ОТЗЫВ

о диссертации Косова Е.Д. на тему

«Модули непрерывности и дробная регулярность плотностей распределений»,

представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальностям 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ и 1.1.4 – теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация посвящена решению важной задачи из вероятностного анализа на бесконечномерных пространствах – конструированию аналогов пространств Никольского – Бесова, приспособленных для построения варианта исчисления Маллявена и оценок гладкости распределений случайных векторов. Поскольку пространства Никольского – Бесова детально изучены, можно попытаться перенести результаты классического анализа на анализ в пространствах с мерой. Вообще говоря, аналоги пространств Никольского – Бесова на бесконечномерных пространствах с гауссовской мерой уже конструировались на основе полугрупп Орнштейна – Уленбека, Пуассона– Эрмита или теории действительной интерполяции. Фактически с помощью полугрупп Орнштейна – Уленбека или Пуассона– Эрмита конструировался аналог квазисдвига функции и по такому квазисдвигу определялся модуль непрерывности. К сожалению, такой подход не позволяет построить исчисление типа исчисления Маллявена, стандартное применение которого позволяет давать хорошие оценки гладкости распределений случайных векторов. Аналогичная ситуация с пространствами Никольского – Бесова, построенными с помощью теории интерполяции.

Автору диссертации удалось придумать аналоги модулей непрерывности, которые в случае конечномерных пространств с мерой Лебега эквивалентны стандартному модулю непрерывности, но структурно могут быть введены для бесконечномерных пространствах с "приличной" мерой. Конечно, можно спорить, насколько эффективен такой подход с вычислительной точки зрения в конечномерном пространстве с мерой Лебега, но для бесконечномерных пространств с "приличной" мерой введение таких модулей непрерывности вполне оправдано, что и продемонстрировано в предлагаемой диссертации. В оправдание введения таких модулей непрерывности может послужить и следующий факт. Интуитивно видно (по крайней мере, мне так кажется), что введение таких модулей непрерывности инспирировано формулой метрики Канторовича – Рубинштейна, которая играет важнейшую роль в вероятностном анализе на бесконечномерных пространствах.

Диссертация состоит из введения, 6 глав, разбитых на параграфы, и списка литературы из 117 наименований. Общий объем диссертации составляет 198 страниц.

Первая глава работы является ключевой. Здесь для функций, определенных на

R^k, вводятся два новых модуля непрерывности:

$$\sigma_p(\varrho,\varepsilon) = sup\{\int_{R^k} \varrho(x)\ div\Phi(x)dx : \Phi \in C_0^\infty(R^k,R^k),\ \ \|div\Phi\,|L^{p'}\| \le 1\ \ \&\|\Phi\ |L^{p'}\| \le \varepsilon\},$$

$$\widetilde{\sigma}_p(\varrho,\varepsilon) = sup\{\int_{R^k} \varrho(x)\ \partial_e\ \varphi(x)dx : e \in B(0,1;R^k)\ \ \&\ \ \|\partial_e\ \varphi\ |L^{p'}\| \le 1\ \ \&\|\varphi\ |L^{p'}\| \le \varepsilon\}.$$

Основной результат первой главы, представленный в Лемме 1.2.5 и Теореме 1.2.6, – введенные модули непрерывности эквивалентны классическому модулю непрерывности $\omega(\varrho,\varepsilon)$, причем константа эквивалентности зависит лишь от размерности пространства R^k.

Этот результат позволяет ввести на пространствах Никольского – Бесова новые нормы в терминах введенных модулей непрерывности $\sigma_p(\varrho,\varepsilon)$ и $\widetilde{\sigma}_p(\varrho,\varepsilon)$. В силу основного результата этой главы новые нормы будут эквивалентны классической норме на пространстве Никольского – Бесова в R^k.

Классические пространства Никольского – Бесова можно описывать в разных терминах. Одно из описаний пространства Никольского – Бесова возможно на основе классического метода вещественной интерполяции Петри, примененного к интерполяционной паре $(L^p, W^{1,p})$. Исходя из интерполяционного описания пространств Никольского – Бесова в этой главе автор приводит оценки K–функционала функций из $L^p + W^{1,p}$ в терминах введенных модулей непрерывности.

Вторая глава посвящена получению аналогов результатов первой главы для локально выпуклых пространств с гауссовской мерой. Поскольку по классической для R^k схеме в случае локально выпуклых пространств с гауссовской мерой модуль непрерывности определить нельзя, то для определения пространств Никольского–Бесова ранее использовались функционалы, порожденные полугруппами Орнштейна – Уленбека или Пуассона– Эрмита, а также подход, основанный на классическом результате действительного метода интерполяции, который гласит, что интерполяционное пространство $(L^p, W^{1,p})_{\theta,q}$, построенное по паре $(L^p, W^{1,p})$ есть пространство Никольского – Бесова с соответствующим набором индексов. Замена в модуле непрерывности $\sigma_p(\varrho,\varepsilon)$ меры Лебега на гауссовскую, позволила перейти от конечномерного пространства к локально выпуклому пространству. Основной результат второй главы представлен в Теореме 2.3.9, основное содержание которой состоит в том, что при $p > 1$ на пространствах Никольского – Бесова нормы, порожденные полугруппами Орнштейна – Уленбека или Пуассона– Эрмита и построенные с помощью аналога модуля непрерывности $\sigma_p(\varrho,\varepsilon)$ вычисленного на локально выпуклом пространств с гауссовской мерой, эквивалентны.

Главы 3–5 и первая часть 6 главы демонстрируют полезность введенных модулей непрерывности на основе исследования задачи о регулярности (гладкости) плотности распределения случайного вектора f в зависимости от свойств отображения f и меры μ, заданных на исходном пространстве, и задачи об оценках расстояния между случайными векторами f и g.

Как обычно, для борелевой меры на R^k вводятся норма по вариации и норма Канторовича – Рубинштейна, которые инспирируют расстояния по вариации и Канторовичу – Рубинштейну между случайными векторами f и g.

Базовая идея оценки гладкости плотности распределения случайного вектора f восходит к классической работе Маллявена, а ее реализация основывается на вводимом модуле непрерывности для меры. В третьей главе вводится аналог $\widetilde{\sigma}_p(\varrho, \varepsilon)$ для конечных борелевских мер ν на R^k:

$$\sigma(\nu, \varepsilon)$$

$$= sup\{\int_{R^k} \partial_e \varphi(x)\nu(dx) : e \in B(0,1;R^k) \ \ \& \ \ \|\partial_e \varphi \,|C_0^\infty(R^k)\| \leq 1 \ \ \&\|\varphi \,|C_0^\infty(R^k)\| \leq \varepsilon\}.$$

Используя результаты первой главы, даются оценки нормы по вариации сдвига функции через введенный модуль непрерывности, из которых получается критерий абсолютной непрерывности конечной борелевской меры в терминах обобщенного модуля непрерывности. Далее даются оценки норм по вариации разности случайных векторов f и g через норму Канторовича – Рубинштейна и модуль непрерывности меры ν. Здесь же для дифференцируемых по Скороходу мер μ и многочлена f дается оценка $\sigma(\mu \circ f^{-1}, \varepsilon)$ через норму по вариации производной Скорохода и норму многочлена от f. В качестве приложения показана принадлежность пространствам Никольского – Бесова образов мер с плотностями ограниченной вариации под действием многочленов.

В главе 4 рассматриваются задачи, аналогичные задачам из предыдущей главы в случае, когда мера является гауссовской, а отображение f принадлежит пространству Соболева. Ограничение на меру позволяет избавиться от конечномерности. Даются оценки модуля непрерывности $\sigma(\gamma \circ f^{-1}, \varepsilon)$ через константы, порожденные функциями от градиента f.

Используя этот результат, приведены оценки расстояния по вариации для случайных векторов через $\sigma(\gamma \circ f^{-1}, \varepsilon)$ и расстояние между отображениями f и g в пространстве Соболева $W^{1,p}(\gamma)$. В качестве следствия показана принадлежность пространствам Никольского – Бесова образов гауссовских мер под действием многочленов. Этот результат более тонкий, чем аналогичный результат из предыдущей главы для произвольных мер.

В главе 5 рассматриваются логарифмически вогнутые меры и полиномиальные отображения f. Даются оценки модуля непрерывности $\sigma(\mu \circ f^{-1}, \varepsilon)$ через дисперсию и степень многочлена. Здесь же даются оценки расстояния по вариации разности случайных векторов через модуль непрерывности и расстояние Канторовича – Рубинштейна в рассматриваемом случае, а также выписаны условия, гарантирующие принадлежность плотности распределения случайного вектора f пространствам Никольского.

В первой части главы 6 рассматриваются гауссовские меры, а в качестве f рассматриваются многочлены специального вида. Даются оценки модуля непрерывности $\sigma(\mu \circ f^{-1}, \varepsilon)$ через старшие коэффициенты многочлена.

Во второй части главы 6 рассматриваются гауссовские меры, а в качестве f рассматриваются сильно выпуклые отображения f. Далее приводятся оценки

дифференцируемости мер, которые приспособлены к исчислению Маллявена. В частности, даны хорошие оценки на производные по Скороходу распределения f, зависящие только от множителя, входящего в определение сильной выпуклости функции f. Основной результат – оценка расстояния по вариации разности многочленов степени не выше d через евклидову норму многочленов с константой, зависящей лишь от d. И в заключение полученные результаты применяются для исследования регулярности максимумов из квадратичных форм и многочленов второй степени. В качестве следствия приведенных результатов уточняются оценки из работ R. Zintout и F. Gotze, A. Naumov, V. Spokoiny, V. Ulyanov, полученные другими методами.

По методам вторая часть шестой главы отличается от глав 3– 5, но примыкает к ним по постановке задач и духу.

Отмечая научную значимость работы, высокую степень обоснованности основных ее результатов, следует также указать на некоторые недостатки, присущие диссертации.

1. Лемма 1.3.4. и Следствие 1.3.6. хорошо известны и вытекают из формулы Лионса (см. например, теорему 2.7.1 и главу, посвященную двойственности, в книге Й.Берг и Й. Лефстрем "Интерполяционные пространства. Введение". Мир, Москва, 1976. Случай бесконечного числа пространств разобран в статье Е.И. Бережной Экстремальные пространства для экстраполяции // Функциональный анализ и его приложения. 54(2020), вып.1, - с. 3-10)

2. Список литературы по теории интерполяции должен быть расширен монографиями

   Й.Берг и Й. Лефстрем "Интерполяционные пространства. Введение". Мир, Москва, 1976.

   Yu.A. Brudnyĭ , N.Ya. Krugljak, *Interpolation Functors and Interpolation Spaces.* North-Holland, Amsterdam, 1991, xvi+718 pp.

   Х.Трибель Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Мир, Москва, 1980.

   В каждой из них есть вопросы двойственности для методов интерполяции. Если бы автор ознакомился хотя бы с оглавлением этих монографий, то избежал бы предыдущего замечания.

3. Непонятно из каких соображений во фразах "Соболевская норма ", "Соболевский градиент" и т.п. первое слово пишется с большой буквы, а во фразах "гауссовская мера " и т.п. первое слово пишется с маленькой буквы.

4. Константы сверху и снизу в оценках о сравнении классического модуля непрерывности и модулей непрерывности, введенных в работе, сильно зависят от размерности и отличаются по порядку (см. Теорему 1.2.6.). Это по-существу дела или открытый вопрос?

5. В случаях приближения к критическому параметру крайне важно знать поведение констант в неравенствах. Можно ли что-то сказать о поведении констант при приближении к критическому показателю в Теоремах 4.2.2, 4.3.2 и их следствиях?

Приведенные замечания принципиально не влияют на ценность диссертационной работы Е.Д. Косова и не меняют положительного мнения о ней. Диссертация в целом выполнена на высоком уровне, написана хорошим языком и свидетельствует о высокой профессиональной культуре автора. В ней излагаются результаты законченного исследования, выполненного на актуальную тему и посвященного решению важной научной задачи – построению аналогов пространств Никольского – Бесова, приспособленных для оценок гладкости распределений случайных векторов.

Основные результаты работы полностью изложены в 12 печатных трудах опубликованных автором по теме диссертации. Текст автореферата достаточно полно отражает содержание диссертации. Рассматриваемая диссертация посвящена актуальной теме, является научно-квалификационной работой, в которой содержится решение важной научной проблемы. Данная диссертация является самостоятельно выполненным научным исследованием. Автором получены результаты, имеющие научную и практическую ценность. Таким образом, диссертация полностью удовлетворяет требованиям, сформулированным в п. 8 Положения ВАК РФ о присуждении ученых степеней, а её автор, Косов Е.Д., заслуживает присуждения ученой степени ученой степени доктора физико-математических наук по специальностям 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ и 1.1.4 – теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент:
Бережной Евгений Иванович,
доктор физико–математических наук
по специальности 1.1.1 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ;
профессор, заведующий
кафедрой дифференциальных уравнений
Федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»
Адрес местонахождения образовательной организации.
150003, Ярославская область, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14
тлф. +7(4852) 79-77-02, e–mail: rectorat@uniyar.ac.ru

Подпись Е.И. Бережного заверяю

Директор центра кадровой политики
ЯрГУ им. П.Г. Демидова Л.Н. Куфирина