# ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации Л.Ш. Бурушевой "Метрические свойства кратчайших сетей в банаховых пространствах", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена вопросам геометрии банаховых пространств, связанным с кратчайшими сетями, то есть связными графами минимальной длины, затягивающими конечные подмножества этих пространств, и близким вопросам геометрической теории приближений.

Кратчайшие сети — один из основных объектов исследования в метрической геометрии, возникший еще в работах К. Гаусса и Я. Штейнера. Тем не менее, систематическое изучение кратчайших сетей в линейных нормированных пространствах началось сравнительно недавно. Приведем краткую историю исследования вопроса существования кратчайших сетей. А.Л. Гаркави в 1974 г. впервые построил пример несуществования кратчайшей сети для трех точек в некотором бесконечномерном банаховом пространстве. Другие примеры этого типа строились М. Баронти, Е. Казини, Р. Папини, П.А. Бородиным. Л. Веселы (1993) и независимо В.М. Кадец (2011) доказали, что такой пример можно построить в любом нерефлексивном пространстве при должном эквивалентном перенормировании. Н.П. Стрелкова (2013) для произвольного $n \geqslant 3$ построила пример несуществования кратчайшей сети у $n$ точек банахова пространства. Б.Б. Беднов (2013) выделил классы банаховых пространств, в которых кратчайшие сети существуют для всякого конечного набора точек. Таким образом, кратчайшая сеть для заданного набора точек в заданном пространстве может не существовать, в то время как ее длина всегда определена как соответствующий infimum.

Новое направление в теории кратчайших сетей возникло в недавней работе А.О. Иванова и А.А. Тужилина (2012) и связано с минимальными заполнениями конечного метрического пространства $M$, то есть с кратчайшими сетями минимально возможной длины, затягивающими изометрические вложения $M$ в различные нормированные пространства. В частности, Б.Б. Беднов и П.А. Бородин (2014) доказали, что банахово пространство реализует минимальные заполнения для всех своих конечных подмножеств тода и только тогда, когда оно предуально к $L_1$. Отсюда следует, что в предуальных к $L_1$ пространствах длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками затягиваемого множества. Ясно, что в гильбертовых пространствах это утверждение также верно. Возник вопрос об описании банаховых пространств, в которых длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками затягиваемого множества. Л.Ш. Бурушева отвечает на этот вопрос в своей диссертации.

В первой главе работы доказывается, что банахово пространство $X$, обладающее свойствами (а) кратчайшие сети в $X$ существуют для всех его конечных подмножеств и (б) длина кратчайшей сети в $X$ зависит только от попарных расстояний между точками затягиваемого множества, изометрически изоморфно либо гильбертову пространству, либо пространству, предуальному к $L_1$. В частности, из конечномерных нормированных пространств (автоматически обладающих свойством (а)) свойством (б) обладают только пространства $\ell_2^n$ и $\ell_\infty^n$.

А.О. Иванов и А.А. Тужилин поставили вопрос о сравнении длины минимального заполнения заданного конечного подмножества $M$ метрического пространства $X$ и длины кратчайшей сети, затягивающей $M$ в самом $X$. Точная нижняя грань отношений этих величин по всем конечным неодноточечным $M$ называется суботношением Штейнера пространства $X$. А.С. Пахомова (2014) установила, что это суботношение всегда

заключено между $1/2$ и 1, а если ограничиться только $n$-точечными множествами $M$, то между $n/(2n-2)$ и 1. Для пространств, реализующих минимальные заполнения, т. е. для предуальных к $L_1$ пространств, суботношение Штейнера равно 1. Возник вопрос о точности нижних оценок суботношения Штейнера.

Л.Ш. Бурушева во второй главе диссертации доказала, что минимум суботношения Штейнера для $n$-точечных множеств в банаховых пространствах равен $n/(2n-2)$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Соответствующий пример построен в $(n-1)$-мерном пространстве, единичный шар в котором представляет собой многогранник, равный алгебраической разности двух одинаковых симплексов. Построен также пример бесконечномерного банахова пространства с минимально возможным суботношением Штейнера $1/2$.

В третьей главе диссертации построен пример трехмерного строго выпуклого нормированного пространства, в котором метрическая проекция на всякую прямую нелипшицева. Этот результат относится к классической тематике геометрической теории приближений. Формально он не связан с кратчайшими сетями, однако на идейном уровне такая связь в диссертации имеется: во второй главе кратчайшая сеть мыслится как метрическая проекция на специальное подпространство в декартовом произведении нескольких копий исходного пространства.

При доказательстве своих результатов Л.Ш. Бурушевой пришлось преодолеть существенные технические трудности. Уровень сложности доказательств всех трех основных теорем диссертации значительно выше обычного уровня доказательств в кандидатской диссертации.

Тема диссертации актуальна, полученные результаты новы, интересны и могут быть использованы в научных исследованиях, ведущихся в МГУ имени М.В. Ломоносова, Институте математики и механики УРО РАН (Екатеринбург), Московском физико-техническом институте, Ярославском, Воронежском, Саратовском и Тульском государственных университетах. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации; основные результаты диссертации опубликованы и апробированы на различных семинарах и конференциях.

Считаю, что диссертация "Метрические свойства кратчайших сетей в банаховых пространствах" удовлетворяет всем требованиям ВАК, а ее автор Л.Ш. Бурушева заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Д.ф.-м.н., профессор РАН П.А. Бородин

Подпись П.А. Бородина заверяю