Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

*На правах рукописи*

*УДК* 517.982.256

515.124.4

Бурушева Лейла Шариповна

# Метрические свойства кратчайших сетей в банаховых пространствах

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

профессор РАН П.А.Бородин

Москва 2022

## Содержание

**Введение** ..... 3

**Глава I. Банаховы пространства, в которых длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками** ..... 17

§1. Вспомогательные результаты ..... 18

§2. Случай нестрого выпуклого пространства ..... 21

§3. Случай строго выпуклого пространства ..... 25

**Глава II. Суботношение Штейнера** ..... 32

§1. Минимальное $n$-точечное суботношение Штейнера ..... 32

§2. Банахово пространство с суботношением Штейнера 1/2 ..... 40

§3. Задача оценки суботношения при фиксированной размерности ..... 41

**Глава III. Нелипшицевость метрической проекции** ..... 44

**Список литературы** ..... 58

# Введение

Диссертация содержит результаты на стыке метрической теории кратчайших сетей и геометрии банаховых пространств: описываются банаховы пространства, в которых длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками; вычислено минимально возможное суботношение Штейнера для $n$-точечных множеств в банаховых пространствах; построено банахово пространство с минимально возможным суботношением Штейнера; построено трехмерное строго выпуклое нормированное пространство, в котором метрическая проекция на каждую прямую нелипшицева.

Пусть $X$ — банахово пространство и $M$ — его конечное подмножество. Сетью (или графом) называется любое конечное объединение отрезков в $X$. Говорят, что сеть $\Gamma$ соединяет (или затягивает) множество $M$, если она связна и содержит все точки множества $M$. Длиной $|\Gamma|$ сети $\Gamma$ называется сумма длин всех ее ребер. Число

$$|\mathrm{smt}|(M,X) = \inf\{|\Gamma| : \text{ сеть } \Gamma \text{ соединяет } M \text{ в } X\}$$

называется *длиной кратчайшей сети* для $M$ в $X$, а

$$\mathrm{smt}(M,X) = \{\Gamma : \Gamma\text{— сеть в } X, \text{затягивающая } M, |\Gamma| = |\mathrm{smt}|(M,X)\}$$

есть (возможно, пустое) множество *кратчайших сетей* для $M$ в $X$.

Кратчайшие сети определяются и в произвольных метрических пространствах (см. [22]).

Теория кратчайших сетей (более общо, экстремальных сетей) составляет большую область метрической геометрии. Кратчайшими сетями интересовался Гаусс, в переписке [40] с Шумахером ставивший задачу о постройке оптимальной системы дорог между четырьмя городами. Ярник и Кесслер [47] в общем виде сформулировали проблему нахождения кратчайшей сети,

или связного графа минимальной длины, соединяющей данное множество точек плоскости. В известной книге Куранта и Роббинса [24] эта задача названа проблемой Штейнера. В настоящее время теория экстремальных сетей в метрических пространствах развивается в нашей стране благодаря исследованиям, в основном, А.О. Иванова, А.А. Тужилина и их учеников. Наиболее полно теория кратчайших сетей изложена в работах [37], [43], [46], [22].

Всякая кратчайшая сеть является деревом, поскольку если в сети есть циклы, то можно удалить некоторые ребра так, что сеть останется связной, а ее длина уменьшится. Нетрудно показать, что среди кратчайших сетей, затягивающих в $X$ заданное $n$-точечное множество $M_n$, можно выбрать сеть, которая является деревом с не более чем $n-2$ дополнительными (отличными от точек из $M_n$) вершинами, причем каждая из этих дополнительных вершин имеет степень не меньше 3 (см., например, [37, Глава 2]).

В частности, если $X$ — банахово пространство и множество $M \subset X$ состоит из трех точек $x_1, x_2, x_3$, то $|\mathrm{smt}|(M, X)$ совпадает с величиной

$$|\mathrm{st}|(x_1, x_2, x_3) = \inf_{s \in X} \sum_{i=1}^{3} \|x_i - s\|,$$

которая также называется длиной *дерева Штейнера* для точек $x_1, x_2, x_3$, а сами кратчайшие сети реализуются в виде графов, состоящих из отрезков $[x_i, s]$, где точка $s$ принадлежит множеству

$$\mathrm{st}(x_1, x_2, x_3) = \left\{ s : \sum_{i=1}^{3} \|x_i - s\| = |\mathrm{st}|(x_1, x_2, x_3) \right\}$$

точек Штейнера (точек Ферма) для точек $x_1, x_2, x_3$.

Для большего количества точек множество точек Штейнера $\mathrm{st}(x_1, \ldots, x_n)$ определяется аналогично: в предыдущем определении вместо набора точек $x_1, x_2, x_3$ пишется $x_1, \ldots, x_n$ и суммируется по индексам от 1 до $n$. Нетрудно показать, что в конечномерном банаховом пространстве это множество не

пусто, выпукло и компактно для набора $\{x_1, \ldots, x_n\}$. В бесконечномерном пространстве точка Штейнера может не существовать уже и для трех точек (то есть не существует и кратчайшая сеть). Первый пример такой тройки построил А.Л.Гаркави [16]. Имеются и другие примеры [57], [35], [54], [12]. Более того, как показал Л. Веселы [57], во всяком нерефлексивном банаховом пространстве $X$ можно выбрать три точки и эквивалентную норму в $X$, в которой у этой тройки точек не существует точки Штейнера. В.М. Кадец [49], не зная о работе [57], доказал этот результат по-другому. Н.П. Стрелкова [8] построила пример несуществования кратчайшей сети у $n$-точечного множества в банаховом пространстве при произвольном $n \geq 3$.

Будем говорить, что банахово пространство *реализует кратчайшую сеть* для своего конечного подмножества $M$, если $\mathrm{smt}(M, X)$ не пусто. Для трехточечных подмножеств $M = \{x_1, x_2, x_3\}$ в банаховом пространстве $X$ это означает, что множество $\mathrm{st}(x_1, x_2, x_3)$ точек Штейнера не пусто. Б.Б. Беднов [8] доказал, что во всяком банаховом пространстве, 1-дополняемом в своем втором сопряженном (в частности, во всяком рефлексивном пространстве, всяком конечномерном пространстве, а также во всяком пространстве $L_1$) кратчайшая сеть существует для всякого конечного множества.

С работы А.О. Иванова и А.А. Тужилина [21] началось новое направление теории кратчайших сетей, связанное с введенным ими понятием *минимального заполнения* конечного метрического пространства.

Пусть $(M, \rho)$ — конечное метрическое пространство. Длиной минимального заполнения пространства $M$ называется число

$$|\mathrm{mf}|(M) = \inf\{|\mathrm{smt}|(\varphi(M), Y) : \quad \varphi : M \to Y\}, \tag{0.1}$$

где инфимум берется по всем изометрическим вложениям $\varphi$ пространства $M$ в банаховы пространства $Y$.

Отметим, что в [21] при определении минимального заполнения рассматривались изометрические вложения во всевозможные метрические пространства. Как уже отмечалось, кратчайшую сеть можно определить в произвольном метрическом пространстве. Это определение довольно громоздко (в общем метрическом пространстве нет никаких отрезков), и мы не используем его в данной работе. Что касается приведенного определения длины минимального заполнения, то оно совпадает с оригинальным, поскольку всякое метрическое пространство изометрично вкладывается в некоторое банахово пространство.

Для трехточечного пространства $M_3 = (\{x_1, x_2, x_3\}, \rho)$ известно (см. [21]), что

$$|\mathrm{mf}|(M_3) = \frac{\rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_1, x_3)}{2}. \tag{0.2}$$

Для четырехточечного пространства $M_4 = (\{x_1, x_2, x_3\}, \rho)$ длина минимального заполнения вычисляется (см. [21]) по формуле

$$|\mathrm{mf}|(M_4) = \frac{P(M_4) + p(M_4)}{2},$$

где $P(M_4)$ и $p(M_4)$ — максимальная и минимальная из сумм $\rho(x_1, x_2) + \rho(x_3, x_4)$, $\rho(x_1, x_3) + \rho(x_2, x_4)$ и $\rho(x_2, x_3) + \rho(x_1, x_4)$. Для произвольных конечных метрических пространств величина $|\mathrm{mf}|(M)$ может быть вычислена по некоторой переборной формуле, которая получена А.Ю. Ереминым [18]. Для пятиточечных множеств эта формула упрощена в [5].

Определение длины минимального заполнения не фиксирует топологию сети. В то же время можно рассматривать сети с какой-то заданной топологией, искать среди них кратчайшие и определять соответствующие минимальные заполнения по формуле типа (0.1). Например, Б.Б.Беднов [4] нашел длину минимального заполнения для сетей типа звезды (все ребра сети имеют одну общую вершину, точки $\varphi(M)$ из формулы типа (0.1) соединяются

со своей точкой Штейнера). Как оказалось, это было сделано ранее в работе [59], но в других терминах.

Говорят, что банахово пространство $X$ *реализует минимальное заполнение* для своего конечного подмножества $M$, если $|\mathrm{smt}|(M, X) = |\mathrm{mf}|(M)$ и множество $\mathrm{smt}(M, X)$ непусто.

Пусть $(M, \rho)$ — конечное метрическое пространство. Множеством $\mathrm{mf}(M)$ назовем множество кратчайших сетей из $\mathrm{smt}(\varphi(M), Y)$ в банаховых пространствах $Y$, которые реализуют минимальное заполнение для образов $\varphi(M)$ при изометрическом вложении $M$.

В работе [6] было доказано, что банахово пространство реализует минимальное заполнение для всякого своего конечного подмножества тогда и только тогда, когда оно *предуальнo к* $L_1$. Напомним определение и свойства этих пространств.

Пусть $n \geq 3$ — натуральное число. Говорят, что банахово пространство $X$ обладает свойством n.2.I.P. (n.2 Intersection Property), если всякие $n$ попарно пересекающихся замкнутых шаров в $X$ имеют непустое пересечение.

Теорема А. (Гротендик [44], Линденштраусс [52], см. также [51]). *Для действительного банахова пространства $X$ следующие свойства эквивалентны:*

(1) *$X$ обладает свойством n.2.I.P. для всякого $n \geq 3$;*

(2) *$X$ обладает свойством 4.2.I.P.;*

(3) *$X^*$ изометрически изоморфно $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$ для некоторого множества $E$, некоторой $\sigma$-алгебры $\Sigma$ подмножеств $E$ и некоторой $\sigma$-аддитивной меры $\mu$, определенной на $\Sigma$;*

(4) *$X^{**}$ 1-дополняемо в любом содержащем его банаховом пространстве $Z$ (то есть существует линейный проектор $P : Z \to X^{**}$ нормы 1).*

Пространства, удовлетворяющие свойствам из теоремы А, называются

*предуальными к* $L_1$ или *пространствами Линденштраусса.* К этому классу пространств относятся все пространства $C(Q)$ действительнозначных функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте $Q$, пространство $c_0$ сходящихся к нулю последовательностей, пространство $\ell_\infty$ ограниченных последовательностей с равномерной нормой и многие другие. Пространство конечной размерности $n$ предуально к $L_1$ тогда и только тогда, когда оно изометрически изоморфно $\ell_\infty^n$.

Результат из [6], в частности, означает, что длина кратчайшей сети для конечного множества $M$ в предуальном к $L_1$ пространстве зависит только от попарных расстояний между точками множества $M$. Это свойство кратчайших сетей имеет место и в гильбертовом (евклидовом) пространстве $H$, поскольку всякие два набора точек в $H$ с одинаковыми попарными расстояниями получаются друг из друга изометрией всего пространства $H$. В связи с этим возникает вопрос, поставленный в [6]: в каких банаховых пространствах для всякого натурального $n$ величина $|\mathrm{smt}|(\{x_1,\dots,x_n\},X)$ зависит только от попарных расстояний между точками $x_k \in X$ $(k=1,\dots,n)$?

В первой главе диссертации показано, что кроме гильбертовых и предуальных к $L_1$ пространств таких банаховых пространств больше нет.

Отметим, что есть и другие характеризации банаховых пространств в терминах кратчайших сетей. Например, как показано в [32], действительное банахово пространство $X$ размерности не меньше 3 является гильбертовым тогда и только тогда, когда выпуклая оболочка любых трёх точек из $X$ содержит их точку Штейнера. Доказана [6] также характеризация пространств $L_1$: это в точности такие банаховы пространства $X$, что для любого трехточечного множества $M_3 \subset X$ выполнено $|\mathrm{smt}|(M_3,X) = |\mathrm{mf}|(M_3)$ и $\mathrm{smt}(M_3,X)$ состоит из единственной сети. В связи с этим отметим, что пространства $L_1$ обладают свойством 3.2.I.P., но, вообще говоря, не являются предуальными

к $L_1$ (ср. с теоремой А).

Для всякого конечного подмножества $M$ банахова пространства $X$ выполнено очевидное неравенство $|\mathrm{smt}|(M,X) \geq |\mathrm{mf}|(M)$. Возникает вопрос: во сколько раз величина $|\mathrm{smt}|(M,X)$ может быть больше величины $|\mathrm{mf}|(M)$ для какого-либо конечного множества $M$ в банаховом пространстве $X$? Как уже отмечалось, в [6] показано, что равенство $|\mathrm{smt}|(M,X) = |\mathrm{mf}|(M)$ справедливо для каждого конечного подмножества $M \subset X$ тогда и только тогда, когда $X$ является пространством, предуальным к $L_1$. В конечномерном случае это пространства, изометрически изоморфные $\ell_\infty^n$.

Для произвольного метрического пространства $X$ А.О. Иванов и А.А.Тужилин [21] ввели *суботношение Штейнера*

$$\mathrm{ssr}(X) = \inf\left\{\frac{|\mathrm{mf}|(M)}{|\mathrm{smt}|(M,X)} : M \subset X\right\},$$

где инфимум берется по всем конечным и неодноточечным множествам $M$. В работе [26] показано, что для всякого метрического пространства $X$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} \leq \mathrm{ssr}(X) \leq 1, \tag{0.3}$$

и построены примеры метрических пространств, удовлетворяющих равенству $\mathrm{ssr}(X) = 1/2$. Кроме того, в [26] введено $n$-точечное суботношение Штейнера

$$\mathrm{ssr}_n(X) = \inf\left\{\frac{|\mathrm{mf}|(M_n)}{|\mathrm{smt}|(M_n,X)} : M - n\text{-точечное подмножество в } X\right\},$$

отмечено неравенство

$$\mathrm{ssr}_n(X) \geq \frac{n}{2(n-1)} \quad n = 2,3,\ldots \tag{0.4}$$

и приведен пример метрического пространства $X$, для которого это неравенство обращается в равенство.

Во второй главе диссертации оценки (0.3) и (0.4) уточняются для банаховых пространств. Именно, доказана точность оценки (0.4) для банаховых пространств и построен пример банахова пространства $X$ с $\mathrm{ssr}(X) = 1/2$.

Добавим, что помимо суботношения Штейнера имеется и понятие отношения Штейнера, определяемого как инфимум отношений длины кратчайшей сети множества $M$ к длине минимального обхода точек множества $M$. Отношения Штейнера вычисляются и оцениваются в книгах [38] и [22].

При доказательстве результатов первой и второй глав используются понятия и методы геометрии банаховых пространств и геометрической теории приближений. Ключевую роль играет понятие метрической проекции на подпространство банахова пространства. Напомним соответствующие определения.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, $Y$ — его подмножество,

$$\rho(x, Y) = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}$$

— расстояние от элемента $x \in X$ до $Y$,

$$P_Y(x) = \{y \in Y : \|x - y\| = \rho(x, Y)\}$$

— множество ближайших к $x$ элементов из $Y$. Множество $Y$ называется *чебышевским*, если для каждого $x \in X$ метрическая проекция $P_Y(x)$ состоит ровно из одного элемента.

Исследование свойств метрической проекции $P_Y$ как отображения и взаимосвязь этих свойств со структурными свойствами множества $Y$ составляют предмет так называемой геометрической теории приближений, берущей свое начало в работах П.Л. Чебышева [29], А. Хаара [45], А.Н. Колмогорова [23], Н.В. Ефимова и С.Б.Стечкина [19], [20]. В настоящее время геометрическая теория приближений — обширная область на стыке теории приближений и

геометрии банаховых пространств, содержащая множество глубоких результатов и давно стоящих нерешенных задач. Наиболее полно геометрическая теория приближений отражена в обзорах [15], [14], [56], [3], [1], [2].

Кратчайшая сеть, затягивающая точки $x_1, \ldots, x_n$ в банаховом пространстве $X$, рассматривается нами как элемент метрической проекции некоторой точки, порождаемой набором $x_1, \ldots, x_n$ в специальном банаховом пространстве — произведении нескольких копий исходного пространства $X$, на специальное подпространство этого пространства. Например, кратчайшей сети для трех точек $x_1, x_2, x_3$ в $X$, то есть точке Штейнера $s \in \mathrm{st}(x_1, x_2, x_3)$, соответсвует элемент $(s, s, s) \in P_D(x_1, x_2, x_3)$ метрической проекции пространства $X \times X \times X$ с нормой $\|(a, b, c)\| = \|a\|_X + \|b\|_X + \|c\|_X$ на диагональное подпространство $D = \{(d, d, d) : d \in X\}$. Это представление о кратчайших сетях существенно используется в доказательствах теорем первой и второй глав диссертации.

В третьей главе исследуется классический вопрос о липшицевости метрической проекции на линейное подпространство банахова пространства. Оператор метрического проектирования на чебышевское подпространство бывает разрывным [56], [36], бывает непрерывным, но нелипшицевым (например, оператор метрического проектирования на подпространство многочленов степени не выше $n \geq 2$ в пространстве $C[0, 1]$ — см., напр., [28]), и очень редко бывает линейным [55]. В случае нечебышевских подпространств исследуется возможность выделить хорошие (линейные, липшицевы, непрерывные) выборки из метрической проекции. В частности, исследовались липшицевы выборки из отображения Штейнера st в различных банаховых пространствах (см. [7] и библиографию в этой работе).

Более конкретно, нас интересует вопрос: во всяком ли конечномерном нормированном пространстве размерности не меньше трех найдется чебы-

шевская прямая с липшицевой метрической проекцией?

Приведем краткую историю этого вопроса. Во всяком конечномерном пространстве $X$ на сфере $S(X)$ есть достижимые точки, то есть такие точки $p$, что некоторая опорная к $S(X)$ гиперплоскость $\Pi(p)$ пересекает $S(X)$ только в точке $p$. Подпространства коразмерности 1, параллельные таким гиперплоскостям $\Pi(p)$, являются чебышевскими с линейной метрической проекцией. Задача о существовании нетривиальных чебышевских подпространств коразмерности $\geq 2$, поставленная С.Б. Стечкиным, была решена не так давно. В работах [34] и [53] доказано, что для всякого выпуклого тела в трехмерном евклидовом пространстве совокупность концов единичных векторов с началом в нуле и параллельных ненулевым отрезкам, лежащим на поверхности этого тела, образует множество сигма-конечной линейной меры Хаусдорфа на двумерной евклидовой единичной сфере, в частности, имеет двумерную меру нуль. Если выпуклое тело — это единичный шар какого-либо банахова пространства, то прямая, проходящая через невырожденный отрезок, лежащий на границе шара, не является чебышевской прямой, поскольку множество ближайших к нулю элементов этой прямой содержит целый отрезок. Из упомянутых результатов Мак-Минна и Безиковича [34, 53] следует, что двумерная мера концов единичных векторов, параллельных не чебышевским прямым, равна нулю. Следовательно, концы единичных векторов, порождающих чебышевские прямые, образуют множество полной меры на сфере. Таким образом, чебышевских прямых во всяком трехмерном банаховом пространстве «много». Позже В.А.Залгаллер в [17] обобщил этот результат, доказав, что в определенном смысле почти все $k$-мерные подпространства в $n$-мерном пространстве являются чебышевскими ($1 \leq k \leq n-1$).

Пусть $Y$ — чебышевская прямая в банаховом пространстве $X$. В случае конечномерного $X$ оператор метрического проектирования непрерывен.

Р.Холмс и Б.Крипке [42] установили, что метрическая проекция на чебышевское подпространство пространства $X$ липшицева тогда и только тогда, когда она равномерно непрерывна на $X$. Равномерная непрерывность метрической проекции изучалась В.И.Бердышевым [9]. В статье [42] также построен пример строго выпуклого трехмерного банахова пространства и прямой $Y$ в нем, для которых оператор $P_Y$ нелипшицев. Но поскольку чебышевские прямые в конечномерном пространстве $X$ — это почти все прямые в $X$ [17], то интересен вопрос: существует ли конечномерное банахово пространство $X$, в котором оператор метрического проектирования на любую чебышевскую прямую нелипшицев? В третьей главе построен пример такого банахова пространства.

**Цель работы.** Исследование метрических свойств кратчайших сетей в банаховых пространствах, связанных с понятием минимального заполнения, а также исследование свойств метрической проекции на подпространства банаховых пространств.

**Научная новизна.** В диссертация получены следующие новые результаты.

1) Описаны банаховы пространства, в которых длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками.

2) Найдены точные оценки снизу суботношения Штейнера для $n$-точечных множеств в банаховых пространствах.

3) Построен пример банахова пространства с минимально возможным суботношением Штейнера.

4) Построен пример трехмерного строго выпуклого нормированного пространства, в котором метрическая проекция на всякую прямую нелипшицева.

**Методы исследования.** В работе используются различные методы функционального анализа, метрической геометрии, выпуклой геометрии, ли-

нейной алгебры, теории приближений, теории меры.

**Теоретическая и практическая ценность.** Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории кратчайших сетей, в геометрии банаховых пространств, в геометрической теории приближений, теории экстремальных задач.

**Апробация диссертации.** Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинаре «Геометрическая теория приближений» под руководством П.А. Бородина (неоднократно), на семинаре по теории функций действительного переменного под руководством Б.С.Кашина, С.В. Конягина, Б.И. Голубова и М.И. Дьяченко (2018 г.), на школе-конференции С. Б. Стечкина по теории функций (Миасс, 2017 г.), на Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2018 г.), на Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2019 г.), на конференция «Теория приближений и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения С.Б. Стечкина (Москва, 2021 г.).

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в трех работах автора в журналах из баз данных Web of Science и Scopus, а также представлены в тезисах нескольких международных конференций. Список этих работ приведен в конце диссертации.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 64 наименований. Общий объем диссертации — 64 страницы. В каждой главе принята сквозная нумерация теорем, лемм, примеров, формул и рисунков.

**Краткое содержание диссертации.**

В первой главе диссертации описываются банаховы пространства $X$, в которых длина кратчайшей сети, затягивающей конечное $n$-точечное множество $M \subset X$, зависит только от попарных расстояний между точками $M$. При этом соответствующие классы пространств $X$ выделяются для $n = 3, 4$ в зависимости от наличия отрезков на единичной сфере $S(X)$.

Напомним, что банахово пространство $X$ называется *строго выпуклым*, если $S(X)$ не содержит невырожденных отрезков.

Теорема 1.1. *Пусть действительное банахово пространство $X$ реализует кратчайшие сети для всех своих конечных подмножеств.*

(1) *Если $X$ не строго выпуклое пространство, то длина кратчайшей сети для всяких трех его точек зависит только от попарных расстояний между этими точками тогда и только тогда, когда $X$ обладает свойством* 3.2.*I.P.*

(2) *Если $X$ не строго выпуклое пространство, то длина кратчайшей сети для всяких четырех (а значит, и для трех) его точек зависит только от попарных расстояний между этими точками тогда и только тогда, когда $X$ предуально к $L_1$.*

(3) *Если $X$ строго выпуклое пространство, то длина кратчайшей сети для всяких трех его точек зависит только от попарных расстояний между этими точкам тогда и только тогда, когда $X$ гильбертово.*

Следствие 1.1.1. *В действительном банаховом пространстве $X$, реализующем кратчайшие сети для всех своих конечных подмножеств, длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками тогда и только тогда, когда $X$ либо предуально к $L_1$, либо гильбертово.*

Следствие 1.1.2. *В $n$-мерном действительном банаховом простран-*

*стве $X$ длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками тогда и только тогда, когда $X$ изоморфно либо $\ell_2^n$, либо $\ell_\infty^n$.*

Во второй главе диссертации найден минимум суботношения Штейнера для $n$-точечных множеств в банаховых пространствах и построен пример бесконечномерного банахова пространства с минимально возможным суботношением Штейнера.

Теорема 2.1. *Для всякого $n = 2, 3, \ldots$ существует такое банахово пространство $X_{n-1}$ размерности $n-1$, что*

$$\operatorname{ssr}_n(X_{n-1}) = \inf_X \operatorname{ssr}_n(X) = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Теорема 2.2. *Существует банахово пространство с суботношением Штейнера, равным* $1/2$.

В третьей главе диссертации построено банахово пространство с нелипшицевой метрической проекцией на всякую прямую.

Теорема 3.1. *Существует строго выпуклое трехмерное банахово пространство, в котором оператор метрического проектирования на любую прямую (поскольку пространство строго выпуклое, все прямые являются чебышевскими) не является липшицевым.*

Автор выражает благодарность своему научному руководителю П.А. Бородину за постановку задач, их обсуждение и поддержку в работе.

# Глава I. Банаховы пространства, в которых длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками

В этой главе мы докажем следующие результаты.

Теорема 1.1. *Пусть действительное банахово пространство $X$ реализует кратчайшие сети для всех своих конечных подмножеств.*

(1) *Если $X$ не строго выпуклое пространство, то длина кратчайшей сети для всяких трех его точек зависит только от попарных расстояний между этими точками тогда и только тогда, когда $X$ обладает свойством* 3.2.*I.P.*

(2) *Если $X$ не строго выпуклое пространство, то длина кратчайшей сети для всяких четырех (а значит, и для трех) его точек зависит только от попарных расстояний между этими точками тогда и только тогда, когда $X$ предуально к $L_1$.*

(3) *Если $X$ строго выпуклое пространство, то длина кратчайшей сети для всяких трех его точек зависит только от попарных расстояний между этими точкам тогда и только тогда, когда $X$ гильбертово.*

Отметим, что это не первое свойство, за которое отвечает класс предуальных к $L_1$ и гильбертовых пространств. В работе [33, Theorem 2.11] было дано следующее достаточное условие: если в действительном банаховом пространстве $X$ всякое липшицево отображение $M \to X$ любого подмножества $M \subset X$ продолжается на всё пространство с той же константой Липшица, то $X$ либо предуально к $L_1$, либо гильбертово.

Следствие 1.1.1. *В действительном банаховом пространстве $X$, реализующем кратчайшие сети для всех своих конечных подмножеств, длина*

*кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками тогда и только тогда, когда $X$ либо предуально к $L_1$, либо гильбертово.*

Следствие 1.1.2. *В $n$-мерном действительном банаховом пространстве $X$ длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками тогда и только тогда, когда $X$ изоморфно либо $\ell_2^n$, либо $\ell_\infty^n$.*

## §1. Вспомогательные результаты

Для всякого банахова пространства $X$ ниже через $S(X)$ обозначаем его единичную сферу.

Для элемента $x \in X$, $x \neq 0$, положим

$$J(x) = \{f \in S(X^*) : f(x) = \|x\|\},$$

$$\langle x \rangle = \{\lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Лемма A. ([27]) *В произвольном банаховом пространстве $X$ точка $s$ является точкой Штейнера тройки $x_1, x_2, x_3$ тогда и только тогда, когда найдутся такие функционалы $f_1, f_2, f_3 \in X^*$, что*

1) $\|f_k\| \leq 1$,

2) $f_1 + f_2 + f_3 = 0$,

3) $f_k(x_k - s) = \|x_k - s\|, k = 1, 2, 3$.

Лемма B. (см., например, [39, гл.1, п.7]) *Пусть $X$ банахово пространство, $a, b, c \in X$. Функция $p(t) = \|a-(tb+(1-t)c)\|$, $t \in \mathbb{R}$, расстояния от точки $a$ до точек прямой $bc$ выпукла, и ее любой локальный минимум является глобальным минимумом.*

Для всякого $x \in X$, $x \neq 0$, положим

$$V(x) := \{y \in X : y \neq 0,\ \exists f_x \in J(x), \exists f_y \in J(y) : \|f_x + f_y\| \leq 1\}.$$

Отметим, что включения $y \in V(x)$ и $x \in V(y)$ равносильны.

Положим $R_b(x) := \{\|x - y\| : \|y\| = b, y \in V(x)\}$.

Лемма 1.1. *Пусть в банаховом пространстве $X$ длина кратчайшей сети для всяких трех точек зависит только от попарных расстояний между ними, $x, y \in X$, $x \neq 0$ и $\|y\| = b > 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $0 \in \mathrm{st}(x, 0, y)$ ($|\mathrm{st}|(x, 0, y) = \|x\| + b$);

2) $y \in V(x)$;

3) $\|x - y\| \in R_b(x)$.

Доказательство. Равносильность 1)$\Leftrightarrow$ 2) следует из леммы A и определения $V(x)$.

Импликация 2)$\Rightarrow$ 3) верна по определению $R_b(x)$.

3)$\Rightarrow$ 1). Рассмотрим точку $y' \in V(x)$, $\|y'\| = b$, для которой $\|x - y'\| = \|x - y\|$. Длина дерева Штейнера для точек $x, 0, y'$ равна $\|x\| + b$ (следует из уже доказанной равносильности утверждений 1) и 2)). Треугольники $x0y'$ и $x0y$ имеют равные стороны. Следовательно, по условию длины их кратчайших сетей тоже равны, то есть $|\mathrm{st}|(x, 0, y) = \|x\| + b$, и $0 \in \mathrm{st}(x, 0, y)$.

Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть в банаховом пространстве $X$ длина кратчайшей сети для всяких трех точек зависит только от попарных расстояний между ними. Пусть $x, y \in X$, $\|x\| = a > 0$, $\|y\| = b > 0$. Тогда верны следующие утверждения:*

1) *множество $R_b(x)$ содержит свою точную нижнюю грань.*

2) *$R_b(x) \equiv R_a(y)$, и оба этих множества зависят только от $a$ и $b$.*

Доказательство. 1) Пусть $c_n \in R_b(x)$ и $c_n \to \inf R_b(x)$, $n \to \infty$. Так как числа $\|x\|$, $c_n$ и $b$ по определению множества $R_b(x)$ являются длинами сторон какого-то треугольника, то для этих величин выполняются нера-

венства треугольника. Поэтому в произвольном двумерном подпространстве пространства $X$, содержащем точку $x$, можно взять такую последовательность точек $\{y_n\}$ с нормами, равными $b$, что $\|x - y_n\| = c_n$. Поскольку подпространство конечномерно, то найдется предельная точка $y_0$ подпоследовательности $\{y_n\}$. Тогда $\|y_0\| = b$ и $\|x - y_0\| = \inf R_b(x)$. По лемме 1.1 $|\mathrm{st}|(x, 0, y_n) = \|x\| + b$. Длина дерева Штейнера непрерывно зависит от точек, следовательно, $|\mathrm{st}|(x, 0, y_0) = \|x\| + b$, откуда по лемме 1.1 получаем, что $y_0 \in V(x)$, то есть $\|x - y_0\| = \min R_b(x)$.

2) Возьмем такую точку $x' \in V(y)$, что $\|x'\| = a$ и $\|x' - y\| \in R_a(y)$. По лемме 1.1 $|\mathrm{st}|(x', 0, y) = a + b$. Так как числа $a, b, \|x' - y\|$ являются сторонами треугольника $x'0y$, то для этих величин выполняются неравенства треугольника. Поэтому существует такая точка $y'$, что $\|y'\| = b$ и $\|x - y'\| = \|x' - y\|$. Из равенств сторон треугольников $x'0y$ и $x0y'$ по условию получаем, что $|\mathrm{st}|(x, 0, y') = |\mathrm{st}|(x', 0, y) = a + b$. По лемме 1.1 последнее равносильно $\|x - y'\| \in R_b(x)$, значит, и $\|x' - y\| \in R_b(x)$. Поскольку $\|x' - y\|$ может принимать любое значение в $R_a(y)$, то $R_b(x) \subset R_a(y)$. Аналогично доказывается обратное включение. Следовательно, $R_b(x) = R_a(y)$. Из этого равенства множеств в силу произвольных $x$ и $y$ с условиями $\|x\| = a$ и $\|y\| = b$ получаем, что эти множества зависят только от $a$ и $b$.

Лемма доказана.

Пусть в банаховом пространстве $X$ длина кратчайшей сети для всяких трех точек зависит только от попарных расстояний между ними. Пусть $x, y \in X$, $\|x\| = a, \|y\| = b$. Положим $R(a, b) := \min R_b(x) = \min R_a(y)$. По лемме 1.2 функция $R(a, b)$ является симметрической и зависит только от $a$ и $b$.

## §2. Случай нестрого выпуклого пространства

1) Достаточность в утверждении (1) следует из теоремы 1 статьи [6], часть этой теоремы мы запишем в виде леммы:

Лемма С. *Пусть $X$ — действительное банахово пространство. Тогда $X$ реализует минимальное заполнение для всякой тройки своих точек тогда и только тогда, когда $X$ обладает свойством 3.2.I.P.*

Докажем необходимость в (1). Для этого покажем, что в пространстве $X$ реализуется минимальное заполнение для всякой тройки точек. Тогда по лемме С пространство $X$ обладает свойством 3.2.I.P.

Пусть $S_a(X_2)$ есть двумерное сечение сферы радиуса $a$ с центром в 0, содержащее отрезок, $X_2$ — соответствующее двумерное подпространство. Пусть $x, x'$ — концы этого отрезка. Все следующие точки и их окрестности берутся в подпространстве $X_2$. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ на интервале $(x, x')$, сходящуюся к точке $x$. Для каждой точки $x_n$ построим в той замкнутой полуплоскости относительно прямой $\langle x_n\rangle$, которая содержит точку $x'$, такую точку $y_n$ с нормой равной $b \leq a$, что

$$\|x_n - y_n\| = R(a, b). \tag{1.5}$$

Такая точка $y_n$ существует, поскольку из определения величины $R(a, b)$ следует, что для чисел $a, b$ и $R(a, b)$ выполняются неравенства треугольника. По лемме 1.1 имеем $x_n \in V(y_n)$. Поскольку $\|y_n\| = b \leq a$, точка $y_n$ лежит в той же полуплоскости от прямой $xx'$, что и точка 0.

Докажем, что $x_n \in P_{xx'}(y_n)$. Из леммы В следует, что для любой точки $t$, лежащей на отрезке, соединяющем точку $x_n$ и точку из множества $P_{xx'}(y_n)$, имеет место неравенство

$$\|y_n - x_n\| \geq \|y_n - t\|. \tag{1.6}$$

Всякий функционал, достигающий своей нормы на какой-то точке внутри отрезка сферы с центром в нуле, достигает своей нормы на всех точках этого отрезка. То есть верно включение $J(x_n) \subset J(t)$, где $t \in [x, x']$. Следовательно, поскольку $x_n \in V(y_n)$, то весь отрезок $[x, x']$ принадлежит множеству $V(y_n)$. Если взять точку $t$ внутри $[x, x']$, то получим $\|t - y_n\| \geq R(a, b)$, что вместе с (1.5) и (1.6) дает $\|x_n - y_n\| = \|t - y_n\|$. А такое равенство по лемме B возможно только если точки $x_n$ и $t$ лежат в метрической проекции $P_{xx'}(y_n)$.

Пусть $y$ — это предельная точка последовательности $y_n$. Тогда $\|x - y\| = R(a, b)$, и по лемме 1.1 имеем $y \in V(x)$. Поскольку $P_{xx'}(0) = [x, x']$, то $P_{xx'}(y) = [z, z']$, где $yz \| 0x$ и $yz' \| 0x'$. В силу непрерывности метрической проекции на прямую имеем также $x \in P_{xx'}(y)$. Тогда $x \in [z, z']$, что вместе с параллельностями $yz || 0x$ и $yz' || 0x'$ дает включение $x \in [z, x']$. Следовательно, так как $yz \parallel 0x$, то точка $y$ лежит в той полуплоскости относительно прямой $\langle x \rangle$, где не лежит точка $x'$ либо $y \in \langle x \rangle$. Первого не может быть по построению, и значит, $0 \in xy$. Точка $y$ не лежит на отрезке $[0, x]$, иначе $(f_x + f_y)(x/\|x\|) = 1 + 1 = 2$ и $\|f_x + f_y\| \geq 2$, что противоречит включению $y \in V(x)$. Получаем, что $y = -(b/a)x$ и $R(a, b) = \|x - y\| = a + b$ для $b \leq a$. Поскольку $R(a, b)$ симметрическая функция, то последнее верно для любых $a, b$. А так как расстояние между точками с нормами $a$ и $b$ не превышает $a+b$, то для любой точки $x$ с нормой $a$ верно

$$R_b(x) = \{a + b\}. \tag{1.7}$$

Пространство $X$ реализует кратчайшие сети для всех своих конечных подмножеств, в частности это означает, что для каждой тройки точек пространства $X$ существует точка Штейнера. Докажем, что пространство $X$ обладает свойством 3.2.I.P.

Пусть $x_1, x_2, x_3 \in X$ и $s \in \mathrm{st}(x_1, x_2, x_3)$.

Разберем случай, когда точка $s$ совпала с одной из точек $x_1, x_2, x_3$, например, с точкой $x_1$. По лемме A найдутся такие функционалы $f_{x_2-x_1} \in J(x_2 - x_1), f_{x_3-x_1} \in J(x_3 - x_1)$, что $\|f_{x_2-x_1} + f_{x_3-x_1}\| \leq 1$ (эти функционалы соответствуют функционалам $f_1$ и $f_2$ из леммы A). Другими словами, $(x_3 - x_1) \in V(x_2 - x_1)$, что также означает $\|x_2 - x_3\| = \|x_2 - x_1 - (x_3 - x_1)\| \in R_{\|x_3-x_1\|}(x_2 - x_1)$. Из (1.7) получаем, что $\|x_2 - x_1\| + \|x_3 - x_1\| = \|x_2 - x_3\|$. Таким образом, $|\mathrm{st}|(x_1, x_2, x_3) = \|x_2 - x_1\| + \|x_3 - x_1\| = (\|x_1 - x_2\| + \|x_2 - x_3\| + \|x_1 - x_3\|)/2$, что совпадает с длиной минимального заполнения для точек $x_1, x_2, x_3$ (0.2).

В случае, если точка $s$ не совпала ни с одной из точек $x_1, x_2, x_3$, по лемме A для каждого из треугольников $sx_1x_2, sx_1x_3, sx_2x_3$ точка $s$ является точкой Штейнера. Аналогично первому случаю имеют место равенства $\|x_1 - s\| + \|x_2 - s\| = \|x_1 - x_2\|$, $\|x_1 - s\| + \|x_3 - s\| = \|x_1 - x_3\|$ и $\|x_2 - s\| + \|x_3 - s\| = \|x_2 - x_3\|$. Сложив все равенства и поделив суммы на два, получаем, что $|\mathrm{st}|(x_1, x_2, x_3) = (\|x_1 - x_2\| + \|x_2 - x_3\| + \|x_1 - x_3\|)/2$, что равно длине минимального заполнения для точек $x_1, x_2, x_3$ (0.2). Следовательно, в пространстве $X$ реализуется минимальное заполнение для всякой тройки точек. По лемме C пространство $X$ обладает свойством 3.2.I.P.

Необходимость в (1) доказана.

2) Достаточность в утверждении (2) доказывается в теореме 4 в [6]:

Теорема B [6]. *Для действительного банахова пространства $X$ следующие условия эквивалентны:*

*1) $X$ реализует минимальное заполнение для всякого конечного набора своих точек;*

*2) $X$ реализует минимальное заполнение для всякого набора из четырех своих точек;*

*3) $X$ предуально к $L_1$ .*

Докажем необходимость в (2).

Поскольку пространство $X$ не строго выпукло и длина кратчайшей сети для всякой тройки его точек зависит только от расстояний между этими точками, то по доказанному утверждению (1) теоремы пространство $X$ обладает свойством 3.2.I.P.

Предположим, что $X$ не обладает свойством 4.2.I.P. Тогда по следствию 4.5 работы [51] для всякого $\varepsilon > 0$ найдется линейное вложение $A : \ell_1^3 \to X$ со свойствами

$$\|x\|_{\ell_1^3} \le \|Ax\|_X \le (1+\varepsilon)\|x\|_{\ell_1^3}, \quad x \in \ell_1^3,$$

и линейный проектор $P : X \to A(\ell_1^3)$ с $\|P\| \le 1+\varepsilon$. Возьмем в $\ell_1^3$ четырехточечные множества $M_4 = \{(1,0,0),(0,1,0),(-1,0,0),(0,-1,0)\}$ и $M_4' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$. Из примера 1 работы [6] имеем $|\mathrm{smt}|(M_4', \ell_1^3) = \frac{5}{4}|\mathrm{mf}|(M_4')$, $|\mathrm{smt}|(M_4, \ell_1^3) = |\mathrm{mf}|(M_4)$.

Попарные расстояния между точками множества $M_4$ равны 2, так же как и попарные расстояния между точками множества $M_4'$. После вложения попарные расстояния между точками множества $A(M_4)$ и между точками множества $A(M_4')$ отличаются от 2 не более, чем на $2\varepsilon$. Длина кратчайшей сети непрерывно зависит от попарных расстояний между точками. Значит, для всякого $\beta > 0$ найдется такой $\varepsilon > 0$, что длины кратчайших сетей множеств $A(M_4)$ и $A(M_4')$ в $X$ отличаются не более, чем на $\beta$.

По условию множество $A(M_4')$ затягивается в $X$ кратчайшей сетью $\Gamma$, длина которой $|\Gamma| = |\mathrm{smt}|(A(M_4'), X) \le |\mathrm{smt}|(A(M_4), X) + \beta \le (1+\varepsilon)|\mathrm{smt}|(M_4, \ell_1^3) + \beta = (1+\varepsilon)|\mathrm{mf}|(M_4) + \beta$. Тогда сеть $P(\Gamma)$ затягивает $A(M_4')$ в $A(\ell_1^3)$ и имеет длину не более чем $(1+\varepsilon)|\Gamma| \le (1+\varepsilon)^2|\mathrm{mf}|(M_4) + (1+\varepsilon)\beta$. В таком случае сеть–прообраз $A^{-1}(P(\Gamma))$, затягивающая $M_4'$ в самом $\ell_1^3$, имеет длину также не больше чем $(1+\varepsilon)^2|\mathrm{mf}|(M_4) + (1+\varepsilon)\beta$. Но

$$|A^{-1}(P(\Gamma))| \geq |\mathrm{smt}|(M_4', \ell_1^3) = \frac{5}{4}|\mathrm{mf}|(M_4),$$

и при достаточном малом $\beta$ и $(1+\varepsilon)^2 < \frac{5}{4}$ получаем противоречие.

Следовательно, пространство обладает свойством 4.2.I.P., и из теоремы A получаем, что $X$ предуально к $L_1$.

Необходимость в (2) теоремы 1.1. доказана.

## §3. Случай строго выпуклого пространства

Достаточность в утверждении (3) теоремы 1.1 очевидна.

Доказательству необходимости в утверждении (3) теоремы 1.1 предпошлем две леммы.

Лемма 1.3. *Пусть в строго выпуклом банаховом пространстве $X$ длина кратчайшей сети для всяких трех точек зависит только от попарных расстояний между ними, $x, y \in X$ — ненулевые элементы. Если $\|x-y\| = R(\|x\|, \|y\|)$, то $\|\lambda x - \mu y\| = R(\lambda\|x||, \mu\|y\|)$ для любых $\lambda, \mu > 0$.*

Доказательство. В силу симметричности и однородности функции $R(a,b)$ достаточно доказать, что для любого $\lambda > 0$ верно $\|\lambda x - y\| = R(\lambda\|x\|, \|y\|)$. Поскольку $\|x-y\| = R(\|x\|, \|y\|)$ и $R(\|x\|, \|y\|) \in R_{\|y\|}(x)$, то по лемме 1.1 $y \in V(x)$, откуда следует, что $y \in V(\lambda x)$. Опять по лемме 1.1 получаем, что $\|\lambda x - y\| \in R_{\|y\|}(\lambda x)$ и из определения функции $R(a,b)$ следует неравенство

$$\|\lambda x - y\| \geq R(\lambda\|x\|, \|y\|). \tag{1.8}$$

Из определения величины $R(\lambda\|x\|, \|y\|)$ и из леммы 1.2 следует, что существует треугольник со сторонами $\lambda\|x\|$, $\|y\|$ и $R(\lambda\|x\|, \|y\|)$, то есть выполнено неравенство

$$R(\lambda\|x\|, \|y\|) \geq \lambda\|x\| - \|y\| = \left\|\lambda x - \lambda x \frac{\|y\|}{\lambda\|x\|}\right\|. \tag{1.9}$$

Из неравенств (1.8) и (1.9) в силу непрерывности функции расстояния от точки $\lambda x$ до сферы с центром в нуле и радиусом $\|y\|$ получаем, что внутри угла $x0y$ можно взять такую точку $z$, равную по норме $\|y\|$, что $\|\lambda x - z\| = R(\lambda\|x\|, \|y\|)$. При этом $\|z\| = \|y\|$, то есть $\|\lambda x - z\| \in R_{\|z\|}(\lambda x)$ и по лемме 1.1 $z \in V(\lambda x)$, что равносильно $z \in V(x)$. Итак, $z, y \in V(x)$, $\|z\| = \|y\|$ и $\|x-y\| = R(\|x\|, \|y\|)$, отсюда

$$\|x - z\| \geq \|x - y\|. \tag{1.10}$$

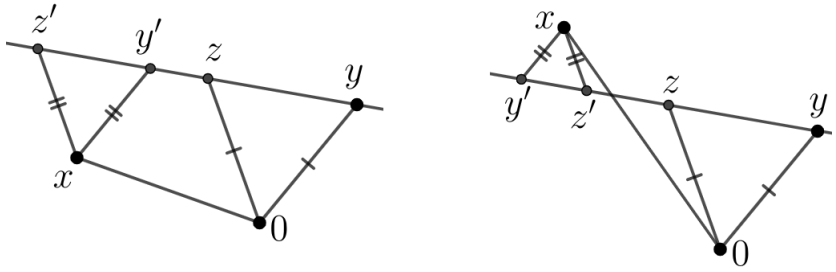



Рис. 1.1.

Возьмем такие точки $z'$ и $y'$ на прямой $yz$, что $xz' \| 0z$ и $xy' \| 0y$. Из равенства $\|z\| = \|y\|$ следует, что и $\|x - z'\| = \|x - y'\|$. Если точки $x$ и 0 лежат в одной полуплоскости относительно прямой $yz$, то точки $z$ и $y$ лежат на луче $z'y'$, причем $z \in [z', y]$ (см. рис. 1.1). Если $x$ и 0 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой $yz$, то точки $z$ и $y$ лежат на луче $y'z'$, причем $z \in [y', y]$ (см. рис. 1.1). В обоих случаях по лемме B имеет место неравенство $\|x - z\| < \|x - y\|$ при $z \neq y$. По неравенству (1.10) этого быть не может, значит, $z = y$. Получаем, что $\|\lambda x - y\| = R(\lambda\|x\|, \|y\|)$.

Лемма доказана.

Лемма 1.4. *В строго выпуклом банаховом пространстве, реализующем кратчайшую сеть для всех своих конечных подмножеств, выполнено неравенство* $R(1, 1) < 2$.

Доказательство. Рассмотрим равносторонний треугольник $x_1x_2x_3$. Вершины треугольника могут быть точками Штейнера этого треугольника

только одновременно, но в строго выпуклом пространстве точка Штейнера треугольника единственна (см. [58, теорема 3.2]). Без ограничения общности считаем, что $0 \in \mathrm{st}(x_1, x_2, x_3)$ и точка 0 не лежит на прямой $x_1x_2$. По лемме А $x_2 \in V(x_1)$, что равносильно $x_2/\|x_2\| \in V(x_1/\|x_1\|)$, следовательно, $\|(x_1/\|x_1\| - x_2/\|x_2\|)\| \geq R(1,1)$. Точки $x_1/\|x_1\|$, 0, $x_2/\|x_2\|$ не лежат на одной прямой. В силу строгой выпуклости пространства $X$ имеет место строгое неравенство треугольника, то есть $1+1 > \|(x_1/\|x_1\| - x_2/\|x_2\|)\| \geq R(1,1)$.

Лемма доказана.

Докажем необходимость в утверждении (3) теоремы. Мы покажем, что всякое двумерное сечение сферы пространства $X$ — это эллипс, откуда будет следовать (см. [48]) гильбертовость $X$.

Пусть $X_2$ — двумерное подпространство $X$. Докажем существование такого $\varepsilon > 0$, что

$$x, y \in S(X_2), 0 \leq \|x - y\| \leq \varepsilon \Longrightarrow P_{xy}(0) = (x+y)/2. \qquad (1.11)$$

Пусть $u, v \in S(X_2)$, $\|u - v\| > R(1,1)$ и $u \neq -v$ (из строгой выпуклости пространства следует неравенство $\|u - v\| < 2$). Пусть $a$ такое число, что $R(a,a) = \|u - v\|$. Тогда $a > 1 = \|u\|$. Построим такую точку $s \in X_2$ в той же полуплоскости от прямой $\langle u - v\rangle$, что и точка $-u$, так, что $\|s-u\| = \|s-v\| = a$ (рис.1.2). Докажем, что точка 0 лежит внутри треугольника $suv$. Рассмотрим множество точек в треугольнике $suv$, равноудаленных от точек $u$ и $v$. В силу строгой выпуклости пространства для всякой точки $s'$ на интервале $(s,u)$ имеем $\|s'-v\| + \|s'-s\| > \|s-v\| = \|s-u\| = \|s'-u\| + \|s'-s\|$, то есть $\|s'-v\| > \|s'-u\|$. Поэтому на каждом интервале $(s',v)$ найдется ровно одна точка, равноудаленная от точек $u$ и $v$ (единственность такой точки следует из строгой выпуклости пространства). Если точку $s'$ непрерывно двигать от точки $u$ до точки $s$, то расстояние, на которое равноудалена точка интервала

$(s', v)$ от точек $u$ и $v$, меняется непрерывно от $\|u-v\|/2$ до $\|s-v\|$. Поскольку $\|u-v\|/2 < 1 < \|s-v\|$, то внутри треугольника $suv$ найдется точка, равноудаленная от точек $u$ и $v$ на расстояние равное единице, а единственная такая точка в рассматриваемой полуплоскости — это 0 (так как пространство строго выпукло). Таким образом, точка 0 принадлежит внутренности треугольника $suv$.

По лемме 1.1 имеем $s-v \in V(s-u)$, так как $\|u-v\| = R(a,a)$ и $\|s-u\| = \|s-v\| = a$.

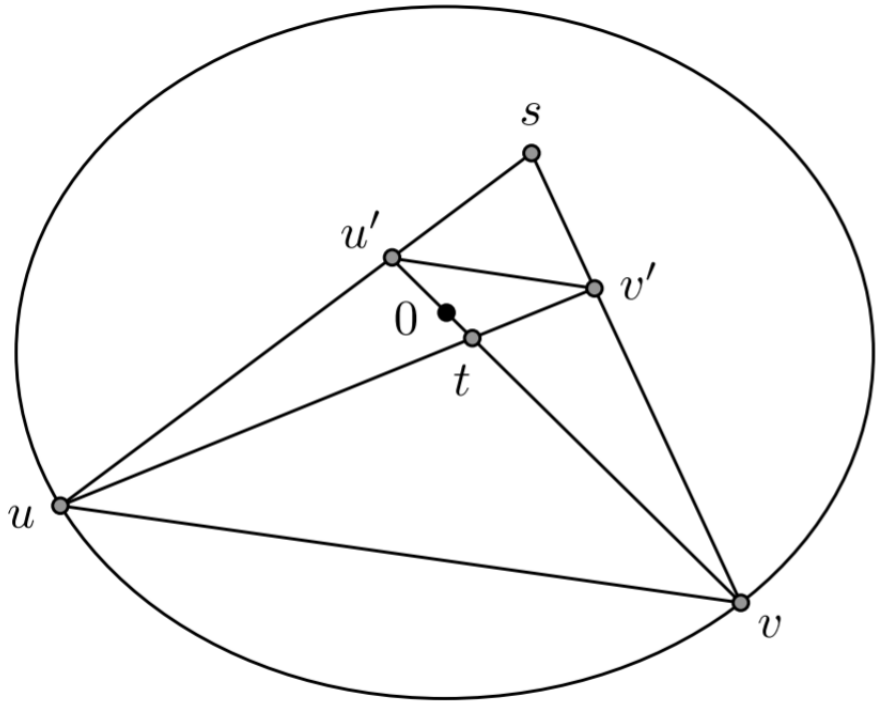



Рис. 1.2.

Пусть $u' := v0 \cap [s,u]$. Возьмем $v' \in [s,v]$ так, что $u'v' \parallel uv$. Из параллельности получаем, что $\|s-u'\|/\|s-u\| = \|s-v'\|/\|s-v\|$, следовательно, $\|s-u'\| = \|s-v'\|$. Учитывая, что $s-u' = \lambda(s-u)$, $s-v' = \lambda(s-v)$ для некоторого $\lambda > 0$ и $\|u-v\| = R(\|s-u\|, \|s-v\|)$, из леммы 1.3 получаем $\|u-v'\| = R(\|s-u\|, \|s-v'\|) = R(\|s-v\|, \|s-u'\|) = \|u'-v\|$. Также из параллельности $u'v'||uv$ следует, что для $t := vu' \cap uv'$ точка $(u+v)/2$ лежит на

прямой $st$ и выполнено соотношение $\|u-v'\|/\|u-t\| = \|u'-v\|/\|v-t\|$. Значит, $\|u-t\| = \|v-t\|$. В силу строгой выпуклости пространства $X$ для любой не совпадающей с нулем точки $t'$ на прямой $\langle v\rangle$ верно либо $\|v-t'\| = \|v\|+\|t'\| = \|u\| + \|t'\| > \|u-t'\|$, либо $\|v-t'\| = \|v\| - \|t'\| = \|u\| - \|t'\| < \|u-t'\|$. Следовательно, $t = 0$. И значит, точки $s, 0, (u+v)/2$ лежат на одной прямой.

Возьмем на сфере $S(X_2)$ такую последовательность хорд $u_nv_n$, что вектора $\overrightarrow{u_nv_n}$ и $\overrightarrow{uv}$ сонаправлены, чтобы между прямыми $u_nv_n$ и $uv$ не было точки 0, и чтобы $u_n \to (u-v)/\|u-v\|$ при $n \to \infty$. Начиная с какого-то $N \in \mathbb{N}$ для всякого $k > N$ верно $\|u_k - v_k\| > R(1,1)$, так как $\|u_n - v_n\| \to 2$ при $n \to \infty$ и по лемме 1.4 $R(1,1) < 2$. Построим такую точку $s_k$, что $s_ku_k \parallel su$ и $s_kv_k \parallel sv$. Тогда $s_k - v_k = \mu(s-v)$ и $s_k - u_k = \mu(s-u)$ для некоторого $\mu > 0$. По лемме 1.3 получаем, что $\|u_k - v_k\| = R(\|s_k - u_k\|, \|s_k - v_k\|)$. Далее аналогично рассуждениям в предыдущих трех абзацах, приписав к точкам $s, u, v$ индексы $k$, получаем, что точки $s_k, 0, (u_k+v_k)/2$ лежат на одной прямой. А так как у треугольников $s_ku_kv_k$ и $suv$ стороны параллельны, то их медианы из точек $s$ и $s_k$ либо лежат на одной прямой, либо параллельны. Параллельности быть не может, поскольку обе прямые, содержащие медианы, проходят через точку 0. Таким образом, доказано, что точки $0$, $(u_k+v_k)/2$ и $(u+v)/2$ лежат на одной прямой. То есть точки $(u_k+v_k)/2$ при $k > N$ лежат на прямой $\langle (u+v)/2\rangle$. Поскольку прямая $l_k$, проходящая через точки $u_k, -v_k$, параллельна прямой $\langle (u_k+v_k)/2\rangle$ (которая совпадает с прямой $\langle (u+v)/2\rangle$), то все прямые $l_k$, $k > N$ имеют одно и то же направление. При $k \to \infty$ прямая $l_k$ стремится к прямой, опорной к $S(X_2)$ в точке $(u-v)/\|(u-v)\|$. Следовательно,

$$P_{\{u+\lambda(u+v):\lambda\in\mathbb{R}\}}(0) = (u-v)/2. \tag{1.12}$$

Осталось заметить, что для $X_2$ найдется такое $\varepsilon$, что из $x, y \in S(X_2)$ и $0 < \|x-y\| \le \varepsilon$ следует $\|x+y\| > R(1,1)$ (по лемме 1.4 $R(1,1) < 2$). Тогда,

подставив $u = x$ и $v = -y$ в (1.12), получаем $P_{xy}(0) = (x+y)/2$. Утверждение (1.11) доказано.

Пусть $z \in S(X_2)$ и $l_z$ — опорная прямая к $S(X_2)$ в точке $z$. Аффинным преобразованием переведем $S(X_2)$ в $S'(X_2)$ так, чтобы прямые $\langle z \rangle$ и $l_z$ перешли в перпендикулярные прямые $\langle z' \rangle$ и $l'_z$ соответственно. Свойство (1.11) для плоскости $X_2$ с нормой, определяемой сферой $S'(X_2)$, и новым $\varepsilon'$ сохранится: при аффинном преобразовании середина отрезка переходит в середину отрезка, метрическая проекция нуля на прямую $xy$, как точка касания сферы с центром в нуле и прямой $xy$, переходит в точку касания образа этой сферы с образом прямой $xy$, то есть в метрическую проекцию (относительно новой нормы) нуля на образ прямой $xy$.

Возьмем на сфере $S'(X_2)$ такие точки $x_0, y_0$, что $\|x_0 - y_0\| \leq \varepsilon'$ и $P_{x_0y_0}(0) \in \langle z' \rangle$ (то есть $\langle z' \rangle \perp x_0y_0$ и $x_0y_0 \parallel l'_z$). Из свойства (1.11) следует, что прямая $\langle z' \rangle$ делит отрезок $[x_0, y_0]$ пополам. Тогда точки $x_0, y_0$ симметричны относительно прямой $\langle z' \rangle$. Таким образом, у точки $z'$ найдется некоторая окрестность, в которой сфера $S'(X_2)$ симметрична относительно прямой $\langle z' \rangle$.

Пусть $x, y$ такие точки на сфере $S'(X_2)$, что прямая $xy$ — ближайшая прямая к нулю, которая отсекает на сфере симметричную относительно прямой $\langle z' \rangle$ часть, содержащую точку $z'$. Пусть прямые $l_x, l_y$ — опорные к сфере $S'(X_2)$ в точках $x, y$ соответственно, симметричные относительно прямой $\langle z' \rangle$.

Пусть $x', y'$ — такие точки на сфере , симметричные относительно прямой $\langle z' \rangle$, что $\|x' - x\| < \varepsilon'/2$ и $\|y' - y\| < \varepsilon'/2$. Пусть точки $x'', y''$ — это такие точки, что $\|x' - x''\| \leq \varepsilon'$, $\|y' - y''\| \leq \varepsilon'$ и $P_{x'x''}(0) \in \langle x \rangle$, $P_{y'y''}(0) \in \langle y \rangle$ (то есть $x'x'' \| l_x$, $y'y'' \| l_y$ ). Прямые $x'x''$, $y'y''$ также симметричны относительно прямой $\langle z' \rangle$, так как точки $x', y'$ и прямые $l_x, l_y$ симметричны. Из (1.11) следует, что прямые $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ делят соответственно отрезки $[x', x'']$ и $[y', y'']$ пополам. Учитывая еще симметрию прямых $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$ относительно прямой

$\langle z' \rangle$, получаем, что $x'', y''$ тоже симметричны относительно прямой $\langle z' \rangle$ (то есть $x''y'' \perp \langle z' \rangle$). Следовательно, для точек $x'', y''$ тоже верно свойство, что $P_{x''y''}(0) = (x'' + y'')/2$. Таким образом, малые окрестности точек $x, y$ тоже симметричны относительно прямой $\langle z' \rangle$. Значит, прямая $xy$ проходит через нуль, иначе найдется более близкая к нулю прямая, которая отсекает на сфере симметричную часть относительно прямой $\langle z' \rangle$.

Поскольку сфера $S'(X_2)$ центрально-симметричная и $xy$ проходит через нуль, то $S'(X_2)$ симметрична относительно прямой $\langle z' \rangle$. Аффинное преобразование сохраняет косую симметрию относительно прямой (две точки $p$ и $q$ кососимметричны относительно прямой вдоль какого-то заданного направления, если эта прямая проходит через середину отрезка $[p, q]$ и отрезок $[p, q]$ параллелен заданному направлению [30, §2]). Следовательно, и исходная сфера $S(X_2)$ кососимметрична относительно прямой $\langle z \rangle$. А так как точку $z$ можно выбрать какой угодно, то сфера $S(X_2)$ кососимметрична относительно любого своего диаметра, значит (см. [10, Добавление, §7]), $S(X_2)$ есть эллипс.

В итоге всякое двумерное сечение сферы $S(X)$ является эллипсом, следовательно (см. [48]), $X$ — гильбертово пространство.

Теорема 1.1 доказана.

# Глава II. Суботношение Штейнера

## §1. Минимальное $n$-точечное суботношение Штейнера

Теорема 2.1. *Для всякого $n = 2, 3, \ldots$ существует такое банахово пространство $X_{n-1}$ размерности $n-1$, что*

$$\mathrm{ssr}_n(X_{n-1}) = \inf_X \mathrm{ssr}_n(X) = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Доказательство. Для полноты изложения приведем доказательство неравенства

$$\mathrm{ssr}_n(X) \geq \frac{n}{2(n-1)}$$

в банаховых пространствах $X$. Напомним, что это неравенство доказано в [26] для произвольных метрических пространств, но в случае банаховых пространств оно получается проще и нагляднее. Для всякого $X$ и $x_1, \ldots, x_n \in X$ всякая сеть–дерево $\Gamma \in \mathrm{mf}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ имеет обход, при котором каждое ребро в $\Gamma$ проходится по 2 раза. В этом обходе длина каждой ломаной от точки $x_i$ до следующей за ней (в порядке обхода) точки $x_j$ не меньше $\|x_i - x_j\|$. Если $L$ — замкнутая ломаная в $X$ с вершинами только в точках $x_k$, обходящая эти точки в том же порядке, то получается, что

$$2|\mathrm{mf}|(\{x_1, \ldots, x_n\}) = 2|\Gamma| \geq |L|. \tag{2.13}$$

Если убрать любой отрезок из ломаной $L$, например $[x_i, x_j]$, то длина $|L \setminus [x_i, x_j]|$ оставшейся незамкнутой ломаной не меньше $|\mathrm{smt}|(\{x_1, \ldots, x_n\}; X)$. Суммируя эти неравенства по всем отрезкам ломаной $L$, получаем

$$(n-1)|L| \geq n|\mathrm{smt}|(\{x_1, \ldots, x_n\}; X),$$

что вместе с (2.13) дает

$$\mathrm{ssr}_n(X) \geq \frac{|\mathrm{mf}|(\{x_1,\dots,x_n\})}{|\mathrm{smt}|(\{x_1,\dots,x_n\};X)} \geq \frac{n}{2(n-1)}. \tag{2.14}$$

Мы хотим привести пример пространства $X$ и множества точек, на которых последняя оценка достигается. Для удобства изложения построим пример из $n+1$ точки $(n=1,2,\dots)$ в $n-$мерном пространстве $X$, для которых верно

$$\mathrm{ssr}_{n+1}(X) = \frac{|\mathrm{mf}|(\{x_1,\dots,x_{n+1}\})}{|\mathrm{smt}|(\{x_1,\dots,x_{n+1}\};X)} = \frac{n+1}{2n}.$$

Пусть $0, a_1, \dots, a_n$ — вершины симплекса из $n+1$ точки в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим $n$–мерное банахово пространство $X$ с единичным шаром

$$B(X) = \mathrm{Conv}\,\{\pm a_i, a_i - a_j : 1 \leq i,j \leq n\},$$

где Conv обозначает выпуклую оболочку. Например, в случае $n=2$ граница шара $B(X)$ есть шестиугольник, в случае $n=3$ — ромбооктаэдр. Докажем, что точки $a_i$ и $a_i - a_j$ при $i \neq j$ лежат на границе единичного шара. Для этого построим в $X^*$ функционал $f_i$, задав его на базисных векторах $a_1,\dots,a_n$ пространства $X$ следующим образом: $f_i(a_k) = \delta_{ik}$ для каждого $k$. Очевидно, что функционал $f_i$ по норме равен единице и его гиперплоскость уровня $\{x : f_i(x) = 1\}$ проходит через точки $a_i$ и $a_i - a_j$, то есть рассматриваемые точки лежат на единичной сфере. Таким образом, в этом пространстве $X$ имеем $\|a_i\| = 1$ и $\|a_i - a_j\| = 1$ при $i \neq j$. Отметим также, что $B(X) = \triangle_n - \triangle_n$, где $\triangle_n$ – $n$-мерный симплекс.

Длина всякой замкнутой ломаной, проходящей через все вершины симплекса по одному разу, равна $n+1$. Поэтому из (2.13) следует неравенство $|\mathrm{mf}|(\{0,a_1,\dots,a_n\}) \geq (n+1)/2$. Данная оценка достигается при изометрическом вложении множества $\{0,a_1,\dots,a_n\}$ в пространство $\ell_1^{n+1}$ как множества векторов $e_i = (0,\dots,0,1/2,0,\dots,0)$, где $1/2$ стоит на $i$ месте $(i=1,\dots,n+1)$.

Кратчайшая сеть для $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ в $\ell_1^{n+1}$ — это граф-звезда, состоящая из отрезков $[0, e_i]$, поскольку длина такой сети равна наименьшей из возможных длин, а именно $(n+1)/2$. Получаем, что

$$|\mathrm{mf}|(\{0, a_1, \ldots, a_n\}) = \frac{n+1}{2}. \tag{2.15}$$

Докажем, что $|\mathrm{smt}|(\{0, a_1, \ldots, a_n\}; X) = n$. Пусть $\Gamma$ — какая-нибудь кратчайшая сеть, затягивающая множество точек $\{0, a_1, \ldots, a_n\}$ в пространстве $X$. Сеть $\Gamma$ является деревом, висячие вершины которого совпадают с некоторыми точками из множества $\{0, a_1, \ldots, a_n\}$. Вершины в графе $\Gamma$, которые не совпадают с точками $0, a_1, \ldots, a_n$, назовем дополнительными. Считаем, что все точки $0, a_1, \ldots, a_n$ — висячие вершины в графе $\Gamma$ (любую вершину можно «раздвоить» на дополнительную вершину и висячую вершину с проведенным нулевым ребром между ними).

Пусть $z_1, \ldots, z_p$ — это дополнительные вершины. Зададим ориентацию на ребрах графа $\Gamma$: подвесим граф за точку 0 и ориентируем ребра сверху вниз. Без ограничения общности считаем, что первые $q$ дополнительных вершин графа $\Gamma$ соединены с висячими вершинами, при этом вершина $z_1$ соединена с точками $0, a_1(= a_{m_0+1}), \ldots, a_{m_1}$, вершина $z_k$ соединена с точками $a_{m_{k-1}+1}, \ldots, a_{m_k}$ $(k = 2, \ldots, q-1)$, вершина $z_q$ соединена с точками $a_{m_{q-1}+1}, \ldots, a_n(= a_{m_q})$ (см. рис. 2.1). Точка $z_1$ может не соединяться ни с одной из $a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, тогда в дальнейшем считаем, что элементы с индексами $m_0 + 1, \ldots, m_1$ в любом выражении отсутствуют, и $a_{m_1+1} = a_1$.

Пусть $\overrightarrow{z_{i_1} z_{j_1}}, \ldots, \overrightarrow{z_{i_{p-1}} z_{j_{p-1}}}$ — все ребра дерева $\Gamma$ с концами только в дополнительных вершинах (таких ребер всего $p-1$, поскольку в совокупности они образуют дерево, соединяющее $p$ дополнительных вершин: все не дополнительные вершины — висячие). Тем самым фиксированы пары индексов $i_t$ и $j_t$ $(t = 1, \ldots, p-1)$, каждый из которых принадлежит множеству $\{1, \ldots, p\}$.

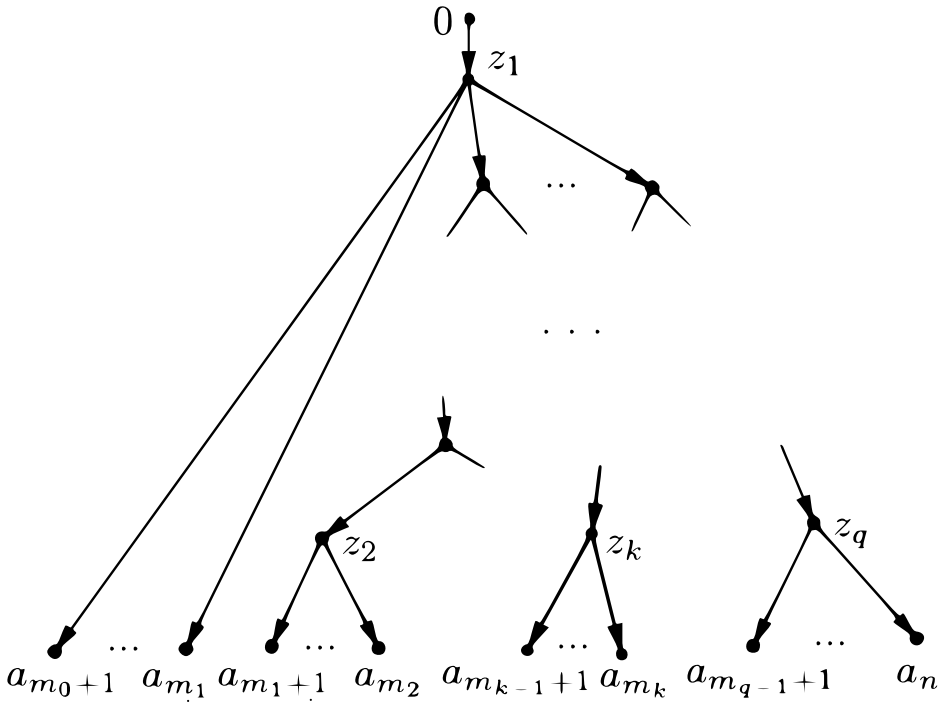



Рис. 2.1.

Рассмотрим банахово пространство

$$X^{n+p} = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n+p}$$

с нормой $\|(x_1, \ldots, x_{n+p})\|_{n+p} = \|x_1\| + \cdots + \|x_{n+p}\|$. Рассмотрим его линейное $pn$-мерное подпространство

$$Y = \{y = (-y_1, \underbrace{y_1, \ldots, y_1}_{m_1 - m_0}, \ldots, \underbrace{y_q, \ldots, y_q}_{m_q - m_{q-1}}, y_{i_1} - y_{j_1}, \ldots, y_{i_{p-1}} - y_{j_{p-1}}) : y_k \in X, k = 1, \ldots, p\}.$$

Каждому вектору $y \in Y$ сопоставим сеть-дерево, затягивающее точки $0, a_1, \ldots, a_n$, следующим образом. В пространстве $X$ отметим точки $y_1, \ldots, y_p$, проведем ребро $\overrightarrow{0y_1}$, точку $y_k$ соединим с точками $a_{m_{k-1}+1}, \ldots, a_{m_k}$ $(k = 1, \ldots, q)$ и проведем ребра $\overrightarrow{y_{i_1}y_{j_1}}$, $\ldots$, $\overrightarrow{y_{i_{p-1}}y_{j_{p-1}}}$. Другими словами, сопоставим вектору $y$ дерево $\Gamma(y)$ с вершинами $0, a_1, \ldots, a_n$ и $y_1, \ldots, y_p$, затягивающее точки $0, a_1, \ldots, a_n$ и имеющее ту же топологию, что и граф $\Gamma$.

Пусть $a = (0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0) \in X^{n+p}$. Имеем

$$\|a - y\|_{n+p} = \|y_1\| + \sum_{l=1}^{q} \sum_{k=m_{l-1}+1}^{m_l} \|a_k - y_l\| + \sum_{t=1}^{p-1} \|y_{i_t} - y_{j_t}\| = |\Gamma(y)|.$$

Поскольку для вектора

$$z = (-z_1, z_1, \ldots, z_1, \ldots, z_q, \ldots, z_q, z_{i_1} - z_{j_1}, \ldots, z_{i_{p-1}} - z_{j_{p-1}}) \in Y$$

сеть $\Gamma(z)$ совпадает с кратчайшей сетью $\Gamma$, то $z$ является элементом наилучшего приближения для $a$ в подпространстве $Y$, то есть

$$\rho(a, Y) = |\Gamma(z)| = |\mathrm{smt}|(\{x_1, \ldots, x_n\}; X) \tag{2.16}$$

Построим специальный вектор $s \in Y$, получаемый из вектора $z$ заменой каждого из элементов $z_k$ на один из элементов $a_j$ по следующему алгоритму. Вначале каждый из элементов $z_k$, $k = 1, \ldots, q$, заменяется на один (любой) из элементов $a_{m_{k-1}+1}, \ldots, a_{m_k}$. Далее замена происходит индуктивно «снизу вверх» по дереву $\Gamma$ на рис.2.1: если какой-то, еще не замененный, $z_i$ является началом в ориентированных ребрах $\overrightarrow{z_i z_j}$ для каких-то $z_j \in \{1, \ldots, p\}$, то заменяем $z_i$ на одну из тех $a_k$, на которые были заменены эти $z_j$. После этой замены $z_i \to a_{\nu(i)}$ определится отображение $\nu$: $\{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, n\}$. Положим

$$s = (-a_{\nu(1)}, a_{\nu(1)}, \ \ldots\ , a_{\nu(1)}, \ldots, a_{\nu(q)}, \ldots, a_{\nu(q)}, a_{\nu(i_1)} - a_{\nu(j_1)}, \ldots, a_{\nu(i_{p-1})} - a_{\nu(j_{p-1})}).$$

Наша цель доказать, что $s$ является ближайшим элементом в $Y$ для $a$.

Построим специальный функционал $F = (f_0, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_{p-1}) \in (X^{n+p})^*$, где $f_k, g_t \in X^*$. Каждый из функционалов $f_k$ и $g_t$ определим его значениями на базисных векторах $a_1, \ldots, a_n$ пространства $X$. Положим

$$f_0(a_i) = 1, \ i = 1, \ldots, n;$$

$$f_k(a_i) = \delta_{ki},\ 1 \le k, i \le n;$$

$$g_t(a_i) = \begin{cases} 1, & \text{если в сети } \Gamma \text{ есть путь из } z_{j_t} \text{ в } a_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},\ 1 \le t \le p-1.$$

Здесь и далее считаем, что путь в ориентированном графе — это последовательность вершин, в которой из каждой вершины выходит ребро в следующую вершину.

Теперь докажем несколько свойств функционала $F$.

1) Все заданные функционалы в точках $\pm a_i$, $a_i - a_j$ при $1 \le i, j \le n$ принимают значения по модулю не больше единицы. Отсюда $\|f_k\| = \|g_t\| = 1$ для всех указанных $k$ и $t$, и

$$\|F\|^*_{n+p} = \max\{\|f_0\|, \ldots, \|f_n\|, \|g_1\|, \ldots, \|g_{p-1}\|\} = 1.$$

2) Заметим, что $f_0(a_i) = 1 = \|a_i\|$ для любого $i$. Для всякого $k$ и всякого $i$ имеем

$$f_k(a_k - a_i) = f_k(a_k) - f_k(a_i) = 1 - \delta_{ki} = \|a_k - a_i\|.$$

Для всякого $t \in \{1, \ldots, p-1\}$ из вершин $z_{i_t}$ и $z_{j_t}$ в силу определения отображения $\nu$ есть пути в вершины $a_{\nu(i_t)}$ и $a_{\nu(j_t)}$ соответственно. Если $\nu(j_t) \ne \nu(i_t)$, то найдется такой индекс $t'$, что $i_t = i_{t'}$ и $\nu(j_{t'}) = \nu(i_{t'}) = \nu(i_t)$. Это означает, что путь из вершины $z_{i_t}$ в точку $a_{\nu(i_t)}$ проходит через вершину $z_{j_{t'}}$. Поскольку пути в дереве $\Gamma$, выходящие из точки $z_{i_t}$ по разным ребрам, не пересекаются, то путь из вершины $z_{i_t}$ в точку $a_{\nu(i_t)}$ не проходит через вершину $z_{j_t}$ и из вершины $z_{j_t}$ нет пути в точку $a_{\nu(i_t)}$. Отсюда следует

$$g_t(a_{\nu(j_t)} - a_{\nu(i_t)}) = g_t(a_{\nu(j_t)}) - g_t(a_{\nu(i_t)}) = \begin{cases} 1 - 0, & \nu(j_t) \ne \nu(i_t) \\ 1 - 1, & \nu(j_t) = \nu(i_t) \end{cases}$$

$$= \|a_{\nu(j_t)} - a_{\nu(i_t)}\|.$$

Таким образом, получаем

$$F(a-s) = f_0(a_{\nu(1)}) + \sum_{l=1}^{q} \sum_{k=m_{l-1}+1}^{m_l} f_k(a_k - a_{\nu(l)}) + \sum_{t=1}^{p-1} g_t(a_{\nu(j_t)} - a_{\nu(i_t)})$$
$$= \|a_{\nu(1)}\| + \sum_{l=1}^{q} \sum_{k=m_{l-1}+1}^{m_l} \|a_k - a_{\nu(l)}\| + \sum_{t=1}^{p-1} \|a_{\nu(j_t)} - a_{\nu(i_t)}\|$$
$$= \|a-s\|_{n+p}.$$

3) Покажем, что $F \in Y^{\perp}$, то есть $F(y) = 0$ для любого $y \in Y$. Рассмотрим точку $z_k$ и всевозможные пути из этой точки в висячие вершины $a_1, \ldots, a_n$. Поскольку граф $\Gamma$ является деревом, из точки $z_k$ до каждой из точек $a_1, \ldots, a_n$ ведет не более одного пути. При $k > q$ точка $z_k$ не соединена ребром ни с какой висячей вершиной, и каждый путь из точки $z_k$ в висячую вершину проходит ровно через одну из смежных с $z_k$ вершин из множества $\{z_{j_t} : i_t = k\}$. Другими словами, во всякой точке $a_i$, до которой есть путь из точки $z_k$, ровно один из функционалов набора $\{g_t : i_t = k\}$ равен единице, остальные функционалы из этого набора в точке $a_i$ равны нулю. Во всякой точке $a_i$, до которой нет пути из точки $z_k$, а значит и из точек множества $\{z_{j_t} : i_t = k\}$, каждый функционал из набора $\{g_t : i_t = k\}$ равен нулю. Таким образом, функционал $\sum_{t:i_t=k} g_t$ равен единице во всех точках $a_i$, до которых есть путь из вершины $z_k$, а в остальных точках множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$ равен нулю. Следовательно, из определения функционала $g_{\tau(k)}$, где $\tau$ сопоставляет каждому $k$ такое $\tau(k)$, что $j_{\tau(k)} = k$, получаем тождество $\sum_{t:i_t=k} g_t \equiv g_{\tau(k)}$. Тогда для всякого $y_k \in X$ выполнено равенство

$$\sum_{t:i_t=k} g_t(y_k) + g_{\tau(k)}(-y_k) = 0, \ k > q. \tag{2.17}$$

Пусть теперь $k \leq q$. Тогда из точки $z_k$ помимо путей в висячие вершины через точки $\{z_{j_t} : i_t = k\}$ есть однореберные пути в точки $a_{m_{k-1}+1}, \ldots, a_{m_k}$. Аналогично предыдущему случаю получаем, что во всякой точке $a_i$, до которой

есть путь из точки $z_k$, ровно один из функционалов набора

$$\{g_t : i_t = k\} \cup \{f_{m_{k-1}+1}, \ldots, f_{m_k}\}$$

равен единице, остальные функционалы из этого указанного набора равны нулю. Во всякой точке $a_i$, до которой нет пути из точки $z_k$, каждый функционал из набора равен нулю. Значит, функционал $\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} f_i + \sum_{t:i_t=k} g_t$ равен единице во всех точках $a_i$, до которых есть путь из вершины $z_k$. При $k = 1$ получаем, что новый функционал равен единице во всех точках $a_1, \ldots, a_n$, то есть $\sum_{i=m_0+1}^{m_1} f_i + \sum_{t:i_t=1} g_t \equiv f_0$. Следовательно, для любого элемента $y_1 \in X$ выполнено равенство

$$f_0(-y_1) + \sum_{i=m_0+1}^{m_1} f_i(y_1) + \sum_{t:i_t=1} g_t(y_1) = 0. \tag{2.18}$$

При $2 \le k \le q$ по определению функционала $g_{\tau(k)}$, где $\tau$ сопоставляет каждому $k$ такое $\tau(k)$, что $j_{\tau(k)} = k$, получаем $\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} f_i + \sum_{t:i_t=k} g_t \equiv g_{\tau(k)}$. Тогда для всякого $y_k \in X$ выполнено равенство

$$\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} f_i(y_k) + \sum_{t:i_t=k} g_t(y_k) + g_{\tau(k)}(-y_k) = 0,\ 2 \le k \le q. \tag{2.19}$$

Суммируя равенство (2.17), равенства (2.18) по $k$ от $q+1$ до $p$ и (2.19) по $k$ от 2 до $q$ и пользуясь тем, что

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{t:i_t=k} g_t(y_k) + \sum_{k=2}^{p} g_{\tau(k)}(-y_k) = \sum_{t=1}^{p-1} g_t(y_{i_t}) + \sum_{t=1}^{p-1} g_t(-y_{j_t}) = \sum_{t=1}^{p-1} g_t(y_{i_t} - y_{j_t}),$$

получаем

$$f_0(-y_1) + \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} f_i(y_k) + \sum_{t=1}^{p-1} g_t(y_{i_t} - y_{j_t}) = 0.$$

Левая часть последнего равенства есть $F(y)$, где $y = (-y_1, y_1, \ldots, y_1, \ldots, y_q, \ldots, y_q, y_{i_1} - y_{j_1}, \ldots, y_{i_{p-1}} - y_{j_{p-1}})$ — произвольный элемент из $Y$. Следовательно, $F \in Y^{\perp}$.

В итоге доказаны три свойства функционала $F$, а именно: $\|F\|^*_{n+p} = 1$, $F(a-s) = \|a-s\|_{n+p}$ и $F \in Y^\perp$. С одной стороны, $\rho(a,Y) \le \|a-s\|_{n+p}$, с другой (см., например, [56, §1]),

$$\rho(a,Y) = \sup_{G\in Y^\perp, \|G\|\le 1} G(a) \ge F(a) = F(a-s) = \|a-s\|_{n+p}.$$

Тем самым выполнено $\rho(a,Y) = \|a-s\|_{n+p}$. Следовательно, $\|a-s\|_{n+p} = |\Gamma(s)|$. Поскольку в дереве $\Gamma(s)$ все ребра либо единичной длины, либо нулевой, то $|\Gamma(s)|$ — это количество ненулевых ребер дерева $\Gamma(s)$. Вершины $\Gamma(s)$ — это точки $0, a_1, \ldots, a_n$, все попарные расстояния между которыми равны 1. В дереве с $n+1$ вершинами $n$ ребер. Таким образом, имеем $\rho(a,Y) = n$, что вместе с (2.16) дает $|\mathrm{smt}|(\{x_1,\ldots,x_n\}; X) = n$. Воспользовавшись (2.15), получаем

$$\mathrm{ssr}_{n+1}(X) = \frac{|\mathrm{mf}|(\{0,a_1,\ldots,a_n\})}{|\mathrm{smt}|(\{0,a_1,\ldots,a_n\};X)} = \frac{n+1}{2n}.$$

Теорема 2.1 доказана.

Интересно, что для ровно в тех же банаховых пространствах и для тех же симплексов достигается минимально возможное отношение диаметра множества (наибольшее расстояние между точками множества) к его чебышевскому радиусу (радиусу наименьшего шара, содержащего множество) для $n$-мерных пространств [25, Теорема 11.8].

## §2. Банахово пространство с суботношением Штейнера 1/2

Теорема 2.2. *Существует банахово пространство с суботношением Штейнера, равным* $1/2$.

Доказательство. Пусть $0, a_1, \ldots, a_n$ — вершины симплекса из $n+1$ точек в $\mathbb{R}^n$. Пусть $X_n$ — $n$–мерное банахово пространство с единичным шаром

$$B(X_n) = \mathrm{Conv}\,\{\pm a_i, (a_i - a_j), 1 \le i,j \le n\}.$$

Из доказательства теоремы 2.1 известно, что $|\mathrm{smt}|(\{0, a_1, \dots, a_n\}; X_n) = n$ и $|\mathrm{mf}|(\{0, a_1, \dots, a_n\}) = (n+1)/2$.

Положим

$$X = \left\{ (x_1, x_2, \dots) : x_k \in X_k, k = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_{X_i} < \infty \right\}$$

и

$$\|(x_1, x_2, \dots)\|_X = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_{X_i}.$$

Заметим, что существует проектор пространства $X$ на подпространство $Y_n = \{(0, \dots, 0, x_n, 0, \dots) : x_n \in X_n\}$ (элемент $x_n$ стоит на $n$-ом месте) с единичной нормой. Зафиксируем $n$ и положим $A_k = (0, \dots, 0, a_k, 0 \dots) \in X$, где $a_k$ стоит на $n$-ом месте. Всякая сеть, затягивающая набор $\{0, A_1, \dots, A_n\}$ в $X$, при указанной проекции на $Y_n$ не меняет своей длины. Таким образом, выполнено $|\mathrm{smt}|(\{0, A_1, \dots, A_n\}; X) = |\mathrm{smt}|(\{0, a_1, \dots, a_n\}; X_n) = n$. В то же время $|\mathrm{mf}(\{0, A_1, \dots, A_n\}) = (n+1)/2$. Отсюда следует, что $\mathrm{ssr}(X) \le (n+1)/(2n)$. При $n \to \infty$ получаем $\mathrm{ssr}(X) \le 1/2$, что вместе с (0.3) дает равенство $\mathrm{ssr}(X) = 1/2$.

Теорема 2.2 доказана.

В теореме приведен пример бесконечномерного банахова пространства с суботношением Штейнера, равным 1/2. В связи с этим остается нерешенной

Задача 2.1. *Существует ли конечномерное банахово пространство $X$ с $\mathrm{ssr}(X) = 1/2$?.*

В следующем параграфе показано, что пространств малой размерности с таким свойством нет.

## §3. Задача оценки суботношения при фиксированной размерности

Для полноты изложения приведем задачу об оценке суботношения Штейнера в пространствах фиксированной размерности.

Задача 2.2. [6] *Вычислить величины*

$$\mathrm{ssr}(d) := \inf\{\mathrm{ssr}(X) : \dim X = d\}, \qquad d = 2, 3, \ldots$$

*или хотя бы оценить их скорость стремления к* $1/2$ *при* $d \to \infty$.

Приведем некоторые оценки величин $\mathrm{ssr}(d)$ при малых $d$.

Пусть $M$ — конечное подмножество в $d$-мерном пространстве $X$ и $\Gamma_0 \in \mathrm{mf}(M)$.

Нам понадобится лемма о склейке метрических пространств:

Лемма D ([13, упр. 3.1.13 ]). *Пусть два метрических пространства* $(X_1, \rho_1)$ *и* $(X_2, \rho_2)$ *как множества имеют непустую общую часть* $X_1 \cap X_2$, *на которой метрики* $\rho_1$ *и* $\rho_2$ *совпадают, причем* $X_1 \cap X_2$ *полно относительно этой метрики. Тогда существует метрика на* $X_1 \cup X_2$, *сужение которой на* $X_k$ *совпадает с* $\rho_k$, $k = 1, 2$.

По лемме D на $X \cup \Gamma_0$ определяется метрика, которая сохраняет расстояния внутри $X$ и $\Gamma_0$. Вложим это метрическое пространство в какое-нибудь универсальное банахово пространство $C$. Существует линейный проектор $P : C \to X$ нормы не больше абсолютной проекционной константы $\lambda_d$. Напомним, что абсолютная проекционная константа определяется как

$$\lambda_d := \sup_{Y_d \subset Z} \inf_P \|P : Z \to Y_d\|,$$

где инфимум берется по всем линейным проекторам $P$, супремум берется по всем банаховым пространствам $Z$ и их $d$-мерным подпространствам $Y_d$.

Тогда сеть $P(\Gamma_0)$ затягивает множество $M$ в $X$ и ее длина не более $\lambda_d |\mathrm{mf}|(M)$. Следовательно,

$$|\mathrm{smt}|(M, X) \le \lambda_d |\mathrm{mf}|(M),$$

откуда $\mathrm{ssr}(X) \ge 1/\lambda_d$. Известно [50], что

$$\lambda_2 = \frac{4}{3}, \qquad \lambda_3 \le \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \qquad \lambda_4 \le \frac{3\sqrt{6}+2}{5}.$$

Известная оценка для $\lambda_5$ уже больше двух, и вообще $\lambda_d \sim \sqrt{d}$ при $d \to \infty$ [50].

Используя примеры банаховых пространств размерностей $3, 4, 5, \ldots$ из доказательства теоремы 2.1 получаем, что

$$\operatorname{ssr}(2) = \frac{3}{4}, \qquad \frac{2}{\sqrt{5}+1} \le \operatorname{ssr}(3) \le \frac{2}{3}, \qquad \frac{5}{3\sqrt{6}+2} \le \operatorname{ssr}(4) \le \frac{5}{8},$$

$$\frac{1}{2} \le \operatorname{ssr}(d) \le \frac{d+1}{2d} \quad \text{при } d \ge 5.$$

# Глава III. Нелипшицевость метрической проекции

Теорема 3.1. *Существует строго выпуклое трехмерное банахово пространство, в котором оператор метрического проектирования на любую прямую (поскольку пространство строго выпуклое, все прямые являются чебышевскими) не является липшицевым.*

Пространство из этой теоремы имеет максимально возможную совокупность подпространств с нелипшицевой метрической проекцией: двумерные плоскости во всяком трехмерном пространстве, будучи гиперплоскостями, обладают линейной метрической проекцией.

Для построения искомого пространства нам понадобится *коэффициент линейности* метрической проекции на подпространство $Y$, введенный в работе [11]:

$$\lambda(Y) = \inf \left\{ \frac{\rho(q_1 - q_2, Y)}{\|q_1 - q_2\|} : \ q_1 - q_2 \neq 0, \ q_1, q_2 \in Q(Y) \right\},$$

где $Q(Y) = \{q \in X : \ P_Y(q) \ni 0\}$ — квазиортогональное множество к подпространству $Y$.

В теореме 1 работы [11] описана тесная связь между величиной коэффициента линейности и липшицевостью оператора $P_Y$. Запишем часть этого результата в виде леммы.

Лемма E. *Для всякого чебышевского подпространства $Y$ выполнено следующее: $\lambda(Y) = 0$ тогда и только тогда, когда оператор $P_Y$ не является липшицевым.*

По лемме E для доказательства теоремы достаточно построить такое пространство $X$, что $\lambda(Y) = 0$ для всякой прямой $Y \subset X$. Дадим представление о геометрическом смысле этого равенства, которое будет иметься в виду ниже

в доказательстве. Множество $Q(Y) \cap S(X)$ есть в точности множество точек сферы, в которых параллельные $Y$ прямые являются опорными к сфере. Равенство $\lambda(Y) = 0$ означает, что найдутся отрезки с концами в точках, сколь угодно близкие по направлению к прямой $Y$.

Также нам понадобятся следующие обозначения и определения. Для всякого трехмерного банахова пространства $X$ ниже через $S_3(X)$ обозначаем его единичную сферу. Обозначим $E$ трехмерное евклидово пространство. Положим $d(x, M) = \inf\{|x - y| : y \in M\}$ — евклидово расстояние от элемента $x \in X$ до множества $M$. Большая окружность евклидовой сферы — окружность, получаемая при сечении сферы плоскостью, проходящей через центр сферы. Для точек $x, y \in S_3(E)$ обозначим $| \overset{\frown}{xy} |$ длину кратчайшей дуги на единичной сфере, соединяющей точки $x$ и $y$. Эта кратчайшая дуга является меньшей дугой большой окружности, проходящей через точки $x$ и $y$. Окружность и круг на единичной сфере с центром в точке $a \in S_3(E)$ и радиусом $r > 0$ — это множества

$$S(a, r) = \{x \in S_3(E) : | \overset{\frown}{xa} | = r\}$$

и

$$B(a, r) = \{x \in S_3(E) : | \overset{\frown}{xa} | \leq r\}$$

соответственно. Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы 3.1. 1) Пусть заданы $\varepsilon > 0$ и $a \in S_3(E)$. Прежде всего научимся во всяком кольце $\{x \in S_3(E) : R < | \overset{\frown}{xa} | < R' < \pi/2\}$ на единичной двумерной евклидовой сфере строить такой счетный набор кругов $\{\omega(a_i, s_i)\}$ с попарно непересекающимися внутренностями, что любая большая окружность сферы, пересекающая окружность $S(a, R)$ и не содержащая точку $a$, удалена хотя бы от одного из центров $a_i$ не более чем на $\varepsilon s_i$. Все расстояния между точками на сфере здесь и ниже меряются по сфере.

Отметим, что если расстояние между точками на единичной сфере равно $r$, то в евклидовой метрике трехмерного пространства расстояние между ними равно $2\sin(r/2)$.

Выберем числа $N \in \mathbb{N}$ и $c > 2$ настолько большими, что выполнены четыре условия:

$$R' - 1/N > R,$$

$$0,99t < \sin t < t \text{ при } t \in \left(0; \frac{1}{N^2}\right], \tag{3.20}$$

$$t < \arcsin t < 1,01t \text{ при } t \in \left(0; \frac{2\sin\frac{1}{N^2}}{\sin R}\right], \tag{3.21}$$

$$0,99c\sin R - 3\sin R' > 1. \tag{3.22}$$

Положим

$$r_k = R' - \frac{1}{N+k-1},\ k = 1, 2, \dots\ .$$

Тогда $\sin R < \sin r_k < \sin R'$ при $k = 1, 2, \dots$ . На сфере выберем конечный набор кругов $\{\omega_i^1\}_{i=1}^{m_1}$ с центрами $\{a_i^1\}_{i=1}^{m_1}$ на окружности $S(a, r_1)$ и равными радиусами $t_1$, так, чтобы соседние круги касались друг друга (касание происходит не на окружности $S(a, r_1)$). Докажем, что радиус $t_1$ можно выбрать из полуинтервала $[(r_2 - r_1)/c; (r_2 - r_1)/2)$. Посчитаем количество кругов с попарно непересекающимися внутренностями, которые можно поместить с центрами на окружности $S(a, r_1)$ и радиусами $t$ так, чтобы все соседние круги касались, за исключением, может быть, двух из них. Их количество — это целая часть от выражения

$$\frac{\pi}{\arcsin\frac{\sin t}{\sin r_1}}, \tag{3.23}$$

поскольку в двумерной плоскости, содержащей окружность $S(a, r_1)$, из центра этой окружности (в соответствующей плоскости) два центра касающих-

ся кругов радиуса $t$ видны под углом $2\arcsin(\sin t/\sin r_1)$. Покажем, что при $t=(r_2-r_1)/2=1/(2N(N+1))$ и $t=(r_2-r_1)/c=1/(cN(N+1))$ получается разное количество кругов. Для этого достаточно, чтобы разность между числами (3.23) при соответствующих $t$ была больше единицы. Оценим эту разность, воспользовавшись (3.21), (3.20) и (3.22):

$$\frac{\pi}{\arcsin\frac{\sin\frac{1}{cN(N+1)}}{\sin r_1}}-\frac{\pi}{\arcsin\frac{\sin\frac{1}{2N(N+1)}}{\sin r_1}}>\frac{\pi\sin r_1}{1,01\sin\frac{1}{cN(N+1)}}-\frac{\pi\sin r_1}{\sin\frac{1}{2N(N+1)}}$$

$$>\frac{\pi\sin r_1}{1,01\frac{1}{cN(N+1)}}-\frac{\pi\sin r_1}{0,99\frac{1}{2N(N+1)}}=\frac{c\pi N(N+1)\sin R}{1,01}-\frac{2\pi N(N+1)\sin R'}{0,99}$$

$$>0,99c\pi N(N+1)\sin R-3\pi N(N+1)\sin R'$$

$$\geq\pi N(N+1)(0,99c\sin R-3\sin R')>1.$$

Итак, максимальное количество последовательно касающихся кругов с центрами на $S(a,r_1)$ и радиусами $(r_2-r_1)/c$ хотя бы на единицу больше, чем с радиусами $(r_2-r_1)/2$. Значит, если на сфере так выбрать набор равных кругов, количество которых равно целой части от (3.23) при $t=(r_2-r_1)/c$, чтобы все соседние круги касались друг друга, то их радиус $t_1$ будет лежать в нужном полуинтервале $[(r_2-r_1)/c;(r_2-r_1)/2)$.

Центры кругов $\{a_i^1\}_{i=1}^{m_1}$ на единичной двумерной сфере являются вершинами правильного сферического многоугольника $\triangle_1=a_1^1\ldots a_{m_1}^1$ с периметром $|\triangle_1|$ (здесь и далее $|M|$ обозначает периметр множества $M$). На плоскости периметр всякого правильного многоугольника со сторонами-отрезками меньше длины описанной вокруг него окружности (в нашем случае это окружность $S(a,r_1)$) не более чем в два раза. Так как у всякого сферического многоугольника с теми же вершинами стороны длинней, чем у плоского, то периметр такого многоугольника тоже меньше длины указанной окружности менее чем

в два раза: $|\triangle_1| > |S(a,r_1)|/2$. Тогда

$$\left|S(a,r_1)\cap\bigcup_{i=1}^{m_1}B\left(a_i^1,\frac{\varepsilon}{2}t_1\right)\right| > \left|\triangle_1\cap\bigcup_{i=1}^{m_1}B\left(a_i^1,\frac{\varepsilon}{2}t_1\right)\right| = \\ = \frac{\varepsilon}{2}\left|\triangle_1\right| > \frac{\varepsilon}{4}\left|S(a,r_1)\right|. \tag{3.24}$$

Положим

$$H_1 = \left\{h\in B(a,R) : \angle ahx = \pi/2 \text{ для некоторого } x\in\bigcup_{i=1}^{m_1}B\left(a_i^1,\frac{\varepsilon}{2}t_1\right)\right\}.$$

Здесь $\angle$ обозначает сферический и ориентированный угол в области $B(a,R')$. Всякой точке $h$ множества $S(a,r)\cap H_1$ при $r<R$ можно поставить в соответствие такую точку $x$ множества $S(a,r_1)\cap\bigcup_{i=1}^{m_1}B(a_i^1,\varepsilon t_1/2)$, что $\angle ahx = \pi/2$, и наоборот. Следовательно, множество $S(a,r)\cap H_1$ — это гомотетия с центром $a$ и поворот относительно $a$ на определенный угол множества $S(a,r_1)\cap\bigcup_{i=1}^{m_1}B(a_i^1,\varepsilon t_1/2)$. Таким образом, в силу (3.24) при $r<R$ получаем

$$\frac{|S(a,r)\cap H_1|}{|S(a,r)|} = \frac{|S(a,r_1)\cap\bigcup\limits_{i=1}^{m_1}B(a_i^1,\frac{\varepsilon}{2}t_1)|}{|S(a,r_1)|} > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\mu_2(B(a,R)\cap H_1) > \frac{\varepsilon}{4}\mu_2(B(a,R)),$$

где $\mu_2$ — двумерная мера Лебега на сфере, и значит,

$$\mu_2(B(a,R)\setminus H_1) < \left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)\mu_2(B(a,R)).$$

Далее строим наборы кругов $\{\omega_i^2\}_{i=1}^{m_2}$, $\{\omega_i^3\}_{i=1}^{m_3}$, ... с центрами соответственно на окружностях $S(a,r_2)$, $S(a,r_3)$, ... по индукции. Допустим, построены первые $l-1$ наборов и для множеств

$$H_j = \left\{h\in B(a,R) : \angle ahx = \pi/2 \text{ для некоторого } x\in\bigcup_{i=1}^{m_j}B\left(a_i^j,\frac{\varepsilon}{2}t_j\right)\right\},$$
$$j = 1,\dots,l-1$$

выполнено неравенство

$$\mu_2\left(B(a,R)\setminus\bigcup_{j=1}^{l-1}H_j\right)<\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)^{l-1}\mu_2(B(a,R)). \tag{3.25}$$

Построим $l$-й набор.

Возьмем вспомогательный набор кругов $\{\nu_i^l\}_{i=1}^{m_l}$ с центрами $\{b_i^l\}_{i=1}^{m_l}$ на окружности $S(a,r_l)$ и равными радиусами $t_l$ так, чтобы соседние круги касались друг друга. Аналогично случаю $l=1$, радиус $t_l$ можно выбрать из полуинтервала $[(r_{l+1}-r_l)/c;(r_{l+1}-r_l)/2)$. При таком радиусе новые круги не пересекаются с уже построенными (потому как $t_{l-1}+t_l<(r_{l+1}-r_l)/2+(r_l-r_{l-1})/2<r_l-r_{l-1}$).

Положим

$$G_l=\left\{h\in B(a,R):\angle ahx=\pi/2 \text{ для некоторого } x\in\bigcup_{i=1}^{m_l}B\left(b_i^l,\frac{\varepsilon}{2}t_l\right)\right\}.$$

Аналогично (3.24) верно неравенство

$$\frac{|S(a,r)\cap G_l|}{|S(a,r)|}>\frac{\varepsilon}{4},\ \forall\ r\in(0;R],$$

откуда следует

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}I_{G_l}(r,\alpha)\ d\alpha>\frac{\varepsilon}{4},\ \forall\ r\in(0;R], \tag{3.26}$$

где $I_M$ — это индикатор множества $M$, записываемый как функция полярных координат в сферическом круге $B(a,R)$. Пусть $A$ — произвольное измеримое подмножество круга $B(a,R)$ и $\psi_\alpha$ — оператор поворота вокруг оси $0a$ на угол $\alpha$. Пусть $K(\bar a,\bar R)$ — плоский круг с границей $S(a,R)$ и $\mathrm{pr}:B(a,r)\to K(\bar a,\bar R)$ — ортогональная проекция. Пусть $\bar r$ и $\varphi$ — полярные координаты на круге $K(\bar a,\bar R)$, и $\rho(\bar r,\varphi)$ — такая функция на этом круге, что для всякого измеримого множества $A$ из $B(a,R)$ верно

$$\mu_2(A)=\int_{K_{(\bar a,\bar R)}}I_{\mathrm{pr}(A)}(\bar r,\varphi)\rho(\bar r,\varphi)d\bar r d\varphi.$$

Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mu_2(\psi_\alpha(G_l)\cap A)\ d\alpha =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\iint\limits_{K(\bar a,\bar R)} I_{\mathrm{pr}(\psi_\alpha(G_l))}(\bar r,\varphi)I_{\mathrm{pr}(A)}(\bar r,\varphi)\rho(\bar r,\varphi)\ d\bar r d\varphi\right)\ d\alpha =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\bar R}\int\limits_0^{2\pi} I_{\mathrm{pr}(A)}(\bar r,\varphi)I_{\mathrm{pr}(G_l)}(\bar r,\varphi-\alpha)\rho(\bar r,\varphi)\ d\varphi d\bar r d\alpha =$$

$$=\int\limits_0^{\bar R}\int\limits_0^{2\pi} I_{\mathrm{pr}(A)}(\bar r,\varphi)\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} I_{\mathrm{pr}(G_l)}(\bar r,\varphi-\alpha)\ d\alpha\right)\rho(\bar r,\varphi)\ d\bar r d\varphi =$$

$$=\int\limits_0^{\bar R}\int\limits_0^{2\pi} I_{\mathrm{pr}(A)}(\bar r,\varphi)\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} I_{G_l}(r,\alpha)\ d\alpha\right)\rho(\bar r,\varphi)\ d\bar r d\varphi >$$

$$>\frac{\varepsilon}{4}\iint\limits_{K(\bar a,\bar R)} I_{\mathrm{pr}(A)}(\bar r,\varphi)\rho(\bar r,\varphi)\ d\bar r d\varphi=\frac{\varepsilon}{4}\mu_2(A),$$

где неравенство следует из (3.26). Следовательно, найдется такое $\alpha$, что

$$\mu_2(A\cap\psi_\alpha(G_l))>\frac{\varepsilon}{4}\mu_2(A). \tag{3.27}$$

Пусть

$$A=B(a,R)\setminus\bigcup_{j=1}^{l-1}H_j.$$

Положим

$$\omega_i^l=\psi_\alpha(\nu_i^l),\ i=1,\dots,m_l,$$

$$a_i^l=\psi_\alpha(b_i^l),\ i=1,\dots,m_l$$

и

$$H_l=\left\{h\in B(a,R):\angle ahx=\pi/2 \text{ для некоторого } x\in\bigcup_{i=1}^{m_l}B\left(a_i^l,\frac{\varepsilon}{2}t_l\right)\right\}$$

Заметим, что $H_l = \psi_\alpha(G_l)$, а точки $a_i^l$ — это центры кругов $\omega_i^l$. Перепишем неравенство (3.27) в новых обозначениях:

$$\mu_2\left(\left(B(a,R)\setminus\bigcup_{j=1}^{l-1}H_j\right)\cap H_l\right) > \frac{\varepsilon}{4}\mu_2\left(B(a,R)\setminus\bigcup_{j=1}^{l-1}H_j\right),$$

что вместе с (3.25) дает

$$\mu_2\left(B(a,R)\setminus\bigcup_{j=1}^{l}H_j\right) < \left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)\mu_2\left(B(a,R)\setminus\bigcup_{j=1}^{l-1}H_j\right) < \left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)^l\mu_2\left(B(a,R)\right). \tag{3.28}$$

Итак, построены наборы кругов $\{\omega_i^2\}_{i=1}^{m_2}$, $\{\omega_i^3\}_{i=1}^{m_3}$, $\ldots$, $\{\omega_i^l\}_{i=1}^{m_l}, \ldots$, для которых неравенство (3.28) выполнено при каждом $l = 1, 2, \ldots$.

Пусть большая окружность $C$ пересекает $S(a,R)$ и не содержит точку $a$. Пусть $y$ — это основание перпендикуляра из точки $a$ на большую окружность $C$, лежащее в круге $B(a,R)$.

Заметим, что

$$\mu_2(B(y,\delta)) = 4\pi\sin^2\frac{\delta}{2}$$

и

$$\rho(C,C') := \sup_{z\in C}\inf_{z'\in C'} |\,\overset{\frown}{zz'}\,| = O(\delta),\ \delta\to 0,$$

где $C'$ есть большая окружность, основание перпендикуляра на которую из точки $a$ удалено от точки $y$ не более, чем на $\delta$. Также очевидно соотношение

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)^{l/2} = o\left(\frac{1}{N+l}-\frac{1}{N+l+1}\right),\ l\to\infty$$

где $\varepsilon$ и $N$ выбраны в начале доказательства. Возьмем такую функцию $\lambda(l)$, что

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)^{l/2} = o(\lambda(l)),\ \lambda(l) = o\left(\frac{1}{N+l}-\frac{1}{N+l+1}\right),\ l\to\infty.$$

Тогда для достаточно больших $l$ и $\delta = \lambda(l)$ выполнены неравенства

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)^l\mu_2(B(a,R)) < \mu_2(B(y,\delta)) \tag{3.29}$$

и

$$\rho(C, C') < \frac{\varepsilon}{2c}\left(\frac{1}{N+l} - \frac{1}{N+l+1}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} t_l. \tag{3.30}$$

Из (3.29) и (3.28) получаем, что найдутся такие точки $y' \in B(y, \delta)$ и $x' \in B(a_i^k, \varepsilon t_k/2)$, где $a_i^k$ — центр одной из окружностей $\omega_i^k$ $(k \leq l)$, что $\angle a y' x' = \pi/2$. Из (3.30) следует, что расстояние между большой окружностью $C$ и большой окружностью $C'$, которая проходит через точку $y'$ и ортогональна дуге $ay'$, не более чем $\varepsilon t_k/2$. Поэтому на большой окружности $C$ найдется точка $x$, удаленная от одного из центров $a_i^k$ не более чем на $\varepsilon t_k$.

В итоге, объединив все наборы $\{\omega_i^2\}_{i=1}^{m_2}$, $\{\omega_i^3\}_{i=1}^{m_3}$, ... в один набор $\{\omega(a_i, s_i)\}$, получим, что любая большая окружность сферы, пересекающая окружность $S(a, R)$ и не содержащая точку $a$, удалена хотя бы от одного из центров $a_i$ не более чем на $\varepsilon s_i$.

2) Построим на сфере такие вспомогательные круги, что любая большая окружность сферы пересекает хотя бы один вспомогательный круг и не содержит его центр. Впишем в сферу правильный додекаэдр и соединим соседние его вершины кратчайшими дугами по сфере. Получим замощение сферы правильными пятиугольниками. На сфере построим вспомогательные круги $\Omega_1^+, \Omega_1^-, \ldots, \Omega_{10}^+, \Omega_{10}^-$ (круги $\Omega_\tau^+, \Omega_\tau^-$ симметричны относительно нуля) с центрами в вершинах додекаэдра и такими равными радиусами, чтобы круги с центрами в соседних вершинах додекаэдра касались. Эти круги касаются друг друга в серединах сторон сферических пятиугольников (см. рис. 3.1). Наше разбиение сферы на пятиугольники, как и додекаэдр, имеет 15 плоскостей симметрии, каждая из которых проходит через одну из вершин и середину противоположного ей ребра пятиугольника с этой вершиной. Всякая большая окружность сферы, не лежащая в плоскости симметрии нашего разбиения, пересекает какой-нибудь из вспомогательных кругов не проходя через его центр. И есть 15 больших окружностей, лежащих в плоскостях симмет-

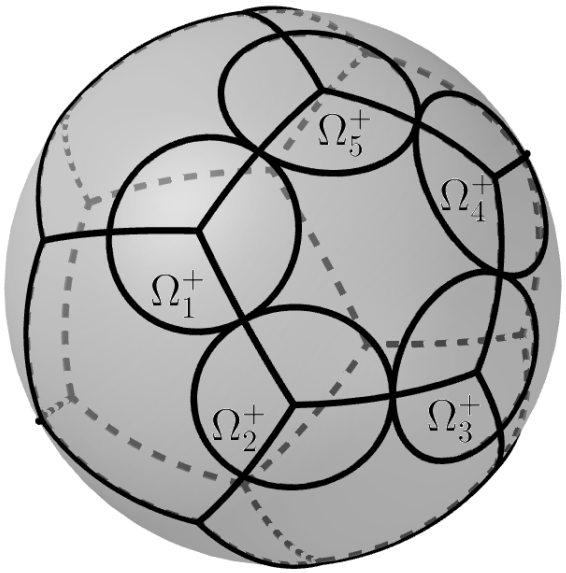



Рис. 3.1.

рии, которые если и пересекают вспомогательные круги, то проходят через их центр. Добавим на сфере еще 15 пар вспомогательных кругов, чтобы каждая пара была симметрична относительно нуля, чтобы все 30 кругов не пересекались между собой и с уже построенными вспомогательными кругами, и чтобы 15 указанных выше больших окружностей пересекали их и не проходили через их центр. Обозначим эти круги $\Omega_{11}^+, \Omega_{11}^-, \ldots, \Omega_{25}^+, \Omega_{25}^-$. Заметим также, что если большая окружность пересекает круг $\Omega_\tau^-$, то она пересекает и круг $\Omega_\tau^+$.

Внутри каждого круга $\Omega_\tau^+$ построим свой набор кругов. Пусть радиус $\Omega_\tau^+$ равен $R$ и центр круга находится в точке $a$. Возьмем такую возрастающую последовательность положительных чисел $R_n$, что $R_n \to R$ при $n \to \infty$, и такую последовательность $\varepsilon_n$, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $0 < \varepsilon_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ внутри кольца $\{R_n < | \overset{\frown}{xa} | < R_{n+1}\}$ по пункту 1) доказательства мы умеем строить такой набор кругов $\{\omega(a_i(n), s_i(n))\}$ с попарно непересекающимися внутренностями, что любая большая окружность сферы, пересекающая окружность $S(a, R_n)$ и не содержащая точку $a$, удалена хотя бы от одного из центров $a_i(n)$ не более чем на $\varepsilon_n s_i(n)$. Для удобства в дальнейшем считаем, что никакие три центра $a_i(n_1)$, $a_j(n_2)$ и $a_k(n_3)$ (для по-

парно различных $n_1$, $n_2$ и $n_3$) не лежат на одной большой окружности. Этого можно добиться, поворачивая кольца с построенными внутри кругами вокруг оси $0a$: пусть построены первые $k$ колец с этим условием; через всевозможные пары центров кругов двух разных колец проходит счетное количество больших окружностей, тогда существует такой поворот $(k+1)$-го кольца, что его счетное количество центров кругов не попадает ни на какую указанную большую окружность. В круге $\Omega_\tau^-$ строим набор кругов, симметричный уже построенному набору в $\Omega_\tau^+$.

Таким образом, для всякого $\varepsilon > 0$ и для всякой большой окружности $C$ найдется круг $\Omega_\tau^+$ из набора $\{\Omega_1^+, \ldots, \Omega_{25}^+\}$ с центром в точке $a \notin C$, который она пересекает. Для каждого такого круга найдутся такие $R_n$ и $\varepsilon_n$, что большая окружность $C$ пересекает окружность $S(a, R_n)$ и $\varepsilon_n < \varepsilon$. Также пусть $n$ будет настолько большим, что большая окружность $C$ не содержит центры $a_i(n)$ — это возможно, поскольку на любой большой окружности по построению могут лежать центры кругов максимум из двух разных колец. Для всякого $n$ найдется такой круг $\omega_i(a_i(n), s_i(n))$, что окружность $C$ удалена от $a_i(n)$ не более чем на $\varepsilon_n s_i(n)$.

Объединим все наборы кругов, построенных в $\Omega_1^+, \Omega_1^-, \ldots, \Omega_{25}^+, \Omega_{25}^-$, в один набор $\{\omega(a_i, s_i)\}$. В итоге получаем на сфере такой центрально-симметричный набор кругов $\{\omega(a_i, s_i)\}$ с попарно непересекающимися внутренностями, что для всякого $\varepsilon > 0$ и для всякой большой окружности $C$ найдется такой круг $\omega(a_i, s_i)$, что окружность $C$ удалена от $a_i$ не более чем на $\varepsilon s_i$ и не содержит точку $a_i$.

3) Теперь построим центрально-симметричную выпуклую поверхность, которая будет являться единичной сферой искомого банахова пространства. Пусть $\{\omega(a_i, s_i)\}$ — набор кругов из пункта 2). Заметим, что евклидово расстояние $d(-a_i, \partial\omega(a_i, s_i))$ от точки $-a_i$ до любой точки окружности $\partial\omega(a_i, s_i)$

одно и то же. Положим

$$S_3(X) = \left( S_3(E) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \omega(a_i, s_i) \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} \upsilon_i \right),$$

где $\upsilon_i$ — меньший круг на двумерной евклидовой сфере с центром в точке $-a_i$ и радиусом $d(-a_i, \partial\omega(a_i, s_i))$, ограниченный окружностью $\partial\omega(a_i, s_i)$. Поверхность $S_3(X)$ центрально-симметрична и строго выпукла, поэтому она задает сферу строго выпуклого банахова пространства $X$.

Докажем, что $X$ — искомое банахово пространство.

Так как $X$ строго выпукло, то любая прямая в нем является чебышевским множеством.

Пусть $Q_S(Y)$ обозначает множество всевозможных точек касания сферы $S_3(X)$ с прямыми, параллельными прямой $Y$, то есть множество $Q(Y) \cap S_3(X)$. Пусть $C$ — это большая окружность сферы $S_3(E)$, лежащая в плоскости $\pi$, проходящей через нуль и перпендикулярной $Y$. По построению на сфере $S_3(E)$ для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой круг $\omega(a_j, s_j)$, что окружность $C$ удалена от $a_j$ не более чем на $\varepsilon s_j$ и не содержит точку $a_j$. Заметим, что

$$S_3(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \upsilon_i = S_3(E) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \omega(a_i, s_i).$$

Множество всевозможных точек касания сферы $S_3(E)$ с прямыми, параллельными прямой $Y$, — это окружность $C$. Поэтому часть $Q_S(Y)$, лежащая в $S_3(E) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \omega(a_i, s_i)$, является пересечением этого множества с плоскостью $\pi$. Множество всевозможных точек касания сферы с центром в точке $-a_j$ и радиусом $d(-a_j, \partial\omega(a_j, s_j))$ с прямыми, параллельными прямой $Y$, — это большая окружность рассматриваемой сферы, которая лежит в плоскости $\lambda$, проходящей через точку $-a_j$ и перпендикулярной $Y$. Следовательно, часть $Q_S(Y)$, лежащая в круге $\upsilon_j$, принадлежит плоскости $\lambda$. Плоскости $\pi$ и $\lambda$ не совпадают, поскольку в этом случае в плоскости $\pi$ лежала бы точка $-a_j$, а

значит, и точка $a_j$, чего не может быть, поскольку окружность $C$ не содержит точку $a_j$. Поскольку плоскости $\pi$ и $\lambda$ параллельны, а $Q_S(Y)$ есть непрерывная кривая на $S_3(X)$, то она содержит часть окружности $\partial\omega(a_j, s_j)$, заключенной между этими плоскостями. Пусть точка $c_j$ — это одна из точек пересечений большой окружности $C$ и $\partial\omega(a_j, s_j)$, $C_j$ — большая окружность сферы $S_3(E)$, проходящая через точки $a_j$ и $c_j$, и $Y_j$ — прямая, перпендикулярная плоскости, содержащей большую окружность $C_j$, и проходящая через нуль. Тогда

$$\inf_{q_1,q_2\in Q_S(Y)} \angle(Y, q_1 - q_2) \leq \angle(Y, Y_j + c_j), \tag{3.31}$$

так как прямая $Y_j + c_j$ является касательной к $\partial\omega(a_j, s_j)$ в точке $c_j$.

Также известно, что

$$\angle(Y, Y_j + c_j) = \angle(Y, Y_j) = \angle(C, C_j). \tag{3.32}$$

Угол между большими окружностями — это угол между содержащими их плоскостями. Расстояние от точки $a_j \in C_j$ до плоскости, которая содержит $C$, не более чем $\sin \varepsilon s_j$. Высота, опущенная из точки $a_j$ на общую прямую плоскостей, содержащих $C$ и $C_j$, то есть прямую $0c_j$, равна $\sin s_j$. Таким образом,

$$\angle(C, C_j) \leq \arcsin \frac{\sin \varepsilon s_j}{\sin s_j}. \tag{3.33}$$

Поскольку $\varepsilon$ можно взять каким угодно, а величина $s_j$ ограничена $\pi/2$, то объединив (3.31), (3.32) и (3.33) при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\inf_{q_1,q_2\in Q_S(Y)} \angle(Y, q_1 - q_2) = 0. \tag{3.34}$$

Осталось заметить, что для всякой точки $x \in \mathbb{R}^3$

$$\|x\| \geq |x|,$$

поскольку единичный шар пространства $X$ содержится в единичном шаре евклидового пространства, и

$$\rho(x, Y) \leq k d(x, Y),$$

где $k > 0$ абсолютная константа, при которой единичный шар евклидового пространства содержится в шаре радиуса $k$ пространства $X$ (то есть $\|x\| \leq k|x|$ для всякого $x \in \mathbb{R}^3$). Из последних двух неравенств следует, что

$$\frac{\rho(q_1 - q_2, Y)}{\|q_1 - q_2\|} \leq k \frac{d(q_1 - q_2, Y)}{|q_1 - q_2|} = k \sin \angle(Y, q_1 - q_2).$$

Отсюда и из (3.34) получаем

$$\lambda(Y) \leq \inf_{q_1, q_2 \in Q_S(Y)} k \frac{d(q_1 - q_2, Y)}{|q_1 - q_2|} = \inf_{q_1, q_2 \in Q_S(Y)} k \sin \angle(Y, q_1 - q_2) = 0,$$

что по лемме A и требовалось.

Теорема 3.1 доказана.

# Список литературы


[1] А.Р. Алимов, И.Г. Царьков, Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи матем. наук, **71**:1(427) (2016), 3–84.

[2] А.Р. Алимов, И.Г. Царьков, Чебышёвский центр множества, константа Юнга и их приложения // Успехи матем. наук, **74**:5(449) (2019), 3–82.

[3] В.С. Балаганский, Л.П. Власов, Проблема выпуклости чебышевских множеств // Успехи матем. наук, **51**:6 (1996), 125–188.

[4] Б.Б. Беднов, Длина минимального заполнения типа звезды // Матем. сборник, **207**:8 (2016), 31–46.

[5] Б.Б. Беднов, Длина минимального заполнения пятиточечного метрического пространства // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2017, вып. **6**, 3–8.

[6] Б.Б. Беднов, П.А. Бородин, Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сборник, **205**:4 (2014), 3–20.

[7] Б.Б. Беднов, П.А. Бородин, К.В. Чеснокова, Существование липшицевых выборок из точек Штейнера // Матем. сборник, **209**:2 (2018), 3–21.

[8] Б.Б. Беднов, Н.П. Стрелкова, О существовании кратчайших сетей в банаховых пространствах // Матем. заметки, **94**:1 (2013), 46–54.

[9] В. И. Бердышев, Пространства с равномерно непрерывной метрической проекцией // Матем. заметки, **17**:1 (1975), 3–12.

[10] В. Бляшке, Круг и шар, М., Наука, 1967.

[11] П.А. Бородин, Коэффициент линейности оператора метрического проектирования на чебышевское подпространство // Матем. заметки, **85**:2 (2009), 180–188.

[12] П.А. Бородин, Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве // Матем. заметки, **87**:4 (2010), 514–518.

[13] Д.Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В.. Иванов, Курс метрической геометрии, М.–Ижевск, 2004.

[14] Л.П. Власов, Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Успехи матем. наук, **28**:6 (1973), 3–66.

[15] А.Л. Гаркави, Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах, Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1967, М., ВИНИТИ, 1969, 75–132.

[16] А.Л. Гаркави, В.А. Шматков, О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве // Матем. сборник, **95(137)**:2(10) (1974), 272–293.

[17] В.А. Залгаллер, О $k$-мерных направлениях, особых для выпуклого тела $F$ в $R^n$ // Зап. научн. сем. ЛОМИ, **27** (1972), 67–72.

[18] А.Ю. Еремин, Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Матем. сборник, **204**:9 (2013), 51–72.

[19] Н.В. Ефимов, С.В. Стечкин, Некоторые свойства чебышевских множеств // Докл. АН СССР , **118**:1 (1958), 17–19.

[20] Н.В. Ефимов, С.В. Стечкин, Аппроксимативная компактность и чебышевские множества // Докл. АН СССР, **140**:3 (1961), 522–524.

[21] А.О. Иванов, А.А. Тужилин, Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сборник, **203**:5 (2012), 65–118.

[22] А.О. Иванов, А.А. Тужилин, Теория экстремальных сетей, М.–Ижевск, 2003.

[23] А.Н. Колмогоров, Замечания по поводу многочленов П.Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции // Успехи матем. наук, **3**:1 (1948), 216–221.

[24] Р. Курант, Г. Роббинс, Что такое математика? М.-Ижевск, 2001.

[25] К. Лейхтвейс, Выпуклые множества, М., Наука, 1985.

[26] А.С. Пахомова, Оценки для суботношения Штейнера и отношения Штейнера–Громова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ. 2014, вып. **1**, 17–25

[27] Г.Ш. Рубинштейн, Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве // Сиб. матем. журн. **6**:3 (1965), 711–714.

[28] Изложение лекций С. Б. Стечкина по теории приближений, Екатеринбург, изд-во УрО РАН, 2010.

[29] П.Л. Чебышев, Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций, 1859 // кн.: Чебышев П.Л. Полн. собр. соч., Т. 2. Изд-во АН СССР, М.-Л., 1947, 151–235.

[30] И.М. Яглом, В.Г. Ашкинузе, Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. Часть 1. Аффинная геометрия, М., Учпедгиз, 1962.

[31] M. Baronti, E. Casini, P.L. Papini, Equilateral sets and their central points // Rend. Mat. Appl., **13**:1 (1993), 133–148.

[32] C. Benítez, M. Fernández, M.L. Soriano Location of Fermat–Torricelli medians of three points // Trans. Amer. Math. Soc., **354**:12 (2002), 5027–5038.

[33] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, Geometric Nonlinear Functional Analysis // Colloquium Publications, **48**, American Mathematical Society, Providence (2000).

[34] A.S. Besicovitch, On the set of directions of linear segments on a convex surface // Proc. Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math. (Convexity), **7** (1963), 24–25.

[35] M. Baronti, E. Casini, P. L. Papini, Equilateral sets and their central points // Rend. Mat. Appl. , **13**:1 (1993), 133–148.

[36] E.W. Cheney, D.E. Wulbert, The existence and unicity of best approximation // Math. Scand., **24**:1 (1969), 113–140.

[37] D. Cieslik, Steiner Minimal Trees, Springer, 1998.

[38] D. Cieslik, The Steiner Ratio, Springer, 2001.

[39] E.W. Cheney, Introduction to approximation theory, American Mathematical Society, Providence, 1998.

[40] C.F. Gauss, Briefwechsel Gauss–Schuhmacher, Werke Bd. X, 1, Göttingen, 1917, 459–468.

[41] H. Edelsbrunner, A. Ivanov, R. Karasev, Current Open Problems in Discrete and Computational Geometry // Model. Anal. Inform. Sist., **19**:5 (2012), 5–17.

[42] R. Holmes, B. Kripke, Smoothness of approximation // Michigan Math. J., **15**:2 (1968), 225–248.

[43] F.K. Hwang, D. Richards, P. Winter, The Steiners Tree Problem, Elsevier Science Publishers, 1992.

[44] A. Grothendieck, Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces $L^1$ // Canad. J. Math., **7** (1955), 552–561.

[45] A. Haar, Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen // Math. Ann., **78** (1918), 294–311.

[46] A.O. Ivanov, A.A. Tuzhilin, Minimal networks: the Steiner problem and its generalizations, CRC Press, Boca Raton Ann Arbor, London–Tokyo, 1994.

[47] V. Jarník, M. Kössler, O minimálních grafech, obsahujících $n$ daných bodu // Cas. pro Pest. Mat. a Fys., **63** (1934), 223–235.

[48] P. Jordan, J.von Neumann, On inner products in linear metric spaces // Ann. Math., **36**:3 (1935), 719–723.

[49] V. Kadets, Under a suitable renorming every nonreflexive Banach space has a finite subset without a Steiner point // Matematychni Studii, **36**:2 (2011), 197–200.

[50] H. König, N. Tomczak-Jaegermann, Norms of minimal projections // J. Funct. Anal., **119**:2 (1994), 253–280.

[51] A. Lima, Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc., **227** (1977), 1–62.

[52] J. Lindenstrauss, Extension of compact operators // Mem. Amer. Math. Soc., **48** (1964), 1–112.

[53] T.J. McMinn, On the line segments of a convex surface in $E_3$ // Pacific J. Math., **10**:3 (1960), 943–946.

[54] P.L. Papini, Two new examples of sets without medians and centers // Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Top, **13**:2 (2005), 315–320.

[55] W. Rudin, K.T. Smith, Linearity of best approximation: a characterization of ellipsoids // Indagationes Mathematicae, **23**:1 (1961), 97–103.

[56] I. Singer, Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces, Springer, 1970.

[57] L. Vesely, A characterization of reflexivity in the terms of the existence of generalized centers // Extracta Mathematica, **8**:2-3 (1993), 125–131.

[58] L. Vesely, Generalized centers of finite sets in Banach spaces // Acta Math. Univ. Comenianae, **66**:1 (1997), 83–115.

[59] D. Wolfe, A minimal point of a finite metric set // Journal of Combinatorial Theory, **2** (1967), 514–522.

**Работы автора по теме диссертации:**

[60] Л. Ш. Бурушева, Банаховы пространства, в которых длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками // Матем. сборник, **210**:3 (2019), 3–16.

[61] Л. Ш. Бурушева, Суботношение Штейнера в банаховых пространствах // Матем. заметки, **106**:2 (2019), 188–197.

[62] Л. Ш. Бурушева, Пример банахова пространства с нелипшицевой метрической проекцией на всякую прямую // Матем. заметки, **109**:2 (2021), 196–205.

*Тезисы конференций:*

[63] Л.Ш. Бурушева, Банаховы пространства, в которых длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками // Современные методы теории функций и смежные проблемы, Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы, Саратов, 2018, стр. 69.

[64] Л.Ш. Бурушева, Суботношение Штейнера в банаховых пространства, Современные методы теории функций и смежные проблемы, Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 2019, стр. 63.