delta_f + \varepsilon)^{-1}\big]. \quad (4.4.1)$$

Для последнего слагаемого в (4.4.1) имеем

$$\mathbb{E}\big[\varepsilon(\varphi(f) - \varphi(g))(\Delta_f + \varepsilon)^{-1}\big] \leqslant 2\varepsilon\, \mathbb{E}\big[(\Delta_f + \varepsilon)^{-1}\big].$$

Для оценки предпоследнего слагаемого и второй суммы в (4.4.1) используем лемму 4.4.3, применив которую, получаем оценку

$$|\Delta_g - \Delta_f| \leqslant k\Big(|M_f|_{HS}^2 + |M_g|_{HS}^2\Big)^{(k-1)/2} |M_f - M_g|_{HS}.$$

Заметим, что $|M_f|_{HS}^2 = \sum\limits_{i,j=1}^k \langle \nabla f_i, \nabla f_j\rangle^2 \leqslant \Big(\sum\limits_{i=1}^k |\nabla f_i|^2\Big)^2$. Кроме того, вы-

полнены следующие соотношения:

$$|M_f - M_g|^2_{HS} = \sum_{i,j=1}^{k} \big(\langle \nabla f_i, \nabla f_j\rangle - \langle \nabla g_i, \nabla g_j\rangle\big)^2$$

$$\leqslant 2\sum_{i,j=1}^{k}\big[\big(\langle \nabla f_i, \nabla f_j\rangle - \langle \nabla f_i, \nabla g_j\rangle\big)^2 + \big(\langle \nabla f_i, \nabla g_j\rangle - \langle \nabla g_i, \nabla g_j\rangle\big)^2\big]$$

$$\leqslant 2\sum_{i,j=1}^{k}\big[|\nabla f_i|^2|\nabla f_j - \nabla g_j|^2 + |\nabla f_i - \nabla g_i|^2|\nabla g_j|^2\big]$$

$$= 2\Big[\sum_{i=1}^{k}|\nabla f_i - \nabla g_i|^2\Big]\Big[\sum_{i=1}^{k}\big(|\nabla f_i|^2 + |\nabla g_i|^2\big)\Big].$$

В итоге, имеет место неравенство

$$|\Delta_g - \Delta_f| \leqslant \sqrt{2}\Big(\sum_{i=1}^{k}\big(|\nabla f_i|^2 + |\nabla g_i|^2\big)\Big)^{k-1/2}\Big(\sum_{i=1}^{k}|\nabla f_i - \nabla g_i|^2\Big)^{1/2},$$

Аналогично, выполнена оценка

$$|\Delta_{f^{i-1}} - \Delta_{f^i}| \leqslant 2^k\Big(\sum_{i=1}^{k}(|\nabla f_i|^2 + |\nabla g_i|^2)\Big)^{k-1/2}\Big(\sum_{i=1}^{k}|\nabla f_i - \nabla g_i|^2\Big)^{1/2}.$$

Применяя полученные неравенства, получаем

$$\mathbb{E}\Big[\frac{(\Delta_{f^{i-1}} - \Delta_{f^i})\varphi(f^i)}{\Delta_f + \varepsilon}\Big] \leqslant \mathbb{E}\Big[\frac{|\Delta_{f^{i-1}} - \Delta_{f^i}|}{\Delta_f + \varepsilon}d\Big] \leqslant$$

$$\leqslant 2^k\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{k}(|\nabla f_i|^2 + |\nabla g_i|^2)\Big)^{k-1/2}\Big(\sum_{i=1}^{k}|\nabla f_i - \nabla g_i|^2\Big)^{1/2}(\Delta_f + \varepsilon)^{-1}\Big] \leqslant$$

$$\leqslant C_1(k)\Big(\sum_{i=1}^{k}(\|\nabla f_i\|_p + \|\nabla g_i\|_p)\Big)^{2k-1}\Big(\sum_{i=1}^{k}\|\nabla f_i - \nabla g_i\|_p\Big)\|(\Delta_f + \varepsilon)^{-1}\|_{\frac{p}{p-2k}}.$$

Рассуждая точно также, получаем оценку

$$\mathbb{E}\Big[\frac{(\Delta_g - \Delta_f)\varphi(g)}{\Delta_f + \varepsilon}\Big] \leqslant$$

$$\leqslant C_1(k)\Big(\sum_{i=1}^{k}(\|\nabla f_i\|_p + \|\nabla g_i\|_p)\Big)^{2k-1}\Big(\sum_{i=1}^{k}\|\nabla f_i - \nabla g_i\|_p\Big)\|(\Delta_f + \varepsilon)^{-1}\|_{\frac{p}{p-2k}}.$$

Перейдем теперь к оценке первой суммы в (4.4.1). Рассмотрим функции

$$\Phi_i(y_1,\dots,y_k)=\int_{-\infty}^{y_i}\varphi(y_1,\dots,y_{i-1},t,y_{i+1},\dots,y_k)dt.$$

Заметим, что для каждого $i\in\{1,\dots,k\}$ выполнено равенство

$$\nabla(\Phi_i(f^{i-1}))-\nabla(\Phi_i(f^i))=\sum_{j=1}^{k}\big(\partial_{y_j}\Phi_i(f^{i-1})\nabla f_j^{i-1}-\partial_{y_j}\Phi_i(f^i)\nabla f_j^i\big),$$

что можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{k}\big(\partial_{y_j}\Phi_i(f^{i-1})-\partial_{y_j}\Phi_i(f^i)\big)\nabla f_j^{i-1}+\partial_{y_i}\Phi_i(f^i)(\nabla f_i^{i-1}-\nabla f_i^i)$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\big(\partial_{y_j}\Phi_i(f^{i-1})-\partial_{y_j}\Phi_i(f^i)\big)\nabla f_j^{i-1}+\varphi(f^i)(\nabla f_i-\nabla g_i).$$

Таким образом,

$$\big(\langle\nabla\Phi_i(f^{i-1})-\nabla\Phi_i(f^i),\nabla f_m^{i-1}\rangle\big)_{m=1}^{k}$$
$$=M_{f^{i-1}}\big(\partial_{y_j}\Phi_i(f^{i-1})-\partial_{y_j}\Phi_i(f^i)\big)_{j=1}^{k}+\varphi(f^i)\big(\langle\nabla f_i-\nabla g_i,\nabla f_m^{i-1}\rangle\big)_{m=1}^{k},$$

где $M_{f^{i-1}}$ — матрица Маллявэна функции f^{i-1}. Напомним, что выполнено соотношение $\Delta_f\cdot M_f^{-1}=A_f$ (см. (4.1.2)). Пусть $a_{f^i}^{s,r}$ — элементы матрицы A_{f^i}. Тогда

$$\Delta_{f^{i-1}}(\varphi(f^{i-1})-\varphi(f^i))=\Delta_{f^{i-1}}(\partial_{y_i}\Phi_i(f^{i-1})-\partial_{y_i}\Phi_i(f^i))=$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\langle\nabla\Phi_i(f^{i-1})-\nabla\Phi_i(f^i),\nabla f_j^{i-1}\rangle a_{f^{i-1}}^{j,i}-\varphi(f^i)\sum_{j=1}^{k}\langle\nabla f_i-\nabla g_i,\nabla f_j^{i-1}\rangle a_{f^{i-1}}^{j,i}.$$

Отсюда получаем

$$\mathbb{E}\Big[\frac{\Delta_{f^{i-1}}(\varphi(f^{i-1})-\varphi(f^i))}{\Delta_f+\varepsilon}\Big]=$$
$$=\mathbb{E}\big[(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\sum_{j=1}^{k}\langle\nabla\Phi_i(f^{i-1})-\nabla\Phi_i(f^i),\nabla f_j^{i-1}\rangle a_{f^{i-1}}^{j,i}\big]$$
$$-\mathbb{E}\big[\varphi(f^i)(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\sum_{j=1}^{k}\langle\nabla f_i-\nabla g_i,\nabla f_j^{i-1}\rangle a_{f^{i-1}}^{j,i}\big]. \quad (4.4.2)$$

Напомним, что $a^{j,i}_{f^{i-1}} = M^{i,j}_{f^{i-1}}$ — алгебраические дополнения матрицы $M_{f^{i-1}}$. Поэтому

$$|a^{j,i}_{f^{i-1}}| \leqslant C_2(k)\Big(\sum_{i=1}^{k}(|\nabla f_i| + |\nabla g_i|)\Big)^{2k-2}$$

и вторая часть в выражении (4.4.2) оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&-\mathbb{E}\big[\varphi(f^i)(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\langle\nabla f_i - \nabla g_i, \nabla f_j^{i-1}\rangle a^{j,i}_{f^{i-1}}\big] \leqslant \\
&\qquad\leqslant \mathbb{E}\big[(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}|\nabla f_i - \nabla g_i|\,|\nabla f_j^{i-1}|\,|a^{j,i}_{f^{i-1}}|\big] \leqslant \\
&\leqslant C_3(k)\mathbb{E}\Big[(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{k}(|\nabla f_i| + |\nabla g_i|)\Big)^{2k-1}\Big(\sum_{i=1}^{k}|\nabla f_i - \nabla g_i|^2\Big)^{1/2}\Big] \leqslant \\
&\leqslant C_4(k)\Big(\sum_{i=1}^{k}(\|\nabla f_i\|_p + \|\nabla g_i\|_p)\Big)^{2k-1}\Big(\sum_{i=1}^{k}\|\nabla f_i - \nabla g_i\|_p\Big)\|(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{p}{p-2k}}.
\end{aligned}$$

Наконец, чтобы оценить первую часть в выражении (4.4.2), проинтегрируем по частям

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\langle\nabla\Phi_i(f^{i-1}) - \nabla\Phi_i(f^i), \nabla f_j^{i-1}\rangle a^{j,i}_{f^{i-1}}\big] = \\
&\mathbb{E}\Big[(\Phi_i(f^i) - \Phi_i(f^{i-1}))\Big(\frac{a^{j,i}_{f^{i-1}}Lf_j^{i-1}}{\Delta_f+\varepsilon} - \frac{a^{j,i}_{f^{i-1}}\langle\nabla f_j^{i-1}, \nabla\Delta_f\rangle}{(\Delta_f+\varepsilon)^2} + \frac{\langle\nabla f_j^{i-1}, \nabla a^{j,i}_{f^{i-1}}\rangle}{\Delta_f+\varepsilon}\Big)\Big] \\
&\leqslant \mathbb{E}\Big[|f_i - g_i|\Big(\frac{|a^{j,i}_{f^{i-1}}Lf_j^{i-1}|}{\Delta_f+\varepsilon} + \frac{|a^{j,i}_{f^{i-1}}\langle\nabla f_j^{i-1}, \nabla\Delta_f\rangle|}{(\Delta_f+\varepsilon)^2} + \frac{|\langle\nabla f_j^{i-1}, \nabla a^{j,i}_{f^{i-1}}\rangle|}{\Delta_f+\varepsilon}\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Напомним, что при доказательстве леммы 4.3.1 была установлена следующая оценка на градиент определителя:

$$|\langle\nabla f_j^{i-1}, \nabla\Delta_f\rangle| \leqslant 2\Big(\sum_{i=1}^{k}|D^2 f_i|_{HS}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k}|\nabla f_i| + |\nabla g_i|\Big)^{2k}.$$

Кроме того, алгебраические дополнения $a^{j,i}_{f^{i-1}} \in W^{1,\frac{p}{2k-2}}(\gamma)$ и

$$\|a^{j,i}_{f^{i-1}}\|_{W^{1,\frac{p}{2k-2}}(\gamma)} \leqslant C_5(k)\Big(\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|_{W^{2,p}(\gamma)} + \sum_{i=1}^{k}\|g_i\|_{W^{2,p}(\gamma)}\Big)^{2k-2}.$$

Также, напомним оценку (4.1.1):

$$\|Lf_j^{i-1}\|_p \leqslant c(p)\|f_j^{i-1}\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant c(p)\Big(\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|_{W^{2,p}(\gamma)} + \sum_{i=1}^{k}\|g_i\|_{W^{2,p}(\gamma)}\Big).$$

Оценивая сверху по неравенству Гельдера, получаем

$$\mathbb{E}\Big[|f_i-g_i|\Big(\frac{|a^{j,i}_{f^{i-1}}Lf^{i-1}_j|}{\Delta_f+\varepsilon}+\frac{|a^{j,i}_{f^{i-1}}\langle\nabla f^{i-1}_j,\nabla\Delta_f\rangle|}{(\Delta_f+\varepsilon)^2}+\frac{|\langle\nabla f^{i-1}_j,\nabla a^{j,i}_{f^{i-1}}\rangle|}{\Delta_f+\varepsilon}\Big)\Big]\leqslant$$

$$\leqslant C_6(k,p)\|f_i-g_i\|_p\Big(\sum_{i=1}^k\|f_i\|_{W^{2,p}(\gamma)}+\sum_{i=1}^k\|g_i\|_{W^{2,p}(\gamma)}\Big)^{2k-1}\|(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{p}{p-2k}}$$

$$+C_7(k)\|f_i-g_i\|_p\Big(\sum_{i=1}^k\|f_i\|_{W^{2,p}(\gamma)}+\sum_{i=1}^k\|g_i\|_{W^{2,p}(\gamma)}\Big)^{4k-1}\|(\Delta_f+\varepsilon)^{-2}\|_{\frac{p}{p-4k}}.$$

Суммируя все полученные неравенства, приходим к оценке

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\varphi(f)-\varphi(g)]\leqslant\\&\leqslant C_8(k,p)\|f-g\|_{W^{1,p}(\gamma)}\big(\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)}+\|g\|_{W^{2,p}(\gamma)}\big)^{2k-1}\|(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{p}{p-2k}}+\\&+C_7(k)\|f-g\|_{W^{1,p}(\gamma)}\big(\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)}+\|g\|_{W^{2,p}(\gamma)}\big)^{4k-1}\|(\Delta_f+\varepsilon)^{-2}\|_{\frac{p}{p-4k}}+\\&+2\varepsilon\,\mathbb{E}\big[(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\big].\end{aligned}$$

Также, как и в доказательстве леммы 4.3.1, предельным переходом обосновывается наличие аналогичной оценки и в случае общей гауссовской меры γ для произвольных $f\in W^{2,p}(\gamma)$, $g\in W^{2,p}(\gamma)$. Теперь заметим, что по лемме 3.2.9

$$\|(\Delta_f+\varepsilon)^{-2}\|_{\frac{p}{p-4k}}\leqslant C_1(p,k,b,\theta)\varepsilon^{-2+\frac{\theta(p-4k)}{p}}$$

и

$$2\varepsilon\mathbb{E}\big[(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\big]\leqslant C_1(b,\theta)\varepsilon^{\theta}.$$

Кроме того, $\|(\Delta_f+\varepsilon)^{-1}\|_{\frac{p}{p-2k}}\leqslant\varepsilon^{-1}\leqslant\varepsilon^{-2+\frac{\theta(p-4k)}{p}}$ при $\varepsilon\leqslant 1$. Таким образом, при $\varepsilon\leqslant 1$,

$$d_{\mathrm{TV}}(f,g)\leqslant C_1(p,k,a,b,\theta)\|f-g\|_{W^{1,p}(\gamma)}\varepsilon^{-2+\frac{\theta(p-4k)}{p}}+C_1(b,\theta)\varepsilon^{\theta}.$$

Ясно, что достаточно доказать теорему только в случае $\|f-g\|_{W^{1,p}(\gamma)}\leqslant 1$, так как в противоположном случае доказываемая оценка тривиальна. Если $\|f-g\|_{W^{1,p}(\gamma)}\leqslant 1$, то возьмем $\varepsilon=\|f-g\|^{\alpha}_{W^{1,p}(\gamma)}$, где $\alpha=\frac{p}{2p+4\theta k}$, и получим оценку

$$d_{\mathrm{TV}}(f,g)\leqslant C(p,k,a,b,\theta)\|f-g\|^{\beta}_{W^{1,p}(\gamma)},\quad \beta=\frac{p\theta}{2p+4\theta k}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 4.4.5. Отметим, что в силу определения расстояния Канторовича – Рубинштейна, следствие 4.3.6 также дает оценку, аналогичную полученной в теореме 4.4.4, а именно, при дополнительном предположении, что $\mathbb{E}[\Delta_g^{-\theta}] \leqslant b$, верна оценка

$$d_{\mathrm{TV}}(f,g) \leqslant C d_{\mathrm{KR}}(f,g)^{\beta'} \leqslant C_1 \|f-g\|_1^{\beta'} \leqslant C_1 \|f-g\|_{W^{1,p}(\gamma)}^{\beta'},$$

где $\beta' := \frac{p\theta}{(2+\theta)p+(4k-1)\theta}$. Однако заметим, что $\beta > \beta'$, где $\beta = \frac{p\theta}{2p+4\theta k}$, поэтому теореме 4.4.4 дает более точную оценку.

4.5 Образы гауссовских мер при полиномиальных отображениях

В этом параграфе мы посмотрим, что дают полученные в этой главе результаты в случае, когда $f = (f_1, \ldots, f_k)$ имеет полиномиальные компоненты $f_j \in \mathcal{P}_d(\gamma)$ (см. подраздел 2.1.4). В случае, когда γ — гауссовская мера на конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$, то рассматриваются случайные векторы, компоненты которых являются обычными полиномами степени не выше d от гауссовских случайных векторов. Т.е. рассматриваются случайные векторы f с компонентами вида

$$f_i(X) = \sum_{j_1+\ldots+j_n \leqslant d} a^i_{j_1,\ldots,j_n} X_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{j_n},$$

где X — гауссовский n-мерный случайный вектор с распределением γ.

Напомним, что на пространстве $\mathcal{P}_d(\gamma)$ эквивалентны все L^p и соболевские нормы (см. подраздел 2.1.4). Нам также понадобится следующее так называемое неравенство Карбери – Райта (см. [67], [37] и оценку (5.1.2) в главе 5): существует такое число $c > 0$, что для произвольной гауссовской меры γ и для произвольной функции $g \in \mathcal{P}_d(\gamma)$ выполнено неравенство

$$\gamma(|g| \leqslant t)\big(\mathbb{E}|g|\big)^{1/d} \leqslant cdt^{1/d}.$$

На самом деле, данное неравенство справедливо для более общего класса логарифмически вогнутых мер и будет использоваться и в следующей главе.

Применим теперь общие результаты предыдущих параграфов этой главы к образам гауссовских мер при полиномиальных отображениях.

Теорема 4.5.1. *Пусть $k, d \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $a > 0$, $b > 0$. Тогда для произвольного числа $\alpha < \frac{1}{4k(d-1)}$ найдется такое число $C = C(d, k, a, b, \alpha) > 0$, что для каждого отображения $f = (f_1, \ldots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$ с компонентами $f_i \in \mathcal{P}_d(\gamma)$, для которого*

$$\mathbb{E}[\Delta_f] \geqslant a, \quad \max_{1\leqslant i\leqslant k} \mathbb{D} f_i \leqslant b,$$

верно неравенство

$$\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t) \leqslant C \cdot t^{\alpha} \quad \forall t > 0.$$

В частности, при каждом $\alpha < \frac{1}{4k(d-1)}$ плотность распределения $\gamma \circ f^{-1}$ принадлежит пространству Никольского $B^{\alpha}_{1,\infty}(\mathbb{R}^k)$ и справедлива оценка

$$\|\gamma \circ f^{-1}(\cdot - h) - \gamma \circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 2C \cdot |h|^{\alpha}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathbb{E} f_i = 0$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$. В случае, когда компоненты f_i отображения f имеют вид $f_i(x) = g_i(\ell_1(x), \ldots, \ell_n(x))$, где g_i — многочлены степени не выше d от n переменных, $\ell_j \in E^*$, ясно, что $\Delta_f \in \mathcal{P}_{2k(d-1)}(\gamma)$. В общем случае аналогичное включение следует из-за эквивалентности соболевских и L^p норм на пространстве $\mathcal{P}_d(\gamma)$ и приближения полиномами от конечного числа переменных. Из неравенства Карбери – Райта следует, что при каждом $\theta < \frac{1}{2k(d-1)}$ найдется число $c(\theta, a, k, d)$, для которого

$$\mathbb{E}[\Delta_f^{-\theta}] \leqslant c(\theta, a, k, d).$$

Кроме того, из-за эквивалентности соболевских и L^p норм на пространстве $\mathcal{P}_d(\gamma)$, при каждом $p > 4k - 1$ найдется такое число $c_1(p, b, k, d)$, что

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant c_1(p, b, k, d).$$

Применяя следствие 4.3.4, получаем, что при каждом $\theta < \frac{1}{2k(d-1)}$ и при каждом $p > 4k - 1$ найдется такое число $C_1(p, k, a, b, d, \theta)$, что

$$\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t) \leqslant C_1(p, k, a, b, d, \theta) \cdot t^{\alpha(\theta,p)} \quad \forall t > 0,$$

где $\alpha(\theta, p) = \frac{p\theta}{2p+(4k-1)\theta}$. Заметим, что для каждого $\alpha < \frac{1}{4k(d-1)}$ можно подобрать $p > 4k-1$ и $\theta \in \left(0, \frac{1}{2k(d-1)}\right)$ так, чтобы $\alpha(\theta, p) = \alpha$. Теорема доказана. □

В частности, по теореме вложения пространств Никольского, плотность распределения случайного вектора $f = (f_1, \ldots, f_k)$ с компонентами $f_i \in \mathcal{P}_d(\gamma)$ принадлежит $L^p(\mathbb{R}^k)$ при $1 \leqslant p < \frac{4k^2(d-1)}{4k^2(d-1)-1}$. Кроме того, по следствию 3.2.8, для каждого числа $\alpha < \frac{1}{4k(d-1)}$ найдется такое число $C = C(d, k, a, b, \alpha) > 0$, что для каждого отображения $f = (f_1, \ldots, f_k)\colon E \to \mathbb{R}^k$ с компонентами $f_i \in \mathcal{P}_d(\gamma)$, для которого

$$\mathbb{E}[\Delta_f] \geqslant a, \quad \max_{i \leqslant k} \mathbb{D} f_i \leqslant b,$$

и для каждого борелевского множества A в $\mathbb{R}^k$ выполнена оценка

$$\gamma(f \in A) \leqslant C \cdot \left(\lambda^k(A)\right)^{\alpha/k}.$$

Применяя следствие 3.2.7 и предыдущую теорему, получаем следующую оценку расстояния по вариации через расстояние Канторовича – Рубинштейна на пространстве распределений измеримых многочленов степени не выше d (можно также применить следствие 4.3.6 и рассуждения аналогичные доказательству теоремы 4.5.1).

Теорема 4.5.2. *Пусть $k, d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a > 0$, $b > 0$. Тогда для произвольного числа $\alpha < \frac{1}{4k(d-1)+1}$ найдется такое число $C = C(d, k, a, b, \alpha) > 0$, что для каждой пары отображений $f = (f_1, \ldots, f_k)$, $g = (g_1, \ldots, g_k)$ с компонентами $f_i, g_i \in \mathcal{P}_d(\gamma)$, для которых*

$$\mathbb{E}[\Delta_f] \geqslant a, \quad \mathbb{E}[\Delta_g] \geqslant a, \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \mathbb{D} f_i \leqslant b, \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \mathbb{D} g_i \leqslant b$$

выполнено неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C \cdot d_{\mathrm{KR}}(f, g)^{\alpha}.$$

Наконец, теорема 4.4.4 дает следующую оценку расстояния по вариации через расстояние в пространстве $L^2(\gamma)$ для отображений с компонентами из $\mathcal{P}_d(\gamma)$.

Теорема 4.5.3. *Пусть $k, d \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $a > 0$, $b > 0$. Тогда для произвольного числа $\beta < \frac{1}{4k(d-1)}$ найдется такое число $C = C(d, k, a, b, \alpha) > 0$, что для каждого отображения $f = (f_1, \ldots, f_k)$, с компонентами $f_i \in \mathcal{P}_d(\gamma)$, для которого*

$$\mathbb{E}[\Delta_f] \geqslant a, \quad \max_{1\leqslant i\leqslant k} \mathbb{D}f_i \leqslant b,$$

и для каждого отображения $g = (g_1, \ldots, g_k)$, $g_i \in \mathcal{P}_d(\gamma)$, выполнено неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C \cdot \|f - g\|_2^{\beta} := C \cdot \Big(\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{k} |f_i - g_i|^2\Big]\Big)^{\beta/2}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathbb{E}f_i = 0$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$. Как и в доказательстве теоремы 4.5.1 замечаем, что при каждом $\theta < \frac{1}{2k(d-1)}$ выполнена оценка

$$\mathbb{E}[\Delta_f^{-\theta}] \leqslant c(\theta, a, k, d)$$

и что при каждом $p > 4k$ выполнено неравенство

$$\|f\|_{W^{2,p}(\gamma)} \leqslant c_1(p, b, k, d).$$

Утверждение теоремы можно доказывать только в случае $\|f - g\|_2 \leqslant 1$, так как в ином случае $d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant 2 \leqslant 2\|f - g\|_2^{\alpha}$. Заметим, что в случае $\|f - g\|_2 \leqslant 1$ выполнено неравенство

$$\mathbb{D}g_i \leqslant \mathbb{D}f_i + 2\sqrt{\mathbb{D}f_i} \cdot \sqrt{\mathbb{D}[g_i - f_i]} + \mathbb{D}[g_i - f_i] \leqslant b + 2\sqrt{b} + 1.$$

Отсюда, в силу эквивалентности соболевских и L^p норм на пространстве $\mathcal{P}_d(\gamma)$, по теореме 4.4.4 для некоторого числа $C_1(p, k, a, b, d, \theta)$ верно неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C_1(p, k, a, b, d, \theta) \cdot \|f - g\|_2^{\beta(\theta,p)},$$

где $\beta(\theta, p) = \frac{p\theta}{2p+4\theta k}$. Заметим, что для каждого $\beta < \frac{1}{4k(d-1)}$ можно подобрать $p > 4k$ и $\theta \in \big(0, \frac{1}{2k(d-1)}\big)$ так, чтобы $\beta(\theta, p) = \beta$. Теорема доказана. □

Замечание 4.5.4. Отметим, что в случае $k = 1$ можно было бы точно также применить теоремы 4.2.2 и 4.4.1 и получить аналогичные результаты для распределений функций (а не многомерных отображений, которые сформулированы выше) $f \in \mathcal{P}_d(\gamma)$, но в следующей главе будут получены общие результаты для логарифмически вогнутых мер, из которого следуют более точные результат и для гауссовской меры. К свойствам распределении функций $f \in \mathcal{P}_d(\gamma)$ мы еще вернемся в параграфе 5.4.

Глава 5

Полиномиальные образы логарифмически вогнутых мер

5.1 Логарифмически вогнутые меры

В настоящей главе речь в основном пойдет о регулярности полиномиальных образов общих логарифмически вогнутых мер. Напомним основные понятия, обозначения и свойства.

Вероятностная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^n$ называется логарифмически вогнутой, если она задана плотностью вида e^{-V} относительно меры Лебега на некотором аффинном подпространстве L, где $V\colon\ L \to (-\infty, +\infty]$ выпуклая функция.

Приведем несколько ключевых примеров логарифмически вогнутых мер.

Пример 5.1.1.

1) Гауссовская мера γ на $\mathbb{R}^n$ будет логарифмически вогнутой с функцией $V(x) = \langle Cx, x\rangle + \langle b, x\rangle + a$, где C — положительно определенная матрица.

2) Пусть K — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, λ^n — стандартная мера Лебега на $\mathbb{R}^n$. Тогда мера $\mu_K(dx) = \frac{1}{\lambda^n(K)}\mathrm{I}_K(x)\lambda^n(dx)$ будет логарифмически вогнутой с функцией

$$V(x) = \begin{cases} +\infty,\, x \notin K \\ \ln \lambda^n(K),\, x \in K. \end{cases}$$

3) Пусть случайная величина X_1 имеет гамма распределение $\Gamma(r, 1)$ с

параметром $r \geqslant 1$, т. е. ее распределение задано плотностью

$$\varrho_{X_1}(x) = \tfrac{1}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-x} \mathrm{I}_{\{x \geqslant 0\}}.$$

Тогда распределение X_1 будет логарифмически вогнутой мерой. Более того, если $(X_1, \ldots, X_n)$ — случайный вектор с независимыми компонентами, имеющими $\Gamma(r, 1)$ распределение с $r \geqslant 1$, то распределение такого вектора также будет логарифмически вогнутой мерой на $\mathbb{R}^n$.

4) Пусть случайная величина X_1 имеет бета распределение с параметрами $a \geqslant 1, b \geqslant 1$, т. е. ее распределение задано плотностью

$$\varrho_{X_1}(x) = \tfrac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \mathrm{I}_{\{x \in [0,1]\}}.$$

Тогда распределение X_1 будет логарифмически вогнутой мерой. Более того, если $(X_1, \ldots, X_n)$ — случайный вектор с независимыми компонентами, имеющими бета распределение с параметрами $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, то распределение такого вектора также будет логарифмически вогнутой мерой на $\mathbb{R}^n$.

Отметим (см. [62], [63]), что мера μ на $\mathbb{R}^n$ будет логарифмически вогнутой тогда и только тогда, когда для произвольных борелевских множеств A, B выполнено неравенство:

$$\mu(tA + (1-t)B) \geqslant \mu(A)^t \mu(B)^{1-t} \quad \forall\, t \in [0,1],$$

где под суммой множеств понимается обычная сумма по Минковскому, т. е. $tA + (1-t)B := \{ta + (1-t)b \colon a \in A, b \in B\}$. В частности, линейные образы логарифмически вогнутых мер также будут логарифмически вогнутыми мерами.

В бесконечномерном случае вероятностная радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве E называется логарифмически вогнутой, если для произвольного конечного набора функционалов $\ell_1, \ldots, \ell_n \in E^*$ случайный вектор $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ имеет логарифмически вогнутое распределение, т. е. образ меры μ для каждой конечномерной проекции будет логарифмически вогнутой мерой на конечномерном пространстве (см. [10, Раздел 4.3]).

В этом параграфе будем использовать стандартные обозначения для L^p-нормы относительно меры μ:

$$\|f\|_p = \Big(\int_E |f(x)|^p \,\mu(dx)\Big)^{1/p} = \big(\mathbb{E}|f|^p\big)^{1/p},$$

причем будем использовать такое же обозначение при всех $p \in (0, +\infty)$. Кроме того, определим «среднее геометрическое»

$$\|f\|_0 = \exp\Big(\int_E \ln|f(x)|\,\mu(dx)\Big) = \lim_{p\to 0}\|f\|_p.$$

Отметим, что «среднее геометрическое» обладает мультипликативным свойством, т. е. $\|f\cdot g\|_0 = \|f\|_0\cdot\|g\|_0$. Для краткости, дисперсию f будем обозначать символом σ_f^2, т. е.

$$\sigma_f^2 = \mathbb{D}f = \int_E \Big(f(x) - \int_E f(y)\,\mu(dy)\Big)^2 \mu(dx).$$

Как и в гауссовском случае определим пространство $\mathcal{P}_d(\mu)$ измеримых многочленов степени не выше d, как замыкание в $L^2(\mu)$ множества функций f, которые для некоторого $n\in\mathbb{N}$ и некоторых $\ell_1,\dots,\ell_n\in E^*$ имеют вид $f = P(\ell_1,\dots,\ell_n)$, где P — алгебраический многочлен степени не выше d от n переменных. В работе [1] показано, что функции из класса $\mathcal{P}_d(\mu)$ имеют версию, которая будет многочленом степени не выше d уже в обычном алгебраическом смысле, т. е. будет иметь вид

$$B_0 + B_1(x) + B_2(x,x) + \ldots + B_d(x,\dots,x),$$

где функции $B_j\colon E^j\to\mathbb{R}$, $(x^1,\dots,x^j)\mapsto B_j(x^1,\dots,x^j)$ — это j-линейные функции на E^j.

В случае логарифмически вогнутой меры μ на пространстве $\mathcal{P}_d(\mu)$ эквивалентны все L^p-нормы, а именно (см. [59], [6], [37], [67]), существует такое число $c>0$, что для каждой функции $f\in\mathcal{P}_d(\mu)$ выполнено следующее неравенство (см. [67, следствие на стр. 234]):

$$\|f\|_q \leqslant (c\max\{qd,1\})^d\|f\|_p, \text{ при } 0\leqslant p<q<\infty. \tag{5.1.1}$$

Более того, если мы хотим сравнивать только L^q и L^1 нормы, то справедлива более точная оценка (см. [6, Теорема 3]): существует такое число

$c > 0$, что для каждой функции $f \in \mathcal{P}_d(\mu)$ выполнена оценка

$$\|f\|_q \leqslant (cq)^d \|f\|_1, \text{ при } 1 < q < \infty.$$

В частности, в определении пространства $\mathcal{P}_d(\mu)$ замыкание можно было брать в произвольном пространстве $L^p(\mu)$. Также, сформулируем в общем, логарифмически вогнутом, случае неравенство Карбери – Райта (см. [67, следствие после теоремы 2], это неравенство также выводится из результатов работы [37]): существует такое число $c > 0$, что для каждого элемента $f \in \mathcal{P}_d(\mu)$ при каждом $t > 0$ выполнена оценка

$$\mu\big(x\colon |f(x)| \leqslant t\big)\big(\mathbb{E}|f|\big)^{1/d} \leqslant cd \cdot t^{1/d}. \tag{5.1.2}$$

Логарифмически вогнутая мера μ на $\mathbb{R}^n$ называется изотропной, если она центрирована и имеет единичную матрицу ковариаций, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, h\rangle \, \mu(dx) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, h\rangle^2 \, \mu(dx) = |h|^2 \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n,$$

где $|h|$ — стандартная евклидова норма на $\mathbb{R}^n$. В частности, изотропная логарифмически вогнутая мера μ обязана быть абсолютно непрерывной относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^n$. С другой стороны, для каждой абсолютно непрерывной логарифмически вогнутой меры μ существует невырожденное линейное преобразование T, для которого мера $\mu \circ T^{-1}$ будет изотропной логарифмически вогнутой мерой на $\mathbb{R}^n$.

Нам понадобятся несколько известных результатов о свойствах плотностей изотропных логарифмически вогнутых мер. Во-первых (см. [76, Следствие 2.4]), существуют такие числа $c_1, c_2 > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждой изотропной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ с плотностью ϱ_μ выполнено неравенство

$$\varrho_\mu(x) \leqslant \varrho_\mu(0) e^{c_1 n - c_2|x|}. \tag{5.1.3}$$

Во-вторых (см. [77, Следствие 5.3 и доказательство Леммы 5.4]), для каждого $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и каждой изотропной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ с плотностью ϱ_μ имеет место включение

$$\big\{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \leqslant \tfrac{1}{10}\big\} \subset \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon \varrho_\mu(x) \geqslant e^{-20n}\varrho_\mu(0)\big\}. \tag{5.1.4}$$

Также известно (см. [58], [75]), что для логарифмически вогнутых мер на $\mathbb{R}^n$ справедливо следующее неравенство Пуанкаре: существует такое число $R > 0$, что для произвольной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ и для произвольной локально липшицевой функции f на $\mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\mathbb{D}f \leqslant R\sigma^2(\mu) \cdot \mathbb{E}|\nabla f|^2, \tag{5.1.5}$$

где

$$\sigma^2(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - x_0|^2 \, \mu(dx), \quad x_0 = \int_{\mathbb{R}^n} x \, \mu(dx).$$

Наконец, абсолютно непрерывные логарифмически вогнутые меры дифференцируемы по Скороходу вдоль каждого вектора из $\mathbb{R}^n$ (иными словами, плотность логарифмически вогнутой меры — функция ограниченной вариации), т. е. для каждой абсолютно непрерывной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ и для каждого вектора $\theta \in \mathbb{R}^n$ найдется такая ограниченная борелевская мера $D_\theta\mu$ на $\mathbb{R}^n$, что выполнена следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_\theta \varphi(x) \, \mu(dx) = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, D_\theta\mu(dx) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

В работах [31] и [32] (см. также [10, Раздел 4.3]) для логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ с плотностью ϱ_μ была посчитана норма вариации производной по Скороходу вдоль вектора $\theta \in \mathbb{R}^n$:

$$\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}} = 2|\theta| \int_{\langle\theta\rangle^\perp} \max_t \varrho_\mu(x + t\theta) \, dx, \tag{5.1.6}$$

где $\langle\theta\rangle^\perp$ — ортогональное дополнение линейного подпространства, порожденного вектором θ.

Основным техническим средством доказательства ключевых результатов данной главы будет так называемая локализационная лемма в форме Фраделизи – Гюдона (Fradelizi – Guédon) из работы [69], обобщающая аналогичное утверждение из работ [81], [75].

Теорема 5.1.2 (Локализационная лемма с p ограничениями, см. [69])**.** *Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, $\eta_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant p$ — непрерывные функции. Рассмотрим множество $P_{\eta_1,\ldots,\eta_p}$ всех логарифмически*

вогнутых мер с носителем в K, для которых

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_i \, d\mu \geqslant 0, \ \forall i = 1, \ldots, p.$$

Пусть $\Phi\colon P(K) \to \mathbb{R}$ — выпуклая непрерывная функция на пространстве $P(K)$ всех вероятностных борелевских мер на K наделенных слабой топологией. Тогда супремум $\sup\limits_{\mu \in P_{\eta_1,\ldots,\eta_p}} \Phi(\mu)$ достигается на таких логарифмически вогнутых мерах, что минимальное аффинное подпространство, содержащее носитель μ имеет размерность не выше p.

Локализационная лемма позволяет сводить доказательство многомерных неравенств к проверке неравенств в малой размерности. В частности, локализационную лемму удобно применять при работе с многочленами, так как ограничение многочлена на аффинное подпространство будет снова многочленом на этом подпространстве со степенью не выше степени исходного многочлена. Отметим, что функционал Φ у нас будет иметь совсем простой вид, а именно

$$\Phi(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta \, d\mu + c$$

для некоторой непрерывной функции η на $\mathbb{R}^n$ и некоторого числа $c \in \mathbb{R}$.

5.2 Принадлежность плотностей образов под действием полиномов пространствам Никольского

В этом параграфе будет установлена принадлежность пространствам Никольского плотностей распределений измеримых многочленов степени не выше d на пространствах с логарифмически вогнутыми мерами. Кроме того, будет получена точная оценка соответсвующего модуля непрерывности. Основной результат данного параграфа приведен в следующей теореме.

Теорема 5.2.1. *Существует такое число $C > 0$, что для каждого числа $d \in \mathbb{N}$, для каждой логарифмически вогнутой меры μ на локально выпук-*

лом пространстве E и для каждого непостоянного измеримого многочлена $f \in \mathcal{P}_d(\mu)$ степени не выше d имеет место неравенство

$$\sigma(\mu \circ f^{-1}, t) \leqslant Cd^2[\mathbb{D}f]^{-1/2d} \cdot t^{1/d}.$$

В частности, если f — непостоянный измеримый многочлен степени не выше d, то распределение $\mu \circ f^{-1}$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$, а плотность ϱ_f этой меры $\mu \circ f^{-1}$ принадлежит пространству Никольского $B^{1/d}_{1,\infty}(\mathbb{R})$, причем

$$[\varrho_f]_{B^{1/d}_{1,\infty}} \leqslant 2Cd^2[\mathbb{D}f]^{-1/2d},$$

что равносильно оценке

$$[\mathbb{D}f]^{1/2d}\|\mu \circ f^{-1}(\cdot - h) - \mu \circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 2Cd^2 \cdot |h|^{1/d} \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что в случае меры μ на конечномерном пространстве, сам факт принадлежности плотности распределения многочлена степени не выше d пространству Никольского уже установлен в теореме 3.3.1. Тем не менее в теореме 5.2.1 получена более точная оценка нормы в пространстве Никольского, позволяющая, осуществив предельный переход, получить аналогичную оценку и в бесконечномерном случае.

Сперва докажем следующую техническую лемму, чье доказательство похоже на доказательство теоремы 3.3.1, но вместо индуктивного шага мы будем применять неравенство Карбери – Райта (5.1.2).

Лемма 5.2.2. *Существует такое число $C > 0$, что для каждой абсолютно непрерывной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$, для каждого $d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, для каждого многочлена f степени не выше d на $\mathbb{R}^n$, для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и для каждого единичного вектора θ выполнено неравенство*

$$\|\partial_\theta f\|_1^{1/d}\mathbb{E}[\varphi'(f)] \leqslant Cd\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}^{1/d} \cdot \|\varphi\|_\infty^{1/d}\|\varphi'\|_\infty^{1-1/d}.$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $\|\partial_\theta f\|_1^{1/d} \neq 0$ (иначе оценка тривиальна). Как и при доказательстве теоремы 3.3.1, заметим, что

$$\mathbb{E}[\varphi'(f)] = \mathbb{E}\Big[\frac{(\partial_\theta f)^2}{(\partial_\theta f)^2 + \varepsilon}\varphi'(f)\Big] + \varepsilon\mathbb{E}\big[\varphi'(f)((\partial_\theta f)^2 + \varepsilon)^{-1}\big].$$

Первое слагаемое по следствию 3.3.3 оценивается сверху выражением

$$(\pi d+1)\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}\|\varphi\|_\infty\varepsilon^{-1/2}.$$

Для второго слагаемого, по лемме 3.2.9 и по неравенству Карбери – Райта (5.1.2) выполнены оценки

$$\begin{aligned}\varepsilon\mathbb{E}\big[\varphi'(f)((\partial_\theta f)^2+\varepsilon)^{-1}\big] &\leqslant \varepsilon\|\varphi'\|_\infty\mathbb{E}\big[((\partial_\theta f)^2+\varepsilon)^{-1}\big]\\ &\leqslant \|\varphi'\|_\infty\int_0^\infty (s+1)^{-2}\mu(x\colon (\partial_\theta f(x))^2<\varepsilon s)\,ds\\ &\leqslant cd\|\varphi'\|_\infty\|\partial_\theta f\|_1^{-1/(d-1)}\varepsilon^{1/(2d-2)}\int_0^\infty (s+1)^{-2}s^{1/(2d-2)}\,ds\\ &\leqslant 3cd\|\varphi'\|_\infty\|\partial_\theta f\|_1^{-1/(d-1)}\varepsilon^{1/(2d-2)},\end{aligned}$$

где была использована следующая оценка интеграла:

$$\int_0^\infty (s+1)^{-2}s^{1/(2d-2)}\,ds\leqslant 1+\int_1^\infty s^{-2+1/(2d-2)}\,ds=1+\frac{2d-2}{2d-3}\leqslant 3.$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}[\varphi'(f)]\leqslant(\pi d+1)\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}\|\varphi\|_\infty\varepsilon^{-1/2}+3cd\|\varphi'\|_\infty\|\partial_\theta f\|_1^{-1/(d-1)}\varepsilon^{1/(2d-2)}.$$

Взяв

$$\varepsilon^{1/2}=(\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}\|\varphi\|_\infty)^{\frac{d-1}{d}}\|\varphi'\|_\infty^{\frac{1-d}{d}}\|\partial_\theta f\|_1^{\frac{1}{d}},$$

получаем неравенство

$$\mathbb{E}[\varphi'(f)]\leqslant Cd\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}^{1/d}\|\varphi\|_\infty^{1/d}\|\varphi'\|_\infty^{1-1/d}\|\partial_\theta f\|_1^{-1/d},$$

где $C:=\max\{\pi+1,3c\}$.

Лемма доказана. □

Следствие 5.2.3. *Существует такое число $C>0$, что для каждого числа $n\in\mathbb{N}$, для каждой абсолютно непрерывной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$, для каждого $d\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, для каждого многочлена f степени не выше d на $\mathbb{R}^n$ и для каждой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ выполнено неравенство*

$$\big(\mathbb{E}\big[|\nabla f|^{1/d}\big]\big)\mathbb{E}[\varphi'(f)]\leqslant Cdn\max_{|\theta|=1}\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}^{1/d}\cdot\|\varphi\|_\infty^{1/d}\|\varphi'\|_\infty^{1-1/d}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $\mathbb{E}[\varphi'(f)] > 0$. По неравенству Гельдера

$$\mathbb{E}\big[|\langle \nabla f, \theta\rangle|^{1/d}\big] \leqslant \Big(\mathbb{E}\big[|\langle \nabla f, \theta\rangle|\big]\Big)^{1/d}.$$

Оценивая в неравенстве из леммы 5.2.2 значение $\|D_\theta \mu\|_{\mathrm{TV}}$ максимумом по сфере и интегрируя по нормированной поверхностной мере σ_n на сфере, получаем

$$\Big(\int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle \nabla f, \theta\rangle|^{1/d}\, d\mu\, \sigma_n(d\theta)\Big) \cdot \mathbb{E}[\varphi'(f)] \\ \leqslant Cd \max_{|\theta|=1} \|D_\theta \mu\|_{\mathrm{TV}}^{1/d} \cdot \|\varphi\|_\infty^{1/d} \|\varphi'\|_\infty^{1-1/d}.$$

Заметим, что

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle \nabla f, \theta\rangle|^{1/d}\, d\mu\, \sigma_n(d\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^{n-1}} |\langle \nabla f, \theta\rangle|^{1/d}\, \sigma_n(d\theta)\, d\mu \\ = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^{1/d}\, d\mu\Big) \cdot \Big(\int_{S^{n-1}} |\langle \theta, e_1\rangle|^{1/d}\, \sigma_n(d\theta)\Big),$$

где e_1 — первый базисный вектор $(1, 0, \ldots, 0)$. Так как $|\langle \theta, e_1\rangle| \leqslant 1$, то последний интеграл можно оценить следующим образом:

$$\int_{S^{n-1}} |\langle \theta, e_1\rangle|^{1/d}\, \sigma_n(d\theta) \geqslant \int_{S^{n-1}} |\langle \theta, e_1\rangle|^2\, \sigma_n(d\theta) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} |\theta|^2\, \sigma_n(d\theta) = \frac{1}{n}.$$

Следствие доказано. □

Далее нам понадобится следующая оценка производной по Скороходу изотропной логарифмически вогнутой меры, которая является простым следствием леммы 11 из работы [68].

Лемма 5.2.4. *Существует такое число $C > 0$, что для каждой изотропной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ выполнена оценка*

$$\max_{|\theta|=1} \|D_\theta \mu\|_{\mathrm{TV}} \leqslant Cn.$$

Доказательство. В [68, Лемма 11] было установлено, что для каждой изотропной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ с бесконечно дифференцируемой плотностью $\varrho_\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varrho_\mu(x)|\, dx \leqslant Cn.$$

Пусть теперь μ — произвольная изотропная логарифмически вогнутая мера на $\mathbb{R}^n$ и пусть случайный вектор X имеет распределение μ. Рассмотрим стандартный случайный гауссовский вектор Z с распределением γ_n, независимый с вектором X. Пусть μ_ε — распределение случайного вектора $\sqrt{1-\varepsilon}X + \sqrt{\varepsilon}Z$, тогда мера μ_ε есть образ меры $\mu \otimes \gamma_n$ при линейном отображении и поэтому сама является логарифмически вогнутой мерой. Кроме того, из определения μ_ε ясно, что это изотропная мера с плотностью $\varrho_{\mu_\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и для произвольного $\theta \in \mathbb{R}^n$, $|\theta| = 1$, имеют место следующие соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_\theta \varphi(\sqrt{1-\varepsilon}x + \sqrt{\varepsilon}z)\,\mu(dx)\gamma_n(dz) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\theta\varphi(y)\varrho_{\mu_\varepsilon}(y)\,dy =$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\langle \nabla \varrho_{\mu_\varepsilon}(y), \theta\rangle\,dy \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varrho_{\mu_\varepsilon}(y)|\,dy \leqslant Cn\|\varphi\|_\infty.$$

Устремив теперь $\varepsilon \to 0$, получаем оценку

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_\theta\varphi\,d\mu \leqslant Cn\|\varphi\|_\infty \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^n, |\theta| = 1,$$

что равносильно оценке из формулировки леммы. Лемма доказана. □

Теперь комбинация следствия 5.2.3 и леммы 5.2.4 дает следующее важное утверждение, которое аналогично формулировке теоремы 5.2.1, но константа в нем пока зависит от размерности.

Следствие 5.2.5. *Существует такое число $C_0 > 0$, что для каждого числа $n \in \mathbb{N}$, для каждой абсолютно непрерывной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$, для каждого $d \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, для каждого многочлена f степени не выше d на $\mathbb{R}^n$ и для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ выполнено неравенство*

$$\big[\mathbb{D}f\big]^{1/2d} \cdot \mathbb{E}[\varphi'(f)] \leqslant C_0 n^3 d^2 \cdot \|\varphi\|_\infty^{1/d}\|\varphi'\|_\infty^{1-1/d}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $\mathbb{E}[\varphi'(f)] > 0$. Пусть сначала μ — изотропная логарифмически вогнутая мера на $\mathbb{R}^n$. По следствию 5.2.3 имеем оценку

$$\big(\mathbb{E}\big[|\nabla f|^{1/d}\big]\big)\mathbb{E}[\varphi'(f)] \leqslant Cdn \max_{|\theta|=1} \|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}^{1/d} \cdot \|\varphi\|_\infty^{1/d}\|\varphi'\|_\infty^{1-1/d}. \qquad (5.2.1)$$

Лемма 5.2.4 дает оценку $\max\limits_{|\theta|=1} \|D_\theta \mu\|_{\mathrm{TV}} \leqslant C_1 n$. Применяя неравенство Пуанкаре (5.1.5), получаем

$$\mathbb{D} f \leqslant R \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x - x_0|^2 \, d\mu \cdot \mathbb{E}\big[|\nabla f|^2\big],$$

где R — некоторое число, $x_0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x \, d\mu = 0$. Кроме того,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x - x_0|^2 \, d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^2 \, d\mu = n.$$

Наконец, заметим, что по неравенству (5.1.1), примененному к многочлену $|\nabla f|^2$ степени не выше $2d$, получаем

$$\||\nabla f|^2\|_1 \leqslant (2cd)^{2d} \||\nabla f|^2\|_{1/2d},$$

т. е.

$$\mathbb{E}\big[|\nabla f|^2\big] \leqslant (2cd)^{2d} \Big(\mathbb{E}\big[|\nabla f|^{1/d}\big]\Big)^{2d}.$$

Подставив полученные оценки в (5.2.1), получаем

$$\big[\mathbb{D} f\big]^{1/2d} \cdot \mathbb{E}[\varphi'(f)] \leqslant (Rn)^{1/2d} (2cd)(Cdn)(C_1 n)^{1/d} \cdot \|\varphi\|_\infty^{1/d} \|\varphi'\|_\infty^{1-1/d},$$

т. е.

$$\big[\mathbb{D} f\big]^{1/2d} \cdot \mathbb{E}[\varphi'(f)] \leqslant C_0 n^3 d^2 \cdot \|\varphi\|_\infty^{1/d} \|\varphi'\|_\infty^{1-1/d} \tag{5.2.2}$$

для произвольной изотропной логарифмически вогнутой меры μ и произвольного многочлена f степени не выше d.

Пусть теперь μ — произвольная абсолютно непрерывная логарифмически вогнутая мера на $\mathbb{R}^n$. Пусть $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — такое невырожденное линейное преобразование, что мера $\nu := \mu \circ T^{-1}$ — изотропная логарифмически вогнутая мера. Применим к многочлену $g(y) := f(T^{-1} y)$ степени не выше d и изотропной логарифмически вогнутой мере $\nu := \mu \circ T^{-1}$ уже доказанную оценку (5.2.2):

$$\big[\mathbb{D}_\nu g\big]^{1/2d} \cdot \mathbb{E}_\nu[\varphi'(g)] \leqslant C_0 n^3 d^2 \cdot \|\varphi\|_\infty^{1/d} \|\varphi'\|_\infty^{1-1/d} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

где $\mathbb{E}_\nu$ и $\mathbb{D}_\nu$ — ожидание и дисперсия, взятые относительно меры ν. Т.е.

$$\mathbb{E}_\nu g := \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) \, \nu(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(T^{-1} y) \, \mu \circ T^{-1}(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \mu(dx) = \mathbb{E}_\mu f,$$

$$\mathbb{D}_\nu g = \int_{\mathbb{R}^n} \big(g(y) - \mathbb{E}_\nu g\big)^2 \, \nu(dy) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(T^{-1}y) - \mathbb{E}_\mu f\big)^2 \, \mu \circ T^{-1}(dy) = \mathbb{D}_\mu f,$$

$$\mathbb{E}_\nu[\varphi'(g)] := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi'\big(g(y)\big) \, \nu(dy) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi'\big(f(T^{-1}y)\big) \, \mu \circ T^{-1}(dy) = \mathbb{E}_\mu[\varphi'(f)].$$

Таким образом,

$$\big[\mathbb{D}_\mu g\big]^{1/2d} \cdot \mathbb{E}_\mu[\varphi'(g)] \leqslant C_0 n^3 d^2 \cdot \|\varphi\|_\infty^{1/d} \|\varphi'\|_\infty^{1-1/d} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

для произвольной абсолютно непрерывной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$. Следствие доказано. □

Перейдем к доказательству теоремы 5.2.1.

Доказательство. Мы докажем, что существует такое число $C > 0$, что для каждой логарифмически вогнутой меры μ, для каждого $f \in \mathcal{P}_d(\mu)$ и для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ верно неравенство

$$\big[\mathbb{D}f\big]^{1/2d} \cdot \mathbb{E}[\varphi'(f)] \leqslant C d^2 \cdot \|\varphi\|_\infty^{1/d} \|\varphi'\|_\infty^{1-1/d}. \tag{5.2.3}$$

Если $d = 1$ и $\mathbb{D}f \neq 0$, то для $g = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{D}f}}(f - \mathbb{E}f)$ распределение $\mu \circ g^{-1}$ будет изотропной логарифмически вогнутой мерой на $\mathbb{R}$. Тогда для произвольной $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ выполнены соотношения

$$\mathbb{E}[\psi'(g)] = \int_{\mathbb{R}} \psi'(t) \, (\mu \circ g^{-1})(dt) =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \psi(t) \, (D_1\mu \circ g^{-1})(dt) \leqslant \|\psi\|_\infty \|D_1\mu \circ g^{-1}\|_{\mathrm{TV}}.$$

По лемме 5.2.4 существует число $C_1 > 0$, для которого $\|D_1\mu \circ g^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant C_1$ для произвольного $f \in \mathcal{P}_1(\mu)$, $\mathbb{D}f > 0$. Тогда для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ рассмотрим функцию $\psi(t) := \varphi(\sqrt{\mathbb{D}f} \cdot t + \mathbb{E}f)$ и получим, что

$$\mathbb{E}[\varphi'(f)] = \big[\sqrt{\mathbb{D}f}\big]^{-1} \mathbb{E}[\psi'(g)] \leqslant C_1 \big[\sqrt{\mathbb{D}f}\big]^{-1} \|\varphi\|_\infty.$$

В случае $d = 1$ неравенство (5.2.3) доказано с $C = C_1$.

Пусть теперь $d \geqslant 2$. Сначала рассмотрим логарифмически вогнутую меру μ на $\mathbb{R}^n$ с носителем в некотором выпуклом множестве K, и рассмотрим некоторый фиксированный многочлен f степени не выше d на $\mathbb{R}^n$. Пусть

$$a = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \mu(dx) \quad b = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - a)^2 \, \mu(dx).$$

Пусть $\eta_1 := f-a$, $\eta_2 := a-f$, $\eta_3 = (f-a)^2-b$. Рассмотрим систему P_{η_1,η_2,η_3} всех логарифмически вогнутых мер ν с носителем в K, для которых

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_i \, d\nu \geqslant 0, \ \forall i = 1,2,3.$$

Заметим, что $\mu \in P_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}$. Пусть

$$\Phi_f(\nu) := b^{1/2d} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi'(f) \, d\nu - C_2 d^2 \cdot \|\varphi\|_\infty^{1/d} \|\varphi'\|_\infty^{1-1/d},$$

где $C_2 = C_0 \max\{n^2, n = 1,2,3\} = 9C_0$, где C_0 константа из следствия 5.2.5. Покажем, что $\Phi_f(\nu) \leqslant 0$ для каждой меры $\nu \in P_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}$. По локализационной лемме 5.1.2 ($p = 3$) достаточно проверить это неравенство только для мер $\nu \in P_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}$, у которых наименьшее аффинное подпространство, содержащее их носитель, имеет размерность не выше 3. Так как ограничение многочлена f степени не выше d на произвольное аффинное подпространство будет опять многочленом степени не выше d на этом подпространстве, то по следствию 5.2.5 для каждой $\nu \in P_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}$, чье наименьшее аффинное подпространство, содержащее носитель, имеет размерность не выше 3, выполнено неравенство

$$\big[\mathbb{D}_\nu f\big]^{1/2d} \cdot \mathbb{E}_\nu[\varphi'(f)] \leqslant C_2 d^2 \cdot \|\varphi\|_\infty^{1/d} \|\varphi'\|_\infty^{1-1/d},$$

где $\mathbb{E}_\nu$ и $\mathbb{D}_\nu$ — ожидание и дисперсия, взятые относительно меры ν. Заметим, что $\nu \in P_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}$, а значит

$$\mathbb{E}_\nu f = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\nu = a,$$

$$\mathbb{D}_\nu f = \mathbb{E}_\nu (f - \mathbb{E}_\nu f)^2 = \mathbb{E}_\nu (f-a)^2 \geqslant b.$$

Тем самым, $\Phi(\nu) \leqslant 0$ для каждой $\nu \in P_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}$, чье наименьшее аффинное подпространство, содержащее носитель, имеет размерность не выше 3, а значит и для каждой $\nu \in P_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}$. В частности для исходной меры μ выполнено неравенство (5.2.3) с $C = C_2$. Таким образом, неравенство (5.2.3) доказано для произвольной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ с носителем в некотором компактном выпуклом множестве. Для произвольной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ рассмотрим последовательность мер $\mu_n := \frac{1}{\mu(B_n)} \mathrm{I}_{B_n} \cdot \mu$, где B_n — шар радиуса n с центром в нуле

(при достаточно больших $n > n_0$, чтобы $\mu(B_n) \neq 0$). Тогда μ_n — последовательность логарифмически вогнутых мер с носителем в шаре B_n, а значит к ним можно применить уже доказанную оценку (5.2.3). Перейдя к пределу при $n \to +\infty$, получаем оценку (5.2.3) и для меры μ. Таким образом, неравенство (5.2.3) с $C := \max\{C_1, C_2\}$ установлено для произвольных $n, d \in \mathbb{N}$, произвольной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ и для произвольного многочлена f степени не выше d.

Наконец, в случае, когда μ — логарифмически вогнутая мера на локально выпуклом пространстве, а $f \in \mathcal{P}_d(\mu)$, найдется последовательность вида $f_n(\ell_{n,1}, \ldots, \ell_{n,k_n})$, где $\ell_{n,1}, \ldots, \ell_{n,k_n} \in E^*$, а f_n — многочлен степени не выше d на $\mathbb{R}^{k_n}$ которая сходится к f в $L^2(\mu)$. Поэтому оценка (5.2.3) получается предельным переходом в конечномерной оценке. Вспоминая определение 3.2.2 модуля непрерывности $\sigma(\nu \circ f^{-1}, \cdot)$, получаем, что теорема доказана. □

Замечание 5.2.6. Заметим, что в теореме 5.2.1 получен точный результат о принадлежности плотности распределения многочлена на пространстве с логарифмически вогнутой мерой пространствам Никольского. Действительно, рассмотрим такой пример. Пусть μ — равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, $f(x) = x^d$. Тогда плотность распределения $\varrho_f(x) = \frac{1}{d} x^{\frac{1-d}{d}}$ при $x \in [0, 1]$ и $\varrho_f(x) = 0$ при $x \notin [0, 1]$. Таким образом, $\varrho_f \in B^{1/d}_{1,+\infty}(\mathbb{R})$, но $\varrho_f \notin B^{\alpha}_{1,+\infty}(\mathbb{R})$ при $\alpha > 1/d$. (так как иначе по теореме вложения для пространств Никольского $\varrho_f \in L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R})$, что неверно).

Из доказанной теоремы 5.2.1 и следствия 3.2.8, получаем следующее небольшое обобщение неравенства Карбери – Райта (5.1.2).

Следствие 5.2.7. *Существует такое число $C > 0$, что для каждого $d \in \mathbb{N}$, для каждой логарифмически вогнутой меры μ на локально выпуклом пространстве E, для каждого измеримого многочлена $f \in \mathcal{P}_d(\mu)$ степени не выше d и для каждого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}$ верно неравенство*

$$[\mathbb{D}f]^{1/2d} \mu\big(x\colon f(x) \in A\big) \leqslant C d^2 \cdot \lambda(A)^{1/d},$$

где λ — мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Кроме того, из доказанной теоремы 5.2.1 и теоремы вложения для пространств Никольского (3.2.2) получаем повышение интегрируемости плотности распределения измеримого многочлена.

Следствие 5.2.8. *Пусть $a > 0$, $d \in \mathbb{N}$, $p \in \left[1, \frac{d}{d-1}\right)$. Существует такое число $C(a, d, p) > 0$, зависящее только от a, d и p, что для каждой логарифмически вогнутой меры μ на локально выпуклом пространстве E, для каждого измеримого многочлена $f \in \mathcal{P}_d(\mu)$ степени не выше d с $\mathbb{D}f \geqslant a$ выполнена оценка*

$$\|\varrho_f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant C(a, d, p),$$

где ϱ_f — плотность меры $\mu \circ f^{-1}$.

Перейдем теперь к результатам о связи различных расстояний на пространстве распределений многочленов от логарифмически вогнутых случайных векторов.

5.3 Оценки между расстояниями на пространстве распределений многочленов

Во-первых, уже несколько раз применявшееся следствие 3.2.7 в комбинации с теоремой 5.2.1 дает следующую связь между расстоянием по вариации и Канторовича – Рубинштейна.

Следствие 5.3.1. *Существует такое число $C > 0$, что для каждого числа $d \in \mathbb{N}$, для каждого числа $a > 0$, для каждой логарифмически вогнутой меры μ на локально выпуклом пространстве E и для произвольных измеримых многочленов $f, g \in \mathcal{P}_d(\mu)$ степени не выше d с $\mathbb{D}f \geqslant a$, $\mathbb{D}g \geqslant a$ выполнена оценка*

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C(a, d) \cdot d_{\mathrm{KR}}(f, g)^{\frac{1}{d+1}},$$

где $C(a, d) := 9(Cd^2 a^{-1/2d} + 1)$.

Заметим, что из полученной оценки следует неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C(a, d) \cdot \|f - g\|_1^{\frac{1}{d+1}}$$

при условии, что $f, g \in \mathcal{P}_d(\mu)$, $\mathbb{D}f \geqslant a$, $\mathbb{D}g \geqslant a$. Остальная часть параграфа посвящена получению точной оценки описанного типа, а именно доказательству следующей теоремы.

Теорема 5.3.2. *Для каждого $d \in \mathbb{N}$ существует такое число $C(d) > 0$, что для каждой логарифмически вогнутой меры μ на локально выпуклом пространстве E и для произвольных измеримых многочленов $f, g \in \mathcal{P}_d(\mu)$ степени не выше d выполнена оценка*

$$[\mathbb{D}g]^{1/2d} \cdot d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C(d) \cdot \|f - g\|_1^{1/d}.$$

Замечание 5.3.3. Заметим, что оценка из теоремы 5.3.2 не улучшаемая по порядку. Действительно, если $f = g + h$, то оценка из теоремы 5.3.2 влечет результат теоремы 5.2.1 (с другой константой $C(d)$) о принадлежности плотности распределения пространству Никольского, который не улучшаем, как показано в замечании 5.2.6.

Нам понадобится следующее многомерное неравенство типа Маркова для многочленов (см. [64, Теорема 5.1.8]), обращающее неравенство Пуанкаре на подпространстве всех многочленов со степенью, ограниченной общим числом, представляющее и самостоятельный интерес.

Теорема 5.3.4. *Найдется такое число $C > 0$, что для произвольных чисел $n, d \in \mathbb{N}$, для произвольной абсолютно непрерывной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$, для произвольного многочлена f степени не выше d и для произвольного единичного вектора θ выполнено неравенство*

$$\|\partial_\theta f\|_1 \leqslant (Cd)^{3d} \|D_\theta \mu\|_{\mathrm{TV}} \|f\|_1.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим одномерный случай $n = 1$. Без ограничения общности, можно считать, что мера μ — центрированная, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}} t \, \mu(dt) = 0.$$

Также не ограничивая общности, можно считать, что коэффициент при старшей степени многочлена f равен 1, т. е.

$$f(t) = \prod_{i=1}^{d} (t - t_i).$$

Пусть $h_j(t) := |t - t_j|^2$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} t^2\,\mu(dt) \int_{\mathbb{R}} (f'(t))^2\,\mu(dt) \leqslant d \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} t^2\,\mu(dt) \int_{\mathbb{R}} \Big|\prod_{j\neq i} h_j(t)\Big|\,\mu(dt).$$

Заметим, что $\prod_{j\neq i} h_j$ — многочлен степени не выше $2d$, поэтому по эквивалентности L^p-норм (5.1.1) справедлива оценка

$$\Big\|\prod_{j\neq i} h_j\Big\|_1 \leqslant (2cd)^{2d}\Big\|\prod_{j\neq i} h_j\Big\|_0 = (2cd)^{2d}\prod_{j\neq i}\|h_j\|_0 \leqslant (2cd)^{2d}\prod_{j\neq i}\|h_j\|_1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} t^2\,\mu(dt) \int_{\mathbb{R}} \Big|\prod_{j\neq i} h_j(t)\Big|\,\mu(dt) &\leqslant (2cd)^{2d}\int_{\mathbb{R}} t^2\,\mu(dt)\prod_{j\neq i}\int_{\mathbb{R}} |t-t_j|^2\,\mu(dt) = \\ &= (2cd)^{2d}\int_{\mathbb{R}} t^2\,\mu(dt)\prod_{j\neq i}\Big(\int_{\mathbb{R}} t^2\,\mu(dt) + |t_j|^2\Big) \leqslant \\ &\leqslant (2cd)^{2d}\prod_{i=1}^{d}\Big(\int_{\mathbb{R}} t^2\,\mu(dt) + |t_i|^2\Big) = \\ &= (2cd)^{2d}\prod_{i=1}^{d}\int_{\mathbb{R}} |t-t_i|^2\,\mu(dt) \leqslant (4c^2d)^{2d}\int_{\mathbb{R}} f^2\,\mu(dt),\end{aligned}$$

где была опять использована эквивалентность (5.1.1):

$$\prod_{i=1}^{d}\|h_i\|_1 \leqslant \prod_{i=1}^{d}(2c)^2\|h_i\|_0 = (2c)^{2d}\Big\|\prod_{i=1}^{d} h_i\Big\|_0 \leqslant (2c)^{2d}\Big\|\prod_{i=1}^{d} h_i\Big\|_1.$$

В итоге получаем оценку

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} t^2\,\mu(dt) \int_{\mathbb{R}} (f'(t))^2\,\mu(dt) &\leqslant d\sum_{i=1}^{d}\int_{\mathbb{R}} t^2\,\mu(dt)\int_{\mathbb{R}}\Big|\prod_{j\neq i} h_j(t)\Big|\,\mu(dt) \\ &\leqslant d^2(4c^2d)^{2d}\int_{\mathbb{R}} f^2\,\mu(dt),\end{aligned}$$

т. е. для некоторой числовой постоянной C_1 выполнено неравенство

$$\sigma(\mu)\|f'\|_2 \leqslant (C_1 d)^d\|f\|_2,$$

где $\sigma^2(\mu)$ — дисперсия меры μ. Известно (см., например, [58, Предложение 4.1] или [55, Лемма 1]), что для произвольной логарифмически

вогнутой меры μ на $\mathbb{R}$ с плотностью ϱ_μ верно неравенство

$$\big(\max_{t\in\mathbb{R}} \varrho_\mu(t)\big)^2 \cdot \sigma^2(\mu) \geqslant 12^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\|f'\|_2 \leqslant (C_2 d)^d \big(\max_{t\in\mathbb{R}} \varrho_\mu(t)\big) \|f\|_2.$$

Используя эквивалентность (5.1.1), получаем аналогичное неравенство и для L^1-норм:

$$\|f'\|_1 \leqslant (C_3 d)^{2d} \big(\max_{t\in\mathbb{R}} \varrho_\mu(t)\big) \|f\|_1.$$

Теперь перейдем к общему многомерному случаю. Пусть ϱ_μ — плотность меры μ. Без ограничения общности, мы можем считать, что вектор $\theta = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ — первый базисный вектор. Пусть $\tilde{x} := (x_2, \ldots, x_n)$ и пусть

$$\tilde{\varrho}_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \frac{\varrho_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\int_{\mathbb{R}} \varrho_\mu(\tau, x_2, \ldots, x_n)\, d\tau}.$$

Применяя уже доказанную одномерную оценку и эквивалентность норм (5.1.1), получаем

$$\begin{aligned}
\|\partial_{e_1} f\|_1^{1/2} &\leqslant (cd)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{e_1} f(x)|^{1/2} \varrho_\mu(x)\, dx = \\
&= (cd)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \varrho_\mu(\tau, \tilde{x})\, d\tau \Big) \int_{\mathbb{R}} |\partial_{e_1} f(x_1, \tilde{x})|^{1/2} \tilde{\varrho}_\mu(x_1, \tilde{x})\, dx_1 d\tilde{x} \leqslant \\
&\leqslant (cd)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \varrho_\mu(\tau, \tilde{x})\, d\tau \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}} |\partial_{e_1} f(x_1, \tilde{x})| \tilde{\varrho}_\mu(x_1, \tilde{x})\, dx_1 \Big)^{1/2} d\tilde{x} \leqslant \\
&\leqslant (C_4 d)^{\frac{3d}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \varrho_\mu(\tau, \tilde{x})\, d\tau \Big) \big(\max_{t\in\mathbb{R}} \tilde{\varrho}_\mu(t, \tilde{x}) \big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x_1, \tilde{x})| \tilde{\varrho}_\mu(x_1, \tilde{x})\, dx_1 \Big)^{\frac{1}{2}} d\tilde{x} \\
&= (C_4 d)^{\frac{3d}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big(\max_{t\in\mathbb{R}} \varrho_\mu(t, \tilde{x}) \big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x_1, \tilde{x})| \varrho_\mu(x_1, \tilde{x})\, dx_1 \Big)^{\frac{1}{2}} d\tilde{x} \leqslant \\
&\leqslant (C_4 d)^{\frac{3d}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \max_t \varrho_\mu(t, \tilde{x})\, d\tilde{x} \Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \varrho_\mu(x)\, dx \Big)^{1/2} \leqslant \\
&\leqslant (C_5 d)^{\frac{3d}{2}} \|D_{e_1}\mu\|_{\mathrm{TV}}^{1/2} \|f\|_1^{1/2},
\end{aligned}$$

где в последнем переходе было использовано равенство (5.1.6). Теорема доказана. □

Нам также понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 5.3.5. *Пусть $n, d \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Существует такое число $c(d,n)>0$, зависящее только от d и от n, что для каждой изотропной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ с плотностью ϱ_μ, для каждого многочлена h степени не выше d, и для каждого единичного вектора $\theta \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$\int_{\langle\theta\rangle^\perp} \max_{s\in\mathbb{R}} \bigl[|h(x+s\theta)|\varrho_\mu(x+s\theta)\bigr]\,dx \leqslant c(d,n)\int_{\mathbb{R}^n}|h|\,d\mu.$$

Доказательство. Применив оценку (5.1.3), получаем

$$\begin{aligned}\int_{\langle\theta\rangle^\perp} \max_{s\in\mathbb{R}} \bigl[|h(x+s\theta)|\varrho_\mu(x+s\theta)\bigr]\,dx \leqslant \\ \leqslant \varrho_\mu(0)\int_{\langle\theta\rangle^\perp} \max_{s\in\mathbb{R}} \bigl[|h(x+s\theta)|e^{c_1 n - c_2|x+s\theta|}\bigr]\,dx \leqslant \\ \leqslant \varrho_\mu(0)e^{c_1 n}\int_{\langle\theta\rangle^\perp} e^{-c_3|x|}\max_{s\in\mathbb{R}} \bigl[|h(x+se)|e^{-c_3|s|}\bigr]\,dx,\end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из того, что

$$|x+s\theta| = \sqrt{|x|^2+s^2} \geqslant \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|s|).$$

Заметим, что функция $s \mapsto h(x+s\theta)$ является многочленом степени не выше d, т. е. $h(x+s\theta) = a_d s^d + a_{d-1}s^{d-1} + \ldots + a_0$, где коэффициенты $a_0, \ldots a_d$ сами являются многочленами от x. Таким образом,

$$\begin{aligned}\max_{s\in\mathbb{R}} \bigl[|h(x+s\theta)|e^{-c_3|s|}\bigr] \leqslant \sum_{j=0}^{d}|a_j|\max_{s\in\mathbb{R}}[|s|^j e^{-c_3|s|}] = \\ = \sum_{j=0}^{d}|a_j|\Bigl(\frac{j}{c_3}\Bigr)^j e^{-j} \leqslant c_1(d)\sum_{j=0}^{d}|a_j|.\end{aligned}$$

Поскольку на конечномерном пространстве всех многочленов на $\mathbb{R}$ степени не выше d все нормы эквивалентны, то найдется такое число $c_2(d)$, зависящее только от d, что

$$\sum_{j=0}^{d}|a_j| \leqslant c_2(d)\int_{\mathbb{R}}\Bigl|\sum_{j=0}^{d}a_j s^j\Bigr|e^{-c_3|s|}\,ds.$$

Иными словами,

$$\max_{s\in\mathbb{R}} \bigl[|h(x+s\theta)|e^{-c_3|s|}\bigr] \leqslant c_3(d)\int_{\mathbb{R}}|h(x+s\theta)|e^{-c_3|s|}\,ds$$

Таким образом,

$$\int_{\langle\theta\rangle^\perp} \max_{s\in\mathbb{R}}\bigl[|h(x+s\theta)|\varrho_\mu(x+s\theta)\bigr]\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \varrho_\mu(0)e^{c_1 n}c_3(d)\int_{\langle\theta\rangle^\perp} e^{-c_3|x|}\int_{\mathbb{R}}|h(x+s\theta)|e^{-c_3|s|}\,ds\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \varrho_\mu(0)e^{c_1 n}c_3(d)\int_{\mathbb{R}^n}|h(y)|e^{-c_3|y|}\,dy.$$

Опять используем эквивалентность всех норм на конечномерном пространстве всех многочленов степени не выше d на $\mathbb{R}^n$: существует такое число $c_4(d,n)$, что

$$\int_{\mathbb{R}^n}|h(y)|e^{-c_3|y|}\,dy \leqslant c_4(d,n)\int_{\{|y|\leqslant\frac{1}{10}\}}|h(y)|\,dy.$$

Имеет место включение (5.1.4):

$$\{y\in\mathbb{R}^n\colon |y|\leqslant\tfrac{1}{10}\}\subset\{y\in\mathbb{R}^n : \varrho_\mu(y)\geqslant e^{-20n}\varrho_\mu(0)\}=K,$$

откуда

$$\int_{\{|y|\leqslant\frac{1}{10}\}}|h(y)|\,dy \leqslant \int_K|h(y)|\,dy \leqslant$$
$$\leqslant e^{20n}(\varrho_\mu(0))^{-1}\int_K|h(y)|\varrho_\mu(y)\,dy \leqslant e^{20n}(\varrho_\mu(0))^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}|h(y)|\varrho_\mu(y)\,dy.$$

Таким образом,

$$\int_{\langle\theta\rangle^\perp}\max_{s\in\mathbb{R}}\bigl[|h(x+s\theta)|\varrho_\mu(x+s\theta)\bigr]\,dx \leqslant e^{c_1 n}c_3(d)c_4(d,n)e^{20n}\int_{\mathbb{R}^n}|h(y)|\varrho_\mu(y)\,dy.$$

Лемма доказана. □

Перейдем теперь к ключевому техническому шагу доказательства теоремы 5.3.2.

Лемма 5.3.6. *Для произвольных чисел $n\in\mathbb{N}$ и $d\in\mathbb{N}$ существует такое число $c(d,n)$, зависящее лишь от d и от n, что для каждой изотропной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$, для произвольных многочленов f,g степени не выше d на $\mathbb{R}^n$, для каждой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\|\varphi\|_\infty\leqslant 1$ и для каждого единичного вектора $\theta\in\mathbb{R}^n$ выполнена оценка*

$$\|\partial_\theta g\|_1^{1/d}\mathbb{E}\bigl[\varphi(f)-\varphi(g)\bigr]\leqslant c(d,n)\|f-g\|_1^{1/d}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $\|\partial_\theta g\|_1 \neq 0$, так как иначе неравенство выполнено автоматически. Пусть $\varrho_\mu = e^{-V}$ — плотность меры μ, V — выпуклая функция. Сначала рассмотрим случай, когда $\varrho_\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varrho_\mu > 0$, $n \geqslant 2$. Пусть

$$\Phi(t) := \int_{-\infty}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau.$$

Как и при доказательстве теоремы 4.4.1, используем тождество

$$\partial_\theta g(\varphi(f) - \varphi(g)) = \partial_\theta(\Phi(f) - \Phi(g)) - (\partial_\theta f - \partial_\theta g)\varphi(f)$$

из которого получаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ выполнены равенства

$$\mathbb{E}\big[\varphi(f) - \varphi(g)\big] = \mathbb{E}\Big[\frac{(\partial_\theta g)^2(\varphi(f) - \varphi(g))}{(\partial_\theta g)^2 + \varepsilon}\Big] + \varepsilon\mathbb{E}\Big[\frac{\varphi(f) - \varphi(g)}{(\partial_\theta g)^2 + \varepsilon}\Big] =$$
$$= \mathbb{E}\Big[\frac{\partial_\theta g \partial_\theta(\Phi(f) - \Phi(g))}{(\partial_\theta g)^2 + \varepsilon}\Big] - \mathbb{E}\Big[\frac{\partial_\theta g(\partial_\theta f - \partial_\theta g)\varphi(f)}{(\partial_\theta g)^2 + \varepsilon}\Big] + \varepsilon\mathbb{E}\Big[\frac{\varphi(f) - \varphi(g)}{(\partial_\theta g)^2 + \varepsilon}\Big].$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности. К третьему слагаемому применим оценку из леммы 3.2.9 и неравенство Крбери – Райта (5.1.2):

$$\varepsilon\mathbb{E}\Big[\frac{\varphi(f) - \varphi(g)}{(\partial_\theta g)^2 + \varepsilon}\Big] \leqslant 2\int_0^\infty \mu\big((\partial_\theta g)^2 \leqslant \varepsilon s\big)\, ds \leqslant$$
$$\leqslant 2cd\Big(\int_0^\infty (s+1)^{-2} s^{1/(2d-2)}\, ds\Big)\|\partial_\theta g\|_1^{-1/(d-1)}\varepsilon^{1/(2d-2)} \leqslant$$
$$\leqslant c_1 d\|\partial_\theta g\|_1^{-1/(d-1)}\varepsilon^{1/(2d-2)}.$$

Для оценки второго слагаемого используем теорему 5.3.4

$$-\mathbb{E}\Big[\frac{\partial_e g(\partial_\theta f - \partial_\theta g)\varphi(f)}{(\partial_\theta g)^2 + \varepsilon}\Big] \leqslant 2^{-1}\varepsilon^{-1/2}\|\partial_\theta f - \partial_\theta g\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant (Cd)^{3d}\varepsilon^{-1/2}\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}\|f - g\|_1.$$

По лемме 5.2.4 для каждого $n \in \mathbb{N}$ есть такое число $C_1(n) = C_1 \cdot n$, что

$$\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}} \leqslant C_1(n) \tag{5.3.1}$$

для каждой изотропной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$. Поэтому

$$-\mathbb{E}\Big[\frac{\partial_e g(\partial_\theta f - \partial_\theta g)\varphi(f)}{(\partial_\theta g)^2 + \varepsilon}\Big] \leqslant (Cd)^{3d} C_1(n) \cdot \varepsilon^{-1/2}\|f - g\|_1.$$

В первом слагаемом проинтегрируем по частям:

$$\mathbb{E}\Big[\frac{\partial_\theta g\partial_\theta(\Phi(f)-\Phi(g))}{(\partial_\theta g)^2+\varepsilon}\Big]=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial_\theta g\partial_\theta(\Phi(f)-\Phi(g))}{(\partial_\theta g)^2+\varepsilon}\,d\mu=$$
$$=-\int_{\mathbb{R}^n}(\Phi(f)-\Phi(g))\Big[\frac{\partial_\theta^2 g}{(\partial_\theta g)^2+\varepsilon}-2\frac{(\partial_\theta g)^2\partial_\theta^2 g}{((\partial_\theta g)^2+\varepsilon)^2}\Big]\,d\mu-$$
$$-\int_{\mathbb{R}^n}(\Phi(f)-\Phi(g))\frac{\partial_\theta g}{(\partial_\theta g)^2+\varepsilon}\,d(D_\theta\mu)$$

Первое слагаемое выше оценивается сверху выражением

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Big|\frac{\partial_\theta^2 g}{(\partial_\theta g)^2+\varepsilon}\Big||f-g|\,d\mu=$$
$$=\int_{\langle\theta\rangle^\perp}\int_{\mathbb{R}}\Big|\frac{\partial_\theta^2 g(x+t\theta)}{(\partial_\theta g(x+t\theta))^2+\varepsilon}\Big||f(x+t\theta)-g(x+t\theta)|\varrho_\mu(x+t\theta)\,dtdx\leqslant$$
$$\leqslant d\varepsilon^{-1/2}\int_{\langle\theta\rangle^\perp}\Big(\int_{\mathbb{R}}\Big|\frac{1}{\tau^2+1}\Big|\,d\tau\Big)\max_{s\in\mathbb{R}}\big[|f(x+s\theta)-g(x+s\theta)|\varrho_\mu(x+s\theta)\big]\,dx=$$
$$=\pi d\varepsilon^{-1/2}\int_{\langle\theta\rangle^\perp}\max_s\big[|f(x+s\theta)-g(x+s\theta)|\varrho_\mu(x+s\theta)\big]\,dx\leqslant$$
$$\leqslant c_1(d,n)\varepsilon^{-1/2}\int_{\mathbb{R}^n}|f-g|\,d\mu,$$

где в последнем переходе была использована лемма 5.3.5. Наконец, заметим, что

$$-\int_{\mathbb{R}^n}(\Phi(f)-\Phi(g))\frac{\partial_\theta g}{(\partial_\theta g)^2+\varepsilon}\,d(D_\theta\mu)\leqslant\varepsilon^{-1/2}\int_{\mathbb{R}^n}|f-g|\,d|D_\theta\mu|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon^{-1/2}\sqrt{\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f-g|^2\,d|D_\theta\mu|\Big)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon^{-1/2}\sqrt{C_1(n)}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f-g|^2\,d|D_\theta\mu|\Big)^{1/2},$$

где была использована липшицевость функции Φ, т. е. неравенство

$$|\Phi(f)-\Phi(g)|\leqslant|f-g|,$$

неравенство Гельдера и оценка производной по Скороходу изотропной логарифмически вогнутой меры (5.3.1).

Оценим интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f-g|^2\,d|D_\theta\mu|.$$

Так как $\varrho_\mu = e^{-V}$, то

$$D_\theta\mu = -\partial_\theta V(x)e^{-V(x)}\,dx \quad \text{и} \quad |D_\theta\mu| = |\partial_\theta V(x)|e^{-V(x)}\,dx.$$

Для точки $x \in \langle\theta\rangle^\perp$ определим $T(x) \in \mathbb{R}$, как точку, для которой выполнено соотношение $\partial_\theta V(x+T(x)\theta) = 0$. Такая точка существует для почти всех x, поскольку V ограничена снизу и $e^{-V(x+t\theta)}$ интегрируема по t при почти всех x. Так как $\partial_\theta V(x+t\theta)$ не убывает по t в силу выпуклости функции V, то $\partial_\theta V(x+t\theta) \leqslant 0$ при $t < T(x)$ и $\partial_\theta V(x+t\theta) \geqslant 0$ при $t > T(x)$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |f(x+t\theta) - g(x+t\theta)|^2|\partial_\theta V(x+t\theta)|e^{-V(x+t\theta)}\,dt = \\
&\qquad = -\int_{-\infty}^{T(x)} |f(x+t\theta) - g(x+t\theta)|^2\partial_\theta V(x+t\theta)e^{-V(x+t\theta)}\,dt + \\
&\qquad\qquad + \int_{T(x)}^{\infty} |f(x+t\theta) - g(x+t\theta)|^2\partial_\theta V(x+t\theta)e^{-V(x+t\theta)}\,dt.
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям в интегралах выше, получаем

$$\begin{aligned}
&2|f(x+T(x)\theta) - g(x+T(x)\theta)|^2\varrho_\mu(x+T(x)\theta) - \\
&-2\int_{-\infty}^{T(x)} (\partial_\theta f(x+t\theta) - \partial_\theta g(x+t\theta))(f(x+t\theta) - g(x+t\theta))\varrho_\mu(x+t\theta)\,dt + \\
&+2\int_{T(x)}^{\infty} (\partial_\theta f(x+t\theta) - \partial_\theta g(x+t\theta))(f(x+t\theta) - g(x+t\theta))\varrho_\mu(x+t\theta)\,dt \leqslant \\
&\qquad \leqslant 2\max_{s\in\mathbb{R}}\bigl[|f(x+s\theta) - g(x+s\theta)|^2\varrho_\mu(x+s\theta)\bigr] + \\
&\quad + 4\int_{\mathbb{R}} |\partial_\theta f(x+t\theta) - \partial_\theta g(x+t\theta)||f(x+t\theta) - g(x+t\theta)|\varrho_\mu(x+t\theta)\,dt.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |f-g|^2\,d|D_\theta\mu| = \\
&\qquad = \int_{\langle\theta\rangle^\perp}\int_{\mathbb{R}} |f(x+t\theta) - g(x+t\theta)|^2|\partial_\theta V(x+t\theta)|e^{-V(x+t\theta)}\,dt\,dx \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant 2\int_{\langle\theta\rangle^\perp} \max_{s\in\mathbb{R}}\bigl[|f(x+s\theta) - g(x+s\theta)|^2\varrho_\mu(x+s\theta)\bigr]\,dx + \\
&\qquad\qquad\qquad + 4\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_\theta f - \partial_\theta g||f-g|\,d\mu.
\end{aligned}$$

По лемме 5.3.5

$$\int_{\langle\theta\rangle^\perp} \max_{s\in\mathbb{R}} \bigl[|f(x+s\theta)-g(x+s\theta)|^2 \varrho_\mu(x+s\theta)\bigr]\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c_1(2d,n)\int_{\mathbb{R}^n} |f-g|^2\,d\mu = c_1(2d,n)\|f-g\|_2^2 \leqslant c_2(d,n)\|f-g\|_1^2,$$

где была использована эквивалентность норм (5.1.1). Кроме того, по неравенству Гельдера, эквивалентности норм (5.1.1) и теореме 5.3.4,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_\theta f - \partial_\theta g||f-g|\,d\mu \leqslant \|\partial_\theta f - \partial_\theta g\|_2\|f-g\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant c_3(d)\|D_\theta\mu\|_{\mathrm{TV}}\|f-g\|_1^2 \leqslant c_4(d,n)\|f-g\|_1^2,$$

где в последнем переходе была использована оценка производной по Скороходу изотропной логарифмически вогнутой меры (5.3.1).

Собрав все установленные оценки вместе, получаем, что

$$\mathbb{E}\bigl[\varphi(f)-\varphi(g)\bigr] \leqslant c_5(d,n)\Bigl[\|\partial_e g\|_1^{-1/(d-1)}\varepsilon^{1/(2d-2)} + \varepsilon^{-1/2}\|f-g\|_1\Bigr].$$

Теперь возьмем $\varepsilon = \bigl[\|\partial_e g\|_1^{1/(d-1)}\|f-g\|_1\bigr]^{(2d-2)/d}$, что даст оценку

$$\mathbb{E}\bigl[\varphi(f)-\varphi(g)\bigr] \leqslant c_6(d,n)\|\partial_\theta g\|_1^{-1/d}\|f-g\|_1^{1/d}.$$

В случае $d=1$ многочлен $g(x)=\langle a,x\rangle + b$ для некоторого $a\in\mathbb{R}^n$, $b\in\mathbb{R}$. Тогда $\partial_\theta g = \langle a,\theta\rangle$ и для каждого θ, не ортогонального вектору a, выполнены соотношения

$$\mathbb{E}\bigl[\varphi(f)-\varphi(g)\bigr] = \frac{1}{\partial_\theta g}\mathbb{E}\bigl[\partial_\theta g(\varphi(f)-\varphi(g))\bigr] =$$
$$= \frac{1}{\partial_\theta g}\mathbb{E}\bigl[\partial_\theta(\Phi(f)-\Phi(g))\bigr] - \frac{1}{\partial_\theta g}\mathbb{E}\bigl[(\partial_\theta f - \partial_\theta g)\varphi(f)\bigr] \leqslant$$
$$\leqslant \|\partial_\theta g\|_1^{-1}\bigl|\mathbb{E}\bigl[\partial_\theta(\Phi(f)-\Phi(g))\bigr]\bigr| + \|\partial_\theta g\|_1^{-1}\mathbb{E}\bigl[|\partial_\theta f - \partial_\theta g|\bigr].$$

В первом слагаемом интегрируем по частям, а интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f-g|\,d|D_\theta\mu|$$

оцениваем, также как и выше, через $C_2(n)\|f-g\|_1$. Второе слагаемое оцениваем по теореме 5.3.4. Получаем, что и в случае $d=1$ выполнена оценка

$$\mathbb{E}\bigl[\varphi(f)-\varphi(g)\bigr] \leqslant C_3(n)\|\partial_\theta g\|_1^{-1}\|f-g\|_1$$

для произвольной изотропной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с плотностью $\varrho_\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varrho_\mu > 0$.

Рассмотрим теперь случай общей изотропной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с плотностью ϱ_μ. Пусть X — случайный вектор с распределением μ, а Z — независимый с X стандартный нормальный вектор на $\mathbb{R}^n$. Тогда приблизим меру μ распределениями μ_ε векторов $X_\varepsilon := \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(X + \varepsilon Z)$. Заметим, что X_ε имеет логарифмически вогнутое распределение, как образ логарифмически вогнутой меры $\mu \otimes \gamma_n$ при линейном отображении, где γ_n — стандартная гауссовская мера. Кроме того, для каждого $h \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, h\rangle \, d\mu_\varepsilon = \mathbb{E}[\langle X_\varepsilon, h\rangle] = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\big(\mathbb{E}[\langle X, h\rangle] + \varepsilon \mathbb{E}[\langle Z, h\rangle]\big) = 0;$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, h\rangle^2 \, d\mu_\varepsilon = \mathbb{E}[\langle X_\varepsilon, h\rangle^2] =$$

$$= \frac{1}{1+\varepsilon^2}\big(\mathbb{E}[\langle X, h\rangle^2] + \varepsilon^2 \mathbb{E}[\langle Z, h\rangle^2] + 2\varepsilon \mathbb{E}[\langle X, y\rangle \cdot \langle Z, h\rangle]\big) = |h|^2.$$

Заметим, что плотность ϱ_ε меры μ_ε имеет вид

$$\varrho_\varepsilon(x) := (1+\varepsilon^2)^{n/2} \cdot \varrho_\mu * \psi_\varepsilon\big(\sqrt{1+\varepsilon^2} \cdot x\big),$$

где ψ — плотность стандартной гауссовской меры γ_n, а

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \psi(\varepsilon^{-1} x).$$

Таким образом, $\varrho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\varrho_\varepsilon(x) > 0$ для каждого $x \in \mathbb{R}^n$. По доказанному,

$$\Big(\mathbb{E}\big|\partial_\theta g(X_\varepsilon)\big|\Big)^{1/d} \mathbb{E}\big[\varphi(f(X_\varepsilon)) - \varphi(g(X_\varepsilon))\big] \leqslant c_7(d,n)\Big(\mathbb{E}\big|f(X_\varepsilon) - g(X_\varepsilon)\big|\Big)^{1/d}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем такую же оценку для случайного вектора X вместо X_ε, т. е. для произвольной изотропной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$.

Наконец, оценка в случае $n = 1$ следует из доказанной оценки для размерности $n = 2$, если рассмотреть продакт меру $\mu \otimes \mu$, которая будет изотропной логарифмически вогнутой мерой на $\mathbb{R}^2$, и многочлены f и g, зависящие лишь от первой координаты.

Лемма доказана. □

Следствие 5.3.7. *Для произвольных чисел $n \in \mathbb{N}$ и $d \in \mathbb{N}$ существует такое число $c(d,n)$, зависящее лишь от d и от n, что для каждой абсолютно непрерывной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$, для произвольных многочленов f, g степени не выше d на $\mathbb{R}^n$ и для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$, выполнено неравенство*

$$[\mathbb{D}g]^{1/2d} \cdot \mathbb{E}\big[\varphi(f) - \varphi(g)\big] \leqslant c(d,n)\|f-g\|_1^{1/d}.$$

Доказательство. Сначала, рассуждая также, как и при доказательстве следствия 5.2.3, получаем для произвольной изотропной логарифмически вогнутой меры μ и произвольных многочленов f, g степени не выше d оценку

$$[\mathbb{D}|\nabla g|^{1/d}] \cdot \mathbb{E}\big[\varphi(f) - \varphi(g)\big] \leqslant c_1(d,n)\|f-g\|_1^{1/d}.$$

Далее, применяя неравенство Пуанкаре (5.1.5) и эквивалентность (5.1.1) L^p-норм на пространстве многочленов фиксированной степени от логарифмически вогнутого случайного вектора, получаем оценку

$$[\mathbb{D}g]^{1/2d} \cdot \mathbb{E}\big[\varphi(f) - \varphi(g)\big] \leqslant c_2(d,n)\|f-g\|_1^{1/d} \tag{5.3.2}$$

для произвольной изотропной логарифмически вогнутой меры μ и произвольных многочленов f, g степени не выше d.

Пусть теперь μ — произвольная абсолютно непрерывная логарифмически вогнутая мера на $\mathbb{R}^n$. Будем рассуждать также, как и при доказательстве следствия 5.2.5. Пусть $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — такое невырожденное линейное преобразование, что мера $\nu := \mu \circ T^{-1}$ — изотропная логарифмически вогнутая мера. Применив полученную оценку (5.3.2) к мере ν и многочленам $\tilde{f}(y) := f(T^{-1}y)$ и $\tilde{g}(y) := g(T^{-1}y)$ и применив формулу замены меры, получаем, что оценка (5.3.2) справедлива и для произвольной абсолютно непрерывной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$.

Следствие доказано. □

Теперь перейдем к доказательству основной теоремы 5.3.2, которое основано на применении локализационной леммы 5.1.2, позволяющей свести доказательство к случаю пространства размерности не выше четырех.

Доказательство. Пусть $R(d) := \max\limits_{n=1,2,3,4} c(d,n)$, где $c(d,n)$ — постоянная в оценке из следствия 5.3.7. Сначала рассмотрим логарифмически вогнутую меру μ на $\mathbb{R}^n$ с носителем в некотором выпуклом множестве K, и рассмотрим фиксированные многочлены f и g степени не выше d на $\mathbb{R}^n$. Покажем, что для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$, выполнено неравенство

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g-\mathbb{E}g|^2 d\mu\Big)^{1/2d} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \big[\varphi(f)-\varphi(g)\big]\, d\mu \leqslant R(d)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f-g|\, d\mu\Big)^{1/d}. \quad (5.3.3)$$

Пусть

$$a = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mu(dx) \quad b = \int_{\mathbb{R}^n} (g(x)-a)^2\,\mu(dx) \quad c = \int_{\mathbb{R}^n} |f-g|\, d\mu.$$

Пусть $\eta_1 := g-a$, $\eta_2 := a-g$, $\eta_3 = (g-a)^2-b$, $\eta_4 = c-|f-g|$. Рассмотрим систему $P_{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4}$ всех логарифмически вогнутых мер ν с носителем в K, для которых

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_i\, d\nu \geqslant 0,\ \forall i = 1,2,3,4.$$

Заметим, что $\mu \in P_{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4}$. Пусть

$$\Phi_{f,g}(\nu) := b^{1/2d} \int_{\mathbb{R}^n} \big[\varphi(f)-\varphi(g)\big]\, d\nu - R(d)\cdot c^{1/d}.$$

Покажем, что $\Phi_{f,g}(\nu) \leqslant 0$ для каждой меры $\nu \in P_{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4}$. По локализационной лемме 5.1.2 ($p = 4$) достаточно проверить это неравенство только для мер $\nu \in P_{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4}$, у которых наименьшее аффинное подпространство, содержащее их носитель, имеет размерность не выше 4. Так как ограничение многочленов f и g степени не выше d на произвольное аффинное подпространство будут опять многочленами степени не выше d на этом подпространстве, то по следствию 5.3.7 для каждой меры $\nu \in P_{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4}$, у которой наименьшее аффинное подпространство, содержащее носитель, имеет размерность не выше 4, выполнено неравенство

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g-\mathbb{E}_\nu g|^2 d\nu\Big)^{1/2d} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \big[\varphi(f)-\varphi(g)\big]\, d\nu \leqslant R(d)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f-g|\, d\nu\Big)^{1/d},$$

где $\mathbb{E}_\nu g := \int\limits_{\mathbb{R}^n} g\, d\nu$. Так как $\nu \in P_{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4}$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\, d\nu = a,\ \int_{\mathbb{R}^n} (g-\mathbb{E}_\nu g)^2\, d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} (g-a)^2\, d\nu \geqslant b,\ \int_{\mathbb{R}^n} |f-g|\, d\nu \leqslant c.$$

Таким образом, $\Phi(\nu) \leqslant 0$ для каждой меры $\nu \in P_{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4}$, чье наименьшее аффинное подпространство, содержащее носитель, имеет размерность не выше 4, а значит и для каждой меры $\nu \in P_{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4}$. В частности для исходной меры μ выполнено неравенство (5.3.3). Таким образом, неравенство (5.3.3) доказано для произвольной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ с носителем в некотором компактном выпуклом множестве. Для произвольной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ оценка (5.3.3) доказывается аппроксимацией логарифмически вогнутыми мерами с ограниченными носителями.

В случае, когда μ — логарифмически вогнутая мера на локально выпуклом пространстве, а $f, g \in \mathcal{P}_d(\mu)$, оценка (5.3.3) получается предельным переходом по определению класса $\mathcal{P}_d(\mu)$. По определению расстояния по вариации получаем, что теорема доказана. □

5.4 Многочлены от гауссовских случайных векторов

Как уже было отмечено в конце параграфа 4.5 (см. замечание 4.5.4), полученные в этой главе общие результаты для логарифмически вогнутых мер, справедливы и для всех гауссовских мер, так как гауссовские меры являются логарифмически вогнутыми. Более того, получаемые с помощью этих общих теорем оценки в случае гауссовских мер оказываются более точными по сравнению с аналогичными утверждениями, которые можно получить с помощью результатов главы 4. В этом параграфе мы сформулируем основные следствия общих результатов настоящей главы для распределений измеримых многочленов относительно гауссовской меры и о связи различных метрик на пространстве таких распределений.

Следствие 5.4.1. *Существует такое число $C > 0$, что для каждого $d \in \mathbb{N}$, для произвольной гауссовской меры γ на локально выпуклом пространстве E и для каждого непостоянного $f \in \mathcal{P}_d(\gamma)$ выполнена оценка*

$$\sigma(\gamma \circ f^{-1}, t) \leqslant C d^2 [\mathbb{D} f]^{-1/2d} \cdot t^{1/d}.$$

Т.е. распределение $\gamma \circ f^{-1}$ абсолютно непрерывно относительно меры

Лебега на $\mathbb{R}$, а плотность ϱ_f этого распределения принадлежит пространству Никольского $B^{1/d}_{1,\infty}(\mathbb{R})$, причем

$$[\mathbb{D}f]^{1/2d} \int_{\mathbb{R}} |\varrho_f(t+h) - \varrho_f(t)|\, dt \leqslant Cd^2 \cdot |h|^{1/d} \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Следствие 5.4.2. *Существует такое число $C > 0$, что для каждого числа $d \in \mathbb{N}$, для каждого числа $a > 0$ для произвольной гауссовской меры γ на локально выпуклом пространстве E и для произвольных $f, g \in \mathcal{P}_d(\gamma)$ с $\mathbb{D}f \geqslant a$, $\mathbb{D}g \geqslant a$ выполнено неравенство*

$$d_{\mathrm{TV}}(f,g) \leqslant C(a,d) \cdot d_{\mathrm{KR}}(f,g)^{\frac{1}{d+1}},$$

где $C(a,d) := 9(Cd^2a^{-1/2d} + 1)$.

Следствие 5.4.3. *Для каждого $d \in \mathbb{N}$ существует такое число $C(d) > 0$, что для произвольной гауссовской меры μ на локально выпуклом пространстве E и для произвольных $f, g \in \mathcal{P}_d(\mu)$ выполнена оценка*

$$[\mathbb{D}g]^{1/2d} \cdot d_{\mathrm{TV}}(f,g) \leqslant C(d) \cdot \|f - g\|_1^{1/d}.$$

Замечание 5.4.4. В частности, эти три результата применимы к случайным величинам вида

$$g(X) := \sum_{j_1+\ldots+j_n \leqslant d} a_{j_1,\ldots,j_n} X_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{j_n}, \tag{5.4.1}$$

где $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением $\mathcal{N}(0,1)$. В следующей главе будут исследованы свойства регулярности случайных величин такого вида при дополнительных структурных ограничениях.

Глава 6

Свойства образов при дополнительных структурных ограничениях

В данной главе исследуются свойства образов мер под действием отображений при дополнительных структурных ограничениях на отображение или на исходную меру.

6.1 Регулярность образов многочленов специального вида от гауссовских случайных величин

В этом параграфе мы подробнее рассмотрим свойства регулярности распределений случайных величин вида (5.4.1) с дополнительным ограничением: *каждая переменная входит в* (5.4.1) *в степенях не выше* m, $m \leqslant d$, т. е. свойства случайных величин вида $f(X)$, где

$$f(x) := \sum_{j_1=0}^{m} \dots \sum_{j_n=0}^{m} a_{j_1,\dots,j_n} x_1^{j_1} \cdot \dots \cdot x_n^{j_n}, \tag{6.1.1}$$

$X = (X_1, \dots, X_n)$, а $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением $\mathcal{N}(0,1)$. Напомним, что распределение случайного вектора $X = (X_1, \dots, X_n)$ с независимыми компонентами, имеющими стандартное нормальное распределение, обозначается γ_n и называется стандартной гауссовской мерой на $\mathbb{R}^n$. Основной результат данного параграфа представлен в следующей теореме.

Теорема 6.1.1. *Пусть $m, d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant m$, и пусть γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$. Существует такое число $C(m,d)$, зависящее лишь от d и m, что для каждого непостоянного многочлена f вида* (6.1.1) *степени $d[f] := \max\{j_1 + \ldots + j_n \colon a_{j_1,\ldots,j_n} \neq 0\} \in [1,d]$ имеет место оценка*

$$\sigma(\gamma_n \circ f^{-1}, t) \leqslant C(m,d)(t/a[f])^{1/m}\big[|\ln(t/a[f])|^{d-m} + 1\big],$$

где $a[f] := \max\limits_{j_1+\ldots+j_n=d[f]} |a_{j_1,\ldots,j_n}|$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Заметим, что для произвольного $\alpha \neq 0$ выполнено тождество $\mathbb{E}[\varphi'(\alpha f)] = \mathbb{E}[\psi'(f)]$, где $\psi(t) = \alpha^{-1}\varphi(\alpha t)$. Поэтому

$$\sigma(\gamma_n \circ (\alpha f)^{-1}, t) = \sup\big\{\mathbb{E}[\varphi'(\alpha f)] \colon \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \|\varphi'\|_\infty \leqslant 1, \|\varphi\|_\infty \leqslant t\big\} =$$
$$= \sup\big\{\mathbb{E}[\psi'(f)] \colon \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \|\psi'\|_\infty \leqslant 1, \|\psi\|_\infty \leqslant \alpha^{-1}t\big\} = \sigma(\gamma_n \circ f^{-1}, \alpha^{-1}t).$$

Таким образом, для каждого ненулевого числа α верно равенство

$$\sigma(\gamma_n \circ (\alpha f)^{-1}, t) = \sigma(\gamma_n \circ f^{-1}, t/\alpha)$$

и достаточно доказать теорему для многочленов f с $a[f] = 1$.

Далее считаем, что $a[f] = 1$. Доказательство будем вести индукцией по d. Заметим, что число $a[f]$ будет коэффициентом при некотором мономе $x_1^{j_1^0} \cdot \ldots \cdot x_n^{j_n^0}$ для некоторых фиксированных индексов $j_1^0, \ldots, j_n^0$.

Пусть $d = m$. Как уже было отмечено в подразделе 2.1.4, на пространстве всех многочленов степени не выше d все L^p нормы и все соболевиские нормы (относительно гауссовской меры) эквивалентны (см. [61, Следствие 5.5.5]). В частности эквивалентны L^2 норма и норма в соболевском пространстве $W^{2,d}(\gamma_n)$, поэтому

$$[\mathbb{D}f]^{1/2} \geqslant c_1(d)\Big[\mathbb{E}\Big|\frac{\partial^{j_1^0+\ldots+j_n^0} f}{\partial x_1^{j_1^0} \ldots \partial x_n^{j_n^0}}\Big|^2\Big]^{1/2} = c_1(d) \cdot j_1^0! \cdot \ldots \cdot j_n^0! \cdot a[f] \geqslant c_1(d).$$

По следствию 5.4.1

$$\sigma(\gamma_n \circ f^{-1}, t) \leqslant Cd^2[c_1(d)]^{-1/d} t^{1/d}.$$

Таким образом, доказана база индукции $d = m$.

Перейдем теперь к обоснованию шага индукции. Пусть X — случайный вектор с распределением γ_n и пусть Z — стандартная нормальная случайная величина, независимая с вектором X. Для каждого $\varepsilon > 0$ выполнены тождества

$$\mathbb{E}\,\varphi'(f) = \mathbb{E}\,\varphi'\big(f(X)\big) = \mathbb{E}\big[\varphi'\big(f(X)\big) - \varphi'\big(f(X)+\varepsilon Z\big)\big] + \mathbb{E}\,\varphi'\big(f(X)+\varepsilon Z\big).$$

Для оценки первого слагаемого применим теорему 3.2.3:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\varphi'\big(f(X)\big) - \varphi'\big(f(X)+\varepsilon Z\big)\big] \leqslant \\
&\leqslant \|\varphi'\|_\infty\, \mathbb{E}_Z\Big[\|\gamma_n\circ f^{-1}(\cdot-\varepsilon Z) - \gamma_n\circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}}\Big] \leqslant 2\|\varphi'\|_\infty\, \mathbb{E}_Z\big[\sigma(\gamma_n\circ f^{-1}, \varepsilon|Z|)\big] \\
&\qquad\qquad \leqslant 2\|\varphi'\|_\infty\, \sigma\big(\gamma_n\circ f^{-1}, \varepsilon\cdot\mathbb{E}|Z|\big) \leqslant 2\|\varphi'\|_\infty\, \sigma(\gamma_n\circ f^{-1}, \varepsilon),
\end{aligned}$$

где была использована монотонность и вогнутость функции $\sigma(\gamma_n\circ f^{-1}, \cdot)$ (см. лемму 1.2.4 и комментарий после определения 3.2.2) и где $\mathbb{E}_Z$ обозначает математическое ожидание относительно случайной величины Z.

Оценим теперь $\mathbb{E}\,\varphi'\big(f(X)+\varepsilon Z\big)$. Как уже было сказано ранее, число $a[f]$ является коэффициентом при некотором мономе $x_1^{j_1^0}\cdot\ldots\cdot x_n^{j_n^0}$. Не ограничивая общности, считаем, что $j_n^0 \neq 0$. Рассмотрим многочлен f, как многочлен от n-ой переменной x_n при фиксированных остальных:

$$f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) = \sum_{j=0}^{m} f_j(x_1,\ldots,x_{n-1})x_n^j.$$

Применяя теперь следствие 5.4.1 к $f(x_1,\ldots,x_{n-1},X_n,Z)$, получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\,\varphi'\big(f(X)+\varepsilon Z\big) = \mathbb{E}_{X_1,\ldots,X_{n-1}}\mathbb{E}_{X_n,Z}\,\varphi'\big(f(X_1,\ldots,X_{n-1},X_n)+\varepsilon Z\big) \\
&\leqslant Cm^2\|\varphi\|_\infty^{1/m}\|\varphi'\|_\infty^{1-1/m}\mathbb{E}_{X_1,\ldots,X_{n-1}}\big(\mathbb{D}_{X_n}f(X_1,\ldots,X_{n-1},X_n)+\varepsilon^2\big)^{-1/2m}.
\end{aligned}$$

Опять воспользуемся эквивалентностью $L^2(\gamma_1)$ и соболевской $W^{1,2}(\gamma_1)$ норм на пространстве всех многочленов $g(s) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j s^j$ степени не выше m:

$$\mathbb{D}g(X_n) \geqslant c_2(m)\mathbb{E}|g'(X_n)|^2 \geqslant c_3(m)\max_{1\leqslant j\leqslant m}|a_j|^2,$$

где второе неравенство следует из эквивалентности двух норм на конечномерном пространстве. Не ограничивая общности, можно считать, что $c_3(m) \leqslant 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} Cm^2\mathbb{E}_{X_1,\dots,X_{n-1}}\bigl(\mathbb{D}_{X_n} f(X_1,\dots,X_{n-1},X_n)+\varepsilon^2\bigr)^{-1/2m} \leqslant \\ \leqslant Cm^2\mathbb{E}_{X_1,\dots,X_{n-1}}\bigl(c_3(m)|f_{j_n^0}(X_1,\dots,X_{n-1})|^2+\varepsilon^2\bigr)^{-1/2m} \leqslant \\ \leqslant c_4(m)\mathbb{E}_{X_1,\dots,X_{n-1}}\bigl(|f_{j_n^0}(X_1,\dots,X_{n-1})|^2+\varepsilon^2\bigr)^{-1/2m}, \end{aligned}$$

откуда получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,\varphi'\bigl(f(X)+\varepsilon Z\bigr) \leqslant \\ \leqslant c_4(m)\|\varphi\|_\infty^{1/m}\|\varphi'\|_\infty^{1-1/m}\mathbb{E}_{X_1,\dots,X_{n-1}}\bigl(|f_{j_n^0}(X_1,\dots,X_{n-1})|^2+\varepsilon^2\bigr)^{-1/2m}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{X_1,\dots,X_{n-1}}\bigl(|f_{j_n^0}(X_1,\dots,X_{n-1})|^2+\varepsilon^2\bigr)^{-1/2m} = \\ = \int_0^{\varepsilon^{-1/m}} P\Bigl(\bigl(|f_{j_n^0}(X_1,\dots,X_{n-1})|^2+\varepsilon^2\bigr)^{-1/2m} \geqslant \tau\Bigr)\,d\tau = \\ = \frac{1}{m}\int_0^\infty \frac{s}{(s^2+\varepsilon^2)^{1+1/2m}}\,P\bigl(|f_{j_n^0}(X_1,\dots,X_{n-1})| \leqslant s\bigr)\,ds \leqslant \\ \leqslant \frac{8}{m}\int_0^\infty \frac{s}{(s+\varepsilon)^{2+1/m}}\,\sigma(\gamma_n\circ f_{j_n^0}^{-1},s)\,ds = \\ = \frac{8}{m}\varepsilon^{-1/m}\int_0^\infty \frac{t}{(t+1)^{2+1/m}}\,\sigma(\gamma_n\circ f_{j_n^0}^{-1},\varepsilon t)\,dt \leqslant \\ \leqslant \frac{8}{m}\varepsilon^{-1/m}\int_0^\infty \frac{1}{(t+1)^{1+1/m}}\,\sigma(\gamma_n\circ f_{j_n^0}^{-1},\varepsilon t)\,dt, \end{aligned}$$

где была использована оценка из следствия 3.2.8 и субаддитивность модуля непрерывности $\sigma(\gamma_n\circ f_{j_n^0}^{-1},\cdot)$. Заметим, что $d[f_{j_n^0}] \leqslant d-1$ и что $a[f_{j_n^0}] = a[f] = 1$. Поэтому, по предположению индукции, выполнена оценка

$$\begin{aligned} \sigma(\gamma_n\circ f_{j_n^0}^{-1},\varepsilon t) \leqslant C(m,d-1)(\varepsilon t)^{1/m}\bigl[|\ln\varepsilon t|^{d-1-m}+1\bigr] \leqslant \\ \leqslant 2^{d-1-m}C(m,d-1)(\varepsilon t)^{1/m}\bigl[|\ln t|^{d-1-m}+|\ln\varepsilon|^{d-1-m}+1\bigr], \end{aligned}$$

которая влечет следующую цепочку неравенств:

$$\varepsilon^{-1/m}\int_0^\infty \frac{1}{(t+1)^{1+1/m}}\,\sigma(\gamma_n\circ f^{-1}_{j_n^0},\varepsilon t)\,dt\leqslant$$
$$\leqslant 2^{d-1-m}C(m,d-1)\int_0^{\varepsilon^{-1}}\frac{t^{1/m}\big[|\ln t|^{d-1-m}+|\ln\varepsilon|^{d-1-m}+1\big]}{(t+1)^{1+1/m}}\,dt+$$
$$+\varepsilon^{-1/m}\int_{\varepsilon^{-1}}^\infty\frac{1}{(t+1)^{1+1/m}}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant 2^{d-1-m}C(m,d\text{–}1)\int_0^{\varepsilon^{-1}}\frac{\big[|\ln t|^{d-1-m}+|\ln\varepsilon|^{d-1-m}+1\big]}{t+1}\,dt+m(1+\varepsilon)^{-1/m}.$$

Будем далее считать, что $\varepsilon\in(0,e^{-1}]$. В этом случае

$$\int_0^{\varepsilon^{-1}}\frac{\big[|\ln t|^{d-1-m}+|\ln\varepsilon|^{d-1-m}+1\big]}{t+1}\,dt=$$
$$=\int_0^1\frac{|\ln t|^{d-1-m}}{t+1}\,dt+\int_1^{\varepsilon^{-1}}\frac{|\ln t|^{d-1-m}}{t+1}\,dt+\big[|\ln\varepsilon|^{d-1-m}+1\big]\ln(1+\varepsilon^{-1})\leqslant$$
$$\leqslant c(d,m)+|\ln\varepsilon|^{d-1-m}\ln(1+\varepsilon^{-1})+\big[|\ln\varepsilon|^{d-1-m}+1\big]\ln(1+\varepsilon^{-1})\leqslant$$
$$\leqslant 10|\ln\varepsilon|^{d-m}+c(d,m).$$

Таким образом, при $\varepsilon\in(0,e^{-1}]$ выполнена оценка

$$\mathbb{E}\,\varphi'\big(f(X)+\varepsilon Z\big)\leqslant C_1(m,d)\|\varphi\|_\infty^{1/m}\|\varphi'\|_\infty^{1-1/m}[|\ln\varepsilon|^{d-m}+1]$$

и

$$\mathbb{E}\,\varphi'\big(f(X)\big)\leqslant 2\|\varphi'\|_\infty\,\sigma(\gamma_n\circ f^{-1},\varepsilon)+C_1(m,d)\|\varphi\|_\infty^{1/m}\|\varphi'\|_\infty^{1-1/m}[|\ln\varepsilon|^{d-m}+1],$$

что дает оценку

$$\sigma(\gamma_n\circ f^{-1},t)\leqslant 2\sigma(\gamma_n\circ f^{-1},\varepsilon)+C_1(m,d)\,t^{1/m}[|\ln\varepsilon|^{d-m}+1]\qquad(6.1.2)$$

при каждом $t>0$ и при каждом $\varepsilon\in(0,e^{-1}]$.

Рассмотрим сначала $t\in(0,e^{-1}]$. При таких t имеет место тождество

$$\sigma(\gamma_n\circ f^{-1},t)=\sum_{k=0}^\infty 2^k\Big[\sigma\big(\gamma_n\circ f^{-1},t2^{-2dk}\big)-2\sigma\big(\gamma_n\circ f^{-1},t2^{-2d(k+1)}\big)\Big],$$

так как по следствию 5.4.1 выполнено неравенство

$$2^{k+1}\sigma\big(\gamma_n\circ f^{-1},t2^{-2d(k+1)}\big)\leqslant Cd^2[\mathbb{D}f(X)]^{-1/2d}\,t^{1/d}2^{-k-1}\to 0.$$

Поэтому, по уже доказанной оценке (6.1.2)

$$\sigma(\gamma_n \circ f^{-1}, t) \leqslant C_1(m,d) t^{1/m} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-2d/m)} [|\ln t 2^{-2d(k+1)}|^{d-m} + 1].$$

Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-2d/m)} [|\ln t 2^{-2d(k+1)}|^{d-m} + 1]$$
$$\leqslant 2^{d-m} [|\ln t|^{d-m} + 1] \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-2d/m)} + 4^{d-m} d^{d-m} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{d-m} 2^{k(1-2d/m)}.$$

Поскольку $1 - 2d/m \leqslant -1$, то оба ряда выше сходятся. Таким образом,

$$\sigma(\gamma_n \circ f^{-1}, t) \leqslant C(m,d) t^{1/m} [|\ln t|^{d-m} + 1]$$

при каждом $t \in (0, e^{-1}]$.

При $t \geqslant e^{-1}$ выполнена оценка

$$\sigma(\gamma_n \circ f^{-1}, t) \leqslant 1 \leqslant e^{1/m} t^{1/m} \big[|\ln t|^{d-m} + 1\big].$$

Теорема доказана. □

Обсудим теперь приложения полученного результата о регулярности из теоремы 6.1.1.

Первое следствие дает оценку характеристической функции многочлена вида (6.1.1) от независимых стандартных нормальных случайных величин, усиливающую теорему 5 из работы [18].

Следствие 6.1.2. *Пусть $m, d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant m$, и пусть γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$. Существует такое число $C(m,d)$, зависящее лишь от d и m, что для каждого непостоянного многочлена f вида*

$$f(x) := \sum_{j_1=0}^{m} \ldots \sum_{j_n=0}^{m} a_{j_1,\ldots,j_n} x_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{j_n}$$

с $d[f] := \max\{j_1 + \ldots + j_n \colon a_{j_1,\ldots,j_n} \neq 0\} \leqslant d$, верно неравенство

$$|\mathbb{E} \exp\{itf\}| \leqslant C(m,d) |a[f] \cdot t|^{-1/m} \big[\big|\ln |a[f] \cdot t|\big|^{d-m} + 1\big]$$

где $a[f] := \max\limits_{j_1+\ldots+j_n = d[f]} |a_{j_1,\ldots,j_n}|$.

Доказательство. Утверждение следует из рассуждений, приводимых в замечании 3.2.4. □

Второе следствие дает оценку расстояния по вариации через расстояние Канторовича – Рубинштейна для многочленов вида (6.1.1) от независимых стандартных нормальных случайных величин.

Следствие 6.1.3. *Пусть $d, m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, и пусть γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$. Существует такое число $C := C(d, m, a)$, зависящее лишь от чисел d, m и a, что для произвольных многочленов f и g вида* (6.1.1)*, для которых*

$$d[f] \leqslant d, \quad d[g] \leqslant d, \quad a[f] \geqslant a, \quad a[g] \geqslant a,$$

выполняется неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant C[d_{\mathrm{KR}}(f, g)]^{\frac{1}{m+1}} \big[|\ln d_{\mathrm{KR}}(f, g)|^{\frac{(d-m)m}{m+1}} + 1 \big].$$

Доказательство. Уже доказано, что

$$\sigma(\gamma_n \circ f^{-1}, \varepsilon) \leqslant C(m, d)(\varepsilon / a[f])^{1/m} \big[|\ln(\varepsilon / a[f])|^{d-m} + 1 \big] \leqslant$$
$$\leqslant C_1(m, d, a) \varepsilon^{1/m} \big[|\ln \varepsilon|^{d-m} + 1 \big]$$

и аналогичная оценка справедлива и для $\sigma(\gamma_n \circ g^{-1}, \cdot)$. Применив оценку из следствия 3.2.7, получаем

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant 6 C_1(m, d, a) \varepsilon^{1/m} \big[|\ln \varepsilon|^{d-m} + 1 \big] + \varepsilon^{-1} d_{\mathrm{KR}}(f, g)$$

при каждом $\varepsilon \in (0, 1)$. Так как $d_{\mathrm{KR}}(f, g) \leqslant 2$, можно подставить

$$\varepsilon = \big[\tfrac{1}{8} d_{\mathrm{KR}}(f, g) \big]^{\frac{m}{m+1}} \big| \ln \big(\tfrac{1}{8} d_{\mathrm{KR}}(f, g) \big) \big|^{\frac{(m-d)m}{m+1}},$$

что даст объявленную в следствие оценку. Следствие доказано. □

6.2 Распределения сильно выпуклых функций и максимумов из нескольких квадратичных форм

Здесь мы рассмотрим распределения так называемых сильно выпуклых функции от гауссовских случайных векторов. Более ограничительное, по

сравнению с обычной выпуклостью, условие сильной выпуклости позволяет получить оценки на производные по Скороходу распределений таких функций.

Определение 6.2.1. *Будем говорить, что борелевская функция f на локально выпуклом пространстве E сильно выпукла вдоль линейного подпространства L с постоянной $m>0$, если*

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\geqslant m|h|^2 \quad \forall x\in E, \forall h\in L.$$

Если f сильно выпукла вдоль всего пространства E, то такую функцию будем называть просто сильно выпуклой на E.

Основные результаты данного параграфа будут следовать из следующей общей теоремы.

Теорема 6.2.2. *Пусть μ — вероятностная борелевская мера на $\mathbb{R}^n$, где $n\geqslant 3$, имеющая локально соболевскую плотность ϱ, и пусть f — сильно выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$ с постоянной $m>0$. Предположим, что величины*

$$M(\mu):=\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{-2}\,\mu(dx),\, R(\mu):=\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{-2}|\langle\nabla\varrho(x),x-y\rangle|\,dx$$

конечны. Тогда для произвольной функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с $\|\varphi\|_\infty\leqslant 1$ выполнено

$$\mathbb{E}\big[\varphi'(f)\big]\leqslant 2m^{-1}\big[(n-1)M(\mu)+R(\mu)\big].$$

В частности,

$$\|D_1\mu\circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}}\leqslant 2m^{-1}\big[(n-1)M(\mu)+R(\mu)\big]$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\varrho\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда условие сильной выпуклости равносильно оценке $D^2f(x)\geqslant mI$ (в смысле симметричных квадратичных форм). Пусть x_0 — точка минимума функции f (такая точка единственная). Сделав сдвиг, можно считать, что $x_0=0$. Тогда

$$\langle\nabla f(x),x\rangle=\frac{d}{dt}f(tx)\Big|_{t=1}=\int_0^1\frac{d^2}{ds^2}f(sx)\,ds=\int_0^1\langle D^2f(sx)\cdot x,x\rangle\,ds\geqslant m|x|^2.$$

Пусть теперь $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$. Тогда, записывая интеграл в полярных координатах, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi'\big(f(x)\big)\,\mu(dx) = \int_{S^{n-1}} \int_0^{+\infty} \varphi'\big(f(r\theta)\big)\varrho(r\theta)r^{n-1}\,dr\,\sigma_n(d\theta),$$

где σ_n — поверхностная мера на сфере S^{n-1}. Заметим, что

$$\int_0^{+\infty} \varphi'\big(f(r\theta)\big)\varrho(r\theta)r^{n-1}\,dr = \\ = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{+\infty} \varphi'\big(f(r\theta)\big)\frac{\partial_r f(r\theta)}{\partial_r f(r\theta)+\varepsilon}\varrho(r\theta)r^{n-1}\,dr$$

так как $\partial_r f(r\theta) = \langle \nabla f(r\theta), \theta\rangle \geqslant mr \geqslant 0$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^{+\infty} \varphi'\big(f(r\theta)\big)\frac{\partial_r f(r\theta)}{\partial_r f(r\theta)+\varepsilon}\varrho(r\theta)r^{n-1}\,dr = \\ = \int_0^{+\infty} \partial_r\varphi\big(f(r\theta)\big)\frac{\varrho(r\theta)r^{n-1}}{\partial_r f(r\theta)+\varepsilon}\,dr = \\ -\int_0^{+\infty} \varphi\big(f(r\theta)\big)\Big[\frac{r^{n-1}\partial_r\varrho(r\theta)}{\partial_r f(r\theta)+\varepsilon} + \frac{(n-1)r^{n-2}\varrho(r\theta)}{\partial_r f(r\theta)+\varepsilon} - \frac{r^{n-1}\varrho(r\theta)\partial_{rr}f(r\theta)}{(\partial_r f(r\theta)+\varepsilon)^2}\Big]\,dr \\ \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}|\partial_r\varrho(r\theta)|}{\partial_r f(r\theta)+\varepsilon}\,dr + \int_0^{+\infty} \frac{(n-1)r^{n-2}\varrho(r\theta)}{\partial_r f(r\theta)+\varepsilon}\,dr + \\ + \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}\varrho(r\theta)\partial_{rr}f(r\theta)}{(\partial_r f(r\theta)+\varepsilon)^2}\,dr,$$

где в последнем переходе была использована неотрицательность функции $\partial_{rr}f(r\theta) = \langle D^2 f(r\theta)\cdot\theta,\theta\rangle$. Проинтегрировав по частям в третьем интеграле, получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}\varrho(r\theta)\partial_{rr}f(r\theta)}{(\partial_r f(r\theta)+\varepsilon)^2}\,dr = \\ = \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}\partial_r\varrho(r\theta)}{\partial_r f(r\theta)+\varepsilon}\,dr + \int_0^{+\infty} \frac{(n-1)r^{n-2}\varrho(r\theta)}{\partial_r f(r\theta)+\varepsilon}\,dr.$$

Таким образом,

$$\int_0^{+\infty} \varphi'\big(f(r\theta)\big)\frac{\partial_r f(r\theta)}{\partial_r f(r\theta)+\varepsilon}\varrho(r\theta)r^{n-1}\,dr \leqslant \\ \leqslant 2\int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}|\partial_r\varrho(r\theta)|}{\partial_r f(r\theta)+\varepsilon}\,dr + 2\int_0^{+\infty} \frac{(n-1)r^{n-2}\varrho(r\theta)}{\partial_r f(r\theta)+\varepsilon}\,dr.$$

Заметим, что при $r \geqslant 3$ функции $\frac{r^{n-1}|\partial_r \varrho(r\theta)|}{\partial_r f(r\theta)}$ и $\frac{(n-1)r^{n-2}\varrho(r\theta)}{\partial_r f(r\theta)}$ интегрируемы, а значит по теореме Лебега можно осуществить предельный переход при $\varepsilon \to +0$. Тем самым, доказана оценка

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi'\big(f(x)\big)\,\mu(dx) \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_{S^{n-1}}\int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}|\partial_r \varrho(r\theta)|}{\partial_r f(r\theta)}\,dr\,\sigma_n(d\theta) +$$
$$+ 2(n-1)\int_{S^{n-1}}\int_0^{+\infty} \frac{r^{n-2}\varrho(r\theta)}{\partial_r f(r\theta)}\,dr\,\sigma_n(d\theta).$$

Остается вспомнить, что $\partial_r f(r\theta) = \langle \nabla f(r\theta), \theta\rangle \geqslant mr \geqslant 0$ и сделать обратную полярную замену, что дает оценку

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi'(f(x))\varrho(x)\,dx \leqslant 2m^{-1}\big[(n-1)M(\mu) + R(\mu)\big]$$

для произвольной $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$, в случае $\varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и функции $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Если f не является гладкой, то с помощью сверток можно построить гладкие функции f_j с $D^2 f_j \geqslant mI$, поточечно сходящиеся к f, что дает наше утверждение для произвольной сильно выпуклой функции f. Стандартной аппроксимацией получаем аналогичную оценку и для произвольной локально соболевской плотности ϱ. Теорема доказана. □

Заметим, что супремум по точкам y в предыдущей теореме появляется из-за сдвига начала координат (когда мы предполагаем, что минимум f достигается в нуле).

Теперь возникает вопрос о том, когда $M(\mu)$ и $R(\mu)$ конечны. Некоторые достаточные условия даны в следующем утверждении.

Замечание 6.2.3. Отметим, что для локально соболевской плотности ϱ с конечной информацией Фишера

$$\mathcal{I}(\mu) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla \varrho(x)|^2}{\varrho(x)}\,dx$$

имеет место оценка

$$R(\mu) \leqslant \sqrt{\mathcal{I}(\mu)M(\mu)}.$$

Теперь можно получить следующее простое следствие.

Следствие 6.2.4. *Пусть $n \geqslant 3$, γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$ и f — сильно выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$ с постоянной $m > 0$. Тогда*

$$\|D_1\gamma_n \circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 8m^{-1}.$$

Доказательство. Мы имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-2}\,\gamma_n(dx) = \int_0^\infty \gamma_n(|x-y| \leqslant t^{-1/2})\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\infty \gamma_n(|x| \leqslant t^{-1/2})\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2}\,\gamma_n(dx) = \frac{1}{n-2}.$$

Значит, по теореме 6.3.6 и замечанию 6.2.3, получаем

$$\|D_1\gamma_n \circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 2m^{-1}\Big[\frac{n-1}{n-2} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-2}}\Big] \leqslant (4+2\sqrt{3})m^{-1} \leqslant 8m^{-1}.$$

Следствие доказано. □

На самом деле требование сильной выпуклости на всем пространстве можно ослабить до условия сильной выпуклости вдоль некоторого трехмерного подпространства.

Следствие 6.2.5. *Пусть $n \geqslant 3$, γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$ и пусть f — сильно выпуклая функция вдоль некоторого трехмерного подпространства L с постоянной $m > 0$. Тогда*

$$\|D_1\gamma_n \circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 8m^{-1}.$$

Доказательство. Заметим, что, в силу сильной выпукдости вдоль L, для каждой пары векторов $x \in L, y \in L^\perp$ и для каждого вектора $h \in L$ выполнено

$$f(x+h+y) + f(x-h+y) - 2f(x+y) \geqslant m|h|^2,$$

что дает сильную выпуклость с постоянной m функции $x \mapsto f(x+y)$ для каждого фиксированного $y \in L^\perp$. Таким образом, для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ получаем

$$\mathbb{E}\big[\varphi'(f)\big] = \int_{L^\perp}\int_L \varphi'(f(x+y))\,\gamma_L(dx)\,\gamma_{L^\perp}(dy) \leqslant 8m^{-1},$$

где γ_L и $\gamma_{L^\perp}$ — стандартные гауссовские меры на подпространстве L и его ортогональном дополнении. Это доказывает наше утверждение. □

Важной особенностью установленных результатов является то, что полученные оценки на плотность распределения и ее вариацию зависят от f только через постоянную m. Применим полученные результаты к исследованию регулярности плотности распределения максимума из квадратичных форм и общих многочленов второй степени.

Лемма 6.2.6. *Пусть $f_1, \dots, f_p$ — набор сильно выпуклых вдоль подпространства L функций с постоянными $m_1, \dots, m_p$ соответственно. Тогда функция $f := \max\{f_1, \dots, f_p\}$ также сильно выпукла вдоль подпространства L с постоянной $m := \min\{m_1, \dots, m_p\}$.*

Доказательство. Для фиксированной точки $x \in \mathbb{R}^n$ и для произвольного $h \in L$ имеем

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x) \geqslant f_{j_0}(x+h)+f_{j_0}(x-h)-2f_{j_0}(x) \geqslant m_{j_0}|h|^2 \geqslant m|h|^2,$$

где j_0 — такой индекс, что $f(x) = f_{j_0}(x)$. □

Следствие 6.2.7. *Пусть $n \geqslant 3$, γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$, и пусть $f := \max\{f_1, \dots, f_p\}$, где $f_j(x) := \langle A_j x, x\rangle + \langle a_j, x\rangle + \alpha_j$ на $\mathbb{R}^n$ с симметричными операторами A_j (не обязательно неотрицательными). Предположим, что имеется такое подпространство L с $\dim L = 3$, что для каждого $x \in L$ для некоторого числа $m > 0$ выполнена оценка $\langle A_j x, x\rangle \geqslant m|x|^2$ для каждого $j \in \{1, \dots, p\}$. Тогда*

$$\|D_1\gamma_n \circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 4m^{-1}.$$

Доказательство. Для каждой пары векторов $x \in \mathbb{R}^n$ и $h \in L$ и каждого $j \in \{1, \dots, p\}$ выполнено

$$f_j(x+h) + f_j(x-h) - 2f_j(x) = 2\langle A_j h, h\rangle \geqslant 2m|h|^2.$$

Таким образом, все функции f_j сильно выпуклы с постоянной $2m$ вдоль подпространства L. По лемме 6.2.6 получаем, что и $f := \max\{f_1, \dots, f_p\}$ сильно выпукла с постоянной $2m$ вдоль L. Теперь утверждение следует из следствия 6.2.5. □

Замечание 6.2.8. Результат предыдущего следствия остается справедливым, если вместо равенства $f_j(x) = \langle A_j x, x\rangle + \langle a_j, x\rangle + \alpha_j$ предположить, что

$$f_j(x+h) + f_j(x-h) - 2f_j(x) \geqslant 2\langle A_j h, h\rangle$$

для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ и каждого $h \in L$.

Далее мы несколько усилим предыдущее следствие и получим общий факт о регулярности плотности максимума из многочленов второй степени при условии невырожденности квадратичных форм, соответсующих старшему моному, на общем двумерном подпространстве. Сразу отметим, что получаемые в такой постановке оценки зависят от количества p многочленов.

Лемма 6.2.9. *Пусть $f := \max\{f_1, \ldots, f_p\}$, $f_j(r) = a_j r^2 + b_j r + c_j$ и пусть плотность ϱ принадлежит классу BV функций ограниченной вариации на $\mathbb{R}$. Предположим, что f имеет минимум в нуле и $a_j \geqslant a > 0$ для каждого $j \in \{1, \ldots, p\}$. Тогда для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, для которой $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$, выполнено*

$$\int_0^\infty \varphi'(f(r)) r\varrho(r)\, dr \leqslant a^{-1}\Big[2p^2\|\varrho\|_\infty + \|D_1[\varrho\, d\lambda]\|_{\mathrm{TV}}\Big],$$

где λ — мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi'(f(r)) r\varrho(r)\, dr &= \int_0^\infty (\varphi(f))' \tfrac{r}{f'(r)}\varrho(r)\, dr \leqslant \\ &\leqslant \big\|D_1\big[\tfrac{r}{f'(r)} I_{[0,+\infty)}\varrho(r)\,\lambda(dr)\big]\big\|_{\mathrm{TV}} \leqslant \\ &\leqslant \|D_1(\tfrac{r}{f'(r)} I_{[0,+\infty)}\,\lambda(dr))\|_{\mathrm{TV}}\,\|\varrho\|_\infty + \sup_{r\geqslant 0}\big|\tfrac{r}{f'(r)}\big|\,\|D_1[\varrho\, d\lambda]\|_{\mathrm{TV}}.\end{aligned}$$

Мы имеем

$$(0,\infty) = (0, r_1)\cup(r_1, r_2)\cup\ldots\cup(r_N, \infty), \text{ где } f(r) = f_{j_k}(r) \text{ при } r \in (r_k, r_{k+1}).$$

Во-первых, поскольку $f(x) \geqslant f(0)$, то при $r \in [r_k, r_{k+1}]$ имеем

$$a_{j_k} r^2 + b_{j_k} r + c_{j_k} = f_{j_k}(r) = f(r) \geqslant f(0) \geqslant f_{j_k}(0) = c_{j_k}$$

и $a_{j_k} r + b_{j_k} \geqslant 0$, что при $r \in [r_k, r_{k+1}]$ дает оценку

$$f'(r) = f'_{j_k}(r) = 2a_{j_k} r + b_{j_k} \geqslant a_{j_k} r \geqslant ar.$$

Поэтому $\sup\limits_{r \geqslant 0} \bigl| \frac{r}{f'(r)} \bigr| \leqslant a^{-1}$.

Во-вторых, $\| D_1 (\frac{r}{f'(r)} I_{[0,+\infty)} \, \lambda(dr)) \|_{\mathrm{TV}} \leqslant \mathrm{Var}\bigl(\frac{r}{f'(r)} I_{[0,+\infty)}\bigr)$, где

$$\mathrm{Var}(g) := \sup\Bigl\{ \sum_{s=1}^{n} |g(t_s) - g(t_{s-1})| \colon \ -\infty < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < +\infty \Bigr\}$$

обычная поточечная вариация функции g на $\mathbb{R}$ (см. [49, Раздел 3.2]). На каждом интервале (r_k, r_{k+1}) функция

$$\frac{r}{f'(r)} = \frac{1}{2a_{j_k} + b_{j_k} r^{-1}}$$

монотонна и имеет скачки в точках r_k. Значит, для вариации функции $\frac{r}{f'(r)}$ получаем

$$\mathrm{Var}\bigl(\tfrac{r}{f'(r)}\bigr) = \sum_k \Bigl| \frac{r_{k+1}}{f'_{j_k}(r_{k+1})} - \frac{r_k}{f'_{j_k}(r_k)} \Bigr| + \sum_k \Bigl| \frac{r_k}{f'_{j_k}(r_k)} - \frac{r_k}{f'_{j_{k-1}}(r_k)} \Bigr|.$$

Поскольку $f'(r) \geqslant ar$, имеем $\mathrm{Var}\bigl(\frac{r}{f'(r)} I_{[0,+\infty)}\bigr) \leqslant 2a^{-1}(N+2)$. Оценим число интервалов. Каждая пара разных парабол пересекается самое большее в двух точках. Значит, есть самое большее $p(p-1)$ абсцисс точек пересечения $\tau_1 \leqslant \cdots \leqslant \tau_M$, $M \leqslant p(p-1)$. Для каждого промежутка $[\tau_m, \tau_{m+1}]$ имеется единственный индекс j, для которого $f_j(r) = f(r)$ при $r \in [\tau_m, \tau_{m+1}]$. Итак, приходим к оценке $N+2 \leqslant M+1 \leqslant p^2$, что завершает доказательство. $\square$

Теорема 6.2.10. *Пусть $\mu = \varrho \, dx$ — неотрицательная мера на $\mathbb{R}^2$ с ограниченной плотностью $\varrho \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$. Пусть $f := \max\{f_1, \ldots, f_p\}$, где*

$$f_j(x) = \langle A_j x, x \rangle + \langle a_j, x \rangle + \alpha_j$$

является многочленом второго порядка с положительным симметричным оператором A_j, причем $\langle A_j x, x \rangle \geqslant m|x|^2$, $m > 0$. Тогда, для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$, выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi'(f(x)) \varrho(x) \, dx \leqslant m^{-1} \biggl[4\pi p^2 \|\varrho\|_\infty + \sup_{y \in \mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \varrho(x)| \cdot |x-y|^{-1} \, dx \biggr].$$

Доказательство. Пусть y — единственная точка минимума f. Без потери общности можно считать, что $y = 0$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi'(f)\, d\mu = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \varphi'(f(r\hat{\theta}))r\varrho(r\hat{\theta})\, dr\, d\theta,$$

где $\hat{\theta} := (\cos\theta, \sin\theta)$. Заметим, что $f_j(r\hat{\theta}) = \langle A_j\hat{\theta}, \hat{\theta}\rangle r^2 + \langle a_j, \hat{\theta}\rangle r + \alpha_j$ и $r = 0$ — точка минимума функции $r \mapsto f(r\hat{\theta})$. По предыдущей лемме

$$\int_0^\infty \varphi'(f(r\hat{\theta}))r\varrho(r\hat{\theta})\, dr \leqslant m^{-1}\left[2p^2\|\varrho\|_\infty + \int_0^\infty |\langle \nabla\varrho(r\hat{\theta}), \hat{\theta}\rangle|\, dr\right],$$

что дает объявленную оценку, так как

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\infty |\langle \nabla\varrho(r\hat{\theta}), \hat{\theta}\rangle|\, dr\, d\theta = \int_{\mathbb{R}^2} |\langle \nabla\varrho(x), x-y\rangle| \cdot |x-y|^{-2}\, dx.$$

Теорема доказана. □

Следствие 6.2.11. *Пусть $n \geqslant 2$, γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$, и пусть $f := \max\{f_1, \ldots, f_p\}$, где $f_j(x) := \langle A_j x, x\rangle + \langle a_j, x\rangle + \alpha_j$ на $\mathbb{R}^n$ с симметричными операторами A_j. Предположим, что имеется такое двумерное подпространство L, что для каждого $x \in L$ выполнено $\langle A_j x, x\rangle \geqslant m|x|^2$, $m > 0$, для всех $j \in \{1, \ldots, p\}$. Тогда*

$$\|D_1\gamma_n \circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant (2p^2+1)m^{-1}.$$

Доказательство. Для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi'(f)\, d\gamma_n = \int_{L^\perp}\int_L \varphi'(f(x+y))\, \gamma_L(dx)\, \gamma_{L^\perp}(dy).$$

По предыдущей теореме

$$\int_L \varphi'(f(x+y))\, \gamma_L(dx) \leqslant 2p^2m^{-1} + \sup_{y\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi m}\int_{\mathbb{R}^2} |x|\cdot|x-y|^{-1}e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\, dx.$$

Заметим, что

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|\cdot|x-y|^{-1}e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\, dx = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty |y+r\hat{\theta}|e^{-2^{-1}|y+r\hat{\theta}|^2}\, dr\, d\theta,$$

где $\hat{\theta} := (\cos\theta, \sin\theta)$. Поскольку $te^{-t^2/4} \leqslant \sqrt{2e^{-1}} \leqslant 1$ при $t > 0$, внутренний интеграл выше оценивается через

$$\int_0^\infty e^{-4^{-1}|y+r\hat{\theta}|^2}\, dr \leqslant \int_{-\infty}^\infty e^{-4^{-1}(r-|y|)^2}\, dr = \sqrt{4\pi},$$

что завершает доказательство. □

Замечание 6.2.12. Заметим, что взяв в предыдущей теореме $p = 1$, получаем для одного многочлена второй степени $f(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle a, x\rangle + \alpha$ на $\mathbb{R}^n$ с симметричным операторои A следующее утверждение о регулярности плотности: если у оператора A есть два положительных собственных значения s_1 и s_2, то $\|D_1\gamma_n \circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 3(\min\{s_1, s_2\})^{-1}$. В этом параграфе нас в основном интересовал случай максимума из нескольких многочленов второй степени (в частности, квадратичных форм). В следующем параграфе мы более подробно обсудим распределения отдельных многочленов второй степени.

6.3 Оценки расстояния по вариации между двумя многочленами второй степени

В этом параграфе мы более подробно рассмотрим свойства распределений многочленов второй степени от гауссовских векторов и, в частности, усилим результаты работы [105], получив уточнение оценки из следствия 5.4.3 для многочленов второй степени, существенно зависящих от достаточного числа переменных. Кроме того, в качестве следствия основного результата этого параграфа, получим некоторые обобщения оценок из работы [72].

Мы начнем со следующей вспомогательной леммы.

Лемма 6.3.1. *Пусть γ_2 — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^2$, пусть f — произвольный многочлен на $\mathbb{R}^2$ и пусть g — многочлен второй степени на $\mathbb{R}^2$, который представлен в виде $g(x) = \langle Bx, x\rangle + \langle b, x\rangle + \beta$, где B — самосопряженный оператор, $b \in \mathbb{R}^2$ и $\beta \in \mathbb{R}$. Предположим, что B положительно или отрицательно определен. Тогда для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ верно неравенство*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[\varphi(f)\big] - \mathbb{E}\big[\varphi(g)\big]\\ &\leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|s_1|\cdot|s_2|}}\Big[3\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\big[|f(x)-g(x)|e^{-\frac{1}{4}|x|^2}\big] + \sup_{x\in\mathbb{R}^2}\big[|\nabla f(x) - \nabla g(x)|e^{-\frac{1}{4}|x|^2}\big]\Big],\end{aligned}$$

где s_1 и s_2 — собственные значения B.

Доказательство. Можно считать, что $g(x) = \langle B(x-t), x-t\rangle + c$ для некоторых $t \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$. Перейдя к полярным координатам с центром в точке t, получаем:

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\varphi(f(x)) - \varphi(g(x))]\,\gamma_2(dx)$$
$$= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} [\varphi(f(t+r\hat\theta)) - \varphi(g(t+r\hat\theta))] r e^{-\frac{1}{2}|t+r\hat\theta|^2}\,dr\,d\theta,$$

где $\hat\theta := (\cos\theta, \sin\theta)$. Для каждого фиксированного $\theta \in [0, 2\pi)$ положим $f_\theta(r) := f(t+r\hat\theta)$, $g_\theta(r) := g(t+r\hat\theta)$ и $\varrho_\theta(r) = (2\pi)^{-1} e^{-\frac{1}{2}|t+r\hat\theta|^2}$. Пусть

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(\tau) d\tau,$$

Тогда

$$\partial_r(\Phi(f_\theta) - \Phi(g_\theta)) = \partial_r f_\theta \cdot \varphi(f_\theta) - \partial_r g_\theta \cdot \varphi(g_\theta) =$$
$$= \big(\varphi(f_\theta) - \varphi(g_\theta)\big)\partial_r g_\theta + \varphi(f_\theta)\big(\partial_r f_\theta - \partial_r g_\theta\big).$$

Заметим, что $\partial_r g_\theta(r) = 2r\langle B\hat\theta, \hat\theta\rangle$. Таким образом,

$$\int_0^{+\infty} [\varphi(f_\theta) - \varphi(g_\theta)] r\varrho_\theta\,dr = \frac{1}{2\langle B\hat\theta, \hat\theta\rangle} \int_0^{+\infty} [\varphi(f_\theta) - \varphi(g_\theta)]\partial_r g_\theta \varrho_\theta\,dr =$$
$$= \frac{1}{2\langle B\hat\theta, \hat\theta\rangle} \int_0^{+\infty} \partial_r(\Phi(f_\theta) - \Phi(g_\theta))\varrho_\theta\,dr -$$
$$- \frac{1}{2\langle B\hat\theta, \hat\theta\rangle} \int_0^{+\infty} \varphi(f_\theta)\big(\partial_r f_\theta - \partial_r g_\theta\big)\varrho_\theta\,dr.$$

Проинтегрируем по частям в первом слагаемом выше:

$$\int_0^{+\infty} \partial_r(\Phi(f_\theta) - \Phi(g_\theta))\varrho_\theta\,dr$$
$$= -\big(\Phi(f_\theta(0)) - \Phi(g_\theta(0))\big)\varrho_\theta(0) + \int_0^{+\infty} (\Phi(f_\theta) - \Phi(g_\theta))\langle t + r\hat\theta, \hat\theta\rangle \varrho_\theta\,dr.$$

Заметим, что $|\Phi(f_\theta) - \Phi(g_\theta)| \leqslant \|\varphi\|_\infty |f_\theta - g_\theta|$. Поэтому, получаем

$$\int_0^{+\infty} [\varphi(f_\theta) - \varphi(g_\theta)] r\varrho_\theta\,dr \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2|\langle B\hat\theta, \hat\theta\rangle|}\Big[(2\pi)^{-1} \sup_{x\in\mathbb{R}^2}\big[|f(x) - g(x)| e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\big] +$$
$$+ \int_0^{+\infty} \big[|f_\theta - g_\theta| \cdot |\langle t + r\hat\theta, \hat\theta\rangle| + |\partial_r f_\theta - \partial_r g_\theta|\big]\varrho_\theta\,dr\Big].$$

Заметим теперь, что

$$|f_\theta - g_\theta| \cdot |\langle t + r\hat{\theta}, \hat{\theta}\rangle| \varrho_\theta \leqslant (2\pi)^{-1} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left[|f(x) - g(x)||x| e^{-\frac{3}{8}|x|^2}\right] e^{-\frac{1}{8}(r^2 + 2r\langle t, \hat{\theta}\rangle + |t|^2)}$$
$$\leqslant 2(2\pi)^{-1} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left[|f(x) - g(x)| e^{-\frac{1}{4}|x|^2}\right] e^{-\frac{1}{8}(r^2 - 2r|t| + |t|^2)},$$

где в последнем неравенстве было использовано то, что $|x| e^{-\frac{1}{8}|x|^2} \leqslant 2$. Также, заметим, что

$$|\partial_r f_\theta - \partial_r g_\theta| = |\langle \nabla f(t + r\hat{\theta}) - \nabla g(t + r\hat{\theta}), \hat{\theta}\rangle| \leqslant |\nabla f(t + r\hat{\theta}) - \nabla g(t + r\hat{\theta})|.$$

Таким образом,

$$|\partial_r f_\theta - \partial_r g_\theta| \varrho_\theta \leqslant (2\pi)^{-1} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left[|\nabla f(x) - \nabla g(x)| e^{-\frac{1}{4}|x|^2}\right] e^{-\frac{1}{4}(r^2 + 2r\langle t, \hat{\theta}\rangle + |t|^2)} \leqslant$$
$$\leqslant (2\pi)^{-1} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left[|\nabla f(x) - \nabla g(x)| e^{-\frac{1}{4}|x|^2}\right] e^{-\frac{1}{8}(r^2 - 2r|t| + |t|^2)},$$

Так как

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{8}(r^2 - 2r|t| + |t|^2)}\, dr = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{8}(r - |t|)^2}\, dr \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{8}(r - |t|)^2}\, dr = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{8}s^2}\, ds = 2\sqrt{2\pi},$$

то мы получаем оценку

$$\int_0^{+\infty} [\varphi(f_\theta) - \varphi(g_\theta)] r \varrho_\theta\, dr$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2\sqrt{2\pi}|\langle B\hat{\theta}, \hat{\theta}\rangle|} \left[5 \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left[|f(x) - g(x)| e^{-\frac{1}{4}|x|^2}\right] + 2 \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left[|\nabla f(x) - \nabla g(x)| e^{-\frac{1}{4}|x|^2}\right]\right].$$

Без потери общности можно считать, что

$$\langle B\hat{\theta}, \hat{\theta}\rangle = s_1 \cos^2\theta + s_2 \sin^2\theta$$

и что s_1 и s_2 одного знака. Поэтому, $|\langle B\hat{\theta}, \hat{\theta}\rangle| = |s_1| \cos^2\theta + |s_2| \sin^2\theta$ и

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\varphi(f(x)) - \varphi(g(x))]\, \gamma(dx) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[3 \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left[|f(x) - g(x)| e^{-\frac{1}{4}|x|^2}\right] + \right.$$
$$\left. + \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left[|\nabla f(x) - \nabla g(x)| e^{-\frac{1}{4}|x|^2}\right]\right] \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|s_1| \cos^2\theta + |s_2| \sin^2\theta}.$$

Наконец, напомним, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|s_1|\cos^2\theta + |s_2|\sin^2\theta} = 4\int_0^{\pi/2} \frac{d\mathrm{tg}\theta}{|s_1| + |s_2|\mathrm{tg}^2\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{|s_1|\cdot|s_2|}}$$

Лемма доказана. □

Лемма 6.3.2. *Пусть γ_2 — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^2$. Пусть ℓ_1, ℓ_2 — аффинные функции на $\mathbb{R}^2$, тогда*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\bigl[\sqrt{|\ell_1(x)|^2 + |\ell_2(x)|^2}e^{-\frac{1}{4}|x|^2}\bigr] \leqslant \sqrt{3}\bigl(\mathbb{E}\bigl[|\ell_1|^2 + |\ell_2|^2\bigr]\bigr)^{1/2}.$$

Пусть G — многочлен второй степени на $\mathbb{R}^2$, тогда

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\bigl[|G(x)|e^{-\frac{1}{4}|x|^2}\bigr] \leqslant 6\sqrt{2}\bigl(\mathbb{E}\bigl[|G|^2\bigr]\bigr)^{1/2}.$$

Кроме того, для каждого $d\in\mathbb{N}$ существуют такие положительные числа $c_1(d)$ и $c_2(d)$, зависящие лишь от d, что для каждой пары многочленов ℓ_1, ℓ_2 степени не выше d выполняется неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\bigl[\sqrt{|\ell_1(x)|^2 + |\ell_2(x)|^2}e^{-\frac{1}{4}|x|^2}\bigr] \leqslant c_1(d)\bigl(\mathbb{E}\bigl[|\ell_1|^2 + |\ell_2|^2\bigr]\bigr)^{1/2}.$$

и для каждого многочлена G степени не выше d выполняется неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\bigl[|G(x)|e^{-\frac{1}{4}|x|^2}\bigr] \leqslant c_2(d)\bigl(\mathbb{E}\bigl[|G|^2\bigr]\bigr)^{1/2}.$$

Доказательство. Пусть $\ell_j(x) = a_{1,j}x_1 + a_{2,j}x_2 + b_j$. Тогда

$$\mathbb{E}\bigl[|\ell_1|^2 + |\ell_2|^2\bigr] = \sum_{j=1}^{2} a_{1,j}^2 + a_{2,j}^2 + b_j^2.$$

Заметим, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\bigl[|t|^m e^{-\frac{1}{2}t^2}\bigr] = (m)^{\frac{m}{2}}e^{-\frac{m}{2}}$ для каждого $m\in\mathbb{N}$. Таким образом, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\bigl[|t|e^{-\frac{1}{2}t^2}\bigr] = e^{-1/2} \leqslant 1$ и $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\bigl[t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}\bigr] = 2e^{-1} \leqslant 1$. Поэтому,

$$\Bigl(\sum_{j=1}^{2}|\ell_j(x)|^2\Bigr)e^{-\frac{1}{2}|x|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{2}\bigl(a_{1,j}^2 + a_{2,j}^2 + b_j^2 + 2|a_{1,j}||a_{2,j}| + 2|b_j||a_{1,j}| + 2|b_j||a_{2,j}|\bigr) \leqslant$$

$$\leqslant 3\sum_{j=1}^{2}(a_{1,j}^2 + a_{2,j}^2 + b_j^2).$$

Первое неравенство леммы доказано.

Пусть $G(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c$, тогда

$$\mathbb{E}\big[|G|^2\big] = 3(a_{11}^2 + a_{22}^2) + 4a_{12}^2 + b_1^2 + b_2^2 + c^2 + 2a_{11}a_{22} + 2c(a_{11} + a_{22}) =$$
$$= \tfrac{3}{2}(a_{11}^2 + a_{22}^2) + 4a_{12}^2 + b_1^2 + b_2^2 + \tfrac{1}{3}c^2 - a_{11}a_{22} + \big(\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}c + \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(a_{11} + a_{22})\big)^2 \geqslant$$
$$\geqslant a_{11}^2 + a_{22}^2 + 4a_{12}^2 + b_1^2 + b_2^2 + \tfrac{1}{3}c^2 \geqslant \tfrac{1}{3}(a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{12}^2 + b_1^2 + b_2^2 + c^2).$$

Заметим, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\big[|t|^m e^{-\frac{1}{4}t^2}\big] = (2m)^{\frac{m}{2}}e^{-\frac{m}{2}}$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Поэтому, $\sup\limits_t |t|e^{-t^2/4} = \sqrt{2}e^{-1/2} \leqslant 1$ и $\sup\limits_t t^2e^{-t^2/4} = 4e^{-1} \leqslant 2$. Таким образом,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\big[|G(x)|e^{-\frac{|x|^2}{4}}\big] \leqslant 2|a_{11}| + 2|a_{12}| + 2|a_{22}| + |b_1| + |b_2| + |c| \leqslant$$
$$\leqslant 2(|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{22}| + |b_1| + |b_2| + |c|) \leqslant 2\sqrt{6}\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 + b_1^2 + b_2^2 + c^2}.$$

Получаем, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\big[|G(x)|e^{-\frac{|x|^2}{4}}\big] \leqslant 6\sqrt{2}\big(\mathbb{E}\big[|G|^2\big]\big)^{1/2}.$$

Второе утверждение леммы доказано.

Для доказательства третьей оценки рассмотрим пространство L всех отображений (ℓ_1, ℓ_2), где ℓ_1 и ℓ_2 многочлены степени не выше d. Оба выражения

$$(\ell_1, \ell_2) \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}^2}\big[\sqrt{|\ell_1(x)|^2 + |\ell_2(x)|^2}e^{-\frac{1}{4}|x|^2}\big]$$

и

$$(\ell_1, \ell_2) \mapsto \big(\mathbb{E}\big[|\ell_1|^2 + |\ell_2|^2\big]\big)^{1/2}.$$

задают нормы на L. Две нормы на конечномерном пространстве L эквивалентны, что влечет существование числа $c_1(d)$. Аналогичным рассуждением доказывается существование числа $c_2(d)$. Лемма доказана. □

Лемма 6.3.3. *Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — самосопряженный оператор, $a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и пусть Z — случайный вектор с распределением γ_n. Тогда*

$$\mathbb{E}\big[\langle AZ, Z\rangle + \langle a, Z\rangle + \alpha\big] = \mathrm{tr}A + \alpha$$

и

$$\mathbb{E}\big[|\langle AZ, Z\rangle + \langle a, Z\rangle + \alpha|^2\big] = 2\|A\|_{HS}^2 + (\mathrm{tr}A + \alpha)^2 + |a|^2.$$

Доказательство. Фиксировав собственный базис оператора A, далее считаем, что $Ax = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$. Тогда,

$$\mathbb{E}\big[\langle AZ, Z\rangle + \langle a, Z\rangle + \alpha\big] = \mathbb{E}\big[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Z_j^2\big] + \alpha = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j + \alpha = \mathrm{tr}A + \alpha.$$

Для доказательства второго равенства заметим, что

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[|\langle AZ, Z\rangle + \langle a, Z\rangle + \alpha|^2\big] = \\
&\quad = \mathbb{D}\big[\langle AZ, Z\rangle + \langle a, Z\rangle + \alpha\big] + \big(\mathbb{E}\big[\langle AZ, Z\rangle + \langle a, Z\rangle + \alpha\big]\big)^2 = \\
&\qquad = \mathbb{D}\Big[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Z_j^2 + \langle a, Z\rangle\Big] + (\mathrm{tr}A + \alpha)^2 = \\
&\quad = 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 + |a|^2 + (\mathrm{tr}A + \alpha)^2 = 2\|A\|_{HS}^2 + (\mathrm{tr}A + \alpha)^2 + |a|^2.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

В частности, получаем такое следствие.

Следствие 6.3.4. *Пусть f и g два многочлена второй степени на $\mathbb{R}^n$ со стандартной гауссовской мерой γ_n. Тогда*

$$\|\nabla f - \nabla g\|_2 \leqslant \sqrt{2}\|f - g\|_2.$$

Доказательство. Многочлены имеют вид $f(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle a, x\rangle + \alpha$ и $g(x) = \langle Bx, x\rangle + \langle b, x\rangle + \beta$ для некоторых самосопряженных операторов A и B, для некоторых векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$ и для некоторых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\nabla f(x) = 2Ax + a$ и $\nabla g(x) = 2Bx + b$. По лемме 6.3.3 имеет место равенство

$$\begin{aligned}
\|\nabla f - \nabla g\|_2^2 &= \mathbb{E}\big[|2(A - B)Z + (a - b)|^2\big] \\
&= \mathbb{E}\big[4\langle (A - B)^2 Z, Z\rangle + 4\langle (A - B)(a - b), Z\rangle + |a - b|^2\big] \\
&= 4\mathrm{tr}(A - B)^2 + |a - b|^2 = 4\|A - B\|_{HS}^2 + |a - b|^2.
\end{aligned}$$

С другой стороны, по той же лемме 6.3.3 выполнено равенство

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_2^2 = 2\|A - B\|_{HS}^2 + (\mathrm{tr}A - \mathrm{tr}B + \alpha - \beta)^2 + |a - b|^2 \geqslant \\
\geqslant 2\|A - B\|_{HS}^2 + \frac{1}{2}|a - b|^2.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\nabla f - \nabla g\|_2^2 \leqslant 2\|f - g\|_2^2$$

и следствие доказано. □

Замечание 6.3.5. Заметим, что эквивалентность L^2-нормы и соболевской $W^{1,2}(\gamma_2)$ нормы на пространстве всех многочленов степени не выше d (см. подраздел 2.1.4) влечет то, что для каждого натурального числа d найдется такое число $c(d)$, зависящее лишь от d, что для каждого многочлена f степени не выше d и для каждого многочлена g второй степени выполнена оценка

$$\|\nabla f - \nabla g\|_2 \leqslant c(d)\|f - g\|_2. \tag{6.3.1}$$

Предыдущая лемма уточняет значение числа $c(d)$ в случае, когда f — многочлен степени не выше двух.

Перейдем теперь к основному результату данного параграфа.

Теорема 6.3.6. *Пусть γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$ и пусть $d \in \mathbb{N}$. Существует такое число $C(d)$, зависящее только от d, что для каждого многочлена f степени не выше d на $\mathbb{R}^n$ и для каждого многочлена второй степени $g(x) = \langle Bx, x\rangle + \langle b, x\rangle + \beta$, где B — самосопряженный оператор, $b \in \mathbb{R}^n$ и $\beta \in \mathbb{R}$, верно неравенство*

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant \frac{C(d)}{\sqrt{|s_1|\cdot|s_2|}} \cdot \|f - g\|_2$$

при условии, что существует двумерное подпространство L, на котором квадратичная форма $x \mapsto \langle Bx, x\rangle$ положительно или отрицательно определена, а s_1 и s_2 — собственные числа этой квадратичной формы. Если f имеет степень не выше 2, то можно взять $C(2) = 80$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$L = \{(x_1, x_2, 0, \ldots, 0)\colon x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Пусть $\hat{x} := (x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-2}$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — некоторая функция с

$\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$. Применяя лемму 6.3.1 и лемму 6.3.2, получаем

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \big[\varphi\big(f(x_1,x_2,\hat{x})\big) - \varphi\big(g(x_1,x_2,\hat{x})\big)\big]\,\gamma_2(dx_1dx_2) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \tfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|s_1|\cdot|s_2|}}\Big[3\sup_{x_1,x_2\in\mathbb{R}}\big[|f(x_1,x_2,\hat{x}) - g(x_1,x_2,\hat{x})|e^{-\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)}\big] + \\
&\qquad + \sup_{x_1,x_2\in\mathbb{R}}\big[|\nabla_{x_1,x_2} f(x_1,x_2,\hat{x}) - \nabla_{x_1,x_2} g(x_1,x_2,\hat{x})|e^{-\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)}\big]\Big] \leqslant \\
&\quad \leqslant \tfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|s_1|\cdot|s_2|}}\Big[3c_2(d)\Big(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x_1,x_2,\hat{x}) - g(x_1,x_2,\hat{x})|^2\,\gamma_2(dx_1dx_2)\Big)^{1/2} + \\
&\qquad + c_1(d)\Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla_{x_1,x_2}\big(f(x_1,x_2,\hat{x}) - g(x_1,x_2,\hat{x})\big)|^2\,\gamma_2(dx_1dx_2)\Big)^{1/2}\Big] \\
&\leqslant \tfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|s_1|\cdot|s_2|}}(3c_2(d)+c_1(d)c(d))\Big(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x_1,x_2,\hat{x}) - g(x_1,x_2,\hat{x})|^2\gamma_2(dx_1dx_2)\Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

где при последнем переходе была использована оценка (6.3.1). Для завершения доказательства заметим, что

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\varphi(f)\big] - \mathbb{E}\big[\varphi(g)\big] = \\
&\qquad \int_{\mathbb{R}^{n-2}}\int_{\mathbb{R}^2} \varphi\big(f(x_1,x_2,\hat{x})\big) - \varphi\big(g(x_1,x_2,\hat{x})\big)\gamma_2(dx_1dx_2)\gamma_{n-2}(d\hat{x}) \\
&\leqslant \tfrac{C(d)}{\sqrt{|s_1|\cdot|s_2|}}\int_{\mathbb{R}^{n-2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x_1,x_2,\hat{x}) - g(x_1,x_2,\hat{x})|^2\,\gamma_2(dx_1dx_2)\Big)^{1/2}\gamma_{n-2}(d\hat{x}) \\
&\qquad\qquad \leqslant \tfrac{C(d)}{\sqrt{|s_1|\cdot|s_2|}}\|f-g\|_2
\end{aligned}$$

где $C(d) = \sqrt{2\pi}\big(3c_2(d) + c_1(d)c(d)\big)$, что дает оценку из формулировки теоремы.

Для того, чтобы получить численное значение константы в случае, когда f — многочлен степени не выше двух, заметим, что в рассуждении выше можно считать $c_1(d) = \sqrt{3}$, $c_2(d) = 6\sqrt{2}$, и $c(d) = \sqrt{2}$, что следует из леммы 6.3.2 и следствия 6.3.4. Так как $\sqrt{2\pi}(18\sqrt{2} + \sqrt{6}) \leqslant 80$, получаем вторую часть теоремы. Теорема доказана. □

Замечание 6.3.7. По лемме 6.3.3 для многочленов

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle a, x\rangle + \alpha \text{ и } g(x) = \langle Bx, x\rangle + \langle b, x\rangle + \beta,$$

где A и B — самосопряженные операторы, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, имеют

место следующие соотношения:

$$\|f-g\|_2 = \big(2\|A-B\|_{HS}^2 + (\mathrm{tr}A - \mathrm{tr}B + \alpha - \beta)^2 + |a-b|^2\big)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant 2(\|A-B\|_{HS} + |\mathrm{tr}A - \mathrm{tr}B + \alpha - \beta| + |a-b|).$$

Тем самым, в условиях теоремы 6.3.6, получаем оценку

$$d_{\mathrm{TV}}(f,g) \leqslant \tfrac{160}{\sqrt{|s_1|\cdot|s_2|}}\big(\|A-B\|_{HS} + |\mathrm{tr}A - \mathrm{tr}B + \alpha - \beta| + |a-b|\big).$$

В частности, если $\mathbb{E}f(Z) = \mathbb{E}g(Z)$, то $|\mathrm{tr}A - \mathrm{tr}B + \alpha - \beta| = 0$ и

$$d_{\mathrm{TV}}(f,g) \leqslant \tfrac{160}{\sqrt{|s_1|\cdot|s_2|}}\big(\|A-B\|_{HS} + |a-b|\big).$$

Обсудим теперь возможные приложения теоремы 6.3.6.

В первую очередь, уточним результаты работы [105]. Для самосопряженного оператора B, пусть

$$\Lambda(B) := \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$$

обозначает множество всех собственных значений B с учетом кратности. В дальнейшем всегда предполагается, что собственные значения пронумерованы таким образом, что $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots$. В работе [105] был установлен следующий результат: *если на $\mathbb{R}^n$ задана стандартная гауссовская мера γ_n и если $g(x) = \langle Bx, x\rangle - \mathrm{tr}B$, причем мощность множества $\{\lambda \in \Lambda(B)\colon \lambda \neq 0\}$ хотя бы 5, то найдется такое число $C(g)$, что для каждого многочлена $f(x) = \langle Ax, x\rangle - \mathrm{tr}A$, где A — самосопряженный оператор, выполнено неравенство*

$$d_{\mathrm{TV}}(f,g) \leqslant C(g)\|f-g\|_2. \tag{6.3.2}$$

Отметим, что в работе [105] указанный результат был сформулирован в терминах кратных стохастических интегралов. Выше мы переформулировали данный результат в терминах многочленов Эрмита второй степени.

В следствие ниже мы покажем, что условия в приведенном результате могут быть ослаблены, а зависимость константы $C(g)$ от g можно явно указать.

Следствие 6.3.8. *Пусть на $\mathbb{R}^n$ задана стандартная гауссовская мера γ_n и пусть $d \in \mathbb{N}$. Существует такое число $C(d)$, зависящее лишь от d, что для каждого многочлена $g(x) = \langle Bx, x\rangle + \langle b, x\rangle + \beta$, для которого мощность множества $\{\lambda \in \Lambda(B)\colon \lambda \neq 0\}$ хотя бы 3, и для каждого многочлена f степени не выше d верно неравенство*

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant \frac{C(d)}{\sqrt{|s_1|\cdot|s_2|}} \cdot \|f - g\|_2,$$

где s_1 и s_2 — два произвольных собственных значения одного знака из множества $\Lambda(B)$. Если f — многочлен степени не выше 2, то можно взять $C(2) = 80$. В частности, если собственные значения из $\Lambda(B)$ занумерованы в таком порядке, что $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots$, то

$$d_{\mathrm{TV}}(f, g) \leqslant \frac{C(d)}{\sqrt{|\lambda_2|\cdot|\lambda_3|}} \cdot \|f - g\|_2.$$

Кроме того, опять, если f — многочлен степени не выше двух, можно взять $C(2) = 80$.

Доказательство. Достаточно применить теорему 6.3.6 к линейному подпространству L, соответствующему собственным значениям s_1 и s_2. Кроме того, если взять два наибольших по модулю собственные значения одного знака, то всегда $|s_1| \cdot |s_2| \geqslant |\lambda_2| \cdot |\lambda_3|$. □

Замечание 6.3.9. Если теперь рассмотреть многочлены $f_h = g + h$, $h \in \mathbb{R}$, для $g(x) = \langle Bx, x\rangle + \langle b, x\rangle + \beta$, то получим оценку

$$\sigma(\gamma_n \circ g^{-1}, t) \leqslant \frac{80}{\sqrt{|\lambda_2|\cdot|\lambda_3|}} \cdot t,$$

при условии, что мощность множества $\{\lambda \in \Lambda(B)\colon \lambda \neq 0\}$ хотя бы 3 (или, если мощность равна двум, но оба собственных значения одного знака). Это означает, что мера $\gamma_n \circ g^{-1}$ дифференцируема по Скороходу, т. е. плотность распределения случайной величины g принадлежит пространству функций ограниченной вариации (см. определения из параграфа 3.3)

Замечание 6.3.10. Отметим, что установленный результат является оптимальным в следующем смысле: если $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ (т. е. только два собственных числа отличны от нуля и они разных знаков), то оценка вида

(6.3.2) не выполнена. Действительно, если бы оценка вида (6.3.2) оказалась бы верной для такого многочлена g, то, как отмечено в предыдущем замечании, это означало бы, что мера $\gamma_2 \circ g^{-1}$ была бы дифференцируемой по Скороходу. В частности, плотность этой меры была бы ограниченной, что, как известно, не верно для такого многочлена g (см. теорему 6.11.18 и задачу 6.11.24 в [8]).

Далее, получим некоторые обобщения результатов о распределениях евклидовых норм от нормальных случайных векторов из работы [72], в которой было доказано следующее утверждение. Пусть X и Y — два центрированных гауссовских случайных вектора в $\mathbb{R}^n$ с ковариационными матрицами Σ_X и Σ_Y соответственно, т. е.

$$\mathbb{E}\big[\langle X, u\rangle\big] = \mathbb{E}\big[\langle Y, u\rangle\big] = 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

и

$$\langle \Sigma_X u, v\rangle = \mathbb{E}\big[\langle X, u\rangle\langle X, v\rangle\big], \quad \langle \Sigma_Y u, v\rangle = \mathbb{E}\big[\langle Y, u\rangle\langle Y, v\rangle\big] \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Положим $\Lambda_{kX}^2 := \sum\limits_{j=k}^{\infty} \lambda_{jX}^2$, где λ_{jX} — собственные значения матрицы Σ_X с учетом кратности, упорядоченные по убыванию, и пусть величина Λ_{kY} определяется таким же образом для Σ_Y. Тогда при каждом $a \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$d_{\mathrm{Kol}}(|X|, |Y-a|) \leqslant C\big(\tfrac{1}{\sqrt{\Lambda_{1X}\Lambda_{2X}}} + \tfrac{1}{\sqrt{\Lambda_{1Y}\Lambda_{2Y}}}\big)\big(\|\Sigma_X - \Sigma_Y\|_{(1)} + |a|^2\big) \quad (6.3.3)$$

для некоторой численной постоянной $C > 0$, где $\|\cdot\|_{(1)}$ — ядерная норма матрицы и где d_{Kol} — расстояние по Колмогорову между случайными величинами, т. е.

$$d_{\mathrm{Kol}}(\xi, \eta) := \sup_{t\in\mathbb{R}} \big|P(\xi \leqslant t) - P(\eta \leqslant t)\big|.$$

Как следствие, также имеет место неравенство (см. [72, Следствие 2.3])

$$d_{\mathrm{Kol}}(|X-a|, |Y-a|) \leqslant C\big(\tfrac{1}{\sqrt{\Lambda_{1X}\Lambda_{2X}}} + \tfrac{1}{\sqrt{\Lambda_{1Y}\Lambda_{2Y}}}\big)\big(\|\Sigma_X - \Sigma_Y\|_{(1)} + |a|^2\big). \quad (6.3.4)$$

Следующий результат в некотором смысле обобщает оценки (6.3.3) и (6.3.4) на случай, когда вместо расстояния по Колмогорову оценивается расстояние по вариации.

Следствие 6.3.11. *Пусть X и Y — два центрированных n-мерных гауссовских случайных вектора с ковариационными матрицами Σ_X и Σ_Y соответственно и пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$d_{\mathrm{TV}}(|X-a|, |Y-b|) \\ \leqslant \frac{160}{\sqrt{\lambda_{1X}\cdot\lambda_{2X}}}\big(\|\Sigma_X - \Sigma_Y\|_{HS} + |\mathrm{tr}\Sigma_X - \mathrm{tr}\Sigma_Y| + \big||a|^2 - |b|^2\big| + |\Sigma_X^{1/2}a - \Sigma_Y^{1/2}b|\big).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $X = \Sigma_X^{1/2}Z$ и $Y = \Sigma_Y^{1/2}Z$, где Z — стандартный нормальный n-мерный случайный вектор с распределением γ_n. Тогда

$$|X-a|^2 = \langle \Sigma_X^{1/2}Z - a, \Sigma_X^{1/2}Z - a\rangle = \langle \Sigma_X Z, Z\rangle - 2\langle \Sigma_X^{1/2}a, Z\rangle + |a|^2 = g(Z)$$

и

$$|Y-b|^2 = \langle \Sigma_Y^{1/2}Z - b, \Sigma_Y^{1/2}Z - b\rangle = \langle \Sigma_Y Z, Z\rangle - 2\langle \Sigma_Y^{1/2}b, Z\rangle + |b|^2 = f(Z),$$

т. е. $|X-a|^2$ и $|Y-b|^2$ представимы в виде многочленов второй степени на пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартной гауссовской мерой γ_n. Можно применить теорему 6.3.6 к этим многочленам f и g:

$$d_{\mathrm{TV}}(|X-a|, |Y-b|) = d_{\mathrm{TV}}(|X-a|^2, |Y-b|^2) = d_{\mathrm{TV}}(f,g) \\ \leqslant \frac{80}{\sqrt{\lambda_{1X}\cdot\lambda_{2X}}}\|f-g\|_2,$$

где λ_{1X} и λ_{2X} — первые два собственных числа матрицы Σ_X. По лемме 6.3.3 получаем, что

$$\|f-g\|_2^2 = 2\|\Sigma_X - \Sigma_Y\|_{HS}^2 + \big(\mathrm{tr}\Sigma_X - \mathrm{tr}\Sigma_Y + |a|^2 - |b|^2\big)^2 + 4\big|\Sigma_X^{1/2}a - \Sigma_Y^{1/2}b\big|^2,$$

что влечет заявленное в следствие неравенство. Следствие доказано. □

Замечание 6.3.12. Сравним доказанную выше оценку с неравенствами (6.3.3) и (6.3.4). В первую очередь, отметим, что константный множитель $\frac{1}{\sqrt{\lambda_{1X}\cdot\lambda_{2X}}}$ больше (и, часто, значительно больше), чем множитель $\frac{1}{\sqrt{\Lambda_{1X}\Lambda_{2X}}}$. Сравним теперь правую часть оценки из следствия 6.3.11 при $b = 0$ с $\|\Sigma_X - \Sigma_Y\|_{(1)} + |a|^2$ из оценки (6.3.3). С одной стороны, когда сдвиг $a \neq 0$, то правая часть в оценке из следствия 6.3.11 даёт более медленное

убывание по a при $a \to 0$. Например, в случае, когда $X = Y = Z$, где Z — стандартный n-мерный нормальный вектор, $b = 0$, а вектор a имеет маленькую норму, выполняется соотношение $|a|^2 = \bar{o}(|\Sigma_X^{1/2} a|)$. С другой стороны, в случае, когда $b = a = 0$ и $\mathrm{tr}\Sigma_X = \mathrm{tr}\Sigma_Y$ (т. е. $\mathbb{E}|X|^2 = \mathbb{E}|Y|^2$), в правой части из следствия 6.3.11 стоит норма Гильберта – Шмидта $\|\Sigma_X - \Sigma_Y\|_{HS}$, которая обычно существенно меньше ядерной нормы $\|\Sigma_X - \Sigma_Y\|_{(1)}$ из оценки (6.3.3). Тем самым, в этом случае, оценка в следствия 6.3.11 дает лучшую скорость сходимости по сравнению с оценкой (6.3.3). Это замечание показывает, что и оценку в следствие 6.3.11, и оценку (6.3.3), по всей видимости, можно еще уточнить.

6.4 Линейные образы продакт мер

В заключительном параграфе данной главы мы рассмотрим свойства регулярности линейных образов продакт мер $\mu = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$, где каждая компонента μ_j — вероятностная мера на $\mathbb{R}$. Такие меры возникают, как распределения случайных векторов $X = (X_1, \ldots, X_n)$ с независимыми компонентами $X_1, \ldots, X_n$. В данном параграфе рассматривается вопрос об оценках норм производных по Скороходу распределний случайных векторов PX, где P — ортогональный проектор на k-мерное подпространство, а распределения μ_j каждой компоненты X_j дифференцируемы по Скороходу. В некотором смысле, рассматриваемый вопрос дополняет результаты М. Рудельсона и Р. Вершинина из работы [93] и результаты С.Г. Бобкова и Г.П. Чистякова из работы [7] о максимумах плотностей распределений векторов PX, когда вектор X имеет независимые компоненты с ограниченными плотностями. В частности, в работе [93] было установлено существование такой численной постоянной C, что для произвольного ортогонального проектора P на некоторое k-мерное подпространство плотность случайного вектора PX ограничена числом C^k, если плотность каждой компоненты X_j не превосходит 1. В работе [80] возможные значения константы C были уточнены.

В следующей теореме представлен основной результат данного пара-

графа. Везде в этом параграфе для сокращения записей будет использоваться обозначение ν' вместо $D_1\nu$ для производной по Скороходу меры ν на $\mathbb{R}$.

Теорема 6.4.1. *Для каждого числа $k \in \mathbb{N}$ найдется такое число $C(k) > 0$, что для произвольного случайного вектора $X := (X_1, \ldots, X_n)$ с независимыми компонентами, распределения $\mu_1, \ldots, \mu_n$ которых дифференцируемы по Скороходу, и для произвольного ортогонального проектора $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ выполнено неравенство*

$$\sup_{|e|=1} \|D_e[\mu \circ P^{-1}]\|_{\mathrm{TV}} \leqslant C(k) \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|\mu_j'\|_{\mathrm{TV}},$$

где $\mu = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ — распределение вектора X. В случае $k = 1$ выполнено тождество $C(1) = \sqrt{2}$, а в случае $k > 1$ можно взять $C(k) = C \cdot k^2$ для некоторой абсолютной постоянной C.

Доказательство этой теоремы основано на одном результате С.Г. Бобкова, Г.П. Чистякова и Ф. Гётце из работы [60] о специальном представлении дифференцируемой по Скороходу меры ν на $\mathbb{R}$ в виде смеси равномерных распределений на отрезках. Напомним (см. [10, стр. 148]), что мера ν называется смесью радоновских мер ν_t на локально выпуклом пространстве X, если существует такая конечная мера π на некотором измеримом пространстве $(T, \mathcal{A})$, что функции $t \mapsto \nu_t(B)$ интегрируемы относительно меры π для каждого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(X)$, функция $t \mapsto \|\nu_t\|_{\mathrm{TV}}$ также интегрируема относительно меры π и

$$\nu(B) = \int_T \nu_t(B)\, \pi(dt) \quad \forall B \in \mathcal{B}(X).$$

Будем говорить, что мера ν представлена в виде выпуклой смеси мер ν_t, если мера π — вероятностная.

Следующая теорема — это лемма 4.3 из работы [60]. В дальнейшем в этом параграфе будем использовать обозначение $\nu_{[a,b]}$ для равномерного распределения на отрезке $[a, b]$.

Теорема 6.4.2 (см. [60]). *Каждая дифференцируемая по Скороходу мера ν на $\mathbb{R}$ может быть представлена в виде такой выпуклой смеси*

$$\nu = \int_{\{a<b\}} \nu_{[a,b]}\, \pi(dadb)$$

равномерных распределений, что

$$\|\nu'\|_{\mathrm{TV}} = \int_{\{a<b\}} \|\nu'_{[a,b]}\|_{\mathrm{TV}}\, \pi(dadb).$$

Отметим, что

$$\|\nu'_{[a,b]}\|_{\mathrm{TV}} = \tfrac{2}{b-a}. \tag{6.4.1}$$

Кроме того, отметим, что из определения смеси мер следует, что в теореме выше

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\, d\nu = \int_{\{a<b\}} \tfrac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x)\, dx\, \pi(dadb) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Нам также понадобится оценка К. Болла площади сечения единичного куба $Q_n := [-1/2, 1/2]^n$ из работ [55] и [56]: пусть H — гиперплоскость коразмерности 1 в пространстве $\mathbb{R}^n$, тогда

$$\lambda^{n-1}(H \cap Q_n) \leqslant \sqrt{2}, \tag{6.4.2}$$

где λ^m — m-мерная мера Лебега.

Перейдем теперь к доказательству основного результата данного параграфа и начнем со случая $k = 1$.

Теорема 6.4.3. *Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — дифференцируемые по Скороходу вероятностные меры на $\mathbb{R}$. Тогда для каждого линейного функционала $f(x) = \langle a, x\rangle$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $|a| = 1$, выполнена оценка*

$$\|(\mu \circ f^{-1})'\|_{\mathrm{TV}} \leqslant \sqrt{2} \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|\mu'_j\|_{\mathrm{TV}},$$

где $\mu := \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$.

Доказательство. По теореме 6.4.2 для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi'(\langle a, x\rangle)\, \mu(dx) =$$

$$= \int_{T_1\times\ldots\times T_n} \frac{1}{(\beta_1-\alpha_1)\ldots(\beta_n-\alpha_n)} \Big[\int\limits_{\prod_{j=1}^n [\alpha_j,\beta_j]} \varphi'(\langle a, x\rangle)\, dx \Big] \pi_1(d\alpha_1 d\beta_1) \ldots \pi_n(d\alpha_n d\beta_n),$$

где $T_j = \{(\alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{R}^2 \colon \beta_j > \alpha_j\}$, а меры π_j получены применением теоремы 6.4.2. Заметим, что во внутреннем интеграле можно сделать замену переменной, и тогда он будет представлен в виде

$$\int_{Q_n} \varphi'\big(\langle La, x\rangle + \langle a, c\rangle\big)\, dx,$$

где $Q_n = [-1/2, 1/2]^n$ — единичный куб, $L = \operatorname{diag}(\ell_1, \dots, \ell_n)$, $\ell_j = \beta_j - \alpha_j$, $c = 2^{-1}(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$. Пусть $b = |La|^{-1} La$ и пусть ϱ_b — плотность распределения случайной величины $\langle b, x\rangle$ на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathrm{I}_{Q_n} dx)$. Заметим, что значение $\varrho_b(t)$ есть $(n-1)$-мерная лебеговская мера сечения куба Q_n плоскостью $\langle b\rangle^\perp + tb$, где $\langle b\rangle^\perp$ — ортогональное дополнение до вектора b. В частности, применив оценку (6.4.2), получаем, что

$$\varrho_b(0) = \lambda^{n-1}(\langle b\rangle^\perp \cap Q_n) \leqslant \sqrt{2}$$

Пусть $\psi(t) = \varphi(|La|t + \langle a, c\rangle)$, тогда

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_n} \varphi'\big(\langle La, x\rangle + \langle a, c\rangle\big)\, dx = \\
&\qquad = |La|^{-1} \int_{\mathbb{R}} \psi'(t)\varrho_b(t)\, dt \leqslant |La|^{-1} \|(\varrho_b(t)\, dt)'\|_{\mathrm{TV}} = \\
&\qquad\qquad = |La|^{-1} 2 \max_{t\in\mathbb{R}} \varrho_b(t) = 2|La|^{-1}\varrho_b(0) \leqslant 2\sqrt{2}|La|^{-1},
\end{aligned}$$

где при третьем переходе мы воспользовались равенством (5.1.6), а при четвертом переходы была использована четность и логарифмическая вогнутость функции ϱ_b. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \varphi'(\langle a, x\rangle)\, \mu(dx) \leqslant \\
&\qquad \leqslant 2\sqrt{2} \int_{T_1\times\ldots\times T_n} \Big(\sum_{j=1}^n a_j^2 \ell_j^2\Big)^{-1/2} \pi_1(d\alpha_1 d\beta_1) \ldots \pi_n(d\alpha_n d\beta_n),
\end{aligned}$$

где $\ell_j = \beta_j - \alpha_j$. Из-за выпуклости функции $t \to t^{-1/2}$ при $t > 0$ имеет место неравенство

$$\Big(\sum_{j=1}^n a_j^2 \ell_j^2\Big)^{-1/2} \leqslant \sum_{j=1}^n a_j^2 \ell_j^{-1}.$$

Кроме того, напомним (см. (6.4.1)), что $\|\nu'_{[\alpha_j,\beta_j]}\|_{\mathrm{TV}} = 2\ell_j^{-1}$, где $\nu_{[\alpha_j,\beta_j]}$ — равномерное распределение на отрезке $[\alpha_j, \beta_j]$. Тем самым,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi'(\langle a, x\rangle)\, \mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2} \int_{T_1\times\ldots\times T_n} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \|\nu'_{[\alpha_j,\beta_j]}\|_{\mathrm{TV}}\, \pi_1(d\alpha_1 d\beta_1)\ldots\pi_n(d\alpha_n d\beta_n) =$$

$$= \sqrt{2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \|\mu'_j\|_{\mathrm{TV}} \leqslant \sqrt{2} \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|\mu'_j\|_{\mathrm{TV}}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 6.4.4. Заметим, что полученная в предыдущей теореме оценка — точная. Для этого рассмотрим такой пример: пусть каждая мера μ_j — это равномерное распределение на отрезке $[-1/2, 1/2]$ и пусть вектор $a = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0)$. Тогда $\|\mu'_j\|_{\mathrm{TV}} = 2$. Вычислим $\|(\mu \circ f^{-1})'\|_{\mathrm{TV}}$, для чего найдем плотность распределения случайной величины $f(x) = \langle a, x\rangle$ на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$, $\mu = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$. Заметим, что f есть сумма двух независимых случайных величин $\frac{1}{\sqrt{2}}x_1$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}x_2$, причем плотность ϱ_0 каждой из этих величин равна $\sqrt{2}\cdot \mathrm{I}_{[-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}]}$. Тогда, как известно, плотность ϱ_f случайной величины f есть свертка плотности ϱ_0 с собой:

$$\varrho_f(t) = \varrho_0 * \varrho_0(t) = \big(\sqrt{2} - 2|t|\big)\mathrm{I}_{\{|t|\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\}}.$$

Тем самым, $\|(\mu\circ f^{-1})'\|_{\mathrm{TV}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot 2 = 2\sqrt{2}$ и в неравенстве из теоремы 6.4.3 достигается равенство.

Перейдем теперь к рассмотрению многомерного случая $k > 1$. Пусть P — проектор пространства $\mathbb{R}^n$ на некоторое k-мерное подпространство $\mathrm{span}\{a^1, \ldots, a^k\}$, где $\{a^1, \ldots, a^k\}$ — некоторый набор ортонормированных векторов в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\{e^1, \ldots, e^n\}$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда по строкам матрицы A оператора P в базисах $\{e^1, \ldots, e^n\}$ и $\{a^1, \ldots, a^k\}$ записаны сами векторы $a^1, \ldots, a^k$. Поэтому в следующей теореме рассматриваются образы продакт мер при отображениях $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ вида $F(x) := Ax$, где строки матрицы A — ортонормированные векторы.

Теорема 6.4.5. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда найдется такое число $C(k) > 0$, зависящее только от k, что для произвольных дифференцируемых по Скороходу мер $\mu_1, \ldots, \mu_n$ на $\mathbb{R}$ и для произвольного отображения $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ вида $F(x) = Ax$, где строки $k \times n$ матрицы A образованы ортонормированными векторами $a^1, \ldots, a^k$, выполнено неравенство*

$$\|D_e(\mu \circ F^{-1})\|_{\mathrm{TV}} \leqslant C(k) \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|\mu_j'\|_{\mathrm{TV}} \quad \forall e \in \mathbb{R}^k,\ |e| = 1,$$

где $\mu := \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$.

Доказательство. По теореме 6.4.2 для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ и для каждого вектора e единичной длины выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_e \varphi(Ax)\, \mu(dx) =$$
$$= \int_{T_1 \times \ldots \times T_n} \frac{1}{(\beta_1 - \alpha_1) \ldots (\beta_n - \alpha_n)} \Big[\int\limits_{\prod_{j=1}^n [\alpha_j, \beta_j]} \partial_e \varphi(Ax)\, dx \Big]\, \pi_1(d\alpha_1 d\beta_1) \ldots \pi_n(d\alpha_n d\beta_n),$$

где $T_j = \{(\alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{R}^2\colon \beta_j > \alpha_j\}$, а меры π_j получены применением теоремы 6.4.2. Внутренний интеграл равен

$$\int_{Q_n} \partial_e \varphi\big(ALx + Ac\big)\, dx,$$

где $Q_n = [-1/2, 1/2]^n$ — единичный куб, $L = \mathrm{diag}(\ell_1, \ldots, \ell_n)$, $\ell_j = \beta_j - \alpha_j$, $c = ((\alpha_1 + \beta_1)/2, \ldots, (\alpha_n + \beta_n)/2)$. Пусть $A_L := AL$ и $B = (A_L A_L^T)^{-1/2} A_L$ (отметим, что матрица A_L имеет ранг k, ибо матрица L задает взаимно однозначное отображение пространства $\mathbb{R}^n$). Заметим, что строки $b^1, \ldots, b^k$ матрицы B образуют ортонормированную систему, а сама матрица B является матрицей ортогональной проекции пространства $\mathbb{R}^n$ на подпространство $\mathrm{span}\{b^1, \ldots, b^k\}$. Действительно, для произвольных векторов $h, q \in \mathbb{R}^k$ имеет место следующее тождество:

$$\langle B^T h, B^T q \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle BB^T h, q \rangle_{\mathbb{R}^k} =$$
$$= \langle (A_L A_L^T)^{-1/2} A_L A_L^T (A_L A_L^T)^{-1/2} h, q \rangle_{\mathbb{R}^k} = \langle h, q \rangle_{\mathbb{R}^k}. \quad (6.4.3)$$

Пусть σ — распределение случайного вектора $\sqrt{12}Bx$ на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathrm{I}_{Q_n}dx)$. Заметим, что σ — логарифмически вогнутая мера, как линейный образ логарифмически вогнутой меры $\mathrm{I}_{Q_n}dx$. Кроме того, мера σ — центрированная и для каждого $\theta \in \mathbb{R}^k$ выполнены равенства

$$\int_{\mathbb{R}^k} \langle y, \theta\rangle^2_{\mathbb{R}^k}\, \sigma(dy) = 12 \int_{Q_n} \langle Bx, \theta\rangle^2_{\mathbb{R}^k}\, dx = 12 \int_{Q_n} \langle x, B^T\theta\rangle^2_{\mathbb{R}^n}\, dx = \\ = \langle B^T\theta, B^T\theta\rangle_{\mathbb{R}^n} = |\theta|^2,$$

где в последнем равенстве было использовано тождество (6.4.3). Для каждого вектора $h \in \mathbb{R}^k$ единичной длины по лемме 5.2.4 выполнена оценка

$$\|D_h\sigma\|_{\mathrm{TV}} \leqslant Ck$$

для некоторой абсолютной постоянной C. Рассмотрим функцию

$$\psi(y) := \varphi\big(\tfrac{1}{\sqrt{12}}(A_LA_L^T)^{1/2}y + Ac\big)$$

и вектор

$$h := |(A_LA_L^T)^{-1/2}e|^{-1}(A_LA_L^T)^{-1/2}e.$$

Заметим, что

$$\int_{\mathbb{R}^k} \partial_h\psi\, d\sigma = \tfrac{1}{\sqrt{12}}|(A_LA_L^T)^{-1/2}e|^{-1} \int_{\mathbb{R}^k} (\partial_e\varphi)\big(\tfrac{1}{\sqrt{12}}(A_LA_L^T)^{1/2}y + Ac\big)\, \sigma(dy) = \\ = \tfrac{1}{\sqrt{12}}|(A_LA_L^T)^{-1/2}e|^{-1} \int_{Q_n} \partial_e\varphi\big(ALx + Ac\big)\, dx,$$

откуда получаем оценку

$$\int_{Q_n} \partial_e\varphi\big(ALx + Ac\big)\, dx \leqslant C_1k|(A_LA_L^T)^{-1/2}e| \leqslant C_1k\|(A_LA_L^T)^{-1/2}\|_{op},$$

где $C_1 := \sqrt{12}\cdot C$ и где $\|B\|_{op}$ — операторная норма матрицы B, т. е. $\|B\|_{op} := \sup\limits_{|h|=1} |Bh|$. Заметим, что матрица $A_LA_L^T$ — симметрична и положительно определена, значит

$$\|(A_LA_L^T)^{-1/2}\|_{op} = s_{min}^{-1/2},$$

где s_{min} — минимальное собственное значение матрицы $A_L A_L^T$. Кроме того,

$$s_{min} = \inf_{|h|=1} \langle A_L A_L^T h, h\rangle_{\mathbb{R}^k} = \inf_{|h|=1} \langle AL^2 A^T h, h\rangle_{\mathbb{R}^k},$$

так как $A_L A_L^T = AL^2 A^T$. Таким образом,

$$\|(A_L A_L^T)^{-1/2}\|_{op} = \sup_{|h|=1} (\langle AL^2 A^T h, h\rangle_{\mathbb{R}^k})^{-1/2}.$$

Заметим теперь, что функция $R_h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$R_h(u_1, \ldots, u_n) = \langle AUA^T h, h\rangle_{\mathbb{R}^k}, \quad U = \operatorname{diag}(u_1, \ldots, u_n)$$

оказывается линейной при каждом фиксированном векторе $h \in \mathbb{R}^k$ единичной длины. Поэтому существуют такие числа $k_1(h), \ldots, k_n(h)$, что

$$R_h(u_1, \ldots, u_n) = k_1(h)u_1 + \ldots + k_n(h)u_n.$$

Кроме того, так как AA^T — единичная матрица, то

$$k_1(h) + \ldots + k_n(h) = R_h(1, \ldots, 1) = \langle AA^T h, h\rangle_{\mathbb{R}^k} = 1$$

и

$$k_j(h) = R_h(0, \ldots, 1, \ldots, 0) \geqslant 0.$$

Заметим также, что

$$\langle AL^2 A^T h, h\rangle_{\mathbb{R}^k} = R_h(\ell_1^2, \ldots, \ell_n^2) = k_1(h)\ell_1^2 + \ldots + k_n(h)\ell_n^2.$$

Из-за выпуклости функции $t \to t^{-1/2}$ при $t > 0$ получаем, что

$$\|(AL^2 A^T)^{-1/2}\|_{op} = \sup_{|h|=1} (k_1(h)\ell_1^2 + \ldots + k_n(h)\ell_n^2)^{-1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|h|=1} [k_1(h)\ell_1^{-1} + \ldots + k_n(h)\ell_n^{-1}] = \sup_{|h|=1} R_h(\ell_1^{-1}, \ldots, \ell_n^{-1}) =$$

$$= \sup_{|h|=1} \langle AL^{-1} A^T h, h\rangle \leqslant \operatorname{tr}[AL^{-1} A^T] = \operatorname{tr}[A^T A L^{-1}] = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{k} (a_j^i)^2 \Big) \ell_j^{-1}.$$

Напомни (см. (6.4.1)), что $\|\nu'_{[\alpha_j,\beta_j]}\|_{\mathrm{TV}} = 2\ell_j^{-1}$. Поэтому,

$$\int_{\mathbb{R}^k} \partial_e\varphi(Ax)\,\mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-1}C_1 k \int_{T_1\times\ldots\times T_n} \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{k}(a_{j,i})^2\Big)\|\nu'_{[\alpha_j,\beta_j]}\|_{\mathrm{TV}}\,\pi_1(d\alpha_1 d\beta_1)\ldots\pi_n(d\alpha_n d\beta_n)$$

$$= 2^{-1}C_1 k \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{k}(a_j^i)^2\Big)\|\mu'_j\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 2^{-1}C_1 k^2 \max_{1\leqslant j\leqslant n}\|\mu'_j\|_{\mathrm{TV}},$$

что завершает доказательство. Теорема доказана. □

Замечание 6.4.6. Заметим, из доказательства видно, что константу $C(k)$ в предыдущей теореме можно взять равной $C\cdot k^2$. Интересно было бы понять, какая точная зависимость константы $C(k)$ от k.

Литература

[1] Арутюнян Л.М., Ярославцев И.С. Об измеримых многочленах на бесконечномерных пространствах // Докл. РАН. – 2013. – Т. 446, №9. – С. 627–631.

[2] Бендиков А.Д, Павлов И.В. Теорема двойственности функциональных пространств H^1 и BMO на бесконечномерном торе // В сб.: Случайный анализ и асимтотические задачи теории вероятностей и математической статистки. Под ред. Г.М. Мания, Н.Л. Лазриевой, Т.Л. Шервашидзе. Тбилиси: Мецниереб, 1984, с. 6–15.

[3] Бережной Е.И. Пространства функций обобщенной ограниченной вариации. I. Теоремы вложения. Оценки констант Лебега // Сиб. матем. журн. – 1999. – Т. 40. – №5. – С. 997–1011.

[4] Бережной Е.И. Пространства функций обобщенной ограниченной вариации. II. Вопросы равномерной сходимости рядов Фурье // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42. – №3. – С. 515–532.

[5] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. 2-е изд. Наука, 1996.

[6] Бобков С.Г. Некоторые обобщения результатов Ю.В. Прохорова о неравенствах типа Хинчина для полиномов // Теор. вероятн. и ее примен. – 2000. – Т. 45. – №4. – С. 745–748.

[7] Бобков С.Г., Чистяков Г.П. Оценки для максимума плотности суммы независимых случайных величин // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2012. – Т. 408. – С. 62–73.

[8] Богачев В.И. Гауссовские меры. Наука, 1997.

[9] Богачев В.И. Основы теории меры. Т.1, 2, 2-е изд. РХД, 2006.

[10] Богачев В.И. Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. РХД, 2008.

[11] Богачев В.И. Слабая сходимость мер. Институт компьютерных исследований, 2016.

[12] Богачев В.И. Функционалы от случайных процессов и связанные с ними бесконечномерные осциллирующие интегралы // Изв. РАН. Сер. матем. – 1992. – Т. 56. – №2. – С. 243–278.

[13] Богачев В.И., Зеленов Г.И. О сходимости по вариации слабо сходящихся многомерных распределений // Докл. РАН. – 2015. – Т. 461. – №1. – С. 14–17.

[14] Богачев В.И., Колесников А.В. Нелинейные преобразования выпуклых мер // Теор. вероятн. и ее примен. – 2005. – Т. 50. – №1. – С. 27–51.

[15] Богачев В.И. Поточечные условия принадлежности функций весовым классам Соболева // Функц. анализ и его прил. – 2022. – Т. 56. – №2. – С. 10–28.

[16] Водопьянов С.К. Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. матем. журн. – 1996. – Т. 37. – №6. – С. 1269–1295

[17] Водопьянов В.В. О связи минимальных шкал и K-метода интерполяции // Матем. заметки. – 1981. – Т. 30. – №5. – С. 679–684.

[18] Гётце Ф., Прохоров Ю.В., Ульянов В.В. Оценки для характеристических функций многочленов от асимптотически нормальных случайных величин // Успехи матем. наук. – 1996. – Т. 51. – №2. – С. 3–26.

[19] Гётце Ф., Прохоров Ю.В., Ульянов В.В. О гладком поведении вероятностных распределений при полиномиальных отображениях // Теор. вероятн. и ее примен. – 1997. – Т. 42. – N 1. – С. 51–62.

[20] Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Наука, 1989.

[21] Давыдов Ю.А., Лифшиц М.А., Смородина Н.В. Локальные свойства распределений стохастических функционалов. Физматлит, 1995.

[22] Давыдов Ю.А., Лифшиц М.А. Метод расслоений в некоторых вероятностных задачах // Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. – 1984. – Т. 22. – С. 61–157.

[23] Давыдов Ю.А., Мартынова Г.В. Предельное поведение распределений кратных стохастических интегралов // Статистика и управление случайными процессами. – С. 55–57. Наука, 1987.

[24] Давыдов Ю.А. О распределениях кратных интегралов Винера–Ито // Теор. вероятн. и ее примен. – 1990. – Т. 35. – С. 51–62.

[25] Коляда В.И. О вложении в классы $\varphi(L)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1975. – Т. 39. – №2. – С. 418–437.

[26] Коляда В.И. Оценки перестановок и теоремы вложения // Матем. сб. – 1988. – Т. 136. – №1. – С. 3–23.

[27] Коляда В.И. Перестановки функций и теоремы вложения // Успехи матем. наук. – 1989. – Т. 44. – №5. – С. 61–95.

[28] Крейн С.Г., Петунин Ю.И. О понятии минимальной шкалы пространств // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 154. – №1. – С. 30–33.

[29] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. Наука, 1978.

[30] Кристоф Г., Прохоров Ю.В., Ульянов В.В. О распределении квадратичных форм от гауссовских случайных величин // Теор. вероятн. и ее примен. – 1995. – Т. 40. – №2. – С. 301–312.

[31] Кругова Е.П. Дифференцируемость выпуклых мер // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58. – №6. – С. 862–871.

[32] Кругова Е.П. О сдвигах выпуклых мер // Матем. сб. – 1997. – Т. 188. – №2. – С. 57–66.

[33] Кудрявцев Л.Д., Никольский С.М. Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения. // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. – 1988. – Т. 26. – С. 5–157.

[34] Лифшиц М.А. Об абсолютной непрерывности распределений функционалов от случайных процессов // Теор. вероятн. и ее примен. – 1982. – Т. 27. – №3. – С. 559–566.

[35] Лифшиц М.А. Метод расслоений и его применение к изучению функционалов от случайных процессов // Теор. вероятн. и ее примен. – 1982. – Т. 27. – №1. – С. 67–80.

[36] Лифшиц М.А. Применение метода расслоений к изучению функционалов от процессов с независимыми приращениями. Теор. вероятн. и ее примен. – 1984. – Т. 29. – №4. – С. 723–734.

[37] Назаров Ф.Л., Содин М.Л., Вольберг А.Л. Геометрическая лемма Каннана–Ловаса–Шимоновича, не зависящие от размерности оценки распределения значений полиномов и распределение нулей случайных аналитических функций // Алгебра и анализ. – 2002. – Т. 14. – №2. – С. 214–234.

[38] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Наука, 1977.

[39] Павлов И.В. Некоторые свойства мартингальных пространств H^p, BMO, VMO и со смешанной нормой // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1999. – Т. 6. – №2. С. 368–386.

[40] Прохоров Ю.В. О многочленах от нормально распределенных случайных величин // Теор. вероятн. и ее примен. – 1992. – Т. 37. – №4. – С. 747—750.

[41] Решетняк Ю.Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 38. – №3. – С. 657–675.

[42] Рогозин Б.А. Оценка максимума свертки ограниченных плотностей // Теор. вероятн. и ее примен. – 1987. – Т. 32. – №1. – С. 53–61.

[43] Скороход А.В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. Наука, 1975.

[44] Смородина Н.В. Абсолютная непрерывность распределений функционалов от диффузионных процессов // Успехи матем. наук. – 1982. – Т. 37. – №6. – С. 185–192.

[45] Ульянов П.Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1968. – Т. 32. – №3. – С. 649–686.

[46] Ульянов П.Л. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Матем. сб. – 1970. – Т. 81. – №1. – С. 104–131.

[47] Ширяев А.Н. Вероятность–1, 4-е. изд., МЦНМО, 2007.

[48] Adams R.A., Fournier J.J.F. Sobolev spaces. Elsevier, 2003.

[49] Ambrosio L., Fusco N., Pallara D. Functions of bounded variation and free discontinuity problems. Clarendon Press, 2000.

[50] Ambrosio L., Miranda Jr M., Maniglia S., Pallara, D. BV functions in abstract Wiener spaces // J. Funct. Anal. – 2010. – Vol. 258. – №3. – P. 785–813.

[51] Ambrosio L., Miranda Jr M., Maniglia S., Pallara D. Towards a theory of BV functions in abstract Wiener spaces // Phys. D. – 2010. – Vol. 239. – №15. – P. 1458–1469.

[52] Ambrosio L., Da Prato G., Goldys B., Pallara D. Bounded variation with respect to a log-concave measure // Comm. Partial Differential Equations. – 2012. – Vol. 37. – №12. – P. 2272–2290.

[53] Ambrosio L., Miranda Jr M., Pallara D. Some fine properties of BV functions on Wiener spaces // Anal. Geom. Metr. Spaces. – 2015. – Vol. 3. – №1. – P. 212–230.

[54] Ambrosio L., Ghezzi R. Sobolev and bounded variation functions on metric measure spaces // Geometry, analysis and dynamics on sub-Riemannian manifolds. – 2016. – Vol. 2. – P. 211–273.

[55] Ball K. Cube slicing in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – Vol. 97. – №3. – P. 465–473.

[56] Ball K. Volumes of sections of cubes and related problems // Geometric aspects of functional analysis. Lecture Notes in Mathematics. – 1989. – Vol. 1376. – P. 251–260.

[57] Bally V., Caramellino L. Total variation distance between stochastic polynomials and invariance principles // Ann. Probab. – 2019. – Vol. 47. – №6. – P. 3762–3811.

[58] Bobkov S.G. Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures // Ann. Probab. – 1999. – Vol. 27. – №4. – P. 1903–1921.

[59] Bobkov S.G. Remarks on the growth of L^p-norms of polynomials // Geometric aspects of functional analysis. Lecture Notes in Mathematics. – 2000. – Vol. 1745. – P. 27–35.

[60] Bobkov S.G., Chistyakov G.P., Götze F. Fisher information and the central limit theorem // Probab. Theory Related Fields. – 2014. Vol. 159. – №1-2. – P. 1–59.

[61] Bogachev V.I. Gaussian measures. Amer. Math. Soc., 1998.

[62] Borell C. Convex measures on locally convex spaces // Ark. Mat. – 1974. – Vol. 12. – P. 239–252.

[63] Borell C. Convex set functions in d-space // Period. Math. Hungar. – 1975. – Vol. 6. – №2. – P. 111–136.

[64] Borwein P., Erdelyi T. Polynomials and polynomial inequalities. Springer, 1995.

[65] Brazitikos S., Giannopoulos A., Valettas P., Vritsiou B. H. Geometry of isotropic convex bodies. Amer. Math. Soc., 2014.

[66] Butzer P.L., Berens H. Semi-groups of operators and approximation. Vol. 145. Springer Science and Business Media, 2013.

[67] Carbery A., Wright J. Distributional and L^q norm inequalities for polynomials over convex bodies in $\mathbb{R}^n$ // Math. Res. Lett. – 2001. – Vol. 8. – №3. – P. 233–248.

[68] Eldan R., Klartag B. Pointwise estimates for marginals of convex bodies // J. Funct. Anal. – 2008. – Vol. 254. – №8. – P. 2275–2293.

[69] Fradelizi M., Guedon O. The extreme points of subsets of s-concave probabilities and a geometric localization theorem // Discrete Comput. Geom. – 2004. – Vol. 31. – №2. – P. 327–335.

[70] Fukushima M. BV functions and distorted Ornstein Uhlenbeck processes over the abstract Wiener space // J. Funct. Anal. – 2000. – Vol. 174. – №1. – P. 227–249.

[71] Fukushima M., Hino M. On the space of BV functions and a related stochastic calculus in infinite dimensions // J. Funct. Anal. – 2001. – Vol. 183. – №1. – P. 245–268.

[72] Götze F., Naumov A., Spokoiny V., Ulyanov V. Large ball probabilities, Gaussian comparison and anti-concentration // Bernoulli. – 2019. – Vol. 25. – №4A. – P. 2538–2563.

[73] Hong S.Y., Lifshits M., Nazarov A. Small deviations in L_2-norm for Gaussian dependent sequences // Electron. Commun. Probab. – 2016. – Vol. 21. – P. 1–9.

[74] Hu Y., Lu F., Nualart D. Convergence of densities of some functionals of Gaussian processes // J. Funct. Anal. – 2014. – Vol. 266. – №2. – P. 814–875.

[75] Kannan R., Lovasz L., Simonovits M. Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma // Discrete Comput. Geom. – 1995. – Vol. 13. – P. 541–559.

[76] Klartag B. Power-law estimates for the central limit theorem for convex sets // J. Funct. Anal. – 2007. – Vol. 245. – №1. – P. 284–310.

[77] Klartag B. A central limit theorem for convex sets // Invent. Math. – 2007. – Vol. 168. – №1. – P. 91–131.

[78] Kusuoka S. Analytic functionals of Wiener process and absolute continuity // Functional Analysis in Markov Processes. –1982. – P. 1–46.

[79] Kusuoka S. On the absolute continuity of the law of a system of multiple Wiener integral // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. – 1983. – Vol. 30. – №1. – P. 191–197.

[80] Livshyts G., Paouris G., Pivovarov P. On sharp bounds for marginal densities of product measures // Israel J. Math. – 2016. – Vol. 216. – №2. – P. 877–889.

[81] Lovasz L., Simonovits M. Random walks in a convex body and an improved volume algorithm // Random Structures Algorithms. – 1993. – Vol. 4. – №4. – P. 359–412.

[82] Lunardi A. Interpolation theory, 3d ed. Edizioni della Normale, 2018.

[83] Malliavin P. Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators // Proc. Intern. Symp. SDE Kyoto 1976. – Wiley, 1978. – P. 195–263.

[84] Malliavin P. Stochastic analysis. Springer, 2015.

[85] Metafune G., Pallara D., Priola E. Spectrum of Ornstein – Uhlenbeck operators in L^p spaces with respect to invariant measures // J. Funct. Anal. – 2002. – Vol. 196. – №1. – P. 40–60.

[86] Nourdin I., Peccati G. Normal approximations with Malliavin calculus: from Stein's method to universality. Cambridge University Press, 2012.

[87] Nourdin I., Peccati G. Stein's method on Wiener chaos // Probab. Theory Related Fields. – 2009. – Vol. 145. – №1-2. – P. 75–118.

[88] Nourdin I., Nualart D., Poly G. Absolute continuity and convergence of densities for random vectors on Wiener chaos // Electron. J. Probab. – 2013. – Vol. 18. – №22. – P. 1–19.

[89] Nourdin I., Poly G. Convergence in total variation on Wiener chaos // Stochastic Process. Appl. – 2013. – Vol. 123. – №2. – P. 651–674.

[90] Nualart D. The Malliavin Calculus and Related Topics. 2nd ed. Springer, 2006.

[91] Nualart D., Peccati G. Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals // Ann. Probab. – 2005. – Vol. 33. – №1. – P. 177–193.

[92] Pineda E., Urbina W. Some results on Gaussian Besov – Lipschitz spaces and Gaussian Triebel–Lizorkin spaces // J. Approx. Theory. – 2009. – Vol. 161. – №2. – P. 529–564.

[93] Rudelson M., Vershynin R., Small ball probabilities for linear images of high-dimensional distributions // Int. Math. Res. Not. – 2014. – Vol. 2015. – №19. – P. 9594–9617.

[94] Triebel H. Theory of function spaces. V.II. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[95] Shigekawa I. Absolute continuity of probability laws of Wiener functionals // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. – 1978. – Vol. 54. – №8. – P. 230–233.

[96] Shigekawa I. Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures // J. Math. Kyoto University. – 1980. – Vol. 20. – №2. – P. 263-289.

[97] Shigekawa I. Stochastic analysis. American Mathematical Soc., 2004.

[98] Stein E. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press, Princeton, 1970.

[99] Sugita H. Sobolev spaces of Wiener functionals and Malliavin's calculus // J. Math. Kyoto University. – 1985. – Vol. 25. – №1. – P. 31–48.

[100] Vodopyanov S.K. A pointwise condition for the absolute continuity of a function of one variable and its applications // Владикавк. матем. журн. – 2021. – Т. 23. – №4. – С. 41–49.

[101] Jain P., Molchanova A., Singh M., Vodopyanov, S. On grand Sobolev spaces and pointwise description of Banach function spaces // Nonlinear Anal. – 2021. – Vol. 202. – 112100.

[102] Watanabe S., Nair M. G., Rajeev B. Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus. Springer, 1984.

[103] Watanabe S. Fractional order Sobolev spaces on Wiener space // Probab. Theory Related Fields. – 1993. – Vol. 95. – №2. – P. 175–198.

[104] Zelenov G.I. On distances between distribution of polynomials // Theory Stoch. Process. – 2017. – Vol. 22. – №2. – P. 79–85.

[105] Zintout R. The total variation distance between two double Wiener – Ito integrals // Statist. Probab. Lett. – 2013. – Vol. 83. – №10. – P. 2160–2167.

Работы автора по теме диссертации:

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[106] Kosov E.D. Fractional smoothness of images of logarithmically concave measures under polynomials // J. Math. Anal. Appl. – 2018. – Vol. 462. – №1. – P. 390–406.

[107] Kosov E.D. On fractional regularity of distributions of functions in gaussian random variables // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2019. – Vol. 22. – №5. – P. 1249–1268.

[108] Kosov E.D. Total variation distance estimates via L^2-norm for polynomials in log-concave random vectors // Int. Math. Res. Not. – 2021. – Vol. 2021. – №21. – P. 16492–16508.

[109] Kosov E.D. Regularity of linear and polynomial images of Skorohod differentiable measures // Adv. Math. – 2022. – Vol. 397. – №108193.

[110] Косов Е.Д. Классы Бесова на конечномерных и бесконечномерных пространствах // Матем. Сб. – 2019. – Т. 210. – №5. – С. 41–71.

[111] Косов Е.Д. Оценки расстояния по вариации между многочленами второй степени от нормальных случайных величин // Матем. заметки. – 2022. – Т. 111. – №1. – С. 71–81.

[112] Косов Е.Д. Распределения многочленов от гауссовских случайных величин при ограничениях на степени переменных // Функц. анализ и его прил. – 2022. – Т. 56. – №2. – С. 29–38.

[113] Косов Е.Д. Характеризация классов Бесова через новый модуль непрерывности // Докл. РАН. – 2017. – Т. 477. – №4. – С. 398–401.

[114] Косов Е.Д. Классы Бесова на пространстве с гауссовской мерой // Докл. РАН. – 2018. – Т. 478. – №2. – С. 133–136.

[115] Косов Е.Д. Оценка между расстояниями по вариации и в пространстве L^2 для многочленов от логарифмически вогнутых случайных векторов // Докл. РАН. – 2018. – Т. 488. – №2. – С. 123–125.

[116] Bogachev V.I., Kosov E.D., Zelenov G.I. Fractional smoothness of distributions of polynomials and a fractional analog of the Hardy–Landau–Littlewood inequality // Trans. Amer. Math. Soc. – 2018. – Vol. 370. – №6. – P. 4401–4432.

(Диссертанту принадлежат теоремы 6.1 и 6.3, лемма 6.2, следствие 4.7.)

[117] Богачев В.И., Косов Е.Д., Попова С.Н. О распределениях однородных и выпуклых функций от гауссовских случайных величин // Изв. РАН. Сер. матем. – 2021. – Т. 85. – №5. – С. 25–57.

(Диссертанту принадлежат теоремы 4.1, 5.3, 6.1, леммы 4.4, 5.1, 5.2, следствия 4.2, 4.3, 4.5, 5.4.)