"УТВЕРЖДАЮ"
Директор Федерального
государственного бюджетного
учреждения науки
Физический институт
имени П.Н.Лебедева РАН
дфмн, член-корреспондент РАН
Н. Н. Колачевский

30 августа 2022г.

ОТЗЫВ

Ведущей организации "Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт имени П.Н.Лебедева РАН"
на диссертацию Худавердяна Оганеса Мкртычевича
"Нечетная симплектическая геометрия и нечетные операторы Лапласа в формализме Баталина–Вилковыского",
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

Диссертация О.М. Худавердяна посвящена исследованию геометрии квантования Баталина–Вилковыского, известной как нечетная симплектическая геометрия. Формализм Баталина–Вилковыского является наиболее универсальным современным языком для описания квантовых калибровочный моделей в физике фундаментальных взаимодействий и связанных с ней областях математической физики. Роль этого формализма можно сравнить с ролью гамильтонова и лагранжева формализмов в классической и квантовой механике. Многие актуальные модели (включая топологическиии теории, полевую теорию струн, теории полей высших спинов) с самого начала строятся в терминах формализма Баталина–Вилковыского или его обобщений.

Автором диссертации предложены ключевые структуры нечетной симплектической геометрии. В частности, введены и исследованны два ключевых оператора второго порядка. Один из них — это оператор на функциях, инвариантный относительно нечетных симплектических преобразований, сохраняющих определенную форму объема. В терминах этого оператора формулируется

квантовое мастер-уравнение; если форма объема является координатной формой объема, то этот оператор совпадает со знаменитым оператором Баталина—Вилковыского

$$\Delta F(\Phi,\Phi^*)=\frac{\partial^2 F(\Phi,\Phi^*)}{\partial\Phi^A\partial\Phi^*_A}, \tag{1}$$

где (Φ,Φ^*) — набор полей и антиполей. Второй оператор — это оператор на полуплотностях. В координатах Дарбу он представляется в виде

$$\Delta\left(F(\Phi^A,\Phi^*_A)\sqrt{D(\Phi,\Phi^*)}\right)=\frac{\partial^2 F(\Phi,\Phi^*)}{\partial\Phi^A\partial\Phi^*_A}\sqrt{D(\Phi,\Phi^*)}, \tag{2}$$

где D — произвольная ненулевая плотность. В диссертации доказывается, что это определение корректно, в смысле независимости от выбора координат Дарбу и плотности D. Другими словами, этот оператор, в отличие предыдущего, инвариантен относительно всех нечетных симплектических преобразований. Следует отметить, что оператор (1), определенный на функциях, естественным образом распространяется на случай произвольного нечетного пуассонова супермногообразия. Это приводит к структуре группоида на решениях мастер-уравнения, как обсуждается в главе 4 диссертации. Оператор (2), определенный на полуплотностях, делает явной естественную физическую интерпретацию мастер-уравнения (глава 3 диссертации). Следует также отметить, что оба эти оператора не имеют ближайщих аналогов в обычной симплектической геометрии.

Диссертация О.М. Худавердяна состоит из введения, четырех глав, семи приложений и списка литературы из 67 наименований. Общий объем диссертации составляет 205 страниц.

Во введении приведена история изучаемых в диссертации вопросов, представлены мотивировки поставленных задач и выписан список основных результатов диссертации.

В главе 1 поставлена задача о нахождении инвариантов нечетной симплектической скобки. Показано, что таких инвариантов нет в терминах первых производных. Далее, для каждой невырожденной поверхности коразмерности (1|1) построена инвариантная *полуплотность* A, зависящая от вторых производных поверхности. Но эта полуплотность не приводит к нетривиальным интегральным инвариантам нечетной структуры, поскольку она нечетна ($A^2=0$); явное выражение для этой полуплотности существенным образом содержит оператор (1). На основе проведенного анализа полуплотностей предложена общая процедура построения инвариантной полуплотности на невырожденных поверхностях коразмерности (1|1) в произвольном нечетном симплектическом

супермногообразии, наделенном формой объема. Для координатной формы объема в суперпространстве эта полуплотность совпадает с указанной полуплотностью A и на основании этой конструкции строится пример инвариантной плотности.

В главе 2 рассматривается задача о нахождении векторных полей, сохраняющих четную и нечетную симплектические структуры. Показано, что суперпространство этих векторных полей всегда конечномерно. Затем для произвольного нечетного Пуассонова супермногообразия с заданной формой объема (в том числе для нечетного симплектического супермногообразия с заданной формой объема) строится фундаментальный оператор Баталина–Вилковыского. Исследуется задача о его инвариантности и доказывается утверждение о несуществовании формы объема, инвариантной относительно всех нечетных симплектических преобразований

В главе 3 формализм Баталина–Вилковыского переформулирован в терминах полуплотностей. Построен оператор на полуплотностях и доказана его инвариантность относительно произвольных симплектических преобразований. Полуплотности играют выделенную роль в формализме Баталина—Вилковыского. В частности, каждой паре $(\mathbf{s}, \mathbf{L^{n-k|k}})$, где $\mathbf{s}$ — полуплотность а $L^{n-k|k}$ — лагранжева поверхность сигнатуры $n-k$, соответствует плотность, определенная на $L^{n-k|k}$, что дает инвариантное определение интеграла от полуплотности по гиперповерхности, задаваемой условиями калибровки. Тем самым, автор показывает, что на формальном уровне как квантовое мастер-уравнение, так и коннтинуальный интеграл в формализме Баталина–Вилковыского требуют для своего определения только невырожденной симплектической структуры, а введение вспомогательной формы объемя является излишним. Этот результат представляется естественным с физической тоички зрения, поскольку оператор Баталина–Вилковыского можно понимать как квантование соответствующего БРСТ-заряда, который естественным образом определен именно на полуплотностях (а в геометрической формулировке квантовой теории волновые функции являются полуплотностями на конфигурационном пространстве).

Стандартными примерами четных симплектических многообразий являются кокасательные расслоения T^*M, которые, однако, далеко не исчерпывают симплектические многообразия. Если L — лагранжева поверхность в четном симплектическом многообразии M, то лишь локально (в трубчатой окрестности лагранжевой поверхности) можно установить симплектоморфизм между кокасательным расслоением T^*L и этим симплектическим многообразием M. Автором показывается, что в нечетной симплектической геометрии соответствующее утверждение верно глобально, если L — четная лагранжева поверхность (т.е. поверхность сигнатуры n в $(n|n)$-мерном нечетном симплектическом

супермногообразии E). Тем самым нечетные симплектичесие многообразия исчерпываются нечетными кокасательными расслоениями. В частности, нечетная симплектическая форма всегда точна.

В главе 4 на нечетном пуассоновом супермногообразии с пуассоновым бивектором $\mathfrak{E}$ рассматривается класс $\mathcal{F}_{\mathfrak{E}}$ самосопряженных операторов с главным символом, определяемым тензором Пуассона $\mathfrak{E}$. Используя связь этих операторов с операторами (1), автор диссертации вводит понятие *модулярного класса нечетного пуассонова многообразия* и приводит пример нечетного пуассонова многообразия, имеющего нетривиальный модулярный класс. Здесь автором также предложена конструкция группоида, названная им группоидом Баталина—Вилковыского.

Диссертационная работа О.М. Худавердяна представляет собой квалифицированно написанную математическую работу, все ее утверждения снабжены полными и подробными доказательствами. Тем не менее, к диссертации можно высказать следующее замечание. Конструкции, предложенные автором, являются конструкциями конечномерной симплектической геометрии, в то время как в теории поля соответствующие пространства бесконечномерны. Однако проблема определения оператора Баталина–Вилковыского (или его аналога) в бесконечномерном случае, отвечающем локальной калибровочной теории поля, остается открытой даже на уровне координатного рассмотрения. Тем самым, данное замечание не может снизить высокую оценку представленной работы и полученных в ней результатов.

Заключение. В диссертации О.М. Худавердяна решена сложная задача: построение геометрически инвариантной версии формализма Баталина—Вилковыского, не требующей искуственного введения формы объема. Такая формулировка представляется естественной и глубокой с физической точки зрения.

Диссертация является законченным научным исследованием в актуальной области геометрии и топологии и математической физики. Результаты диссертации могут быть рекомендованы для использования в научных коллективах, занимающихся указанными вопросами. К их числу относятся Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, НИУ "Высшая школа экономики" и Томский государственный университет.

Полученные результаты и методы представленной диссертации являются новыми и актуальными. Основные положения диссертации содержатся в 16 опубликованных работах автора в ведущих рецензируемых изданиях, из них 14 в журналах, рекомендованных ВАК. Эти работы прошли апробацию на многих

авторитетных отечественных и зарубежных конференциях и семинарах. Автореферат отражает содержание диссертации правильно и полно.

На основании вышеизложенного следует заключить, что диссертация О.М. Худавердяна "Нечетная симплектическая геометрия и нечетные операторы Лапласа в формализме Баталина—Вилковыского" является завершенным научным исследованием и полностью удовлетворяет требованиям ВАК и паспорту специальности 01.01.04 — геометрия и топология, а ее автор Оганес Мкртычевич Худавердян заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук.

Отзыв составил главный научный сотрудник
лаборатории теории фундаментальных взаимодействий
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Физический институт имени П.Н.Лебедева РАН
доктор физ.-мат. наук А. М. Семихатов

Тел: +7(499) 132-67-20
Email: asemikha@lpi.ru

Отзыв обсужден и одобрен на заседании Ученого совета Отделения теоретической физики им. И.Е. Тамма Федерального государственного бюджетного учреждения науки Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН.

Ученый секретарь
Отделения теоретической физики имени И.Е.Тамма
доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник А. А. Полежаев