ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе А.И. Клевина «Новые формулы для канонического оператора Маслова с комплексными фазами и приложения», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 — математическая физика

Представленная диссертационная работа А.И. Клевина посвящена развитию теории канонического оператора Маслова с комплексными фазами и его приложениям к некоторым задачам математической физики.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Первая глава содержит описание хорошо известных в теории канонического оператора объектов, которые используются в диссертации. Излагается стандартная конструкция канонического оператора, основанная на представлении в виде интеграла по части импульсных переменных.

Во второй главе приводится новое представление канонического оператора. При этом доказывается, что новое и стандартные представления совпадают в главном члене асимптотики. Доказательство основывается на использовании результатов теории осциллирующих интегралов. В случае вещественных фаз центральную роль играет лагранжево многообразие в фазовом пространстве, задаваемое фазовой функцией осциллирующего интеграла. В случае комплексных фаз используется понятие изотропного многообразия с комплексным ростком, обобщающее понятие лагранжева многообразия. Как естественное обобщение с вещественного случая в данной главе предварительно определяется соответствие между комплексными фазовыми функциями и изотропными многообразиями с комплексным ростком.

В третьей главе с помощью полученного представления канонического оператора были построены и выражены через специальные функции асимптотические решения трех задач математической физики. В первом разделе главы была рассмотрена спектральная задача для оператора Шрёдингера с потенциалом вида простой ямы, симметричной относительно одной из переменных. Для нее были построены асимптотические

собственные функции типа «прыгающего мячика», локализованные в окрестности отрезка. Во втором разделе главы была рассмотрена стационарная квантовая анизотропная задача Кеплера. Для соответствующего оператора Шрёдингера и для оператора компоненты момента импульса была рассмотрена серия совместных асимптотических собственных функций, локализованных в окрестности двумерного кольца в трехмерном пространстве. В третьем разделе главы была рассмотрена спектральная задача для двумерного оператора типа Лапласа — Бельтрами с обращающимся в нуль на границе области коэффициентом. Особенность данной задачи заключается в том, что траектории соответствующей динамической системы уходят на бесконечность по импульсным переменным за конечное время. Используя помимо результатов диссертации недавно предложенный В.Е. Назайкинским общий метод построения квазиклассических асимптотик в случае подобной особенности, удалось построить локализованные в окрестности отрезка асимптотические собственные функции типа «прыгающего мячика».

Первоначально теория В.П. Маслова оперировала с многозначными решениями уравнения Гамильтона — Якоби. Здесь возникло важнейшее понятие лагранжева многообразия и канонический оператор Маслова (КО Маслова) определялся как (нетривиальная!) линейная комбинация слагаемых, отвечающих покрытию лагранжева многообразия картами, диффеоморфными областям на симплектических координатных плоскостях. В общем случае такие слагаемые имеют вид преобразования Фурье по импульсным переменным. С другой стороны, появившаяся позже конструкция интегральных операторов Фурье (ИОФ) Л. Хёрмандера оперирует с интегралами по области формальных параметров, а соответствующее лагранжево многообразие есть график дифференциала по x фазовой функции на множестве критических точек фазовой функции по переменным интегрирования. В работе Б.Ю. Стернина с соавторами и в моей работе с Ле Ву Ань было показано, что локально (и, следовательно, глобально) ИОФ может быть представлен в виде КО Маслова. При этом в общей конструкции Л. Хёрмандера нет явного алгоритма построения фазовой функции ИОФ. Можно сказать, что один из способов решения этой задачи в вещественном случае был приведен в работах С.Ю. Доброхотова, В.Е. Назайкинского и А.И. Шафаревича. В этих работах область формальных переменных интегрирования в ИОФ строится

на основе координат на лагранжевом многообразии, определяющих его вложение в фазовое пространство. В случае комплексной фазовой функции задача осложняется тем, что наряду с малым параметром задачи возникает еще один — мнимая часть фазовой функции. Это приводит к тому, что конструкция канонического оператора в этом случае геометрически неоднозначная — существует много способов «продолжения» с множества нулей фазовой функции (комплексного ростка в терминологии В.П. Маслова) в область полной меры в вещественном пространстве. В исходной теории В.П. Маслова неоднозначности продолжения обозначены и проанализированы.

В работе А. Клевина предложен способ «продолжения» в виде ИОФ с комплексными фазовыми функциями в отличие от известного представления КО Маслова. Отметим, что в работе А. Клевина связь его конструкции с теорией ИОФ не устанавливается и не используется. В частности, заново доказывается совпадение нового (в виде ИОФ) и стандартного представлений КО Маслова, известное из упомянутых выше работ.

С помощью канонического оператора с комплексными фазами строятся асимптотические решения дифференциальных уравнений с частными производными, локализованные в окрестности k-мерных поверхностей (с особенностями, если имеются фокальные точки) в конфигурационном пространстве размерности n ($k < n$). Такие решения быстро осциллируют на этих поверхностях и затухают как гауссова экспонента в трансверсальном направлении к ним. В частности, каноническим оператором могут быть заданы хорошо известные в физике асимптотики вида гауссовых волновых пакетов (случай $k = 0$) и гауссовых волновых пучков (случай $k = 1$).

Понятно, что всякое упрощение конструкции асимптотик, получаемых с помощью канонического оператора с комплексными фазами, является актуальным. Представление в виде ИОФ позволяет в некоторых случаях уменьшить количество слагаемых в асимптотике и получить представление асимптотического решения в виде деформированных спецфункций (в работе А. Клевина это функции Эйри и Бесселя). В диссертации было построено подобное представление. для асимптотического решения трех задач математической физики. Как уже было отмечено выше, конструкция канонического оператора Маслова в случае комплекс-

ной фазовой функции неоднозначна, более того, даже при отсутствии особенностей проектирования, построение, предложенное В.П. Масловым, весьма нетривиально. Аналогичные трудности при построении нового представления КО Маслова преодолел в своей работе А. Клевин и это является, несомненно, важным результатом, определяющим очень высокий уровень работы. Некоторые сделанные выше замечания не являются существенными и скорее есть замечания о возможных результатах дальнейших исследований. Нет сомнений, что развитая в диссертации А. Клевина техника будет с успехом применяться для решения сложных задач математической физики. Полученные А. Клевиным результаты являются новыми, представлялись на научных семинарах и международных конференциях, были своевременно опубликованы в четырех статьях в изданиях, индексируемых в базах Web of Science и Scopus. Автореферат диссертации достаточно полно и точно отражает содержание диссертации.

На основании вышесказанного заключаю, что диссертация «Новые формулы для канонического оператора Маслова с комплексными фазами и приложения» представляет собой законченное научное исследование и удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Клевин Александр Игоревич, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 — математическая физика.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук
(специальность — 05.13.18), профессор,
Департамент прикладной математики МИЭМ
ФГАОУ ВО НИУ «Высшая школа экономики»
Адрес: 123458, Москва, ул. Таллинская, 34
Тел.: +7 (495) 916-88-76; 15129
E-mail: vgdanilov@mail.ru

«30» августа 2022 г. В.Г. Данилов

Подпись Данилова В.Г. заверяю
специалист по персоналу Хлопова В.Г.