О Т З Ы В
НА ДИССЕРТАЦИЮ О.М.ХУДАЙВЕРДЯНА "НЕЧЕТНАЯ СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И НЕЧЕТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ЛАПЛАСА В ФОРМАЛИЗМЕ БАТАЛИНА–ВИЛКОВИСКОГО", ПРЕДСТАВЛЕННУЮ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

по специальности 01.01.04 (геометрия и топология)

Основной целью диссертации О.М.Худайвердяна является разработка нечетной симплектической геометрии, являющейся математическим эквивалентом формализма Баталина–Вилковиского, которому посвящено много физических работ. В то же время нечетная симплектическая геометрия находится на начальной стадии развития и первые строгие результаты в этом направлении принадлежат именно соискателю.

Остановимся на главных ингредиентах этого нового направления в дифференциальной геометрии и математической физике. Нечетные симплектические многобразия — это супермногообразия, наделенные нечетной симплектической формой по отношению к четным (x^i) и нечетным (θ_j) локальным координатам. Такие многообразия обязательно имеют равное число четных и нечетных координат, а их примером может служить суперпространство $E^{m|m}$ суперразмерности $(m|m)$ с симплектической структурой, задаваемой нечетной замкнутой 2-формой

$$\Omega = \sum_{i=1}^{m} dx^i d\theta_i.$$

Нечетные симплектические преобразования сохраняют эту форму или, эквивалентно, нечетную скобку Пуассона.

В отличие от обычных (четных) сиплектических преобразований нечетные симплектические преобразования не сохраняют форму объема. Поэтому одной из важных задач нечетной симплектической геометрии является исследование действия нечетных симплектических преобразований на формах объема. Эта задача допускает естественную формулировку в терминах полуплотностей. В первой главе диссертации строится полуплотность на суперпространстве $E^{m|m}$, которая инвариантна относительно нечетных симплектических преобразований и сохраняет форму объема. Она зависит от производных порядка≤ 2 и определяется единственным образом с точностью до умножения на константу. Указанная полуплотность сосредоточена на гиперповерхностях в $E^{m|m}$ суперразмерности $(m-1|m-1)$.

Если рассматриваемое супермногообразие обладает двумя симплектическими структурами разной четности (т.е. четной и нечетной одновременно), то суперпространство векторных полей, сохраняющих обе симплектические структуры, обязательно конечномерно. Более того, в диссертации описана супералгебра Ли таких векторных подей.

Одним из главных объектов исследования в диссертации является Δ-оператор, который можно рассматривать как аналог оператора Лапласа. Это нечетный

оператор 2-го порядка, который строится по форме объема ρ и равен

$$\Delta_\rho F = \mathrm{div}_\rho D_F = \frac{\mathcal{L}_{D_F}\rho}{\rho},$$

где D_F – гамильтоново векторное поле, отвечающее функции F, а $\mathcal{L}_{D_F}$ – производная Ли вдоль этого векторного поля. Указанный оператор инвариантен относительно нечетных пуассоновых преобразований, сохраняющих форму объема ρ. В частном случае координатной формы объема на суперпространстве $E^{m|m}$ он совпадает с оператором Баталина–Вилковиского

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial \theta_i}.$$

Одним из достижений соискателя следует считать интерпретацию Δ-оператора как оператора, действующего на полуплотностях, благодаря чему ему удалось получить его инвариантное описание. Действие указанного оператора на полуплотностях вида $s = s(x,\theta)\sqrt{D(x,\theta)}$ в локальных координатах Дарбу задается формулой

$$\Delta s = \Delta_0 s(x,\theta)\sqrt{D(x,\theta)}.$$

Каждой полуплотности в нечетном симплектическом многообразии E сопоставляется естественным образом плотность на лагранжевых плотностях в E.

Важным свойством, отличающим обычную (четную) симплектическую геометрию от нечетной симплектической геометрии является то, что любое нечетное симплектическое многообразие симплектоморфно суперкокасательному расслоению ΠT^*M над подстилающим многообразием M.

Последняя, четвертая глава посвящена исследованию свойств Δ-оператора в пуассоновом случае. Пусть M есть супермногообразие и E – контравариантное симметричное нечетное тензорное поле ранга 2 на M. Обозначим через $\mathcal{F}_E(M)$ класс самосопряженных нечетных операторов 2-го порядка на полуплотностях с главным символом E. Главный символ E определяет на многообразии M нечетную скобку Пуассона, тем самым пара (M,E) приобретает структуру нечетного пуассонового многообразия. Класс $\mathcal{F}_E(M)$ обладает следующими важными свойствами: 1) любые два оператора $\Delta, \Delta' \in \mathcal{F}_E(M)$ отличаются на скалярную функцию; 2) если оператор $\Delta \in \mathcal{F}_E(M)$, то оператор $\Delta^2 = \frac{1}{2}[\Delta,\Delta]$ является четным самосопряженным оператором, равным производной Ли вдоль некоторого четного векторного поля X, называемого модулярным векторным полем оператора Δ. Это векторное поле сохраняет нечетную пуассонову структуру. Можно ввести группу когомологий пуассонова многообразия $(M.E)$, являющуюся фактором пространства пуассоновых векторных полей по модулю гамильтоновых векторных полей. Класс $[X]$ модулярного векторного поля X в этой группе не зависит от выбора оператора $\Delta \in \mathcal{F}_E(M)$ и называется модулярным классом многообразия (M,E). Этот класс является препятствием к разрешимости уравнения $\Delta^2 = 0$. В диссертации построен пример нечетного пуассонова многообразия с нетривиальным модулярным классом.

Пусть (M,E) – нечетное пуассоново многообразие. Рассмотрим множество пар форм объема (ρ,ρ') таких, что

$$\Delta_\rho \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}} = 0.$$

Решения этого уравнения образуют группоид C_E. Обратный элемент в C_E отвечает замене ρ на ρ' в приведенном уравнении.

Подведем итог. В диссертации О.М.Худайвердяна заложены основы нечетной симплектической супергеометрии, главными ингредиентами которой являются полуплотности, инвариантные относительно нечетных симплектических преобразований, и Δ-оператор Баталина–Вилковысского, инвариантный относительно нечетных симплектических преобразований, сохраняющих форму объема.

В диссертации получены следующие основные результаты:

(1) построена каноническая полуплотность, инвариантная относительно нечетных симплектических преобразований;
(2) введен оператор Баталина–Вилковиского на полуплотностях, инвариантный относительно нечетных симплектических преобразований, сохраняющих форму объема;
(3) доказана теорема о конечномерности пространства векторных полей, сохраняющих две симплектические структуры разной четности;
(4) доказана теорема о симплектоморфности произвольного нечетного симплектического многообразия суперкокасательному расслоению ΠT^*M над подстилающим многообразием M;
(5) введено понятие модулярного векторного поля пуассонова супермногообразия и модулярного класса такого многообразия:
(6) определена структура группоида на парах форм объема, удовлетворяющих мастер-уравнению.

Все результаты диссертации опубликованы с полными доказательствами в центральных журналах по математической физике, таких как "J. Math. Phys." , "Commun. Math. Phys." , "Lett. Math. Phys." . Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание, а она сама удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям. Считаю, что О.М.Худайвердян безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 – "геометрия и топология" .

Ведущий научный сотрудник
отдела комплексного анализа МИАН
доктор физ.-мат наук (специальность 01.01.01),
профессор
тел. +7 (495) 984-81-41*37-79
e-mail: sergeev@mi-ras.ru
119991, г. Москва, ул. Губкина, 8

25 июля 2022 г.

А.Г.Сергеев

Подпись Сергеева А.Г. заверяю
Ученый секретарь МИАН

Поликарпов С.А.