Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук, г. Москва, Россия

На правах рукописи



Худавердян Оганес Мкртычевич

НЕЧЁТНАЯ СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И НЕЧЁТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ЛАПЛАСА В ФОРМАЛИЗМЕ БАТАЛИНА-ВИЛКОВЫСКОГО

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена в институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва, Россия

Официальные оппоненты:

Красильщик Иосиф Семёнович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Лаборатории 6 «Проблем качественного исследования нелинейных динамических систем им. А. Г. Бутковского» Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук (специальность 01.04.02 – теоретическая физика).

Сергеев Армен Глебович — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник отдела комплексного анализа Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (специальность – 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ).

Талалаев Дмитрий Валерьевич — доктор физико- математических наук, старший научный сотрудник кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (специальность – 01.01.04 — геометрия и топология).

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук.

Защита диссертации состоится 15 сентября 2022 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Математическом институте имени В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института имени В. А. Стеклова РАН и на сайте http://www.mi-ras.ru/dis/ref22/ khudaverdian/dis.pdf.

Автореферат разослан 14 июня 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.022.03 при МИАН
доктор физико-математических наук,
М. А. Королев



ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Основной темой диссертации О. М. Худавердяна является разработка нечётной симплектической геометрии, являющейся основой формализма Баталина–Вилковыского. Им в частности введены и исследованы два оператора второго порядка. Первый — оператор на функциях, инвариантный относительно нечётных симплектических преобразований, сохраняющих форму объёма. Этот оператор является необходимым ингредиентом квантового мастер-уравнения в формализме Баталина – Вилковыского. Второй — оператор на полуплотностях, инвариантный относительно произвольных нечётных симплектических преобразований, раскрывающих смысл этого мастер-урав-нения. Оба эти оператора не имеют ближайших аналогов в обычной симплектической геометрии. Опишем более подробно этот формализм.

В 1981 году в журнале Phys. Letters появилась короткая статья И. Баталина и П. Вилковыского[1]. В этой статье рассматривался лагранжев формализм квантования калибровочных полей в наиболее общей ситуации; формализм строился в пространстве (Φ^A, Φ^*_B) полей и антиполей, снабженном *нечётной* невырожденной скобкой Пуассона $\{_,_\}_1$[2]:

$$\{\Phi^A, \Phi^*_B\}_1 = \delta^A_B\,, \{\Phi^A, \Phi^B\}_1 = \{\Phi^*_A, \Phi^*_B\}_1 = 0\,, p\left(\Phi^*_A\right) = p\left(\Phi^A\right) + 1\,, \quad (1)$$

где $p(\Phi)$ - это чётность функции Φ. Напомним, что гамильтонова картина формулируется с помощью *чётной* скобки Пуассона $\{_,_\}_0$ в суперпространстве. Роль BRST (Becchi, Rouet, Stora, Tyutin) заряда, нечетной функции Q, которая содержит всю информацию о связях теории и удовлетворяет BRST уравнению $\{Q, Q\}_0 = 0$, в лагранжевом подходе берет на себя мастер-действие $\mathcal{S}(\Phi, \Phi^*) = S + \ldots$, – чётная функция, которая удовлетворяет классическому мастер-уравнению

$$\{\mathcal{S}, \mathcal{S}\}_1 = 0\,, \quad (2)$$

или его квантовой версии

$$\Delta \exp \frac{i\mathcal{S}}{\hbar} = 0\,, \quad \text{где } \Delta = \sum_A \frac{\partial^2}{\partial\Phi^A \partial\Phi^*_A} \quad (3)$$

[1] Batalin I.A., Vilkovisky G.A.: Gauge algebra and quantization. *Phys. Lett.* **102B** pp. 27–31 (1981).

[2] Эта скобка иногда называется *антискобкой*, *скобкой Баттин* или *скобкой Схоутена*

где S – изначальное действие теории, $\{_,_\}_1$ – нечётная скобка (1); квантовое уравнение (3) переходит в классическое уравнение (2) при $\hbar \to 0$.

Тот факт, что в суперпространстве могут существовать чётная и нечётная симплектические структуры был хорошо известен математикам, однако в физике рассмотрение нечётной симплектической структуры до работы Баталина и Вилковыского воспринималось как экзотика.

К тому же, с самого начала в формализме Баталина-Вилковыского был неясен смысл безусловно важного оператора второго порядка Δ, участвующего в написании формулы (3).

Я последовательно изучал с 1986 года нечётную симплектическую геометрию (см. работы автора [1], [2], [3] и [17]). Мною было введено в 1989 году в работе [4] инвариантное определение Δ-оператора в (3) следующим образом:

• на супермногообразии M, снабжённом нечётной скобкой Пуассона и формой объема $\boldsymbol{\rho}$, действие нечётного оператора Лапласа на произвольную функцию определяется (с точностью до множителя) как дивергенция вдоль формы объема $\boldsymbol{\rho}$ гамильтонова векторного поля, соответствующего функции f:

$$\Delta_{\boldsymbol{\rho}} f = \frac{1}{2}\mathrm{div}_{\,\boldsymbol{\rho}} D_f = \frac{1}{2}\frac{L_{Df}\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}}\,, \tag{4}$$

(гамильтоново векторное поле D_f определяется соотношением $D_f g = \{f,g\}_1$ для произвольной функции g).

Легко видеть, что оператор (4) действительно превращается в оператор (3) для канонической нечётной скобки и для координатной формы объема $\boldsymbol{\rho}_0 = D(x,\theta)$. Отметим, что в чётном случае (для обычной скобки Пуассона) оператор Δ становится оператором первого порядка. (см. [5]). Мы видим, почему Δ-оператор (3) инвариантен лишь относительно унимодулярных канонических преобразований, которые сохраняют координатную форму объема. Это свойство не имело аналога в обычной математике, где преобразования, сохраняющие симплектическую форму, сохраняли и соответствующую форму объема (теорема Лиувилля). Также отметим, что как чётная так и нечётная симплектические структуры локально обладают координатами Дарбу, в которых эти структуры являются каноническими; однако, в отличие от чётной структуры, преобразования, сохраняющие нечётную структуру не сохраняют никакой формы объёма. Например, каноническое преобразование $(x,\theta) \mapsto (2x, \frac{1}{2}\theta)$, (где (x,θ) координаты Дарбу нечётного симплектического суперпространства) умножают координатную

форму объёма в суперпространстве на 4.

Вернемся снова к тому обстоятельству, что в BV-формализме используется нечётная симплектическая структура. Как это ни звучит парадоксально, нечётная симплектическая геометрия ближе к классической, чем чётная. Действительно, для любого многообразия M супермногообразие ΠT^*M, где Π-функтор обращения чётности, имеет стандартную нечётную симплектическую структуру (это аналог фундаментального классического результата о том,что кокасательное расслоение T^*M имеет стандартную чётную симплектическую структуру). Эта структура на супермногообразии ΠT^*M задаётся нечётной скобкой:

$$\{x^a, \theta_b\} = \delta^a_b\,, \quad \{x^a, x^b\} = 0\,, \quad \{\theta_a, \theta_b\} = 0\,, \tag{5}$$

где x^a произвольные локальные координаты на многообразии M и θ_b- "нечётные импульсы", соответствующие координатам p_b в слое кокасательного расслоения T^*M. Можно показать, что любое конечномерное нечётное симплектическое супермногообразие E симплектоморфно многообразию ΠT^*M, где M – обычное многообразие, подстилающее супермногообразие E (см. [11])[3].

Я, первым, совместно с моим учеником А. Нерсесяном изучил некоторые вопросы BV-геометрии, связанные с нечётной симплектической геометрией и обратил внимание на связь между квантовым BV уравнением (3) и условием нильпотентности $\Delta^2 = 0$(см. [6], [7], [8], обзор [15], а также добавление при корректуре в работе А. С. Шварца[4]).

Параллельно, в работе [1] мною совместно с Р. Мкртчяном был определён нечётный аналог инварианта Пуанкаре–Картана. В отличие от чётного случая, не существует плотности (объекта интегрирования), инвариантной относительно *всей* группы нечётных канонических преобразований; группу надо уменьшить до группы преобразований, сохраняющих форму объёма, то есть преобразований, сохраняющих Δ-оператор (3). Для такой группы нами явно была построена инвариантная полуплотность, определённая на поверхностях коразмерности (1|1). Позже в работе [11] мною был прояснён геометрический смысл этого объекта, и, в частности показано, что эта полуплотность может рассматриваться как суперпартнер средней кривизны гиперповерхности в римановом пространстве.

Существенный шаг вперед в понимании Δ-оператора (3) был сделан в работах [12], [14]. В этих работах был построен канонический Δ-опе-

[3]Отметим, что если положить,что M — это пространство полей, то формула (5) приводит к скобке (1) на пространстве полей и антиполей.

[4]Schwarz A.S. Geometry of Batalin–Vilkovisky Formalism.*Commun. Math. Phys.* **155**, pp.249–260 (1993).

ратор как оператор на *полуплотностях*. Введение такого оператора прояснило как геометрию формализма Баталина–Вилковыского, так и геометрию нечётного инварианта Пуанкаре–Картана.

В дальнейшем оказалось, что некоторые конструкции работают не только в симплектическом случае, но и в случае, когда нечётная скобка Пуассона вырождена. Например, легко понять, что определение (4) проходит для пуассонова многообразия. Эти идеи получили развитие в работах [15], [16]. Оказывается, что определение Δ-оператора (4) естественно обобщается на случай пуассоновой геометрии, более того, в пуассоновой геометрии возникают новые нетривиальные геометрические структуры, которые нашли объяснение в работах [15] ,[16]. В частности в этих работах построены:

- группоид Баталина–Вилковыского,
- модулярный класс в формализме Баталина–Вилковыского.

Цели и задачи исследования.

Целью диссертационной работы является построение нечётной симплектической геометрии. Для достижения этой цели в диссертации рассматриваются следующие основные задачи.

1. Построить полуплотность, являющуюся инвариантом преобразований нечётного симплектического суперпространства, сохраняющих нечётную симплектическую структуру и координатную форму объема. Доказать ее единственность (с точностью до умножения на константу) в классе плотностей произвольного веса, инвариантных относительно преобразований, сохраняющих нечётную симплектическую форму и координатную форму объёма и зависящих от производных не более второго порядка (т.е. ранга $k \leqslant 2$).

2. На пуассоновом супермногообразии E, оснащённом формой объёма $\boldsymbol{\rho}$, построить нечётный оператор второго порядка $\Delta_{\boldsymbol{\rho}}$ на функциях.

3. Доказать конечномерность суперпространства векторных полей, сохраняющих две симплектические структуры разной чётности.

4. На нечётном симплектическом суперпространстве построить канонический нечётный оператор Лапласа Δ_{can} на полуплотностях.

5. Исследовать структуру нечётных канонических преобразований и доказать, что произвольное конечномерное нечётное симплектическое супермногообразие E симплектоморфно кокасательному расслоению над некоторым многообразием M с изменённой чётностью слоёв $E = \Pi T^*M$, где M — подстилающее многообразие супермногообразия E.

6. На нечётном пуассоновом супермногообразии исследовать структуру самосопряжённых операторов второго порядка на полуплотностях.

7. Построить группоид Баталина–Вилковыского, описывающий специальные симметрии мастер-уравнения.

Методы исследования.

В диссертации используются методы дифференциальной и римановой геометрии и теории супермногообразий, методы симплектической и пуассоновой геометрии, методы некоммутативной геометрии и топологии, а также методы геометрии и топологии в теоретической и математической физике.

Научная новизна.

Результаты автора, выносимые на защиту, являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем.

1. Построена полуплотность, являющаяся инвариантом преобразований нечётного симплектического суперпространства, сохраняющих нечётную симплектическую структуру и координатную форму объема. Доказана ее единственность (с точностью до умножения на константу) в классе плотностей произвольного веса, инвариантных относительно преобразований, сохраняющих нечётную симплектическую форму и координатную форму объёма и зависящих от производных не более второго порядка (т.е. ранга $k \leqslant 2$).

2. На произвольном нечётном пуассоновом супермногообразии E, оснащённом формой объёма $\boldsymbol{\rho}$, построен *нечётный оператор второго порядка* $\Delta_{\boldsymbol{\rho}}$ *на функциях.* Этот оператор инвариантен относительно нечётных пуассоновых преобразований, сохраняющих форму объёма. Он не имеет ближайших аналогов в обычной симплектической геометрии.

Показано, что в случае, если E — нечётное симплектическое супермногообразие, в котором пуассонова структура на E индуцирована симплектической, а $\boldsymbol{\rho}$ — координатная форма объёма, то оператор $\Delta_{\boldsymbol{\rho}}$ совпадает с оператором, введённым в классической работе Баталина и Вилковыского для квантования мастер-уравнения, и который инвариантен относительно унимодулярных нечётных симплектических преобразований этого суперпространства.

3. В задаче о суперпространстве векторных полей, сохраняющих две симплектические структуры разной чётности, доказано, что это суперпространство всегда конечномерно. Вычисляется супералгебра Ли векторных полей, сохраняющих чётную и нечётную симплектические структуры специального вида.

4. На нечётном симплектическом суперпространстве построен *канонический нечётный оператор Лапласа* Δ_{can} *на полуплотностях.* Показано, что этот оператор инвариантен относительно любых замен координат, сохраняющих нечётную симплектическую структуру. Показано, что уравнение на мастер-действие в формализме Баталина–Вилковыского естественно формулируется в терминах этого оператора.

На основании анализа построенного канонического оператора введён ещё один метод построения инвариантных полуплотностей (ср. с п. 1) на произвольном нечётном симплектическом супермногообразии, оснащённом формой объёма.

5. Исследована структура нечётных канонических преобразований и доказано, что произвольное конечномерное нечётное симплектическое супермногообразие E симплектоморфно кокасательному расслоению над некоторым многообразием M с изменённой чётностью слоёв $E = \Pi T^*M$, где M — подстилающее многообразие супермногообразия E.

6. На нечётном пуассоновом супермногообразии $(M, \mathbf{E})$ со скобкой Пуассона, определённой тензорным полем $\mathbf{E}$, введено множество $\mathfrak{F}_{\mathbf{E}}$ самосопряжённых операторов второго порядка с главным символом $\mathbf{E}$, действующих на полуплотностях, определённых на этом пуассоновом супермногообразии. Показано, что множество $\mathfrak{F}_{\mathbf{E}}$ является аффинным пространством, ассоциированным с линейным пространством функций на M, и что квадрат любого оператора из множества $\mathfrak{F}_{\mathbf{E}}$ равен производной Ли вдоль *модулярного векторного поля.* Исследована связь операторов из $\mathfrak{F}_{\mathbf{E}}$ с операторами Δ_ρ (см. пункт 2) и показано, что оператор $\Delta_{\boldsymbol{\rho}}^2$ — это просто векторное поле, которое мы называем модулярным векторным полем. Исследованы когомологические свойства модулярного векторного поля и определён модулярный класс нечётного пуассонова многообразия. Построен пример нечётного пуассонова многообразия с нетривиальным модулярным классом.

7. Введён *группоид Баталина–Вилковыского*, описывающий специальные симметрии мастер-уравнения.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в нечётной симплектической геометрии, в приложениях формализма Баталина–Вилковыского, а также в теории квантования полей.

Диссертация может послужить основой для разработки новых спецкурсов, дипломных и курсовых работ и кандидатских диссертаций. (Например, развитие результатов четвёртой главы диссертации может послужить основой кандидатской диссертации на тему группоидов и

алгеброидов Баталина–Вилковыского.)

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались автором на семинарах и международных конференциях, среди которых выделим следующие:

• семинар "Геометрия, топология и математическая физика" (руководители: академик РАН С. П. Новиков, чл.-корр РАН В. М. Бухштабер), МИАН им. В. А. Стеклова — август 1999 г., август 2008 г., 20 октября 2021 г., 27 октября 2021 г.,

• семинар "Алгебра" (руководитель академик РАН И. Р. Шафаревич) – 2004 г.,

• семинар в Оксфорде (руководитель Н. Хитчин) — ноябрь 2000 г., Великобритания,

• семинар "Геометрия скобок и квантование" Варвик — ноябрь 2001 г., Великобритания,

• семинар "Когомологические аспекты геометрии дифференциальных уравнений" Независимого Московского университета — 15 июня 2020г, 31 марта 2021г.,

• семинар лаборатории теоретической физики ФИАН им. Лебедева, Москва – сентябрь 2003 г., октябрь 2021 г.,

• семинар по геометрии и топологии Университета Абердина — октябрь 2009 г., Великобритания,

• семинар по геометрии и топологии в институте Жордана при университете Лиона — ноябрь 2010 г., Франция,

• семинар по математической физике (Люмини, Марсель) — ноябрь 2010 г., Франция,

• семинар по математической физике, Институт Макса Планка, Бонн — ноябрь 2011 г., январь 2016 г., Германия,

• семинар по математической физике, университет Париж-VII — октябрь 2015 г.,Франция,

• семинар по теоретической физике, IHES, Париж — октябрь 2015 г., Франция,

• семинар "Группы Ли" кафедры математики, университета Женевы — ноябрь 2015 г., Швейцария,

• коллоквиум Лаборатории математики университет г. Реймса — ноябрь 2015 г., Франция,

• семинар кафедры математики университета в Нанси, декабрь 2019 г., Франция,

• семинар по квантовой теории поля (Институт теоретической физики им. Ландау) – июнь 2021 г.,

• семинар "Комплексные задачи математической физики" (руководители А. Г. Сергеев, А. В. Домрин) – 1 марта 2022 г.,

• научный семинар по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, Математический институт им. С. М. Никольского. Руководитель: А Л. Скубачевский – 12 мая 2022 г.,

а также на конференциях:

- конференция Лондонского математического общества и международный симпозиум LMS "Квантование, деформации и новые когомологические и категорные методы в математической физике", 7-13 июля 2001 г., Манчестер, Великобритания,
- конференция "Квантовая гравитация и суперструны", 11–18 июля 2002 г., Дубна,
- третья конференция по геометрии и квантованию GEOQUANT, 7–11 сентября 2009 г., Университет Люксембурга, Люксембург,
- конференция "Геометрические методы в физике" Беловежа, Польша, – *Доклад, открывающий конференцию, посвящённую памяти Ф. А. Березина*, июнь 2011 г.,
- конференция "Алгебраическая топология и абелевы функции" 18—22 июня 2013 г., МИАН им. Стеклова, Москва,
- конференция "Гомологические методы в алгебре, геометрии и физике" 23—25 июля 2014 г., Лондон, Великобритания,
- конференция "Интегрируемость. Алгебра и Геометрия. Новые направления" 13–17 июля 2015 г., Локарно, Швейцария,
- конференция по супергеометрии, суперсимметриям и квантованию, 16–19 декабря 2019 г., Университет Люксембурга, Люксембург,
- конференция: "Геометрия, интегрируемость и суперсимметрия" (GIS-21) 23–26 августа 2021 г., Ереван—Дубна.

  для исследований в формализме Баталина–Вилковыского.

Некоторые полученные автором результаты представлены и используются в недавно опубликованной монографии П. Мнева[5]

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 16 работах автора и полностью соответствуют следующим направлениям исследований по специальности геометрия и топология:

[5]Mnev P. Quantum field theory: Batalin–Vilkovisky formalism and its applications / Vol. 72. American Mathematical Soc. – 2019.

- симплектическая, пуассонова и контактная геометрия
- некоммутативная геометрия и топология
- геометрия и топология в теоретической и математической физике

(список этих работ приведен в конце автореферата). 13 работ из 16 опубликованы в рецензируемых изданиях, входящих в список ВАК.

Личный вклад.

Научные результаты, выносимые на защиту и составляющие содержание диссертационной работы, получены автором самостоятельно. Все результаты, выносимые на защиту и опубликованные в совместных работах, принадлежат автору.

Структура и объём диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав и семи приложений. Главы включают разделы и подразделы. Объём диссертации — 205 страниц, объём приложений — 31 страница. Список литературы включает 67 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, четырёх глав и приложений. Во введении изложена история вопроса, обоснована актуальность темы диссертации и сформулированы ее основные результаты.

В **первой главе** диссертации рассматривается суперпространство $E^{m|m}$, оснащённое канонической нечётной симплектической структурой, то есть рассматривается суперпространство $E^{m|m}$ с невырожденной замкнутой нечётной 2-формой

$$\Omega = \sum_{i=1}^{m} dx^i d\theta_i \,. \tag{6}$$

Преобразования, сохраняющие эту 2-форму, являются нечётными симплектическими преобразованиями. Удобно определять нечётные симплектические преобразования как преобразования суперпространства $E^{m|m}$, сохраняющие нечётную невырожденную скобку Пуассона в этом суперпространстве:

$$\{f(x,\theta), g(x,\theta)\} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial x^i} \frac{\partial g(x,\theta)}{\partial \theta_i} + (-1)^{p(f)} \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial g(x,\theta)}{\partial x^i} \right), \tag{7}$$

где $x^1, \dots, x^n, \theta_1, \dots, \theta_n$ — координаты суперпространства $E^{n|n}$, $p(f)$ — чётность функции f.

Строится полуплотность, которая является инвариантом нечётных канонических преобразований нечётного симплектического суперпространства $E^{n|n}$ и доказывается следующая теорема

Теорема 1.1. *В суперпространстве $E^{m|m}$ в классе $n|n$-плотностей, определённых на невырожденных поверхностях размерности $n|n$, $n \leqslant m$, инвариантных относительно нечётных симплектических преобразований* (7) *и зависящих от производных поверхности степени не выше второй (т.е. ранга $k \leqslant 2$), кроме самой координатной формы объёма существует лишь единственная* (с *точностью до постоянного множителя*) *ненулевая плотность. Это — $(m-1|m-1)$-плотность ранга $k=2$ и веса $\sigma = \frac{1}{2}$ (полуплотность), определённая на невырожденных относительно симплектической структуры поверхностях размерности $(m-1|m-1)$. Соответствующая ей D-плотность (тоже нечётная функция) имеет вид*

$$A\left(z, \frac{\partial f(z)}{\partial z^A}, \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z^A}, \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^A \partial z^B}, \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^A \partial z^B}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\{f,\varphi\}_1}}\left(\Delta_0 f - \frac{\{f,f\}_1}{2\{f,\varphi\}_1}\Delta_0\varphi - \frac{\{f,\{f,\varphi\}_1\}_1}{\{f,\varphi\}_1} - \frac{\{f,f\}_1}{2\{f,\varphi\}_1}\{\varphi\{f\varphi\}_1\}_1\right), \tag{8}$$

где уравнения $\begin{cases} f=0, \\ \varphi=0 \end{cases}$ *определяют $(m-1|m-1)$-мерную поверхность в суперпространстве $E^{m|m}$, $\{_,_\}_1$ — нечётная скобка Пуассона* (7), *соответствует нечётной симплектической структуре* (6) *и*

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial \theta_i}\,. \tag{9}$$

Оператор (9) *в формуле* (8) *является специальным примером нечётного оператора Лапласа на функциях нечётного симплектического суперпространства $E^{m|m}$, когда форма объёма в $E^{m|m}$ равна координатной форме объёма.*

Во **второй главе** диссертации рассматриваются $(2m|2m)$-мерные супермногообразия, на которых зафиксированы две симплектические структуры различной чётности. Будем говорить, что пара гамильтонианов (H, Q), где H — чётный гамильтониан, а Q — нечётный гамильтониан, *совместно* описывают динамику на этом суперпространстве,

если

$$\{H, f\}_0 \equiv \{Q, f\}_1 \quad \text{для любой функции } f\,, \tag{10}$$

где $\{_, _\}_0$ — чётная (невырожденная) скобка Пуассона, соответствующая чётной симплектической структуре, а $\{_, _\}_1$ — нечётная (невырожденная) скобка Пуассона, соответствующая нечётной симплектической структуре (то есть если гамильтоново векторное поле чётного гамильтониана H по отношению к чётной симплектической структуре совпадает с гамильтоновым векторным полем нечётного гамильтониана Q по отношению к нечётной симплектической структуре).

Доказывается следующий результат.

Предложение 2.1. *Пусть на супермногообразии $E^{2m|2m}$ заданы чётная и нечётная симплектические структуры. Тогда:*

- *суперпространство пар гамильтонианов (H, Q), совместно описывающих динамику, конечномерно.*
- *если пара гамильтонианов (H, Q) совместно описывает динамику, то эта динамика суперсимметрична*

Затем рассматривается частный случай этой конструкции, когда $(2m|2m)$-мерное супермногообразие является суперпространством со стандартными координатами

$$\underbrace{p^1, \dots p^m, q^1, \dots q^m}_{\text{чётные}} \quad \underbrace{\theta^1, \dots, \theta^m, \varphi^1, \dots, \varphi^m}_{\text{нечётные}}, \tag{11}$$

снабженными симплектическими структурами разной чётности, которые в этих координатах имеют следующий специальный вид:

чётной симплектической структуре соответствует невырожденная скобка Пуассона

$$\{f, g\}_0 = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p^i} \right) + (-1)^{p(f)} \sum_{i=1}^{m} \left(\varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial \theta^i} \frac{\partial g}{\partial \theta^i} + \delta_i \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} \frac{\partial g}{\partial \varphi^i} \right), \tag{12}$$

где числа $\{\varepsilon_i, \delta_j\}$ равны ± 1. Нечётной симплектической структуре соответствует невырожденная скобка Пуассона

$$\{f, g\}_1 = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial g}{\partial \theta^i} + \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial \varphi^i} \right) + (-1)^{p(f)} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta^i} \frac{\partial g}{\partial p^i} + \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right). \tag{13}$$

Обозначим через $S(\{\varepsilon_1,\dots\varepsilon_m;\delta_1,\dots,\delta_m)\}$ вещественную супералгебру Ли квадратичных гамильтонианов на $E^{2m|2m}$ таких, которые для канонической чётной скобки Пуассона (12) с сигнатурой $(\varepsilon_1,\dots\varepsilon_m,$ $\delta_1,\dots,\delta_m)$ и для канонической нечётной скобки Пуассона (13) генерируют одинаковые гамильтоновы векторные поля. Согласно предложению 2.1 эта алгебра конечномерна.

Оказывается, эта алгебра тесно связана с вещественными формами комплексной алгебры $S(n,\mathbf{C})$.

Имеет место следующая теорема

Теорема 2.1. *Супералгебра $S(\{\varepsilon_1,\dots\varepsilon_m;\delta_1,\dots,\delta_m)\}$ изоморфна супералгебре*

$$S^+(l,n-l)\,,\quad \textit{если все } \varepsilon_i=\delta_i\,, \tag{14}$$

где l — количество номеров i $(i=1,\dots m)$, для которых $\varepsilon_i=1$.

Супералгебра $S(\{\varepsilon_1,\dots\varepsilon_m;\delta_1,\dots,\delta_m)\}$ изоморфна супералгебре

$$S^-(n)\,,\quad \textit{если все } \varepsilon_i=-\delta_i\,. \tag{15}$$

В формулировке этой теоремы супералгебры $S^+(l,n-l)$ и $S^-(n)$ являются специальными вещественными формами комплексной супералгебры $S(n,\mathbf{C})$. При помощи этой теоремы вычисляется структура супералгебры $S(\{\varepsilon_1,\dots\varepsilon_m;\delta_1,\dots,\delta_m)\}$ для произвольных ε_i,δ_j, равных ±1.

В последнем параграфе этой главы строится инвариантная формула для нечётного оператора Лапласа на функциях на нечётном супермногообразии. Это построение происходит следующим образом.

Рассматривается пуассоново супермногообразие, оснащённое формой объёма $\boldsymbol{\rho}$. Рассматривается оператор второго порядка $\Delta_{\boldsymbol{\rho}}$, действующий на функциях на этом супермногообразии следующим образом. Значение оператора $\Delta_{\boldsymbol{\rho}}$ на функции произвольной функции F равно дивергенции гамильтонова векторного поля D_F вдоль формы объёма $\boldsymbol{\rho}$

$$\Delta_{\boldsymbol{\rho}}F=\operatorname{div}_{\boldsymbol{\rho}}D_F=\frac{\mathfrak{L}_{D_F}\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}}\,,\quad \text{где}\quad D_FG=\{F,G\}\,. \tag{16}$$

Этот оператор является инвариантной конструкцией для нечётного оператора Лапласа в формализме Баталина–Вилковыского (по поводу дальнейших деталей см. последний параграф второй главы диссертации).

В заключение отметим, что оператор (16) в обычной симплектической геометрии является оператором первого порядка. Это напрямую связано с *отсутствием инвариантной формы объёма в нечётном симплектическом супермногообразии*. В связи с этим в самом конце второй главы в работе доказывается следующее предложение:

Предложение 2.2. *Для нечётного симплектического супермногообразия не существует формы объёма, которая сохраняется при всех преобразованиях, сохраняющих нечётную симплектическую структуру.*

В **третьей главе** диссертации выясняется роль, которую полуплотности играют в нечётной симплектической геометрии. В частности, формулируется предложение о построении плотности на лагранжевых поверхностях, соответствующих данной полуплотности и излагаются методы её построения, основанные на этом предложении. Это предложение заключается в следующем:

Предложение 3.2. *Каждой полуплотности* $\mathbf{s}$ *в нечётном симплектическом супермногообразии* $E = E^{n|n}$ *соответствует плотность* $\boldsymbol{\rho}_L$*, определённая на лагранжевых поверхностях в* E*.*

Если $L = L^{n-k|k}$ *— лагранжева поверхность в* E*,* $\alpha \in L$ *— произвольная точка на ней и* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}; \mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^k\}$ *— произвольный репер лагранжевой поверхности* $L^{n-k|k}$ *в точке* α $(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}^j \in T_\alpha L)$*, то значение плотности* $\boldsymbol{\rho}_L$ *в точке* α *и на реперe* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}; \mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^k\}$ *определяется следующим образом:*

$$\boldsymbol{\rho}_L\left(\alpha, \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}; \mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^k\}\right) = \mathbf{s}\left(\alpha, \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n; \mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^n\}\right), \quad (17)$$

где $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n; \mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^n\}$ *— репер, такой, что репер* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k; \mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^{n-k}\}$ *дуален к реперу* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}; \mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^k\}$*, т.е.*

$$\Omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}^k) = \delta_i^k, \quad \Omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = 0, \quad \Omega(\mathbf{f}^i, \mathbf{f}^k) = 0,$$

где Ω *— нечётная 2-форма, определяющая нечётную симплектическую структуру на* $E^{n|n}$*.*

Тем самым мы корректно определим плотность на L*.*

Затем в третьей главе строится инвариантный оператор на полуплотностях. Построение этого оператора происходит следующим образом.

Определение 3.3. Пусть $\mathbf{s}$ — полуплотность и пусть $s(z)\sqrt{Dz}$ — локальное выражение для полуплотности в каких–нибудь координатах Дарбу. Тогда локальное выражение для полуплотности $\Delta\mathbf{s}$ в этих же самых координатах Дарбу задаётся формулой

$$\Delta\mathbf{s} = (\Delta_0 s(z))\sqrt{Dz} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 s}{\partial x^i \partial\theta_i}\sqrt{D(x,\theta)}\,. \quad (18)$$

В диссертации доказывается, что определение (18) инвариантно относительно произвольных замен канонических координат на основании

леммы о структуре произвольного нечётного канонического преобразования.

Канонический оператор Лапласа (18), действующий на полуплотностях в нечётном симплектическом супермногообразии, является правильной альтернативой оператору Лапласа (16), действующему на функциях нечётного симплектического супермногообразия, оснащённого формой объёма. Введение замкнутой полуплотности приводит к тому, что мастер-уравнение Баталина–Вилковыского формулируется как условие замкнутости соответствующей полуплотности. Попутно полностью решается задача о связи между дифференциальными формами на лагранжевых поверхностях и замкнутыми полуплотностями.

Нельзя не отметить то обстоятельство, что в терминах полуплотностей получает кристально ясное объяснение тождество о том, что для любого канонического преобразования

$$\begin{cases} \tilde{x^i} = \tilde{x^i}(x,\theta) \\ \tilde{\theta_j} = \tilde{\theta_j}(x,\theta) \end{cases}$$

нечётного симплектического суперпространства $E^{n|n}$ выполняется тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial \theta_i} \sqrt{\operatorname{Ber}\left(\frac{\partial(\tilde{x},\tilde{\theta})}{\partial(x,\theta)}\right)} = 0\,. \tag{19}$$

Несмотря на экзотичность нечётной симплектической механики, топологическая классификация нечётных симплектических супермногообразий проста. Любое нечётное симплектическое супермногообразие E симплектоморфно ΠT^*M, где M — подстилающее многообразие. Более того, доказывается следующая теорема

Теорема 3.3. *Пусть L — произвольная замкнутая чётная лагранжева поверхность в нечётном симплектическом супермногообразии E, то есть размерность этой поверхности равна $(n|0)$. Тогда это супермногообразие симплектоморфно ΠT^*L.*

Можно сказать, что в слоях ΠT^*L нет топологии.

Эту теорему можно доказать в классическом духе[6], а можно доказывать также и непосредственно, строя шаг за шагом атлас координат Дарбу, как это сделано автором[7].

[6] Schwarz A.S. Geometry of Batalin–Vilkovisky quantisation // *Comm. Math. Phys.* 1993. V. 155, P. 249–260

[7] Khudaverdian H.M. Semidensities on odd symplectic supermanifold // *Comm. Math. Phys.* 2004. V. 247, P. 353–390

В заключение третьей главы мы вновь возвращаемся к вопросу об инвариантной полуплотности, построенной в первой главе на суперпространстве. Язык полуплотностей, разработанный в третьей главе, позволяет рассматривать конструкцию, изложенную в теореме 1.1, как частный случай более общей конструкции, изложенной в следующей теореме

Теорема 3.4. *Каждой полуплотности* $\mathbf{s}$ *в нечётном симплектическом супермногообразии* E *соответствует полуплотность* $\mathbf{K}(\mathbf{s})$ *противоположной чётности, определённая на невырожденных поверхностях коразмерности* $(1|1)$.

Если полуплотность $\mathbf{s}$ *задана выражением* $\mathbf{s} = s(x,\theta)\sqrt{D(x,\theta)}$ *в координатах Дарбу* $\{x^\mu, \theta_\nu\} = \{x^0, x^i, \theta_0, \theta_j\}$, *приспособленных к заданной невырожденной поверхности* C *коразмерности* (1.1), $(x^0|_C = \theta_0|_C = 0)$, *то полуплотность* $\mathbf{K}(\mathbf{s})$ *на этой поверхности и в этих координатах Дарбу задаётся следующим выражением*:

$$\mathbf{K}(\mathbf{s})\big|_C = \frac{\partial s(x^\mu, \theta_\nu)}{\partial \theta_0}\Big|_{x^0=\theta_0=0} \sqrt{D(x^i, \theta_j)}\,, \tag{20}$$

где $D(x^\mu, \theta_\nu)$ *— координатная форма объёма на супермногообразии* E, *а* $D(x^i, \theta_j)$ *— координатная форма объёма поверхности* C.

(Мы приходим к результатам первой главы, рассматривая полуплотность $\mathbf{s} = \sqrt{\boldsymbol{\rho}_{coord}}$, где $\boldsymbol{\rho}_{coord}$ — это координатная форма объёма суперпространства $E^{m|m}$.)

Заключительная **четвёртая глава** диссертации посвящена решению задачи о свойствах самосопряжённых операторов на полуплотностях в нечётном пуассоновом супермногообразии, т.е. в супермногообразии, на котором определена нечётная скобка Пуассона.

Вводится понятие *модулярного класса пуассонова многообразия* с помощью следующего определения

Определение 4.2. Пусть $(M, \mathbf{E})$ — супермногообразие с нечётной пуассоновой структурой, задаваемой тензором E. Пусть на супермногообразии M задан нечётный самосопряжённый оператор Δ, определённый на полуплотностях, такой, что главный символ этого оператора есть $\mathbf{E}$. Тогда существует векторное поле $\mathbf{X}$ такое, что $\Delta^2 = \mathfrak{L}_{\mathbf{X}}$.

Векторное поле $\mathbf{X}$ называется *модулярным векторным полем* оператора Δ. Показывается, что в пространстве модулярных векторных полей естественно определяется эквивалентность по гамильтоновым векторным полям (см. подробности в четвёртой главе). Класс эквивалентности модулярного векторного поля по гамильтоновым вектор-

ным полям называется *модулярным векторным классом* пуассонова супермногообразия.

Отметим, что модулярный класс пуассонового супермногообразия можно определить и в случае обычного многообразия, когда оператор (16) перестаёт быть оператором второго порядка и превращается в векторное поле.

Доказывается следующий результат

Теорема 4.1. *Пусть* $(M, \mathbf{E})$ *— произвольное нечётное пуассоново супермногообразие и пусть* $\boldsymbol{\rho}$ *— произвольная форма объёма на* M*. Рассмотрим оператор Баталина–Вилковыского* $\Delta_{\boldsymbol{\rho}}$ (16) *на функциях. Рассмотрим также самосопряжённый оператор на полуплотностях, построенный по оператору* $\Delta_{\boldsymbol{\rho}}$*:*

$$\Delta^{(\boldsymbol{\rho})}\colon\ \Delta^{(\boldsymbol{\rho})}\mathbf{s} = \sqrt{\boldsymbol{\rho}}\Delta_{\boldsymbol{\rho}}\left(\frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}}}\right). \tag{21}$$

Тогда

- *главный символ оператора* $\Delta^{(\boldsymbol{\rho})}$ *есть пуассонов тензор* $\mathbf{E}$*,*
- *квадрат этого оператора есть производная Ли вдоль модулярного векторного поля* $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\Delta^{(\boldsymbol{\rho})})$*,*
- *модулярный класс этого векторного поля есть модулярный класс нечётного пуассонова многообразия* $(M, \mathbf{E})$ (см. определение 4.2)

$$\Delta^{(\boldsymbol{\rho})} = E^{ab}\partial_b\partial_a + \dots\,,$$

$$\Delta^{(\boldsymbol{\rho})} \circ \Delta^{(\boldsymbol{\rho})} = \mathfrak{L}_{\mathbf{X}}\,, \tag{22}$$

- *квадрат оператора Баталина–Вилковыского* (*т.е. оператора* $\Delta_{\boldsymbol{\rho}}$) *— это модулярное векторное поле* $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\Delta^{(\boldsymbol{\rho})})$*.*

  Оно является пуассоновым бездивергентным векторным полем (*вдоль формы объёма* $\boldsymbol{\rho}$):

$$\Delta^2_{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{X} \quad \textit{и, в частности,} \quad \Delta^2_{\boldsymbol{\rho}} f = \hat{\mathbf{X}} f\,, \tag{23}$$

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{E} = 0\,, \tag{24}$$

$$\operatorname{div}_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{X} = 0\,. \tag{25}$$

В работе приводятся различные примеры вычисления модулярных классов нечётных пуассоновских супермногообразий и показывается зануление модулярного класса нечётного симплектического супермногообразия ΠT^*M, где M — обычное пуассоново многообразие. Затем строится пример нечётного пуассонова многообразия с неисчезающим модулярным классом. В этом примере строится нечётное векторное поле η и чётное векторное поле $\mathbf{X} = \frac{1}{8}[\eta, \eta]$, которое является модулярным полем специально подобранной нечётной пуассоновой структуры. Это векторное поле, если оно не исчезает, задаёт ненулевой модулярный класс этого пуассонова супермногообразия.

В заключение четвёртой главы на нечётном пуассоновом супермногообразии вводится конструкция группоида Баталина–Вилковыского, предложенная автором. Формулируется следующая теорема.

Теорема 4.3. *Пусть (M, E) — нечётное пуассоново супермногообразие.*

Рассмотрим множество пар форм объёма $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ таких, что

$$\Delta_{\boldsymbol{\rho}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\rho}'}{\boldsymbol{\rho}}} = 0\,. \tag{26}$$

Тогда

- *Решения этого уравнения образуют группоид. Обозначим этот группоид через C_E.*
- *Пара $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ принадлежит группоиду C_E если и только если выполняется следующее условие*

$$\Delta^{(\boldsymbol{\rho}')} \equiv \Delta^{(\boldsymbol{\rho})}\,. \tag{27}$$

При этом если $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \in C_E$, то

$$\Delta_{\boldsymbol{\rho}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\rho}'}{\boldsymbol{\rho}}} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \Delta_{\boldsymbol{\rho}'} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}'}} = 0\,, \tag{28}$$

Это — закон взятия обратного элемента.

Закон композиции выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta_{\boldsymbol{\rho}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{\rho}'}{\boldsymbol{\rho}}} = 0 \\ \Delta_{\boldsymbol{\rho}'} \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{\boldsymbol{\rho}'}} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_{\boldsymbol{\rho}} \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{\boldsymbol{\rho}}} = 0 \tag{29}$$

Благодарность. Я выражаю глубокую признательность моему учителю А. С. Шварцу, а также Ф. Ф. Воронову, В. М. Бухштаберу, С. П. Новикову и участникам его семинара. Идея канонического оператора на полуплотностях пришла ко мне во время доклада на семинаре С. П. Новикова в МИАН. Я благодарю также моих соавторов Р. Мкртчяна, Ф. Ф. Воронова, моих учеников А. Нерсесяна и М. Педди, а также моего друга В. Авакяна.

Эту диссертацию я посвящаю памяти своих родителей.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ В РЕЦЕНЗИРУЕМЫХ ИЗДАНИЯХ ИЗ СПИСКОВ ВАК И МЕЖДУНАРОДНЫХ БАЗ ДАННЫХ

[1] O.M. Khudaverdian, R.L. Mkrtchian. *Integral Invariants of Buttin Bracket.* Lett. Math. Phys. v. 18 (1989), p. 229-231 (Preprint EFI–918–69–86-Yerevan (1986)).

[2] O.M. Khudaverdian, A.P. Nersessian. *Superspaces with Odd and Even Canonical Two-Forms and the Strange Superalgebra.* Izv. Acad. Nauk Arm. SSR, v. 24, No. 6, (1989) p. 288-294 (transl. into English: Soviet Journal of Contemp. Phys., v. 24 No.6, p. 22-27).

[3] O.M. Khudaverdian, A.P. Nersessian. *The Supergeneralization of $CP(N)$ as Reduced Phase Space of Super-Hamiltonian Systems.* Izv. Acad. Nauk Arm. SSR, v. 25, No. 6, (1990) p. 330-337 (transl. into English: Soviet Journal of Contemp. Phys., v. 25 No.6.)

[4] O.M. Khudaverdian. *Geometry of Superspace with Even and Odd Brackets.* J. Math. Phys. v. 32 (1991) p. 1934-1937 (Preprint of the Geneva University, UGVA–DPT 1989/05–613).

[5] O.M. Khudaverdian, A.P. Nersessian. *Canonical Poisson Brackets of Different Grading and Strange Superalgebras.* J. Math. Phys. v. 32 (1991) p. 1938-1941 (Preprint of the Geneva University, UGVA–DPT 1989/05–614).

[6] O.M. Khudaverdian, A.P. Nersessian. *Even and Odd Symplectic and Kählerian Structures on Projective Superspaces.* J. Math. Phys. v. 34 (1993), p. 5533-5548, (Preprint JINR, E2-92-411)

[7] O.M. Khudaverdian, A.P. Nersessian. *On Geometry of Batalin–Vilkovisky Formalism.* Mod. Phys. Lett. A, v. 8 (1993), No. 25, p. 2377-2385.

[8] O.M. Khudaverdian, A.P. Nersessian. *Batalin–Vilkovisky Formalism and Integration Theory on Manifolds.* J. Math. Phys., v. 37 (1996), p. 3713-3724.

[9] O.M. Khudaverdian. *Odd Invariant Semidensity and Divergence-like Operators on Odd Symplectic Superspace.* Comm. Math. Phys., v. 198 (1998), p. 591–606.

[10] H.M. Khudaverdian *Laplacians in odd symplectic geometry.*— In *Quantization, Poisson Brackets and Beyond*, Theodore Voronov, Ed., Contemp. Math., Vol. 315, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 199–212.

[11] H.M. Khudaverdian. *Semidensities on odd symplectic supermanifold.*, Comm. Math. Phys., v. 247 (2004), pp. 353–390 (preprint published in 2001 (`arXiv:math.DG/0012256`)

[12] Khudaverdian H.M. and Voronov Th. Geometry of differential operators of second order, the algebra of densities, and groupoids // J. Geom. Phys. — 2013 — V. 64. – P. 31,

[13] H.M.Khudaverdian, M.Peddie "Odd laplacians; geometrical meaning of potential, and modular class", Lett. in Math. Phys., **107**(7), pp. 1195–1214 (2017), math-arXive 1509-05586.

ДРУГИЕ ПУБЛИКАЦИИ

[14] O.M. Khudaverdian, A.P. Nersessian. *Formulation of Hamiltonian Mechanics with Even and Odd Poisson Bracket.* Preprint EFT 1031–81(87), Yerevan (1987).

[15] O.M. Khudaverdian. *Batalin–Vilkovisky Formalism and Odd Symplectic Geometry.* In: Proceedings of International Workshop "Geometry and Integrable Systems", P.N. Pyatov and S.N. Solodukhin, Eds. Word Scientific Publishing Co., 1996, p. 144–181.

[16] O.M. Khudaverdian. *Delta-Operator on Semidensities and Integral Invariants in the Batalin-Vilkovisky Geometry.* Preprint of Max-Planck–Institut für Mathematik, MPI-135 (1999), Bonn.

Подписано в печать 09.06.2022 г.
Тираж 100 экз.

Отпечатано в (название, адрес типографии)