МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*

**Степанова Мария Александровна**

# ГОЛОМОРФНО НЕВЫРОЖДЕННЫЕ CR-МНОГООБРАЗИЯ И ИХ АВТОМОРФИЗМЫ

1.1.1 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор В.К. Белошапка

Москва — 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ..... **3**

ГЛАВА 1. CR-многообразия бесконечного типа по Блуму-Грэму ..... **17**
1. Введение ..... **17**
2. Стандартная форма ростка многообразия бесконечного типа ..... **19**
3. Отображения между ростками многообразий в стандартной форме .. **36**
4. Критерий конечномерности алгебры инфинитезимальных автоморфизмов многообразия равномерно бесконечного типа ..... **41**
5. Аналитическая структура множеств фиксированного типа по Блуму-Грэму ..... **46**

ГЛАВА 2. Голоморфно однородные CR-многообразия и их модельные поверхности ..... **50**
1. Введение ..... **50**
2. Модельная поверхность однородного многообразия ..... **51**
3. Ограничения на кратности в типе однородного многообразия ..... **57**

ГЛАВА 3. Автоморфизмы CR-подмногообразий комплексного гильбертова пространства ..... **62**
1. Введение ..... **62**
2. Вполне невырожденные многообразия ..... **64**
3. Примеры многообразий с конечномерными алгебрами $\mathfrak{g}_+$ ..... **76**
4. Системы дифференциальных уравнений, соответствующие многообразиям $M_{s,n}$ ..... **84**

ГЛАВА 4. Модификация теоремы Блума-Грэма: введение весов в комплексном касательном пространстве ..... **87**
1. Введение ..... **87**
2. Основные определения ..... **90**
3. Примеры ..... **95**
4. Формулировка теоремы ..... **96**
5. Доказательство в случае взвешенно однородной поверхности ..... **96**
6. Разложение пространства дифференциальных операторов однородного веса с постоянными коэффициентами в прямую сумму ..... **100**
7. Вычисление типа в однородном случае и завершение доказательства **101**

ЛИТЕРАТУРА ..... **103**

# ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.**

Работа посвящена CR-многообразиям – одним из центральных объектов исследования в многомерном комплексном анализе. Данная тематика лежит на стыке теории функций многих комплексных переменных, теории групп и алгебр Ли, дифференциальной геометрии и уравнений в частных производных.

Главными объектами исследования являются вложенные CR-подмногообразия комплексного пространства, их полиномиальные модельные поверхности и голоморфные автоморфизмы.

Результаты могут быть интересны также и для теории обыкновенных дифференциальных уравнений ввиду наличия естественного соответствия между CR-многообразием и системой дифференциальных уравнений, интегральными многообразиями которой являются поверхности Сегре рассматриваемого CR-многообразия.

Исследования вещественных подмногообразий комплексного пространства восходят к работе А. Пуанкаре 1907-го года [37], в которой изучаются вещественные подмногообразия размерности три в двумерном комплексном пространстве. Данная ситуация является самой маломерной как с точки зрения CR-размерности (т.е. размерности комплексного подпространства касательного пространства), так и с точки зрения коразмерности – обе эти величины равны единице. Однако уже здесь обнаруживаются эффекты, возникающие в произвольной многомерной ситуации. Среди прочего была выявлена особая роль трехмерной сферы $Q = \{\operatorname{Im} w = |z|^2\}$ для всякой Леви-невырожденной гиперповерхности $M$ в $\mathbb{C}^2$. Так, размерность алгебры Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов $\operatorname{aut} M_p$ ростка в точке $p$ поверхности $M$ не превосходит раз-

мерности алгебры Ли $\operatorname{aut} Q$. Сфера в данном случае является *модельной поверхностью* для $M_p$ и определяет многие алгебраические свойства $M_p$.

Данный подход был развит в работах С. Черна и Ю. Мозера [30] для случая Леви-невырожденной гиперповерхности произвольной CR-размерности – здесь роль модельных поверхностей играют гиперквадрики (поверхности, которые задаются квадратичными вещественнозначными полиномами специального вида). С ростом CR-размерности ситуация становится более разнообразной: тогда как в $\mathbb{C}^2$ имеется ровно одна невырожденная квадрика, в пространствах большей размерности квадрики различаются сигнатурами их форм Леви. В частности, свойства поверхностей со знакоопределенной формой Леви (строго псевдовыпуклых) существенно отличаются от свойств поверхностей, формы которых не являются знакоопределенными. Например, локальное голоморфное отображение строго псевдовыпуклых вещественно аналитических несферических гиперповерхностей $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ продолжается по всем путям в $\Gamma_1$ (С.И. Пинчук [17]), тогда как при отсутствии строгой псевдовыпуклости такое отображение может оказаться непродолжаемым (В.К. Белошапка [2]).

Работа Черна и Мозера послужила стимулом для появления большого числа работ. Упомянем работы Ч. Феффермана, Д. Бернса, С. Шнайдера, Р. Уэллса, С. Вебстера, С.И. Пинчука, В.К. Белошапки, А.В. Лободы, В.В. Ежова, Н.Г. Кружилина ([1], [9], [12], [13], [16], [26], [33], [42]).

Дальнейшие рассмотрения шли в направлении увеличения коразмерности поверхности (М. Баоуенди, П. Эбенфельд, Л. Ротшильд [19], Н. Стэнтон [39], [40], Д. Зайцев [43], А. Сухов [18]). В работах В.К. Белошапки подход Пуанкаре оформился в метод модельной поверхности для вполне невырожденных

многообразий произвольной CR-размерности и коразмерности [5]. Далее указанный подход был обобщен на бесконечномерные гильбертовы пространства [7], а также на более широкий класс невырожденных поверхностей (голоморфная невырожденность + конечный тип по Блуму-Грэму) [24].

Описанное направление развития использовало аналитическую технику. Однако такой подход к изучению CR-многообразий не является единственным, параллельно с ним сформировалась и другая техника – геометрическая. Она последовательно разрабатывалась в работах Э. Картана [27], Н. Танаки [41], в геометрической части работы Черна и Мозера [30] (редукция $G$-структур), в работах В.В. Ежова, А. Исаева, Г. Шмальца [31], [32].

С точки зрения групп голоморфных автоморфизмов наиболее интересны CR-многообразия с богатыми группами. В частности, отдельного внимания заслуживают голоморфно однородные многообразия (т.е. такие, на которых группа автоморфизмов действует локально транзитивно). Они естественным образом возникают при изучении вполне невырожденных CR-многообразий: все модельные поверхности таких многообразий голоморфно однородны, причем на них группа автоморфизмов действует глобально транзитивно.

В малых размерностях голоморфно однородные многообразия изучены очень подробно. Так, в работе Э. Картана [27] дана полная классификация голоморфно однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$, в $\mathbb{C}^3$ также имеется полная классификация однородных гиперповерхностей: Леви-вырожденные гиперповерхности классифицированы в работе Г. Фелса и В. Каупа [34], а все Леви-невырожденные поверхности недавно (2020 г.) были полностью классифицированы А.В. Лободой и его коллегами [15]; в работе [22] В.К. Белошапкой и И.Г. Коссовским получен пол-

ный список (с точностью до локальной CR-эквивалентности) локально однородных CR-многообразий размерности четыре; в [6] и [21] изучены и классифицированы все орбиты действия группы автоморфизмов кубической модельной поверхности в пространстве $\mathbb{C}^3$ на всем объемлющем пространстве $\mathbb{C}^3$.

Работу можно разделить на четыре основные части, которые соответствуют главам.

В первой главе обсуждаются многообразия бесконечного типа по Блуму-Грэму. При изучении геометрии CR-многообразий в той или иной форме появляются условия невырожденности. Как было сказано выше, в работе [24] был введен достаточно широкий класс невырожденных многообразий, на которые был распространен метод модельной поверхности. При этом одним из оснований теории послужила теорема Блума-Грэма [25], в которой доказывается эквивалентность аналитического и геометрического определения конечного типа. Геометрическое определение дается на языке коммутаторов векторных полей, принадлежащих распределению комплексных касательных пространств многообразия, а в аналитическом определении описывается вид локальных определяющих уравнений многообразия. Дальнейшее развитие теории приводит к рассмотрению многообразий бесконечного типа – а значит, возникает потребность в соответствующем аналоге теоремы Блума-Грэма. Мы описываем приведенную форму определяющих уравнений ростка многообразия бесконечного типа, вполне аналогичную приведенной форме Блума-Грэма для ростка конечного типа. Мы также рассматриваем вопрос о поведении приведенной формы ростка бесконечного типа под действием биголоморфных преобразований и описываем сохраняющие ее преобразования. При этом возникает набор голоморфных инвариантов (веса и разряды). Оказывается также, что младшие компоненты определяющих уравне-

ний (квазимодельная поверхность) биголоморфно эквивалентных ростков квазилинейно эквивалентны (т.е. эквивалентность осуществляется линейным по переменной $z$ преобразованием). Квазилинейное действие на квазимодельной поверхности снабжает поверхность богатым набором CR-инвариантов.

В некоторых ситуациях особый интерес представляют многообразия равномерно бесконечного типа (т.е. имеющие бесконечный тип всюду). В частности, такие многообразия естественным образом возникают при рассмотрении вопроса о конечномерности алгебры Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов: известно ([19], теорема 12.5.3), что если тип голоморфно невырожденного многообразия конечен хотя бы в одной точке, то конечномерность указанной алгебры имеет место. Поэтому полученный здесь критерий конечномерности в случае равномерно бесконечного типа вместе с указанной теоремой работы [19] дает критерий конечномерности в полной общности.

Критерий конечномерности для многообразий равномерно бесконечного типа получается за счет следующего интересного эффекта: размерность алгебры голоморфных автоморфизмов таких многообразий может принимать лишь два значения – ноль и бесконечность, поэтому критерий конечномерности сводится к критерию нульмерности.

Также мы обсуждаем вопрос о типе по Блуму-Грэму в точке общего положения на многообразии и показываем, что в дополнении к собственному аналитическому подмножеству тип (как конечный, так и бесконечный) постоянен и в определенном смысле минимален.

Во второй главе рассматриваются голоморфно однородные многообразия. Возникшие здесь вопросы мотивированы введением нового класса невырожденных многообразий (голоморфная невырожденность + конечный тип по Блуму-Грэму) [24] и

распространением на этот класс метода модельной поверхности.

Первый из вопросов таков: рассмотрим росток голоморфно однородного многообразия. Верно ли, что его модельная поверхность также голоморфно однородна? Мы показываем, что ответ утвердителен вне зависимости от того, является ли тип конечным или бесконечным.

Другой естественный вопрос о голоморфно однородных многообразиях касается их типа: какие типы по Блуму-Грэму для таких многообразий могут быть реализованы? В типе фигурируют два вида данных: веса и кратности. В [24] было доказано, что веса не могут быть произвольными. Мы доказываем, что кратности также не могут быть произвольными, и приводим оценки, которые являются в некотором смысле точными.

В третьей главе речь идет о бесконечномерных CR-многообразиях. CR-подмногообразия комплексного гильбертова пространства и конечномерных комплексных пространств достаточно сильно отличаются друг от друга. Для демонстрации отличий мы посмотрим на многообразия с двух точек зрения: с позиции их голоморфных симметрий и с позиции их модельных поверхностей.

С каждым ростком вещественного вещественно аналитического порождающего CR-многообразия, заданным в некоторой точке, можно связать градуированную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов и рассмотреть ее положительную составляющую – подалгебру $\mathfrak{g}_+$ (см. [4]). Если числа $n$ и $k$, равные соответственно CR-размерности (т.е. размерности комплексной касательной) и коразмерности многообразия и составляющие его тип $(n, k)$, положительны и конечны, то $\mathfrak{g}_+$ в большинстве случаев оказывается тривиальной. В частности, алгебра $\mathfrak{g}_+$ тривиальна для почти любой квадратичной модельной поверхности фиксированного типа $(n, k)$ (при неко-

торых ограничениях на $n$ и $k$) ([3], [5]), а в случае вполне невырожденных модельных поверхностей более высоких порядков алгебра $\mathfrak{g}_+$ тривиальна всегда ([8], [35], [38]).

Однако если коразмерность $k$ бесконечна, то картина становится качественно иной. Хотя определение полной невырожденности в бесконечномерном случае аналогично конечномерному и также является условием общего положения (см. [7]), свойства бесконечномерных модельных поверхностей типа $(n, \infty)$ оказываются противоположными: алгебра $\mathfrak{g}_+$ для вполне невырожденной поверхности оказывается бесконечномерной, а конечномерными алгебрами обладают лишь исключительные поверхности; в то же время в конечномерной ситуации для почти всех поверхностей алгебра $\mathfrak{g}_+$ оказывается тривиальной. Иными словами, типичная размерность алгебры $\mathfrak{g}_+$ в бесконечномерной ситуации наибольшая из возможных, а в конечномерной ситуации – наименьшая. Отметим, что в наших рассмотрениях алгебры $\mathfrak{g}_+$ состоят из векторных полей, формально удовлетворяющих условию касания для рассматриваемых многообразий.

Бесконечномерный случай специфичен еще и тем, что при фиксированной конечной CR-размерности $n$ многообразия существует единственная (с точностью до формальной эквивалентности) модельная поверхность. Более того, всякое вполне невырожденное многообразие CR-размерности $n$, не обязательно являющееся модельным, оказывается формально эквивалентным ей.

Также в бесконечномерном случае можно построить многообразия (без условия полной невырожденности) с любой наперед заданной размерностью алгебры $\mathfrak{g}_+$. Данное обстоятельство интересно тем, что в случае конечной коразмерности $k$ и при фиксированном типе $(n, k)$ во всех изученных ситуациях при тех или иных требованиях невырожденности размерности алгебр

$\mathfrak{g}_+$ для всевозможных поверхностей не принимают всех подряд идущих значений (см., например, [1], [4]).

Однако в отдельных аспектах аналогия с конечномерным случаем сохраняется. В качестве следствия с помощью некоторых из построенных многообразий, перенося конструкцию работы [18] (А.Б. Сухов, 2003) на бесконечномерную ситуацию, мы можем получить системы дифференциальных уравнений второго порядка с известными симметриями: решениями этих систем будут многообразия Сегре исходных многообразий. Конструкция Сухова применима также и для конечномерных вполне невырожденных многообразий.

Четвертая глава посвящена взвешенно однородным полиномиальным модельным поверхностям, которые широко используются в CR-геометрии. Их основное применение связано с изучением автоморфизмов ростков CR-многообразий, и здесь существенную роль играет разложение функции по однородным и квазиоднородным компонентам (см. [5], [28], [29], [36]). При этом подходе с помощью весов различают координаты комплексной касательной и трансверсальные направления. Но возможны ситуации, когда необходимо с помощью весов ввести различия внутри комплексной касательной.

В работе [25] была введена характеристика ростка вещественного подмногообразия комплексного пространства, которая теперь называется типом ростка по Блуму-Грэму. Там же проводится различие между ростками конечного и бесконечного типа. Значение этой характеристики основано на многочисленных приложениях в различных вопросах CR-геометрии; в качестве примера можно привести тот факт, что для многообразий конечного типа существует простой критерий конечномерности алгебры инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов – голоморфная невырожденность, т.е. отсутствие ненулевых голо-

морфных касательных векторных полей. Широкая сфера применимости типа по Блуму-Грэму обусловлена еще и тем, что если он конечен, то имеется два эквивалентных определения: бескоординатное – через вид алгебры Ли касательных векторных полей и координатное – через вид локальных уравнений ростка.

Мы приводим обобщение типа по Блуму-Грэму – взвешенный тип. Модификации, связанной с выбором весов в комплексной касательной, в данной работе подвергается как само определение типа по Блуму-Грэму, так и утверждение, аналогичное теореме Блума-Грэма. Суть этого обобщения в том, что различным координатам комплексной касательной $(z_1, \ldots, z_{n-k})$ назначаются произвольные натуральные веса. Это придает взвешенному типу большую гибкость и удобство в приложениях ([5], [36]). Далее доказывается аналог теоремы Блума-Грэма о соотношении координатного и бескоординатного определений этого взвешенного типа. Данная теорема демонстрирует связь между геометрическими данными, которые можно получить при вычислении коммутаторов голоморфных касательных векторных полей (всю необходимую информацию об этих коммутаторах содержит в себе геометрический тип поверхности) и представимостью поверхности уравнениями специального вида.

**Цели и задачи работы.**

– Уточнить теорему Блума-Грэма для ростков вещественно аналитических многообразий бесконечного типа.

– Найти полный критерий конечномерности алгебры Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов произвольного CR-многообразия.

– Охарактеризовать аналитическую структуру множеств фиксированного типа по Блуму-Грэму.

– Адаптировать понятие типа по Блуму-Грэму для случая различных весов в комплексном касательном пространстве и доказать соответствующий весовой аналог теоремы об эквивалентности геометрического и координатного типов.

– Выявить отличия вполне невырожденных поверхностей в гильбертовом пространстве от конечномерных аналогов.

– Показать, что модельные поверхности голоморфно однородных многообразий также голоморфно однородны.

– Выяснить, существуют ли ограничения на кратности в типе по Блуму-Грэму для голоморфно однородных многообразий.

**Положения, выносимые на защиту. Научная новизна.**

Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

– Дано уточнение теоремы Блума-Грэма для ростков вещественно аналитических многообразий бесконечного типа и описан некий стандартный вид (приведенная форма), к которому можно преобразовать такие ростки.

– Построена более тонкая по сравнению с типом по Блуму-Грэму голоморфно инвариантная характеристика ростка многообразия (стратифицированный тип).

– Введено понятие квазимодельных поверхностей и доказана их квазилинейная эквивалентность для биголоморфно эквивалентных многообразий.

– Получен критерий конечномерности алгебры Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов для произвольных вещественно аналитических CR-многообразий.

– Доказано, что множества фиксированного типа по Блуму-Грэму полуаналитичны, причем тип общего положения (вне собственного аналитического подмножества) в определенном смысле минимален.

– Введено понятие типа для случая неравных весов в комплексном касательном пространстве и доказан соответствующий аналог об эквивалентности геометрического и координатного типа.

– Показано, что все вполне невырожденные поверхности в комплексном гильбертовом пространстве формально эквивалентны.

– Построены примеры бесконечномерных поверхностей с нетривиальной алгеброй $g_+$.

– Показано, что модельные поверхности голоморфно однородных CR-многообразий также голоморфно однородны. Найдены ограничения на кратности в типе по Блуму-Грэму для таких многообразий.

**Методы исследования.** В работе используются методы теории функций одного и многих комплексных переменных, дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли.

**Теоретическая и практическая ценность.** Результаты носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах многомерного комплексного анализа, дифференциальной геометрии и уравнений в частных производных. Результаты могут быть полезны для исследований, проводимых в МГУ им. М.В. Ломоносова, в математическом институте имени В.А. Стеклова РАН, в Сибирском федеральном университете.

**Соответствие паспорту научной специальности.** В диссертации изучаются CR-многообразия, их модельные поверхности и голоморфные автоморфизмы, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 1.1.1 "Вещественный, ком-

плексный и функциональный анализ" по направлению "комплексный анализ".

**Апробация диссертации.**

1. Международная конференция "OTHA online workshop 2020 on operator theory and harmonic analysis and their applications"(24-25 августа 2020 г., Ростов-на-Дону)

2. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов"(10-27 ноября 2020 г., Москва)

3. Международная конференция "Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения"(15-19 марта 2021 г., Южный Урал, Якты-Куль (озеро Банное))

4. Международная конференция "Многомерные вычеты и тропическая геометрия"(14–18 июня 2021 г., Сочи)

5. Межвузовский (МГУ-МГТУ) семинар по качественной теории дифференциальных уравнений (24 апреля 2021 г., Москва)

6. Research seminar on CR geometry and dynamics (8 июля 2021 г., Вена)

Результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре Витушкина по многомерному комплексному анализу.

**Публикации.** Основные результаты диссертации содержатся в 4 работах автора (см. [44], [45], [46], [47]) в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы из 47 наименований. Общий объем диссертации составляет 108 страниц.

**Краткое содержание диссертации.**

В первой главе построен аналог теоремы Блума-Грэма для ростков вещественно аналитических многообразий бесконечного типа и описан некий стандартный вид (приведенная форма), к которому можно преобразовать такие ростки. Дано уточнение понятия типа по Блуму-Грэму (стратифицированный тип). Уточненный тип также голоморфно инвариантен. Введено понятие квазимодельных поверхностей и доказана их квазилинейная эквивалентность для биголоморфно эквивалентных многообразий. Получен критерий конечномерности алгебры Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов в случае равномерно бесконечного типа (т.е. бесконечного всюду). Вместе с критерием конечномерности для многообразий, чей тип конечен почти всюду, это дает полный критерий конечномерности. Доказано, что множества фиксированного типа по Блуму-Грэму полуаналитичны, причем тип общего положения (вне собственного аналитического подмножества) в определенном смысле минимален.

Во второй главе показано, что модельная поверхность ростка голоморфно однородного CR-многообразия также голоморфно однородна. Для типа по Блуму-Грэму ростка голоморфно однородного CR-многообразия получены ограничения на кратности.

В третьей главе показано, что существует ровно одно вполне невырожденное CR-многообразие типа $(n, \infty)$ (с точностью до формальной эквивалентности) и что размерность его алгебры Ли $\mathfrak{g}_+$ положительно градуированных формальных касательных векторных полей бесконечна. Построены примеры многообразий типа $(n, \infty)$ с алгебрами $\mathfrak{g}_+$ любой наперед заданной конечной размерности.

В четвертой главе построено весовое обобщение типа по Блуму-Грэму и доказан соответствующий весовой аналог теоремы об эквивалентности геометрического и координатного ти-

пов.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Валерию Константиновичу Белошапке за постановку задач, многочисленные ценные обсуждения и постоянное внимание к работе.

# Глава 1

# CR-многообразия бесконечного типа по Блуму-Грэму

## 1. Введение

При изучении геометрии CR-многообразий в той или иной форме появляются условия невырожденности. Например, при наложении некоторых естественных ограничений (условия полной невырожденности) возникает содержательная теория – метод модельной поверхности, позволяющий сводить вопросы об автоморфизмах ростков CR-многообразий к соответствующим вопросам об их модельных поверхностях, которые задаются полиномиальными уравнениями, что во многих случаях ведет к существенному упрощению задачи. Недавно В.К. Белошапкой метод модельной поверхности был распространен на достаточно широкий класс многообразий [24]. В новой ситуации невырожденность означает конечность типа по Блуму-Грэму и голоморфную невырожденность. При этом одним из оснований теории послужила теорема Блума-Грэма [25], в которой доказывается эквивалентность аналитического и геометрического определения конечного типа. Геометрическое определение дается на языке коммутаторов векторных полей, принадлежащих распределению комплексных касательных пространств многообразия, а в аналитическом определении описывается вид локаль-

ных определяющих уравнений многообразия. Дальнейшее развитие теории приводит к рассмотрению многообразий бесконечного типа – а значит, возникает потребность в соответствующем аналоге теоремы Блума-Грэма. Мы описываем приведенную форму определяющих уравнений ростка многообразия бесконечного типа, вполне аналогичную приведенной форме Блума-Грэма для ростка конечного типа. Мы также рассматриваем вопрос о поведении приведенной формы ростка бесконечного типа под действием биголоморфных преобразований и описываем сохраняющие ее преобразования. При этом возникает набор голоморфных инвариантов (веса и разряды). Оказывается также, что младшие компоненты определяющих уравнений (квазимодельная поверхность) биголоморфно эквивалентных ростков квазилинейно эквивалентны. Квазилинейное действие на квазимодельной поверхности снабжает поверхность богатым набором CR-инвариантов. Например, многообразия $M_1 = \{v = |z_1|^2,\, t = s(|z_1|^2 + |z_2|^2)\}$ и $M_2 = \{v = |z_1|^2,\, t = s(|z_1|^2 - |z_2|^2)\}$ в пространстве $\mathbb{C}^4$ с координатами $(z_1, z_2, w = u + iv, W = s + it)$ оказываются биголоморфно неэквивалентными, поскольку сигнатура эрмитовой формы, являющаяся инвариантом линейного действия, у этих многообразий не совпадает.

В некоторых ситуациях особый интерес представляют многообразия равномерно бесконечного типа (т.е. имеющие бесконечный тип всюду). В частности, такие многообразия естественным образом возникают при рассмотрении вопроса о конечномерности алгебры Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов: известно ([19], теорема 12.5.3), что если тип голоморфно невырожденного многообразия конечен хотя бы в одной точке, то конечномерность указанной алгебры имеет место. Поэтому полученный здесь критерий конечномерности в случае равномерно бесконечного типа (см. утверждения 6 и 16) вместе

с указанной теоремой работы [19] дает критерий конечномерности в полной общности.

Критерий конечномерности для многообразий равномерно бесконечного типа получается за счет следующего интересного эффекта: размерность алгебры голоморфных автоморфизмов таких многообразий может принимать лишь два значения – ноль и бесконечность, поэтому критерий конечномерности сводится к критерию нульмерности.

Также мы обсуждаем вопрос о типе по Блуму-Грэму в точке общего положения на многообразии и показываем, что в дополнении к собственному аналитическому подмножеству тип (как конечный, так и бесконечный) постоянен и в определенном смысле минимален.

## 2. Стандартная форма ростка многообразия бесконечного типа

Пусть $M \subset \mathbb{C}^{n+K}$ – вещественно аналитическое порождающее подмногообразие CR-типа $(n, K)$ ($n$ – CR-размерность, $K$ – коразмерность), заданное в окрестности $U$ нуля, а $M_p$ – его росток в точке $p$.

Пусть $D_1 = T^c M$ – распределение комплексных касательных пространств на $M$, определенное в окрестности точки $p \in M$.

Определим индуктивно последовательность распределений

$$D_{\nu+1} = [D_\nu, D_1] + D_\nu.$$

Пусть $D_\nu(p)$ – значение $D_\nu$ в точке $p$. Тогда имеем последовательность вложенных вещественных линейных пространств

$$T^c_p M_p = D_1(p) \subseteq D_2(p) \subseteq ... \subseteq D_\nu(p) \subseteq ... \subseteq \mathcal{D}(p) \subseteq T_p M_p,$$

где $\mathcal{D}(p) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} D_\nu(p)$. Отметим, что построенная последовательность стабилизируется с некоторого момента.

$M$ – многообразие *конечного типа* в точке $p$, если $\mathcal{D}(p) = T_p M$. Если же $\mathcal{D}(p) \subsetneqq T_p M$, то $M$ – многообразие *бесконечного типа* в точке $p$.

Пусть $d_\nu = \dim D_\nu(p)$.

Отметим все номера, на которых происходил скачок размерности, т.е. такие $\nu$, для которых $d_\nu > d_{\nu-1}$. Получим возрастающую последовательность натуральных чисел: $2 \leq m_1 < ... < m_l$. Обозначим через $k_j$ величины скачков, т.е. $k_j = d_{m_j} - d_{m_{j-1}}$.

Полученные данные объединяются в набор, который называется типом по Блуму-Грэму. А именно: если $M$ – многообразие конечного типа в точке $p$, то тип определяется как набор $m = ((m_1, k_1), ..., (m_l, k_l))$; если же $M$ – многообразие бесконечного типа в точке $p$, то тип определяется как набор $m = ((m_1, k_1), ..., (m_l, k_l), (\infty, d))$, где $d = \dim(T_p M_p) - \dim(\mathcal{D}(p)) = K - k_1 - ... - k_l$. Величину $d = d(p)$ будем называть *дефектом* многообразия $M$ в точке $p$. Для многообразия конечного типа $d(p) = 0$, а для многообразия бесконечного типа $d(p)$ может принимать значения от 1 до $K$.

Будем говорить, что $M$ имеет равномерно бесконечный тип в $U$, если его тип по Блуму-Грэму бесконечен для всех точек $p \in M \cap U$.

Если для всех точек $p \in M \cap U$ дефект $d(p)$ равен $d$, то будем говорить, что $M$ имеет равномерно бесконечный тип дефекта $d$ в $U$.

Пусть $(z_1, ..., z_n; w_1, ..., w_l; W_1, ..., W_\lambda) = (z; w; W)$ – координаты в $\mathbb{C}^{n+K}$, где $z \in \mathbb{C}^n$, $w_1 \in \mathbb{C}^{k_1}, ..., w_l \in \mathbb{C}^{k_l}$, $W_1 \in \mathbb{C}^{d_1}, ..., W_\lambda \in \mathbb{C}^{d_\lambda}$, $k_1 + ... + k_l = k$, $d_1 + ... + d_\lambda = d$, $k + d = K$. Введем веса векторных переменных следующим образом: $[z] = 1$, $[w_1] =$

$m_1, ..., [w_l] = m_l$ (где $m_1, ..., m_l$ – неубывающая последовательность натуральных чисел, больших двойки), $[W_1] = ... = [W_\lambda] = \infty$. Соответствующие веса присваиваются и сопряженным переменным. Через $o(m_j)$ обозначим слагаемые веса больше $m_j$.

Далее мы будем использовать обозначения $u_j = \operatorname{Re} w_j$, $v_j = \operatorname{Im} w_j$, $s_j = \operatorname{Re} W_j$, $t_j = \operatorname{Im} W_j$, $u = (u_1, ..., u_l)$, $v = (v_1, ..., v_l)$, $s = (s_1, ..., s_\lambda)$, $t = (t_1, ..., t_\lambda)$.

Пусть $\mathfrak{B}_d(p)$ – идеал в кольце ростков вещественно аналитических функций с центром в точке $p$, порожденный элементами $s_1, ..., s_\lambda$. Т.е. каждый элемент $\mathfrak{B}_d(p)$ можно представить в виде $\sum_{\nu=1}^{\lambda} s_\nu H_\nu(z, \bar{z}, u, s)$, где $H_\nu(z, \bar{z}, u, s)$ – вектор размерности $d_\nu$, составленный из аналитических функций. Если каждая из координат вектор-функции $H$ принадлежит $\mathfrak{B}_d(p)$, то будем использовать запись $H \in \mathfrak{B}_d(p)$

Пусть $\Phi_1, ..., \Phi_l$ – однородные вектор-формы весов $m_1, ..., m_l$ соответственно, а $\Psi_1, ..., \Psi_\lambda$ – вектор-формы, принадлежащие $\mathfrak{B}_d(p)$, для которых выполнены условия, приводимые ниже. Для того чтобы сформулировать их, перенумеруем координаты форм $\Phi_j$ и $\Psi_j$ и обозначим их через $\phi_\nu$ и $\psi_\nu$ соответственно. Т.е. если $\nu = (k_1 + ... + k_j) + \mu$, то $\phi_\nu$ – это $\mu$-я координата формы $\Phi_{j+1}$, а если $\nu = (d_1 + ... + d_j) + \mu$, то $\psi_\nu$ – это $\mu$-я координата формы $\Psi_{j+1}$. Введем также сквозную нумерацию координат переменных $u$ и $s$: $\nu$-ю координату каждой из переменных обозначим соответственно через $u_{[\nu]}$ и $s_{[\nu]}$.

Условия для $\Phi_j$:

I) $\Phi_j$ не содержит мономов вида

$$c\, z_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot z_n^{\alpha_n} \cdot u_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot u_{j-1}^{\beta_{j-1}}$$

и сопряженных к ним ни при каких мультистепенях $\alpha, \beta_\nu$ и при $c \neq 0$;

II) $\phi_J$ не содержит слагаемых вида

$$c\,\phi_j\,u_{[j]}^{\beta_j}\cdot u_{[j+1]}^{\beta_{j+1}}\cdot\ldots\cdot u_{[k]}^{\beta_k}$$

для всех $j<J$, таких что $m_j<m_J$, и для $c\neq 0$ ;

III) $\phi_j$ линейно независимы.

Условия I)-III) аналогичны условиям для приведенной формы, описанным в [24].

Перед тем как сформулировать условия для $\Psi_j$, определим для всех $j$, $1\leq j\leq\lambda$, *разряд* $(\sigma_j,\tau_j)$ – пару из двух положительных целых чисел, таких что:

1) $1\leq\sigma_1\leq\ldots\leq\sigma_\lambda$;

2) если $\sigma_\mu=\sigma_\nu$, то $\tau_\mu<\tau_\nu$ при $1\leq\mu<\nu\leq\lambda$;

3) $\tau_\mu\geq 2$.

Разряды $(\sigma,\tau)$ упорядочены лексикографически следующим образом:

1) Если $\sigma<\tilde\sigma$, то $(\sigma,\tau)<(\tilde\sigma,\tilde\tau)$;

2)Если $\sigma=\tilde\sigma$ и $\tau<\tilde\tau$, то $(\sigma,\tau)<(\tilde\sigma,\tilde\tau)$.

Также мы вводим бесконечный разряд $(\infty,\infty)$, такой что $(\sigma,\tau)<(\infty,\infty)$ для любых конечных величин $\sigma,\tau$. Отметим, что по построению $(\sigma_\mu,\tau_\mu)<(\sigma_\nu,\tau_\nu)$ при $\mu<\nu$.

Итак, условия для $\Psi_j$:

I) $\Psi_j$ имеют разряд $(\sigma_j,\tau_j)$, т.е. вектор $\Psi_j$ составлен из многочленов вида

$$c\,s^{\alpha_j}h_j(z,\bar z,u),$$

где $c$ – константа, $s^{\alpha_j}=s_1^{\alpha_{j,1}}\cdot\ldots\cdot s_\lambda^{\alpha_{j,\lambda}}$, $|\alpha_{j,1}|+\ldots+|\alpha_{j,\lambda}|=\sigma_j$, а многочлен $h_j$ имеет вес $\tau_j$; если $\Psi_\lambda=0$, то $(\sigma_\lambda,\tau_\lambda)=(\infty,\infty)$.

II) $\Psi_1(z,0,u,s)=\ldots=\Psi_\lambda(z,0,u,s)=0$;

III) $\psi_J$ не содержит слагаемых вида

$$c\,\psi_j\,s^{\beta_j}_{[j]}\cdot s^{\beta_{j+1}}_{[j+1]}\cdot\ldots\cdot s^{\beta_d}_{[d]},$$

$$c\,\phi_\nu\,u^{\beta_\nu}_{[\nu]}\cdot u^{\beta_{\nu+1}}_{[\nu+1]}\cdot\ldots\cdot u^{\beta_k}_{[k]}\,s^{\gamma_1}_{[1]}\cdot\ldots\cdot s^{\gamma_d}_{[d]}$$

для всех $j<J$, таких что $(\sigma_j,\tau_j)<(\sigma_J,\tau_J)$, и для $c\neq 0$;

IV) ненулевые $\psi_j$ линейно независимы;

Через $o(\sigma_j,\tau_j)$ обозначим слагаемые разряда больше $(\sigma_j,\tau_j)$. При этом формально удобно положить $o(\infty,\infty)=0$, т.е. это степенной ряд, тождественно равный нулю.

Каждой из переменных $W_j$ присвоим соответствующий разряд $(\sigma_j,\tau_j)$.

**Определение 1.** Будем говорить, что уравнения ростка $M_p$ записаны в *приведенной форме*, если его локальные определяющие уравнения имеют вид

$v_1=\Phi_1(z,\bar z)+o(m_1)$,
...
$v_l=\Phi_l(z,\bar z,u_1,...,u_{l-1})+o(m_l)$,
$t_1=\Psi_1(z,\bar z,u,s)+o(\sigma_1,\tau_1)$,
...
$t_\lambda=\Psi_\lambda(z,\bar z,u,s)+o(\sigma_\lambda,\tau_\lambda)$,

где $\Phi$ и $\Psi$ удовлетворяют условиям, сформулированным выше.

Набор $m(p)=((m_1,k_1),...,(m_l,k_l);(\sigma_1,\tau_1,d_1),...,(\sigma_\lambda,\tau_\lambda,d_\lambda))$ назовем *стратифицированным типом* в точке $p$.

**Теорема 2.** Следующие условия эквивалентны:

1) $M_p$ имеет в точке $p$ бесконечный тип дефекта $d$;

2) Существует система координат $(z, w, W)$ с весами и разрядами дефекта $d$, такая что $M_p$ задается в ней уравнениями в приведенной форме.

**Доказательство.** 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $M_p$ задан системой определяющих соотношений

$$v_1 = f_1(z, \bar{z}, u, s), \tag{1.1}$$

$$\dots$$

$$v_l = f_l(z, \bar{z}, u, s),$$

$$t_1 = g_1(z, \bar{z}, u, s),$$

$$\dots$$

$$t_\lambda = g_\lambda(z, \bar{z}, u, s).$$

**Лемма 3.** Голоморфной заменой координат можно привести уравнения (1.1) к виду

$v_1 = \tilde{f}_1(z, \bar{z}, u, s),$
$\dots$
$v_l = \tilde{f}_l(z, \bar{z}, u, s),$
$t_1 = \tilde{g}_1(z, \bar{z}, u, s),$
$\dots$
$t_\lambda = \tilde{g}_\lambda(z, \bar{z}, u, s),$

где $\tilde{f}_1(z, 0, u, s) = \dots = \tilde{f}_l(z, 0, u, s) = \tilde{g}_1(z, 0, u, s) = \dots = \tilde{g}_\lambda(z, 0, u, s) = 0$.

**Доказательство.** Доказательство вполне аналогично приведению к частичной нормальной форме в работе [30]. Запишем уравнения (1.1) в векторной форме:

$$\mathcal{V} = \mathcal{H}(z, \bar{z}, \mathcal{U}),$$

где $\mathcal{U} = \operatorname{Re}\mathcal{W}$, $\mathcal{V} = \operatorname{Im}\mathcal{W}$, $\mathcal{W} = (w_1, ..., w_l, W_1, ..., W_\lambda)$.

Пусть $\Gamma_p$ – росток $K$-мерного вещественно аналитического многообразия на $M_p$, трансверсальный комплексному касательному пространству в точке $p$. Если $\Gamma_p$ задан уравнениями

$$z = \mathcal{P}(\kappa),\ \mathcal{W} = \mathcal{Q}(\kappa),$$

где $\kappa = (\kappa_1, ..., \kappa_K)$ – вещественные параметры на $\Gamma_p$, а $\kappa = 0$ соответствует $z = 0, \mathcal{W} = 0$, то матрица $\frac{\partial \mathcal{Q}_\nu}{\partial \kappa_\mu}$, $1 \leq \mu, \nu \leq K$, невырождена. Тогда преобразование $z \longrightarrow \tilde{z}, \mathcal{W} \longrightarrow \tilde{\mathcal{W}}$, заданное равенством

$$z = \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{W}}) + \tilde{z},\ \mathcal{W} = \mathcal{Q}(\tilde{\mathcal{W}}),$$

переводит $\Gamma_p$ в $\tilde{z} = 0, \tilde{\mathcal{W}} = \kappa$. Сохраняя прежние обозначения $(z, \mathcal{W})$ для координат и $\mathcal{H}$ для вектор-функции, получаем

$$\mathcal{V} = \mathcal{H}(z, \bar{z}, \mathcal{U}),$$

где $\mathcal{H}(0, 0, \mathcal{U}) = 0$.

Теперь найдем преобразование $\tilde{z} = z, \tilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W} + h(z, \mathcal{W})$ с условием $h(0, \mathcal{W}) = 0$, приводящее уравнения к требуемому виду $\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{z}, \bar{\tilde{z}}, \mathcal{U})$. С учетом сделанных предположений получаем

$$\tilde{\mathcal{H}}(\tilde{z}, \bar{\tilde{z}}, \tilde{\mathcal{U}}) = \frac{1}{2i}(h(z, \mathcal{W}) - \overline{h(z, \mathcal{W})}) + \mathcal{H}(z, \bar{z}, \mathcal{U}),\ \mathcal{W} = \mathcal{U} + i\mathcal{H}(z, \bar{z}, \mathcal{U}),$$

откуда, при $\bar{z} = 0$,

$$0 = \frac{1}{2i} h(z, \mathcal{U} + i\mathcal{H}(z, 0, \mathcal{U})) + \mathcal{H}(z, 0, \mathcal{U}).$$

Положим $\mathbf{s} = \mathcal{U} + i\mathcal{H}(z, 0, \mathcal{U})$ и разрешим это уравнение относительно $\mathcal{U}$:

$\mathcal{U} = \mathbf{s} + \mathcal{G}(z, \mathbf{s})$, $\mathcal{G}(0, \mathbf{s}) = 0$.

Отсюда получаем

$$0 = \frac{1}{2i} h(z, \mathbf{s}) + \frac{1}{i}(\mathbf{s} - \mathcal{U}),$$

т.е. $\mathcal{U} = \mathbf{s} + \frac{1}{2} h(z, \mathbf{s})$. Поэтому $h(z, \mathcal{W}) = 2\mathcal{G}(z, \mathcal{W})$ дает требуемое преобразование.

Лемма 3 доказана.

Пользуясь индуктивной процедурой работы [25], можно записать в приведенной форме $k$ уравнений (можно считать, что приведены первые $k$ уравнений):

$$v_1 = \Phi_1(z, \bar{z}) + o(m_1),$$
$$\dots$$
$$v_l = \Phi_l(z, \bar{z}, u_1, \dots, u_{l-1}) + o(m_l),$$
$$t_1 = \tilde{\tilde{f}}_1(z, \bar{z}, u, s),$$
$$\dots$$
$$t_\lambda = \tilde{\tilde{f}}_\lambda(z, \bar{z}, u, s),$$

где $\Phi_1, \dots, \Phi_l$ – однородные вектор-формы, записанные в приведенной форме.

Рассмотрим множество $\Sigma_0 = \{s_1 = \dots = s_\lambda = 0\}$. Тогда голоморфными преобразованиями, не меняющими координат $z, w_1, \dots, w_l$, можно добиться того, чтобы функции $\tilde{\tilde{f}}_1, \dots, \tilde{\tilde{f}}_\lambda$ были равны нулю на множестве $\Sigma_0$, поскольку иначе дефект ростка многообразия должен быть меньше $d$.

Условие $\tilde{\tilde{f}}_1(z,0,u,s) = ... = \tilde{\tilde{f}}_\lambda(z,0,u,s) = 0$ следует из условия $\tilde{f}_1(z,0,u,s) = ... = \tilde{f}_l(z,0,u,s) = \tilde{g}_1(z,0,u,s) = ... = \tilde{g}_\lambda(z,0,u,s) = 0$, т.к. в процессе построения приведенной формы новых слагаемых вида $c\,u^\alpha s^\beta z^\gamma$ не возникает.

Отсюда получаем требуемый вид уравнений.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть локальные определяющие уравнения $M$ имеют вид

$r_1 = v_1 - \Phi_1(z,\bar{z}) + o(m_1) = 0,$

...

$r_l = v_l - \Phi_l(z,\bar{z},u_1,...,u_{l-1}) + o(m_l) = 0,$

$\rho_1 = t_1 - \Psi_1(z,\bar{z},u,s) + o(\sigma_1,\tau_1) = 0,$

...

$\rho_\lambda = t_\lambda - \Psi_\lambda(z,\bar{z},u,s) + o(\sigma_\lambda,\tau_\lambda) = 0.$

Пусть $\mathcal{W} = (w_1,...,w_l,W_1,...,W_\lambda)$. Обозначим через $R_{\overline{\mathcal{W}}}$ матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial \bar{w}_1} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial \bar{w}_l} & \frac{\partial r_1}{\partial \overline{W}_1} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial \overline{W}_\lambda} \\ & \cdots & & & \cdots & \\ \frac{\partial r_l}{\partial \bar{w}_1} & \cdots & \frac{\partial r_l}{\partial \bar{w}_l} & \frac{\partial r_l}{\partial \overline{W}_1} & \cdots & \frac{\partial r_l}{\partial \overline{W}_\lambda} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial \bar{w}_1} & \cdots & \frac{\partial \rho_1}{\partial \bar{w}_l} & \frac{\partial \rho_1}{\partial \overline{W}_1} & \cdots & \frac{\partial \rho_1}{\partial \overline{W}_\lambda} \\ & \cdots & & & \cdots & \\ \frac{\partial \rho_\lambda}{\partial \bar{w}_1} & \cdots & \frac{\partial \rho_\lambda}{\partial \bar{w}_l} & \frac{\partial \rho_\lambda}{\partial \overline{W}_1} & \cdots & \frac{\partial \rho_\lambda}{\partial \overline{W}_\lambda} \end{pmatrix}, \qquad (1.2)$$

а через $R_{\bar{z}}$ – матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial \bar{z}_n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial r_l}{\partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial r_l}{\partial \bar{z}_n} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial \rho_1}{\partial \bar{z}_n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial \rho_\lambda}{\partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial \rho_\lambda}{\partial \bar{z}_n} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Тогда векторные поля $L_1, ..., L_n$, определяемые формулой

$$(L_1, ..., L_n)^T = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - (R_{\bar{z}})^T (R_{\overline{\mathcal{W}}}^{-1})^T \frac{\partial}{\partial \overline{\mathcal{W}}},$$

где $T$ обозначает транспонирование, задают локальный базис векторных CR-полей в окрестности нуля ([19], предложение 1.6.1).

**Лемма 4.** Поля $L_1, ..., L_n$ имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \sum_{\mu=1}^{l} H_\mu(z, \bar{z}, u, s) \frac{\partial}{\partial \bar{w}_\mu} + \sum_{\mu=1}^{\lambda} T_\mu(z, \bar{z}, u, s) \frac{\partial}{\partial \bar{W}_\mu}, \tag{1.4}$$

где $T_\mu \in \mathfrak{B}_d(p)$.

**Доказательство.** Введем следующие обозначения:

$A$ – прямоугольный блок матрицы $\Omega = (R_{\overline{\mathcal{W}}}^{-1})^T$, в углах которого расположены элементы $(\omega)_k^1, (\omega)_K^1, (\omega)_k^k, (\omega)_K^k$ (здесь и далее верхний индекс соответствует номеру строки, а нижний – номеру столбца);

$B$ – прямоугольный блок матрицы $\Xi = (R_{\bar{z}})^T$, в углах которого расположены элементы $(\xi)_k^1, (\xi)_K^1, (\xi)_k^n, (\xi)_K^n$.

$C$ – прямоугольный блок матрицы $E = (R_{\bar{z}})^T (R_{\overline{\mathcal{W}}}^{-1})^T$, в углах которого расположены элементы $(e)_k^1, (e)_K^1, (e)_k^n, (e)_K^n$.

Достаточно показать, что каждый элемент матрицы $C$ принадлежит $\mathfrak{B}_d(p)$. Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что каждый элемент матриц $A$ и $B$ принадлежит $\mathfrak{B}_d(p)$.

Для матрицы $B$ это сразу следует из вида определяющих соотношений, поэтому рассмотрим элементы матрицы $A$.

По формуле для обратной матрицы имеем $a^i_j = \frac{\mathcal{A}^i_j}{\det\Omega}$, где $\mathcal{A}^i_j$ – алгебраическое дополнение элемента $\omega^i_j$ матрицы $\Omega$, $a^i_j$ принадлежит блоку $A$. Заметим, что $\mathcal{A}^i_j$ представляется в виде суммы таких произведений элементов матрицы $\Omega$, что хотя бы один из множителей является элементом матрицы

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial\rho_1}{\partial\bar{w}_1} & \dots & \frac{\partial\rho_1}{\partial\bar{w}_l} \\ & \dots & \\ \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial\bar{w}_1} & \dots & \frac{\partial\rho_\lambda}{\partial\bar{w}_l} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Легко видеть, что каждый элемент матрицы $D$ принадлежит $\mathfrak{B}_d(p)$. А поскольку функция $\frac{1}{\det\Omega}$ вещественно аналитична в нуле, то каждая из функций $\mathcal{A}^i_j$ принадлежит $\mathfrak{B}_d(p)$.

Лемма 4 доказана.

Теперь заметим, что коммутаторы вида $[L_\mu, \overline{L}_\nu]$, $1 \le \mu, \nu \le n$, также имеют вид (1.4), откуда следует, что тип в нуле бесконечен.

Теорема 2 доказана.

**Теорема 5.** Следующие условия эквивалентны:

1) $M$ – многообразие равномерно бесконечного типа дефекта $d$ в $U$ вне некоторого собственного аналитического подмножества;

2) Существует система координат $(z, w, W)$ с весами и разрядами дефекта $d$, такая что определяющие уравнения для $M$ в

приведенной форме вне некоторого собственного аналитического подмножества имеют вид

$v_1 = \Phi_1(z, \bar{z}) + o(m_1)$,

...

$v_l = \Phi_l(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{l-1}) + o(m_l)$,

$t = 0$.

**Доказательство.** Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) очевидна, поэтому сразу переходим к доказательству импликации 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_K) \in \mathbb{R}^K$ и пусть $M$ задано системой уравнений в приведенной форме

$r_1 = 0$,

...

$r_K = 0$.

Определим CR-многообразия $\mathcal{M}(\alpha)$ системами

$r_1 = \alpha_1$,

...

$r_K = \alpha_K$.

Каждое из этих многообразий имеет равномерно бесконечный тип дефекта $d$ и CR-тип $(n, K)$, т.к. после замены координат $(z \longrightarrow z; \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W} - \alpha)$, где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_K)$, $\mathcal{W} = (w_1, ..., w_l, W_1, ..., W_\lambda)$, $\mathcal{M}(\alpha)$ переходит в $\mathcal{M}(0, ..., 0) = M$. Определим на каждом $\mathcal{M}(\alpha)$ распределения $\mathcal{D}(\alpha)$, которые строятся так же, как и распределение $\mathcal{D}(0, ..., 0) = \mathcal{D}$: положим

$D_1(\alpha) = T^c \mathcal{M}(\alpha)$,

$D_{\nu+1}(\alpha) = [D_\nu(\alpha), D_1(\alpha)] + D_\nu(\alpha)$,

$\mathcal{D}(\alpha) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} D_\nu(\alpha)$.

Ясно, что $\mathcal{M}(\alpha) \cap \mathcal{M}(\beta) = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$ и что каждая точка из $U$ принадлежит хотя бы одному многообразию $\mathcal{M}(\alpha)$. Поэтому на $U$ корректно определено аналитическое распределение $\mathcal{D}(U)$, которое в каждой точке $p \in U$ задано равенством

$\mathcal{D}(U)(p) = \mathcal{D}(\alpha)(p)$,

где $\alpha$ таково, что $p \in \mathcal{M}(\alpha)$.

Пусть $J$ – оператор комплексной структуры, заданный умножением на $i$. Рассмотрим распределение $\mathcal{CD} = \mathcal{D}(U) + J(\mathcal{D}(U))$ на $U$.

Т.к. любое поле $X \in T^c_p(M_p)$, представимо в виде $\operatorname{Re} Y$, где $Y$ – CR-поле, то из леммы 4 получаем, что $X$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n}(c_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{c_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z_j}}) + \sum_{\mu=1}^{l}(H_\mu(z, \bar{z}, u, s)\frac{\partial}{\partial w_\mu} + \bar{H}_\mu(\bar{z}, z, u, s)\frac{\partial}{\partial \bar{w}_\mu}) + \tag{1.6}$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{\lambda}(T_\mu(z, \bar{z}, u, s)\frac{\partial}{\partial W_\mu} + \bar{T}_\mu(\bar{z}, z, u, s)\frac{\partial}{\partial \overline{W}_\mu}),$$

где $c_j \in \mathbb{C}$; $T_\mu, \bar{T}_\mu \in \mathfrak{B}_d(p)$. Заметим, что коммутатор $[X_1, X_2]$ полей $X_1, X_2$ вида (1.6) также имеет вид (1.6), т.к. $T^1(z, \bar{z}, u, s)\frac{\partial}{\partial W_\mu}(T^2)$ принадлежит $\mathfrak{B}_d(p)$ при $T^1, T^2 \in \mathfrak{B}_d(p)$. Отсюда следует, что $[X_1, X_2](p) \in \mathcal{CD}(p)$ для $X_1, X_2 \in \mathcal{CD}$ и $p \in M$, т.к. $T_\mu(z, \bar{z}, u, s)$ в точке $p$ обращается в нуль и тип имеет дефект $d$ всюду в $U$.

Аналогичное утверждение имеет место для всех многообразий $\mathcal{M}(\alpha)$, а именно: любое поле $X \in T^c_p(\mathcal{M}(\alpha)_p)$ представимо в виде (1.6) после следующей замены координат:

$$z \to z,\ \mathcal{W} \to \mathcal{W} - \alpha. \tag{1.7}$$

А значит, $[X_1, X_2](p) \in \mathcal{CD}(p)$ для всех $X_1, X_2 \in \mathcal{CD}$ и $p \in \mathcal{M}(\alpha)$.

Отсюда следует, что распределение $\mathcal{CD}$ инволютивно. По комплексной теореме Фробениуса распределение $\mathcal{CD}$ интегрируемо. Точки, в которых ранг этого распределения не максимален, образуют собственное аналитическое множество. При этом вне

этого особого множества размерность соответствующих интегральных многообразий равна $\dim(\mathcal{CD}) = n + k$. Поэтому они задаются системой из $(n+K)-(n+k) = d$ голоморфных уравнений

$$\mathcal{E}_1(z, w, W) = \gamma_1, \tag{1.8}$$

...

$$\mathcal{E}_d(z, w, W) = \gamma_d,$$

где $\gamma_j \in \mathbb{C}$.

Сделаем следующую замену координат:

$$z \longrightarrow z, w \longrightarrow w, W \longrightarrow \mathcal{E},$$

где $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_d)$. Данная замена невырождена, поскольку комплексное касательное пространство к многообразиям, заданным уравнениями (1.8), порождено полями $\frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial w_1}, ..., \frac{\partial}{\partial w_l}$.

Для новых координат сохраним прежние обозначения, т.е. $(z, w, W)$. Тогда уравнения (1.8) примут вид

$$W = \gamma, \tag{1.9}$$

где $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_d)$. Обозначим через $S_\gamma$ комплексное многообразие, заданное системой (1.9).

Пусть $\Gamma$ – такое множество параметров $\gamma$, что $M \cap S_\gamma \neq \varnothing$. Вещественная размерность $\Gamma$ равна $d$, т.к. размерность распределения $\mathcal{CD}+T(M)$ равна $2n+2k+d$. Поэтому параметры $\gamma \in \Gamma$ удовлетворяют системе из $d$ вещественных уравнений

$$f_1(\gamma, \bar{\gamma}) = 0, \tag{1.10}$$

...

$$f_d(\gamma, \bar{\gamma}) = 0.$$

Из систем (1.10) и (1.9) получаем, что $M$ содержится в многообразии, заданном системой уравнений

$$f_1(W, \overline{W}) = 0, \tag{1.11}$$

...

$$f_d(W, \overline{W}) = 0.$$

Разрешим систему (1.11) относительно переменной $t$. Получим:

$$t = g(s). \tag{1.12}$$

Сделаем замену переменных $W \longrightarrow \tilde{W}$, которая определяется неявным соотношением

$$W = \tilde{W} + i\, g(\tilde{W}).$$

Тогда в новых координатах (1.12) запишется в виде

$$\tilde{t} = 0, \tag{1.13}$$

где $\tilde{t} = \operatorname{Im} \tilde{W}$.

Из определения множества $\Gamma$ ясно, что $M$ является подмногообразием многообразия, заданного системой (1.13).

Для упрощения обозначений заменим $\tilde{t}$ на $t$. Получим, что многообразие $M$ локально задано системой уравнений

$$h_1(z, \bar{z}, u, v, s) = 0,$$

$$\dots$$

$$h_k(z, \bar{z}, u, v, s) = 0,$$

$$t = 0.$$

Поскольку дефект многообразия $M$ равен $d$ и переменная $t$ имеет размерность $d$, то первые $k$ уравнений можно преобразовать к виду

$v_1 = \Phi_1(z, \bar{z}) + o(m_1)$,

...

$v_l = \Phi_l(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{l-1}) + o(m_l)$,

где $\Phi_j$ записаны в приведенной форме.

Теорема 5 доказана.

**Утверждение 6.** Пусть $M$ – многообразие равномерно бесконечного типа дефекта $d$ в $U$. Тогда если $\dim \operatorname{aut} M_p < \infty$ вне некоторого собственного аналитического подмножества, то $\dim \operatorname{aut} M_p = 0$.

**Доказательство.** Запишем $M$ в системе координат теоремы 5. Пусть $W_{11}$ – первая координата переменной $W_1$. Тогда если $X \in \operatorname{aut} M_p$, то $W_{11}^{\nu} X \in \operatorname{aut} M_p$ для любого натурального $\nu$, т.е. $\dim \operatorname{aut} M_p = \infty$.

Утверждение 6 доказано.

Приведем примеры многообразий равномерно бесконечного типа, для которых реализуются оба возможных значения размерности алгебры автоморфизмов (0 и $\infty$).

Пусть $(z, w = u + iv, W = s + it)$ – координаты в $\mathbb{C}^3$.

**Пример 7.** Рассмотрим многообразие $M_0$, заданное системой
$v = |z|^2$,
$t = 0$.

Размерность $\dim \operatorname{aut} M_0$ бесконечна, т.к. $2\mathrm{Re}(W^\nu \frac{\partial}{\partial W}) \in \operatorname{aut} M_0$ для любого натурального $\nu$.

**Пример 8.** Рассмотрим многообразие $M_0$, заданное системой
$v = |z|^2 + (z^2\bar{z} + z\bar{z}^2)u + |z|^4 s$,
$t = 0$.

Прямое вычисление алгебры $\operatorname{aut} M_0$ показывает, что она тривиальна, т.е. $\dim \operatorname{aut} M_0 = 0$.

Подчеркнем, что бесконечную размерность алгебры автоморфизмов имеет любое голоморфно вырожденное многообразие (не обязательно имеющее равномерно бесконечный тип), но в примере 7 приведено голоморфно невырожденное многообразие. Укажем также достаточное условие бесконечномерности, которому удовлетворяет, в частности, многообразие в примере 7:

**Утверждение 9.** Если в системе координат $(z, w, W) \in \mathbb{C}^{n+K}$ многообразие равномерно бесконечного типа имеет вид прямого произведения, т.е. задается векторными уравнениями вида
$v = f(z, \bar{z}, u, s)$,
$t = 0$,
где вектор-функция $f$ не зависит от одной из координат (например, первой) одной из вектор-переменных $s_\alpha$ (например, $s_1$), то $\dim \operatorname{aut} M_0 = \infty$.

**Доказательство.** Пусть $W_{11}$ – первая координата векторной переменной $W_1$. Тогда векторные поля $2\mathrm{Re}(W_{11}^\nu \frac{\partial}{\partial W_{11}})$ принадле-

жат $\operatorname{aut} M_0$ для любого натурального $\nu$.

Утверждение 9 доказано.

Однако данное достаточное условие не является необходимым условием бесконечномерности, как показывает следующий пример (координаты те же, что и в примерах 7, 8):

**Пример 10.** Пусть многообразие $M_0$ задано системой

$v = |z|^2 + |z|^4 s,$

$t = 0.$

Векторные поля $2\mathrm{Re}(W^\nu \frac{\partial}{\partial W})$ и $2\mathrm{Re}(izW^\nu \frac{\partial}{\partial z})$ принадлежат $\dim \operatorname{aut} M_0$ для любого натурального $\nu$, поэтому $\dim \operatorname{aut} M_0 = \infty$.

Приведем еще два простых достаточных условия бесконечномерности алгебры автоморфизмов:

**Утверждение 11.** Если в системе координат $(z, w, W) \in \mathbb{C}^{n+K}$ многообразие равномерно бесконечного типа задается векторными уравнениями вида

1) $v = f(\mathcal{N}(z), u, s),$

$t = 0,$

где $\mathcal{N}(z) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu |z_\nu|^{2\mu}$, $a_\nu \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{N}$,

или

2) $v = f(z, \bar{z}, u, s),$

$t = 0,$

где вектор-функция $f$ не зависит от первой координаты вектор-переменной $u_1$, то $\dim \operatorname{aut} M_0 = \infty$.

## 3. Отображения между ростками многообразий в стандартной форме

Пусть имеется биголоморфное отображение

$$\mathcal{F} = \Big(z \longrightarrow f(z,w,W);\ w_j \longrightarrow g_j(z,w,W),\ 1 \le j \le l;$$

$$W_j \longrightarrow h_j(z,w,W),\ 1 \le j \le \lambda\Big)$$

ростка $M_p$ многообразия бесконечного типа дефекта $d$, заданного уравнениями в стандартной форме

$$v_j = \Phi_j(z,\bar{z},u_1,...,u_{j-1}) + F_j(z,\bar{z},u,s),\ 1 \le j \le l,$$

$$t_j = \Psi_j(z,\bar{z},u,s) + G_j(z,\bar{z},u,s),\ 1 \le j \le \lambda,$$

где $F_j = o(m_j)$, $G_j = o(\sigma_j,\tau_j)$,

в другой росток $\tilde{M}_p$, заданный уравнениями в стандартной форме

$$v_j = \tilde{\Phi}_j(z,\bar{z},u_1,...,u_{j-1}) + \tilde{F}_j(z,\bar{z},u,s),\ 1 \le j \le l,$$

$$t_j = \tilde{\Psi}_j(z,\bar{z},u,s) + \tilde{G}_j(z,\bar{z},u,s),\ 1 \le j \le \tilde{\lambda},$$

где $\tilde{F}_j = o(m_j)$, $\tilde{\Psi}_j$ имеет разряд $(\tilde{\sigma}_j,\tilde{\tau}_j)$, $\tilde{G}_j = o(\tilde{\sigma}_j,\tilde{\tau}_j)$.

Пусть $Q$ и $\tilde{Q}$ – поверхности, заданные уравнениями

$$v_j = \Phi_j(z,\bar{z},u_1,...,u_{j-1}),\ 1 \le j \le l,$$

$$t_j = \Psi_j(z,\bar{z},u,s),\ 1 \le j \le \lambda,$$

и

$$v_j = \tilde{\Phi}_j(z,\bar{z},u_1,...,u_{j-1}),\ 1 \le j \le l,$$

$$t_j = \tilde{\Psi}_j(z, \bar{z}, u, s),\ 1 \le j \le \tilde{\lambda}$$

соответственно.

Поверхности $Q$ и $\tilde{Q}$ будем называть *квазимодельными.*

**Замечание 12.** Имеет место голоморфная инвариантность весов [25], поэтому мы рассматриваем ростки $M_p$ и $\tilde{M}_p$ с одинаковыми наборами весов $m_j$ и их кратностей $k_j$.

**Теорема 13.** 1) Стратифицированный тип биголоморфно инвариантен, т.е. $\lambda = \tilde{\lambda}$ и $(\sigma_j, \tau_j) = (\tilde{\sigma}_j, \tilde{\tau}_j)$ при $1 \le j \le \lambda$.

2) Биголоморфное отображение $\mathcal{F}$ ростков $M_p$ и $\tilde{M}_p$ имеет вид

$$\Big(z \longrightarrow Cz{+}o(1);\ w_j \longrightarrow \Omega_j w_j{+}\theta_j(w_1, ..., w_{j-1}){+}o(m_j),\ 1 \le j \le l;$$

$$W_j \longrightarrow \omega_j W_j + \Theta_j(w, W_1, ..., W_{j-1}) + o(\sigma_j, \tau_j),\ 1 \le j \le \lambda\Big),$$

где $C \in GL(n, \mathbb{C})$, $\Omega_j \in GL(k_j, \mathbb{R})$, $\omega_j \in GL(d_j, \mathbb{R})$, $\theta_j$ – однородная форма веса $m_j$, $\Theta_j$ – однородная форма разряда $(\sigma_j, \tau_j)$.

При этом линейное по $z$ отображение

$$\Big(z \longrightarrow Cz;\ w_j \longrightarrow \Omega_j w_j{+}\theta_j,\ 1 \le j \le l;\ W_j \longrightarrow \omega_j W_j{+}\Theta_j,\ 1 \le j \le \lambda\Big)$$

переводит $Q$ в $\tilde{Q}$.

3) Отображение $\mathcal{F}$ порождает на формах $(\Phi_1, ..., \Phi_l, \Psi_1, ..., \Psi_\lambda)$ линейное действие (т.е. определяемое действием на комплексном касательном пространстве) вида

$$\Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}) \longrightarrow \Omega_j \Phi_j(C^{-1}z, \overline{C^{-1}z}, \Omega_1^{-1}u_1, ..., \Omega_{j-1}^{-1}(u_{j-1}{-}\theta_{j-1})|_Q,$$

$$\Psi_j(z,\bar z,u_1,...,u_l,s_1,...,s_\lambda)\longrightarrow$$

$$\omega_j\Psi_j(C^{-1}z,\overline{C^{-1}z},\Omega_1^{-1}u_1,...,\Omega_l^{-1}(u_l-\theta_l),\omega_1^{-1}(s_1-\Theta_1,...,\omega_\lambda^{-1}(s_\lambda-\Theta_\lambda))|_Q.$$

**Доказательство.**

Пусть $g=(g_1,...,g_l)$, $h=(h_1,...,h_\lambda)$, $\Phi=(\Phi_1,...,\Phi_l)$, $F=(F_1,...,F_l)$, $\Psi=(\Psi_1,...,\Psi_\lambda)$, $G=(G_1,...,G_\lambda)$. По условию имеем

$$\operatorname{Im} g_j=\tilde\Phi_j(f,\bar f,\operatorname{Re} g_1,...,\operatorname{Re} g_{j-1})+\tilde F_j(f,\bar f,\operatorname{Re} g,\operatorname{Re} h),\ j=1,...,l,$$

$$\operatorname{Im} h_j=\tilde\Psi_j(f,\bar f,\operatorname{Re} g,\operatorname{Re} h)+\tilde F_j(f,\bar f,\operatorname{Re} g,\operatorname{Re} h),\ j=1,...,\lambda,$$

при $w=u+i(\Phi+F)$, $W=s+i(\Psi+G)$.

Пусть $f=\sum_{\mu=1}^\infty f_\mu$, $g_j=\sum_{\mu=1}^\infty g_{j\mu}$, $h_j=\sum_{(\sigma,\tau)}h_{j,(\sigma,\tau)}$, где $f_\mu,g_{j\mu}$ – компоненты веса $\mu$, $h_{j,(\sigma,\tau)}$ – компоненты порядка $(\sigma,\tau)$.

Докажем утверждение сначала для преобразований переменных $w_j$ (пункт a), а затем для преобразований переменных $W_j$ (пункт b).

a) Рассмотрим систему

$$\operatorname{Im} g_j=\tilde\Phi_j(f,\bar f,\operatorname{Re} g_1,...,\operatorname{Re} g_{j-1})+\tilde F_j(f,\bar f,\operatorname{Re} g,\operatorname{Re} h),\ 1\le j\le l. \tag{1.14}$$

Слагаемые веса меньше $m_j$ в $j$-м равенстве (1.14) равны нулю, т.к. в $\tilde\Phi_j$ отсутствуют слагаемые, указанные в условиях I) и II) для приведенной формы. Поэтому $g_{j1}=...=g_{j(m_j-1)}=0$.

Для веса $m_j$ имеем $g_{jm_j}=a_j(z,w_1,...,w_{j-1})+\Omega_jw_j$, где $a_j$ – форма веса $m_j$, $\Omega_j$ – матрица. Имеем

$$\operatorname{Im}(a_j(z,w_1,...,w_{j-1})+\Omega_j(u_j+i\Phi_j))=\tilde\Phi_j(Cz,\overline{Cz},\Omega_1u_1,...,\Omega_{j-1}u_{j-1}).$$

b) Рассмотрим систему

$$\operatorname{Im} h_j = \tilde{\Psi}_j(f, \bar{f}, \operatorname{Re} g, \operatorname{Re} h) + \tilde{G}_j(f, \bar{f}, \operatorname{Re} g, \operatorname{Re} h),\ j = 1, ..., \lambda. \tag{1.15}$$

Слагаемые разряда меньше $(\tilde{\sigma}_j, \tilde{\tau}_j)$ в $h_j$ равны нулю, т.к. в $\tilde{\Psi}_j$ отсутствуют слагаемые, указанные в условиях II) и III) для приведенной формы.

Для разряда $(\tilde{\sigma}_j, \tilde{\tau}_j)$ имеем $h_{j,(\tilde{\sigma}_j,\tilde{\tau}_j)} = b_j(z, w, W_1, ..., W_{j-1}) + \omega_j W_j$, где $b_j(z, w, W_1, ..., W_{j-1})$ – форма разряда $(\tilde{\sigma}_j, \tilde{\tau}_j)$, $\omega_j$ – матрица.

Пусть $j$ – максимальный номер, для которого выполнено $(\tilde{\sigma}_j, \tilde{\tau}_j) > (\sigma_j, \tau_j)$ или $\tilde{d}_j < d_j$ при $(\tilde{\sigma}_j, \tilde{\tau}_j) = (\sigma_j, \tau_j)$, причем $(\tilde{\sigma}_j, \tilde{\tau}_\nu) = (\sigma_\nu, \tau_\nu)$ и $\tilde{d}_\nu = d_\nu$ при $\nu > j$. Тогда матрица $\omega_j$ вырождена. А поскольку линейные слагаемые в $h_j$ имеют порядок не ниже $(\tilde{\sigma}_j, \tilde{\tau}_j)$, значит, дифференциал отображения $\mathcal{F}$ вырожден, что невозможно. То же рассуждение, примененное к отображению $\mathcal{F}^{-1}$, показывает, что невозможны обратные неравенства, откуда получаем $(\tilde{\sigma}_j, \tilde{\tau}_j) = (\sigma_j, \tau_j)$ и $\tilde{d}_j = d_j$ для всех $j$. Имеем для разряда $(\sigma_j, \tau_j)$

$$\operatorname{Im}\left(b_j(z, w, W_1, ..., W_\lambda) + \omega_j(s_j + i\Psi_j)\right) =$$

$$= \tilde{\Psi}_j(Cz, \overline{Cz}, \Omega_1 u_1, ..., \Omega_l u_l, \operatorname{Re}(\omega_1 W_1), ..., \operatorname{Re}(\omega_\lambda W_\lambda)),$$

где $\omega_j$ – невырожденные матрицы.

Теорема 13 доказана.

**Замечание 14.** Построение поверхности $Q$ из младших компонент уравнений для $M_p$ вполне аналогично построению модельной поверхности для многообразий конечного типа. Более

того, как показывает утверждение 3, аналогия распространяется также и на действие отображений: если $M_p$ биголоморфно отображается на $\tilde{M}_p$, то $Q$ и $\tilde{Q}$ эквивалентны квазилинейно.

Однако от кандидата на роль модельной поверхности ожидаются также и другие свойства (полный список приведен в [4]), среди которых – максимальная симметричность: размерность алгебры Ли голоморфных инфинитезимальных автоморфизмов модельной поверхности максимальна в классе всех многообразий с такой модельной поверхностью. Как показывает следующий пример, поверхность $Q$ для многообразия бесконечного типа таким свойством, вообще говоря, не обладает. Поэтому необходимо констатировать, что построенная поверхность не является хорошей модельной поверхностью (в смысле работы [4]).

**Пример 15.**

Пусть $(z, W)$ – координаты в $\mathbb{C}^2$. Рассмотрим многообразия

$$M : \{t = s \cdot tg(\frac{1}{2} arcsin(2\,|z|^2))\}$$

и

$$\tilde{M} : \{t = s\,|z|^2\}.$$

Имеем $\dim \mathrm{aut}\, M_0 = 5$, $\dim \mathrm{aut}\, \tilde{M}_0 = 2$ (см. [23]).

## 4. Критерий конечномерности алгебры инфинитезимальных автоморфизмов многообразия равномерно бесконечного типа

Теперь перейдем к описанию критерия нульмерности алгебры $\mathrm{aut}\, M_p$ для ростка $M_p$ многообразия равномерно бесконечного типа.

Росток многообразия будем называть ***вещественно***

***невырожденным*** в точке $p$, если его алгебра нульмерна, т.е. не существует ростка ненулевого инфинитезимального голоморфного автоморфизма. Это определение мы даем по аналогии с определением голоморфно невырожденного многообразия: голоморфная вырожденность означает наличие ненулевого касательного голоморфного векторного поля, а вещественная вырожденность (отсутствие вещественной невырожденности) означает наличие инфинитезимального голоморфного автоморфизма, т.е. ненулевого касательного поля вида $2\operatorname{Re} Y$, где $Y$ – голоморфное векторное поле.

Пусть $X = 2\operatorname{Re}(f(z,w,W)\frac{\partial}{\partial z} + g(z,w,W)\frac{\partial}{\partial w} + h(z,w,W)\frac{\partial}{\partial W})$, где $f, g, h$ – голоморфные вектор-функции. Положим $f = (f_1, ..., f_n)$; $g = (g_1, ..., g_l)$, $g_j = (g_{j1}, ..., g_{jk_j})$; $h = (h_1, ..., h_d)$ и запишем условие касания поля $X$ многообразия $M$:

$$\operatorname{Im} g_j = 2\operatorname{Re}\Big(f\frac{\partial}{\partial z}\Phi_j(z,\bar z,u_1,...,u_{j-1}) + g\frac{\partial}{\partial w}\Phi_j(z,\bar z,u_1,...,u_{j-1}) +$$

$$f\frac{\partial}{\partial z}F_j(z,\bar z,u,s) + g\frac{\partial}{\partial w}F_j(z,\bar z,u,s) + h\frac{\partial}{\partial W}F_j(z,\bar z,u,s)\Big),\ 1 \le j \le l,$$

$$\operatorname{Im} h_j = 0,\ 1 \le j \le d,$$

$$w = u + i(\Phi + F),\ W = s + i(\Psi + G).$$

Пусть $h_1 \not\equiv 0$. Разделим все уравнения на $h_1$ и воспользуемся равенством $h_1 = \bar h_1$, которое выполнено на многообразии. Получим:

$$\operatorname{Im}\frac{g_j}{h_1} = 2\operatorname{Re}\Big(\frac{f}{h_1}\frac{\partial}{\partial z}\Phi_j(z,\bar z,u_1,...,u_{j-1}) + \frac{g}{h_1}\frac{\partial}{\partial w}\Phi_j(z,\bar z,u_1,...,u_{j-1}) + \tag{1.16}$$

$$\frac{f}{h_1}\frac{\partial}{\partial z}F_j(z,\bar{z},u,s)+\frac{g}{h_1}\frac{\partial}{\partial w}F_j(z,\bar{z},u,s)+\frac{\partial}{\partial W_{[1]}}F_j(z,\bar{z},u,s)+$$

$$\sum_{\mu\neq 1}\frac{h_\mu}{h_1}\frac{\partial}{\partial W_{[\mu]}}F_j(z,\bar{z},u,s)\Big),\ 1\leq j\leq l;$$

$$\operatorname{Im}\frac{h_j}{h_1}=0,\ 1\leq j\leq d;$$

$$w=u+i(\Phi+F),\ W=s+i(\Psi+G),$$

где $W_{[\mu]}$ – $\mu$-я координата $W$.

Разложим компоненты вектор-функций $\frac{f}{h_1}, \frac{g}{h_1}, \frac{h}{h_1}$ в ряды по переменным $z, w, W$:

$$\frac{f_\mu}{h_1}=\sum_{\alpha,\beta,\gamma} f_{\mu\alpha\beta\gamma}z^\alpha w^\beta W^\gamma,\ 1\leq\mu\leq n,$$

$$\frac{g_{\mu\nu}}{h_1}=\sum_{\alpha,\beta,\gamma} g_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}z^\alpha w^\beta W^\gamma,\ 1\leq\mu\leq l,\ 1\leq\nu\leq k_\mu,$$

$$\frac{h_\mu}{h_1}=\sum_{\alpha,\beta,\gamma} h_{\mu\alpha\beta\gamma}z^\alpha w^\beta W^\gamma,\ 2\leq\mu\leq d,$$

где $\alpha, \beta, \gamma$ – мультииндексы.

Разложим в ряды по переменным $z, u, s$ компоненты вектор-функций $\Phi, \Psi, F, G$ и подставим найденные выражения вместе с выражениями для компонент $f, g, h$ в (1.16). Получим, что (1.16) эквивалентна равенству нулю коэффициентов при всех мономах вида $z^\alpha u^\beta s^\gamma$. Каждое из таких равенств – это линейное неоднородное уравнение на коэффициенты $f_{\mu\alpha\beta\gamma}, g_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}, h_{\mu\alpha\beta\gamma}$.

Упорядочим мономы $z^\alpha u^\beta s^\gamma$ лексикографически и перенумеруем их в соответствии с порядком. Коэффициенту при мономе

$z^\alpha u^\beta s^\gamma$ припишем номер монома – таким образом мы перенумеруем все линейные неоднородные уравнения на коэффициенты функций $f, g, h$.

Обозначим через $\mathcal{A}_{1j}$ расширенную матрицу системы, составленной из уравнений с номерами не больше $j$, а через $\mathcal{B}_{1j}$ – матрицу той же системы.

Аналогичным образом, заменив $h_1$ на $h_\mu$, построим матрицы $\mathcal{A}_{\mu j}$ и $\mathcal{A}_{\mu j}$ для $\mu \leq d$.

Если для каждого $\mu$ найдется такой номер $j_\mu$, что матрицы $\mathcal{A}_{\mu j_\mu}$ и $\mathcal{B}_{\mu j_\mu}$ имеют разный ранг, то это означает, что рассмотренные системы несовместны, т.е. если поле $X$ является касательным, то $h_1 = ... = h_d = 0$.

Теперь рассмотрим поле $X$ с условием $h_1 = ... = h_d = 0$. Обозначим такое поле через $X_0$. Далее будем считать, что $X_0|_{s=0} \neq 0$, т.к. можно разделить $X_0$ на подходящую степень переменной $W = s$.

Заметим, что условие касания $X_0$ к $M$ эквивалентно условию касания $X_0$, зависящего от параметра $s$, к многообразию $\hat{M}_s$ конечного типа по Блуму-Грэму $((m_1, k_1), ..., (m_l, k_l))$ в пространстве $\mathbb{C}^{n+k}$, заданному уравнениями

$$v_j = \Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}) + F_j(z, \bar{z}, u, s),\ 1 \leq j \leq l,$$

где $s$ – параметр. Построим матрицы $\mathcal{A}_{0j}$ аналогичным образом, раскладывая в ряд компоненты функций $f, g$ по переменным $z, w$, а компоненты функций $\Phi, \Psi, F, G$ – по переменным $z, u$; при этом $s$ является параметром. Матрицы $\mathcal{A}_{0j}$ – это матрицы линейных однородных уравнений на зависящие от $s$ коэффициенты $f_{\mu\alpha\beta}, g_{\mu\nu\alpha\beta}$ вектор-функций $f, g$.

По теореме 12.3.1 из монографии [19] голоморфный автоморфизм многообразия $\hat{M}_s$ определяется струей с номером не выше $(K+1)n$, поэтому и касательное к нему поле определяется стру-

ей с номером не выше $(K+1)n$, а значит, критерием равенства нулю поля $X_0$ будет полнота ранга матрицы $\mathcal{A}_{0j_0}$ для некоторого $j_0 \leq \mathcal{J}((K+1)n)$, где $\mathcal{J}(\nu)$ – размерность струи с номером $\nu$.

Полнота ранга матрицы $\mathcal{A}_{0j_0}$ означает полноту ранга матрицы $\mathcal{A}_{0j_0S_0}$, составленной из матриц $\mathcal{A}_{0j_0}|_{s=0}, \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{A}_{0j_0}|_{s=0}, ..., \frac{\partial^{S_0}}{\partial s^{S_0}}\mathcal{A}_{0j_0}|_{s=0}$ для некоторого $S_0$.

Матрица $\mathcal{A}_{0j_0S_0}$ соответствует системе линейных уравнений на коэффициенты $f_{\mu\alpha\beta\gamma}, g_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}$ в разложениях $f_{\mu\alpha\beta} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} f_{\mu\alpha\beta\gamma}s^{\gamma}$, $g_{\mu\nu\alpha\beta} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} g_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}s^{\gamma}$. Полнота ранга матрицы $\mathcal{A}_{0j_0S_0}$ означает, что $X_0 = 0$.

Итак, условие нульмерности алгебры $\operatorname{aut} M_p$, эквивалентно следующим двум условиям:

1) для любого $\mu$, $1 \leq \mu \leq d$, существует число $j_\mu$, такое что матрицы $\mathcal{A}_{\mu j_\mu}$ и $\mathcal{B}_{\mu j_\mu}$ имеют разный ранг;

2) существуют числа $j_0$ и $S_0$, такие что матрица $\mathcal{A}_{0j_0S_0}$ имеет полный ранг.

Обозначим набор натуральных чисел $(S_0, j_0, j_1, ..., j_d)$ через $J$. Если условия 1) и 2) выполнены, то назовем многообразие ***J-невырожденным*** в точке $p$ по аналогии с конечной невырожденностью ([19], finite nondegeneracy). Подобно тому как конечная невырожденность в точке общего положения эквивалентна голоморфной невырожденности, $J$-невырожденность в точке общего положения эквивалентна вещественной невырожденности.

Таким образом, получаем следующий критерий вещественной невырожденности:

**Утверждение 16.** Вещественная невырожденность в точке $p$ эквивалентна $J$-невырожденности для некоторого набора $J$ в этой точке.

## 5. Аналитическая структура множеств фиксированного типа по Блуму-Грэму

Теперь опишем множества, на которых тип (конечный или бесконечный) постоянен.

Введем отношение частичного порядка на типах. Пусть $m$ и $\tilde{m}$ – типы в двух различных точках многообразия.

a) Конечный тип $m = ((m_1, k_1), ..., (m_l, k_l))$ *не больше* конечного типа $\tilde{m} = ((\tilde{m}_1, \tilde{k}_1), ..., (\tilde{m}_{\tilde{l}}, \tilde{k}_{\tilde{l}}))$, если выполнены следующие неравенства:

$$l \leq \tilde{l};\ m_j \leq \tilde{m}_j,\ j = 1, ..., l;$$

$$\sum_{\nu:\, m_\nu \leq j} k_\nu \geq \sum_{\nu:\, \tilde{m}_\nu \leq j} \tilde{k}_\nu,\ j = 2, ..., m_l;$$

b) Бесконечный тип $m = ((m_1, k_1), ..., (m_l, k_l), (\infty, d))$ *не больше* бесконечного типа $\tilde{m} = ((\tilde{m}_1, \tilde{k}_1), ..., (\tilde{m}_{\tilde{l}}, \tilde{k}_{\tilde{l}}), (\infty, \tilde{d}))$, если выполнено одно из двух условий:

b.1) $d < \tilde{d}$;

b.2)

$$d = \tilde{d};\ l \leq \tilde{l};\ m_j \leq \tilde{m}_j,\ j = 1, ..., l;$$

$$\sum_{\nu:\, m_\nu \leq j} k_\nu \geq \sum_{\nu:\, \tilde{m}_\nu \leq j} \tilde{k}_\nu,\ j = 2, ..., m_l;$$

c) Конечный тип меньше бесконечного типа.

Как мы покажем ниже (утверждения 18 и 19), на многообразии существует такой тип $m$, который не больше любого другого типа $\tilde{m}$. Тип $m$ назовем *минимальным*.

Пусть $U_{min}$ – множество таких точек $p \in M \cap U$, что дефект $d(p)$ минимален и равен $d$.

**Утверждение 17.** Множество $(M \cap U) \setminus U_{min}$ является собственным аналитическим подмножеством множества $M \cap U$.

**Доказательство.** Пусть $X_\nu(p)$ – базис пространства $\mathcal{D}_{(K-d)}(p)$. Сопоставим каждому полю $X_\nu = a_\nu(z,w,W)\frac{\partial}{\partial z} + \overline{a_\nu(z,w,W)}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + b_\nu(z,w,W)\frac{\partial}{\partial w} + \overline{b_\nu(z,w,W)}\frac{\partial}{\partial \bar{w}} + c_\nu(z,w,W)\frac{\partial}{\partial W} + \overline{c_\nu(z,w,W)}\frac{\partial}{\partial \overline{W}}$ вектор $V(X_\nu) = (a_\nu, \overline{a_\nu}, b_\nu, \overline{b_\nu}, c_\nu, \overline{c_\nu})$, составленный из его вектор-коэффициентов.

Рассмотрим матрицу $Mat(p)$, составленную из всех векторов $V(X_\nu)$. Ранг матрицы $Mat(p)$ равен $(K-d)$ на множестве $U_{min}$ и меньше $(K-d)$ на множестве $(M \cap U) \setminus U_{min}$. Множество, на котором выполнено неравенство $\mathrm{rk}(Mat(p)) < (K-d)$, есть пересечение всех множеств, заданных равенством нулю одного из миноров размера $(K-d) \times (K-d)$ матрицы $Mat(p)$. Поскольку все элементы матрицы $Mat(p)$ – аналитические функции, то множество $(M \cap U) \setminus U_{min}$ является аналитическим подмножеством множества $M \cap U$. При этом $(M \cap U) \setminus U_{min}$ – собственное подмножество, поскольку $U_{min}$ непусто по определению.

Утверждение 17 доказано.

Пусть $M$ – вещественно аналитическое порождающее многообразие CR-типа $(n, K)$, заданное в окрестности $U$ нуля в пространстве $\mathbb{C}^{n+K}$. Пусть $M$ имеет конечный тип хотя бы в одной точке из $U$.

**Утверждение 18.** $M$ имеет один и тот же конечный минимальный тип $m$ в $U$ всюду, кроме собственного аналитического подмножества.

**Доказательство.** Пусть $M$ имеет конечный тип в точке $p_0$. Тогда существует такое натуральное $j_0$, что пространство $\mathcal{D}_{j_0}(p_0)$ порождает все касательное пространство к $M$ в точке

$p_0$. Это означает, что ранг $\mathcal{R}(j_0, p_0)$ системы векторов, порождающих пространство $\mathcal{D}_{j_0}(p_0)$, максимален и равен $2\,n + K$. Точки $\tilde{p} \in U$, в которых ранг $\mathcal{R}(j_0, \tilde{p})$ не максимален, лежат в пересечении множеств, заданных нулями миноров матриц с вещественно аналитическими элементами. Эти матрицы составлены из компонент векторов, порождающих пространство $\mathcal{D}_{j_0}$. Поэтому все такие точки $\tilde{p}$ образуют собственное аналитическое подмножество $\Sigma(j_0) \subset U$.

Аналогичным образом определим собственные аналитические подмножества $\Sigma(j) \subset U$, $2 \le j < j_0$, в которых ранг $\mathcal{D}_j(\tilde{p})$ не максимален. Тогда искомое собственное аналитическое подмножество $\Sigma$ – это объединение множеств $\Sigma(j) \subset U$, $2 \le j \le j_0$. На $\Sigma$ тип будет больше типа $m$ по построению.

Утверждение 18 доказано.

Если же $M$, как и ранее, имеет равномерно бесконечный тип, то верно аналогичное утверждение:

**Утверждение 19.** $M$ имеет один и тот же минимальный бесконечный тип $m$ в $U$ всюду, кроме собственного аналитического подмножества.

Назовем множество *полуаналитическим*, если оно является конечным объединением множеств, заданных системами уравнений и неравенств вида $F = 0$, $G \neq 0$, где $F, G$ – вещественно аналитические функции.

**Утверждение 20.** Подмножества многообразия $M$, на которых $M$ имеет фиксированный тип (конечный или бесконечный) являются полуаналитическими.

**Доказательство.** Запишем координаты базисных векторов пространств $\mathcal{D}(p)$ в виде матрицы, элементы которой являются

аналитическими функциями. Тогда условие того, что многообразие $M$ в точке $p$ имеет фиксированный тип, задается системой аналитических уравнений и неравенств – равенств и неравенств нулю миноров указанной матрицы.

Утверждение 20 доказано.

Определение типа по Блуму-Грэму может быть модифицировано путем введения различных весов в комплексном касательном пространстве. В исходном определении Блума и Грэма веса всех переменных из комплексного касательного пространства имеют веса равные единице. Данная модификация, как в геометрическом, так и в аналитическом аспектах, обсуждается в четвертой главе.

В связи с этим в заключение сформулируем вопрос:

**Вопрос 21.** Как весовой подход распространяется на поверхности взвешенно бесконечного типа?

На порядок конечной невырожденности в точке общего положения есть оценка через CR-размерность $n$. В связи с этим можно сформулировать аналогичный вопрос для оценки $J$:

**Вопрос 22.** Можно ли оценить норму вектора $J$ в точке общего положения через CR-размерность и коразмерность многообразия?

# Глава 2

# Голоморфно однородные CR-многообразия и их модельные поверхности

## 1. Введение.

Каждому порождающему CR-многообразию $M$ можно сопоставить его модельную поверхность $Q$ (см. пункт 2). Модельные поверхности являются центральным объектом удобной и разработанной технологии – метода модельной поверхности [4].

В качестве иллюстрации применения метода можно привести вопрос об оценке размерности алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ голоморфных инфинитезимальных автоморфизмов многообразия $M$ в фиксированной точке (или более грубый вопрос о конечномерности $\tilde{\mathfrak{g}}$). Поскольку размерность алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ не превосходит размерности алгебры $\mathfrak{g}$ ее модельной поверхности $Q$ [5], то достаточно оценить размерность алгебры $\mathfrak{g}$. Так, размерность невырожденной (т.е. Леви-невырожденной) гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ не превосходит восьми, поскольку такова размерность алгебры $\mathfrak{g}$ для ее модельной поверхности – сферы $\{v = |z|^2\}$ [37].

Изначально метод модельной поверхности развивался при некоторых допущениях общего положения – условиях полной

невырожденности (см. [4], [5]). В работе [24] этот метод был распространен с класса вполне невырожденных многообразий на более широкий класс всех многообразий конечного типа по Блуму-Грэму (определение типа см. в [25]), а также были введены невырожденные многообразия, для которых условие полной невырожденности было заменено на другое, значительно более слабое, условие. В связи с этим возникли новые вопросы, сформулированные в работе [24]. Нас будут интересовать те из них (№3 и №8), которые связаны с голоморфно однородными многообразиями.

Первый из вопросов таков: рассмотрим росток голоморфно однородного многообразия. Верно ли, что его модельная поверхность также голоморфно однородна? Мы показываем, что ответ утвердителен вне зависимости от того, является ли тип конечным или бесконечным (см. теоремы 1 и 2 ниже).

Другой естественный вопрос о голоморфно однородных многообразиях касается их типа: какие типы по Блуму-Грэму для таких многообразий могут быть реализованы? В типе фигурируют два вида данных: веса и кратности. В [24] было доказано, что веса не могут быть произвольными. Мы доказываем (см. теорему 3), что кратности в типе также не могут быть произвольными, и приводим оценки, которые являются в некотором смысле точными.

## 2. Модельная поверхность однородного многообразия.

Пусть $z \in \mathbb{C}^n, w_1 \in \mathbb{C}^{k_1}, ..., w_l \in \mathbb{C}^{k_l}$ – векторные координаты в пространстве $\mathbb{C}^{n+k_1+...+k_l}$ с весами $[z] = 1, [w_j] = m_j$, где $m_j$ – натуральное число не меньше двух. Введенные веса индуцируют естественную градуировку на мономах, степенных рядах

и векторных полях. Многочлены, являющиеся суммой мономов одного веса, а также вектор-формы, составленные из таких многочленов, мы будем называть *квазиоднородными*.

**Определение 1.** Росток многообразия называется *голоморфно однородным* (или *однородным*), если алгебра Ли его инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов имеет в центре ростка полный ранг, т.е. равный размерности многообразия.

Пусть $M$ – росток гладкого ($C^\infty$) вещественного порождающего однородного многообразия конечного типа. Как показано в [24], из однородности следует, что веса $m_j$ в его типе по Блуму-Грэму $((m_1, k_1), ..., (m_l, k_l))$ должны быть подряд идущими натуральными числами, начинающимися с двух, т.е. $m_j = j + 1$. Кратности $k_j$ суть целые числа, большие нуля. Тогда росток однородного многообразия $M$ можно задать системой уравнений вида [25]:

$$v_j = \Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}) + o(j+1),\ j = 1, ..., l, \qquad (2.1)$$

где $u_j = \operatorname{Re} w_j$, $v_j = \operatorname{Im} w_j$, $\Phi_j$ – квазиоднородная вектор-форма веса $j + 1$, $o(j)$ – слагаемые веса больше $j$. При этом $\Phi_j$ записаны в стандартной форме (см. [25], теорема 6.2.). Мы используем термин "форма" в двух различных смыслах, поскольку в обоих случаях его употребление общепринято, однако из контекста всегда будет ясно, какое из значений имеется в виду. Отметим, что в соответствии с [25] тип ростка определен однозначно и является голоморфным инвариантом.

Если однородное многообразие $M$ задано системой (2.1), то его модельная поверхность $Q$ задается системой уравнений [24]:

$$v_j = \Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}),\ j = 1, ..., l. \qquad (2.2)$$

Пусть $\varepsilon$ – вещественное число. Пусть $a = (a^1, ..., a^n) \in \mathbb{C}^n$, $b_j = (b_j^1, ..., b_j^{k_j}) \in \mathbb{C}^{k_j}$ – набор параметров, для которого выполнены равенства $a^\mu = \alpha^\mu \varepsilon$, $b_j^\mu = \beta_j^\mu \varepsilon^{j+1}$ при всех допустимых значениях $\mu$. Введем следующие обозначения:

1) Пусть $\Psi(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}, a, \bar{a}, b_1, ..., b_l)$ – ненулевой полином. Запись

$$\Psi(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}, a, \bar{a}, b_1, ..., b_l) = \Omega(s)$$

будет означать, что $\Psi(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}, a, \bar{a}, b_1, ..., b_l) = c\,\varepsilon^s$, где $c = \Psi(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}, \alpha, \bar{\alpha}, \beta_1, ..., \beta_l)$ не равно тождественному нулю и не зависит от $\varepsilon$.

2) Пусть $\Psi(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}, a, \bar{a}, b_1, ..., b_l)$ – аналитическая функция. Запись

$$\Psi(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}, a, \bar{a}, b_1, ..., b_l) = \omega(s)$$

будет означать, что каждый член ее ряда равен $c\,\varepsilon^\sigma = \Omega(\sigma)$, где $c = c(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}, \alpha, \bar{\alpha}, \beta_1, ..., \beta_l)$ не зависит от $\varepsilon$, $\sigma \geq s$, причем для разных мономов значения $c$ и $\sigma$ могут различаться.

Связь между обоими обозначениями можно символически записать следующим образом: $\omega(s) = \sum_\sigma \Omega(\sigma)$, где сумма берется по некоторому непустому подмножеству натуральных чисел, каждое из которых не меньше $s$.

**Теорема 1.** Пусть $M$ – однородное многообразие конечного типа. Тогда его модельная поверхность $Q$ также однородна.

**Доказательство.**

Пусть $\varepsilon$ – вещественное число. Рассмотрим сдвиг $z \longrightarrow z + a,\ u_j \longrightarrow u_j + b_j$ в точку $\xi \in M$, такой что для координат векторов $a = (a^1, ..., a^n),\ b_j = (b_j^1, ..., b_j^{k_j})$ выполнены равенства $a^\mu = \alpha^\mu\,\varepsilon,\ b_j^\mu = \beta_j^\mu\,\varepsilon^{j+1}$ при всех допустимых значениях $\mu$.

Уравнения для $M$ примут вид:

$$v_j = \sum_{\nu=0}^{j+1} \Psi_{j,\nu}(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}, a, \bar{a}, b_1, ..., b_l) + \tag{2.3}$$
$$+\Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}) + o(j+1),\ j = 1, ..., l,$$

где $\Psi_{j,\nu}$ имеют вес $\nu$ при указанном выше выборе весов переменных.

Пусть запись $[\Phi]_\nu$ обозначает сумму всех слагаемых веса $\nu$, входящих в выражение $\Phi$. Для каждого $\nu < j+1$ слагаемое $\Psi_{j,\nu}$ представляется в виде суммы слагаемых $\Psi_{j,\nu}^1$ и $\Psi_{j,\nu}^2$, определяемых следующим образом:

$\Psi_{j,\nu}^1 = [\Phi_j(z + a, \overline{z + a}, u_1 + b_1, ..., u_{j-1} + b_{j-1})]_\nu$,

$\Psi_{j,\nu}^2 = \Psi_{j,\nu} - \Psi_{j,\nu}^1$.

При этом $\Psi_{j,\nu}^1 = \Omega(j + 1 - \nu)$, $\Psi_{j,\nu}^2 = \omega(j + 1 - \nu + 1)$.

Поскольку $M$ однородно, то тип в точке $\xi$ равен типу в точке ноль. Т.к. выражения $\Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1})$ записаны в стандартной форме, то из условия сохранения типа получаем, что после приведения $M$ к стандартной форме по Блуму-Грэму определяющие уравнения будут иметь вид:

$$v_j = \tilde{\Psi}_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}, a, \bar{a}, b_1, ..., b_l) + \tag{2.4}$$
$$+\Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}) + o(j+1),\ j = 1, ..., l,$$

где $\tilde{\Psi}_j$ имеет вес $j + 1$, причем $\tilde{\Psi}_j = \omega(1)$.

Приведение к стандартной форме осуществляется последовательно для всех весовых компонент. Поскольку для каждой весовой компоненты порядок малости по $\varepsilon$ минимален для $\Psi_{j,\nu}^1$, с

точностью до малых более высокого порядка стандартная форма для модельной поверхности совпадает со стандартной формой для самого многообразия. Поэтому из (2.4) получаем, что уравнения для модельной поверхности будут иметь вид:

$$v_j = \Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}),\ j = 1, ..., l,$$

что означает однородность модельной поверхности.

Теорема 1 доказана.

Пусть $M$ – росток многообразия бесконечного типа $((m_1, k_1), ..., (m_l, k_l), (\infty, k_{l+1}))$. Согласно [25], его можно задать системой уравнений:

$$v_j = \Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}) + o(m_j),\ j = 1, ..., l,$$
$$v_{l+1} = r(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{l+1}),$$

где $\Phi_j$ – квазиоднородная вектор-форма веса $m_j$, $r$ – гладкая вектор-функция, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям (см. [25]), которые несущественны для наших рассмотрений.

Тогда *модельной поверхностью $Q$ ростка многообразия $M$ бесконечного типа* назовем поверхность, заданную системой уравнений:

$$v_j = \Phi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}) + o(m_j),\ j = 1, ..., l,$$
$$v_{l+1} = 0.$$

Отметим, что модельная поверхность $Q$ оказывается произведением невырожденной модельной поверхности на плоскую.

**Теорема 2.** Пусть $M$ – однородное многообразие бесконечного типа. Тогда его модельная поверхность $Q$ (имеющая бес-

конечный тип) также однородна.

**Доказательство.** Бесконечность типа означает, что в стандартной форме определяющих уравнений поверхности $Q$ присутствуют тождественные нули. Рассмотрим усеченную систему уравнений, которая состоит только из тех уравнений, которые не содержат тождественных нулей в своей нормальной форме, и обозначим определяемые ими многообразия через $\hat{M}$ и $\hat{Q}$. Отображение $Q$ в себя индуцирует отображение $\hat{Q}$ в себя [24]. По теореме 1 модельная поверхность $\hat{Q}$ локально однородна. Поскольку системы уравнений для $Q$ и $\hat{Q}$ отличаются на уравнения, содержащие тождественные нули в своей нормальной форме, то $Q$ также локально однородна.

Теорема 2 доказана.

**Замечание 1.** Голоморфная однородность $Q$ дает необходимое условие однородности, но не дает достаточного. Приведем конкретный пример многообразия, не являющегося голоморфно однородным, но имеющего голоморфно однородную модельную поверхность:

**Пример 1.** *а*) Рассмотрим следующую гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$:

$$M = \{v = |z|^2 + |z|^8\}.$$

$M$ записана в нормальной форме Черна-Мозера, причем точка ноль является омбилической. Предположим, что $M$ голоморфно однородна. Тогда некоторая окрестность нуля состоит из омбилических точек, а значит, росток гиперповерхности $M$ эквивалентен ростку сферы [30]. Но тогда нормальная форма должна иметь вид $\{v = |z|^2\}$. Полученное противоречие показывает, что $M$ не является голоморфно однородной.

С другой стороны, ее модельная поверхность $\{v = |z|^2\}$ яв-

ляется голоморфно однородной.

*b*) Или, еще более общо, можно рассмотреть возмущение гиперквадрики в $\mathbb{C}^{n+1}$ слагаемыми веса не меньше семи в нормальной форме:

$$M = \{v = \epsilon_1|z_1|^2 + ... + \epsilon_n|z_n|^2 + \sum_{\mu+\nu\geq 7} c_{\mu\nu}(u)z^\mu \bar{z}^\nu\},$$

где $\epsilon_j = \pm 1$, а $\mu, \nu$ – мультииндексы. По той же причине, что и в пункте *a*), в отличие от гиперквадрики, гиперповерхность $M$ не является однородной.

**Замечание 2.** Из приведенных примеров также видно, что достаточно общее возмущение модельной гиперквадрики, в отличие от самой гиперквадрики, не является голоморфно однородным. Это можно увидеть и непосредственно: условие полной невырожденности (как для гиперповерхностей, так и для многообразий более высокой коразмерности) есть условие общего положения, причем многообразие общего положения не имеет автоморфизмов, а значит, не может быть голоморфно однородным. Поэтому, рассматривая достаточно общее возмущение определяющих уравнений голоморфно однородного модельного многообразия слагаемыми более высокого веса, получаем уравнения многообразия, не являющегося голоморфно однородным.

## 3. Ограничения на кратности в типе однородного многообразия.

Пусть $\mathcal{N}(l)$ – пространство квазиоднородных форм веса $l+1$, записанных в стандартной форме. Пусть $\varkappa_l = \dim \mathcal{N}(l)$ – размерность пространства $\mathcal{N}(l)$. Отметим, что кратности $k_j$ в типе по Блуму-Грэму ростка многообразия $M$ конечного типа, задан-

ного уравнениями (2.1), должны удовлетворять неравенствам $k_j \leq \varkappa_j$, поскольку возникновение линейных зависимостей между компонентами вектор-формы $\Phi_j$ означает бесконечность типа.

Будем говорить, что поверхность, заданная уравнениями вида (2.2), *вполне невырожденна*, если кратности $k_1, ..., k_{l-1}$ в ее типе $((m_1, k_1), ..., (m_l, k_l))$ принимают максимально возможные значения, т.е. $k_1 = \varkappa_1, ..., k_{l-1} = \varkappa_{l-1}$. Кратность $k_l$ при этом может принимать любое допустимое значение, т.е. $1 \leq k_l \leq \varkappa_l$.

Если же поверхность *невырождена* (см. [24]), то кратности $k_1, ..., k_l$ удовлетворяют лишь неравенствам $k_1 \leq \varkappa_1, ..., k_l \leq \varkappa_l$.

Пусть однородная модельная поверхность $Q$ задана системой (2.2).

Пусть $\Phi_{j,\nu}$ – компоненты вектор-формы $\Phi_j$. Пусть $B(j)$ – множество, состоящее из всех многочленов $\Phi_{j,\nu}$ при фиксированном $j$. Дополним множество $B(j)$ до базиса $\mathcal{B}(j)$ пространства $\mathcal{N}(j)$.

**Теорема 3.** Пусть $M$ – росток однородного многообразия конечного типа, заданный системой (2.1). Тогда

$$k_{j+1} \leq k_j + (\varkappa_{j+1} - \varkappa_j).$$

**Доказательство.** Поскольку тип ростка многообразия определяется по модельной поверхности, можно рассматривать не $M$, а его модельную поверхность $Q$. Пусть $N(j) = \langle B(j) \rangle$ – пространство, порожденное множеством $B(j)$. Отметим, что $\dim N(j) = k_j$.

Построим множество $C(j+1) \subset \mathcal{B}(j+1)$, сопоставив всем элементам множества $\mathcal{B}(j) \setminus B(j)$ различные элементы множества $\mathcal{B}(j+1)$ следующим образом. Каждому элементу $\chi_j(z, \bar{z}, u) \in \mathcal{B}(j) \setminus B(j)$ соответствует элемент $\chi_{j+1}(z, \bar{z}, u) \in C(j+1)$, такой

что выражение $\chi_{j+1}(z+a, \overline{z+a}, u+b)$ содержит слагаемое $\chi_j$ с ненулевым коэффициентом.

Теперь заметим, что ни один из элементов множества $C(j+1)$ не может содержаться в множестве $B(j+1)$, поскольку в противном случае при сдвиге $z \longrightarrow a,\ u \longrightarrow b$ тип по Блуму-Грэму изменится, что противоречит голоморфной однородности. Следовательно, $\dim N(j+1) \leq \dim \mathcal{N}(j+1) - \dim \langle C(j+1) \rangle = \varkappa_{j+1} - (\varkappa_j - k_j)$. Отсюда получаем:

$k_{j+1} - k_j = \dim N(j+1) - k_j \leq \varkappa_{j+1} - (\varkappa_j - k_j) - k_j = \varkappa_{j+1} - \varkappa_j$.

Теорема 3 доказана.

Теперь покажем, что оценки сверху, полученные в теореме 3, являются точными, предъявив поверхности, на которых они достигаются.

Рассмотрим вполне невырожденную поверхность $\mathcal{Q}_l$, такую что ее тип по Блуму-Грэму равен $((2, \varkappa_1), (3, \varkappa_2), ..., (l+1, \varkappa_l))$, т.е. все кратности в ее типе принимают максимально возможные значения (см. [5]).

Поверхность $\mathcal{Q}_l$ однородна и задается системой уравнений вида:

$$v_j = \Xi_j(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{j-1}),\ j = 1, ..., l,$$

в которой компоненты вектор-форм $\Xi_j$ образуют базис $\mathcal{B}(l)$ пространства $\mathcal{N}(l)$ .

Отметим, что с помощью указанного условия на тип поверхность $\mathcal{Q}_l$ определяется однозначно с точностью до невырожденного линейного преобразования.

**Замечание 3.** Более того, разность $k_l - k_{l-1}$ может принимать весь диапазон возможных значений, т.е. значения от $(1 - \varkappa_{l-1})$ до $(\varkappa_l - \varkappa_{l-1})$. Действительно, значение $(\nu - \varkappa_{l-1})$, $1 \leq \nu \leq \varkappa_l$, достигается на вполне невырожденной поверхности,

имеющей тип $((2,\varkappa_1),(3,\varkappa_2),...,(l,\varkappa_{l-1}),(l+1,\nu))$. Отсюда видно, что оценка снизу для разности $k_l - k_{l-1}$, в отличие от оценки сверху, тривиальна.

Отметим, что оценки, полученные в теореме 3, асимптотически лишь ненамного улучшают тривиальную оценку $k_j \leq \varkappa_j$. Для того чтобы придать точный смысл данному высказыванию, выясним, каково асимптотическое поведение кратностей $\varkappa_j$ при больших $n$.

**Утверждение.**

$$\varkappa_j = \left(\frac{2^j-2}{j!}\right) n^j + O(n^{j-1}).$$

**Доказательство.** Имеет место равенство:

$$\varkappa_j = \dim \mathcal{N}(j) = \dim \mathcal{NR}(j) + (\dim \mathcal{N}(j) - \dim \mathcal{NR}(j)),$$

где $\mathcal{NR}(j)$ – пространство однородных форм веса $j$, записанных в стандартной форме по Блуму-Грэму и не зависящих от переменной $u$.

Пусть $\mathcal{FR}(j)$ – пространство всех однородных форм веса $j$, не зависящих от переменной $u$.

Пользуясь комбинаторными формулами, получаем, что $\dim \mathcal{FR}(j) = C^j_{2n+j-1}$, $\dim(\mathcal{FR}(j) - \mathcal{NR}(j)) = 2\,C^j_{n+j-1}$, т.е. $\dim \mathcal{NR}(j) = \dim \mathcal{FR}(j) - \dim(\mathcal{FR}(j) - \mathcal{NR}(j)) = \frac{2^j-2}{j!}\,n^j + O(n^{j-1})$. С другой стороны, $(\dim \mathcal{N}(j) - \dim \mathcal{NR}(j)) = O(n^{j-1})$, поскольку веса компонент переменной $u$ не меньше двух.

Утверждение доказано.

Итак, выражения для $\varkappa_j$ представляют собой многочлены от

$n$ степени $j$. Поэтому при больших $n$ разница между неравенством $k_{j+1} \leq \varkappa_{j+1} - (\varkappa_j - k_j)$ и неравенством $k_{j+1} \leq \varkappa_{j+1}$ невелика.

Также отметим, что точные значения величин $\varkappa_j$ для $j = 1, ..., 6$ вычислены в [5].

# Глава 3

# Автоморфизмы CR-подмногообразий комплексного гильбертова пространства

## 1. Введение

CR-подмногообразия бесконечномерного и конечномерного комплексного гильбертова пространства достаточно сильно отличаются друг от друга. Для демонстрации отличий мы посмотрим на многообразия с двух точек зрения: с позиции их голоморфных симметрий и с позиции их модельных поверхностей.

С каждым ростком вещественного вещественно аналитического порождающего CR-многообразия, заданным в некоторой точке, можно связать градуированную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов и рассмотреть ее положительную составляющую – подалгебру $\mathfrak{g}_+$ (см. [4]). Если числа $n$ и $k$, равные соответственно CR-размерности (т.е. размерности комплексной касательной) и вещественной коразмерности многообразия и составляющие его тип $(n, k)$, положительны и конечны, то $\mathfrak{g}_+$ в большинстве случаев оказывается тривиальной. В частности, алгебра $\mathfrak{g}_+$ тривиальна для почти любой квадратичной модельной поверхности фиксированного

типа $(n, k)$ (при некоторых ограничениях на $n$ и $k$) ([3], [5]), а в случае вполне невырожденных модельных поверхностей более высоких порядков алгебра $\mathfrak{g}_+$ тривиальна всегда ([8], [35], [38]).

Однако если коразмерность $k$ бесконечна, то картина становится качественно иной. Хотя определение полной невырожденности в бесконечномерном случае аналогично конечномерному и также является условием общего положения (см. [7]), свойства бесконечномерных модельных поверхностей типа $(n, \infty)$ оказываются противоположными: алгебра $\mathfrak{g}_+$ для вполне невырожденной поверхности оказывается бесконечномерной (утверждение 1), а конечномерными алгебрами обладают лишь исключительные поверхности, примеры которых приведены ниже (утверждения 2-6); в то же время в конечномерной ситуации для почти всех поверхностей алгебра $\mathfrak{g}_+$ оказывается тривиальной. Иными словами, типичная размерность алгебры $\mathfrak{g}_+$ в бесконечномерной ситуации наибольшая из возможных, а в конечномерной ситуации – наименьшая.

Отметим, что в наших рассмотрениях алгебры $\mathfrak{g}_+$ состоят из векторных полей, формально удовлетворяющих условию касания для рассматриваемых многообразий (см. определение 2 ниже).

Бесконечномерный случай специфичен еще и тем, что при фиксированной конечной CR-размерности $n$ многообразия существует единственная (с точностью до формальной эквивалентности) модельная поверхность. Более того, всякое вполне невырожденное многообразие CR-размерности $n$, не обязательно являющееся модельным, оказывается формально эквивалентным ей (определение формальной эквивалентности см. ниже).

Также в бесконечномерном случае можно построить многообразия (без условия полной невырожденности) с любой наперед

заданной размерностью алгебры $\mathfrak{g}_+$. Данное обстоятельство интересно тем, что в случае конечной коразмерности $k$ и при фиксированном типе $(n, k)$ во всех изученных ситуациях при тех или иных требованиях невырожденности размерности алгебр $\mathfrak{g}_+$ для всевозможных поверхностей не принимают всех подряд идущих значений (см., например, [1], [4]).

Однако в отдельных аспектах аналогия с конечномерным случаем сохраняется. В качестве следствия с помощью некоторых из построенных многообразий, перенося конструкцию работы [18] (А.Б. Сухов, 2003) на бесконечномерную ситуацию, мы можем получить системы дифференциальных уравнений второго порядка с известными симметриями: решениями этих систем будут многообразия Сегре исходных многообразий. Конструкция Сухова применима также и для конечномерных вполне невырожденных многообразий.

## 2. Вполне невырожденные многообразия

Пусть $M^n$ – росток вполне невырожденного бесконечномерного CR-многообразия типа $(n, \infty)$, $0 < n < \infty$, в начале координат в комплексном гильбертовом пространстве $H$ (определение полной невырожденности дано в [7] для бесконечномерного случая, в котором полная невырожденность называется невырожденностью, и в [5] для конечномерного случая). Пусть в $H$ заданы координаты $(z, w) = (z, w_2, w_3, ..., w_j, ...)$, где $z \in \mathbb{C}^n$, и все $w_j$ являются конечномерными векторными переменными.

Пусть росток $M^n$ задан в окрестности нуля векторным уравнением:

$v = \Psi(z, \bar{z}, u)$,

где $w = u + iv$.

Рассмотрим также росток $\tilde{M}^n$, заданный уравнением:
$v = \tilde{\Psi}(z, \bar{z}, u)$.

**Определение 1** . *Будем говорить, что ростки $M^n$ и $\tilde{M}^n$ формально эквивалентны, если существует формальное векторное преобразование*

$z \longrightarrow f(z, w)$,

$w \longrightarrow g(z, w)$,

*заданное формальными степенными рядами, такое что в кольце формальных степенных рядов от переменных $z, \bar{z}, u$ имеет место равенство*

$\operatorname{Im} g(z, u + i\Psi(z, \bar{z}, u)) -$

$-\tilde{\Psi}(f(z, u + i\Psi(z, \bar{z}, u)), \overline{f(z, u + i\Psi(z, \bar{z}, u))}, \operatorname{Re} g(z, u + i\Psi(z, \bar{z}, u))) = 0$,

*т.е. в результате выполнения всех формальных подстановок в левой части равенства и приведения подобных слагаемых получается формальный ряд, в котором коэффициенты при всех мономах равны нулю.*

**Теорема 1** . *Для любого натурального числа $n$ все вполне невырожденные многообразия типа $(n, \infty)$ формально эквивалентны.*

Иными словами, вполне невырожденное многообразие фиксированной конечной CR-размерности и бесконечной коразмерности единственно. В частности, $M^n$ формально эквивалентно своей модельной поверхности.

**Доказательство.** Покажем, что росток $M^n$ эквивалентен ростку своей модельной поверхности, откуда, ввиду единственности модельной поверхности типа $(n, \infty)$, будет следовать утверждение теоремы.

Введем веса переменных следующим образом: вес переменной $z$ положим равным единице, а веса переменных $w_j$ положим равными $j$.

Пусть в координатах $(z, w) = (z, w_2, w_3, ..., w_j, ...)$ $M^n$ задано в окрестности нуля бесконечной системой уравнений:

$v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + O(3)$,

...

$v_k = \Phi_k(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-1}) + O(k+1)$,

... ,

где $v_k = \mathrm{Im}\ w_k$ – векторные переменные конечной размерности, равной размерности пространства нормализованных форм веса $k$ ([5]); $u_k = \mathrm{Re}\ w_k$, $\Phi_k(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-1})$ – векторы из однородных полиномов веса $k$, $O(k)$ – слагаемые веса не меньше $k$.

Запишем данную систему в виде:

$v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + F_2(z, \bar{z}, u)$,

...

$v_k = \Phi_k(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-1}) + F_k(z, \bar{z}, u)$,

... ,

где $F_k(z, \bar{z}, u) = O(k+1)$.

Без ограничения общности можно считать, что нормализованы не только выражения $\Phi_k$ (процесс нормализации для $\Phi_k$ описан в [7] для бесконечномерного случая и в [5] для конечномерного случая), но и выражения $F_k$. Этого можно добиться, выполнив одновременно с нормализацией слагаемых веса $k$ в уравнении

$v_k = \Phi_k(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-1}) + F_k(z, \bar{z}, u)$

нормализацию слагаемых веса $k$ в уравнениях

$v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + F_2(z, \bar{z}, u)$,

...

$v_{k-1} = \Phi_{k-1}(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-2}) + F_{k-1}(z, \bar{z}, u)$

последовательно для всех натуральных $k \geq 2$.

Иными словами, для каждого $k \geq 2$ нужно убрать из выражений $F_2, ..., F_{k-1}, \Phi_k$ формы веса $k$, принадлежащие пространству гармонических форм $\mathcal{H}_k$ (в обозначениях работы [5]), для чего нужно выполнить последовательно для $2 \leq j \leq k$ треугольно-полиномиальные преобразования вида:

$z \longrightarrow z,$

$v_j \longrightarrow v_j + P_{jk}(z, \bar{z}, u),$

$v_l \longrightarrow v_l,\ l \neq j,$

где $P_{jk}$ имеют вес $k$.

Таким образом, для каждого $k$ указанные нормализации являются преобразованиями, имеющими вид:

$z \longrightarrow z,$

$v_2 \longrightarrow v_2 + P_{2k}(z, \bar{z}, u),$

...

$v_k \longrightarrow v_k + P_{kk}(z, \bar{z}, u),$

$v_l \longrightarrow v_l,\ l > k,$

где $P_{jk}$ имеют вес $k$.

Отметим также, что, хотя каждая из координат участвует в бесконечном числе нормализаций, веса выражений $P_{jk}$ и $P_{jl}$ различны для различных $k, l$. Поэтому композиция всех нормализаций определена и задает формальное преобразование вида:

$z \longrightarrow z,$

$v_2 \longrightarrow v_2 + \sum_{j=2}^{\infty} P_{2j}(z, \bar{z}, u),$

...

$v_k \longrightarrow v_k + \sum_{j=k}^{\infty} P_{kj}(z, \bar{z}, u),$

... ,

и с точностью до указанного формального преобразования локальные определяющие уравнения ростка $M^n$ нормализованы, что мы и будем предполагать далее.

Докажем по индукции, что линейным обратимым преобразо-

ванием, отличающимся от тождественного на конечномерном подпространстве, можно сделать росток $M^n$ касательным до любого наперед заданного конечного порядка (в смысле введенных весов) к своей модельной поверхности.

В качестве базы индукции возьмем исходные уравнения поверхности.

Предположим, что для некоторого $k$ исходная система эквивалентна системе

$v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + O(k)$,

$v_3 = \Phi_3(z, \bar{z}, u_2) + O(k)$,

...

$v_k = \Phi_k(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-1}) + O(k)$,

... .

Поскольку координаты вектора $\Phi_k(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-1})$ образуют базис нормализованных однородных форм веса $k$, то, для того чтобы убрать слагаемые веса $k$, нужно выполнить преобразования вида:

$W_2 = w_2 + A_{2k} w_k$,

...

$W_{k-1} = w_{k-1} + A_{(k-1)k} w_k$,

$W_l = w_l,\ l \geq k$,

где $A_{jk}$ – матрицы.

Тогда все слагаемые, которые после замены координат могли бы изменить модельную поверхность, будут иметь вид:

$\Phi_j(z, \bar{z}, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_{j-1})$,

где на месте $\mathcal{U}_l$ может стоять как соответствующее $U_l$ ($U_l = \operatorname{Re} W_l$), так и выражение $\operatorname{Re}(A_{lk} W_k)$, причем на месте хотя бы одного из $\mathcal{U}_l$ стоит $\operatorname{Re}(A_{lk} W_k)$. Но все такие слагаемые имеют вид $O(k+1)$.

Поэтому исходная система (в новых координатах) эквивалентна системе

$v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + O(k+1)$,
$v_3 = \Phi_3(z, \bar{z}, u_2) + O(k+1)$,
...
$v_k = \Phi_k(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-1}) + O(k+1)$,
... .

Теперь рассмотрим композицию всех преобразований, выполнявшихся на каждом из шагов индукции. Хотя каждая из координат участвует в бесконечном числе преобразований, выражения $A_{jk}w_k$ и $A_{jl}w_l$ различны для различных $k, l$. Поэтому композиция определена и задает формальное преобразование вида:

$z \longrightarrow z$,
$w_2 \longrightarrow w_2 + \sum_{j=3}^{\infty} A_{2j}w_j$,
...
$w_k \longrightarrow w_k + \sum_{j=k+1}^{\infty} A_{kj}w_j$,
... ,

которое осуществляет формальную эквивалентность ростка $M^n$ (в предположении о нормализованности его определяющих уравнений) и его модельной поверхности.

Теорема доказана.

**Замечание 1.** Для бесконечного значения CR-размерности, т.е. для типа $(\infty, \infty)$, утверждение теоремы перестает быть верным: множество всех попарно неэквивалентных вполне невырожденных поверхностей указанного типа бесконечно. Действительно, в случае типа $(\infty, \infty)$ максимальный вес векторных переменных $w_j$ может оказаться конечным, поскольку размерность некоторых из векторных переменных $w_j$ при бесконечном значении CR-размерности может принимать бесконечные значения, и поэтому число переменных $w_j$ может быть конечным. А если для двух поверхностей максимальные веса переменных

$w_j$ различны, то они не эквивалентны. При этом вполне невырожденное многообразие $M^\infty$ уже не обязательно эквивалентно своей модельной поверхности (как и в ситуации конечномерных CR-многообразий).

Если для двух поверхностей типа $(\infty, \infty)$ максимальные веса переменных $w_j$ совпадают, то они также могут оказаться неэквивалентными. Например, инвариантом является количество компонент вектора $w$ максимальной размерности.

**Замечание 2.** Единственность модельной поверхности специфична не только для многообразий бесконечной коразмерности, но встречается также и в конечномерном случае. Хотя при фиксированном типе $(n, k)$ модельных поверхностей может быть несколько (как конечное число, так и конечнопараметрическое семейство), для некоторых наборов значений $n$ и $k$ модельная поверхность ровно одна: единственность имеет место, если при фиксированной CR-размерности $n$ коразмерность $k$ равна размерности пространства нормализованных однородных форм, вес которых не превосходит некоторого натурального числа (см. [5]).

А единственность вполне невырожденного многообразия при фиксированной конечной CR-размерности уже является характерной особенностью бесконечномерного случая. Например, для жестких многообразий типа $(1, 1)$ условие эквивалентности многообразия своей модельной поверхности выражается дифференциальным уравнением 6-го порядка

$$\mu_{zz\bar{z}} - 3\mu_{z\bar{z}}\mu - \mu_z\mu_{\bar{z}} + 2\mu_{\bar{z}}\mu^2 = 0,$$

где $\mu = \left(\frac{F_{zz\bar{z}}}{F_{z\bar{z}}}\right)$, на определяющую функцию $F$ ([14]).

**Определение 2** . *(a) Формальным вещественным вектор-*

*ным полем в окрестности начала координат в комплексном гильбертовом пространстве $H$ с конечномерными векторными координатами $(z, w_2, ..., w_j, ...)$ называется выражение вида:*

$$X = 2\mathrm{Re}\Big(f(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big), \tag{3.1}$$

*где $w = (w_2, ..., w_j, ...)$, $f(z,w), g_j(z,w)$ – конечномерные векторы, чьи координаты – формальные степенные ряды.*

*(b) Формальным многообразием $M$ будем называть заданную в некоторой окрестности начала координат систему уравнений вида:*

$$v = \Psi(z, \bar{z}, u),$$

*где $w = u + iv$, $\Psi(z, \bar{z}, u)$ – бесконечномерный вектор, чьи координаты – формальные степенные ряды.*

Введем градуировку на векторных полях следующим образом:

$$[z] = 1,\ [\frac{\partial}{\partial z}] = -1,\ [w_j] = m_j,\ [\frac{\partial}{\partial w_j}] = -m_j.$$

Тогда векторные поля и формальные ряды распадаются в сумму градуированных компонент. Обозначим через $[X]_\nu$ $\nu$-ю градуированную компоненту поля $X$ для всех $\nu \geq 0$. Определим действие поля $X$ на формальный ряд $F = \sum_{l=0}^{\infty} F_l$, где суммирование ведется по однородным весовым компонентам, как сумму действий компонент $[X]_\nu$ на $F$:

$$XF = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X]_\nu F = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big[2\mathrm{Re}\Big(f(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big)\Big]_\nu \sum_{l=0}^{\infty} F_l =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\Big[2\mathrm{Re}\Big(f(z,w)\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{j=2}^{\infty}g_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big)\Big]_\nu F_l.$$

**Утверждение 1** . *$XF$ является корректно определенным формальным рядом.*

**Доказательство.** $[X]_\nu F$ является корректно определенным формальным рядом, поскольку все однородные весовые компоненты $F_l$ являются многочленами, зависящими от конечного числа векторных переменных $z, w_j$ (в силу конечномерности векторных переменных $z, w_j$), а на многочлены ненулевым образом действует лишь конечное число слагаемых компоненты $X_\nu$, и эти слагаемые имеют вид конечномерных векторных полей $2\mathrm{Re}\Big(p(z,w)\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{j=2}^{N(\nu)}q_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big)$ с полиномиальными коэффициентами.

Сумма $XF=\sum_{\nu=0}^{\infty}[X]_\nu F$ также корректно определена, поскольку каждый из рядов $[X]_\nu F$ имеет вид $O(\nu)$, и поэтому все однородные весовые компоненты суммы $\sum_{\nu=0}^{\infty}[X]_\nu F$ стабилизируются, начиная с некоторого момента.

Утверждение 1 доказано.

Будем считать, что координаты $\psi_l$ вектора $(v-\Psi(z,\bar z,u))=(\psi_1,\psi_2,...,\psi_l,...)$ упорядочены по неубыванию весов и что каждый вес встречается конечное число раз (в силу конечномерности векторных переменных $z, w_j$ этого можно добиться формальным преобразованием).

Пусть $J$ – множество, состоящее из сумм произведений координат $\psi_l$ на вещественные формальные степенные ряды, т.е.

$$J=\Big\{\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\,\psi_l\Big\},$$

где $\alpha_l$ – формальные ряды. Множество $J$ корректно определено и образует идеал:

**Утверждение 2** . *$J$ – идеал в кольце формальных степенных рядов.*

**Доказательство.** $J$ состоит из корректно определенных формальных степенных рядов, поскольку все однородные весовые компоненты суммы $\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\psi_l$ стабилизируются, начиная с некоторого момента, т.к. веса координат $\psi_l$ неубывают, а каждый вес встречается конечное число раз.

$J$ замкнуто относительно сложения и умножения, причем произведение формального ряда и суммы вида $\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\psi_l$ является корректно определенным формальным рядом вида $\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{\alpha}_l\psi_l$, поэтому $J$ есть идеал.

Утверждение 2 доказано.

**Определение 3** . *(a) Формальное векторное поле $X$, заданное выражением* (3.1)*, называется касательным к формальному многообразию $M$, если результат действия поля на каждое из уравнений формального многообразия $M$ принадлежит идеалу $J$, т.е. если каждая координата вектора*

$$X(v-\Psi(z,\bar{z},u))$$

*принадлежит $J$.*

*(b) Скобка $[X_1,X_2]$ двух касательных к $M$ векторных полей*

$$X_1=2\mathrm{Re}\Big(f_1(z,w)\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{j=2}^{\infty}g_{1,j}(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big[2\mathrm{Re}\Big(f_1(z,w)\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{j=2}^{\infty}g_{1,j}(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big)\Big]_{\nu}$$

*и*

$$X_2 = 2\mathrm{Re}\Big(f_2(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_{2,j}(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\Big[2\mathrm{Re}\Big(f_2(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_{2,j}(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big)\Big]_{\nu}$$

*определяется равенством*

$$[X_1, X_2]F = X_1(X_2F) - X_2(X_1F)$$

*и является касательным к $M$ полем.*

Скобка $[\cdot,\cdot]$ билинейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби, которое проверяется прямой формальной выкладкой (поскольку все входящие в него выражения вида $X_\lambda(X_\mu(X_\nu F))$, где $\{\lambda,\mu,\nu\} = \{1,2,3\}$, являются корректно определенными формальными рядами).

Таким образом, доказано следующее

**Утверждение 3** . *Формальные неотрицательно градуированные векторные поля, касательные к формальному многообразию $M^n$, образуют алгебру Ли $\mathfrak{g}_{\geq 0}$.*

Обозначим через $\mathfrak{g}_+$ подалгебру всех полей положительного веса алгебры $\mathfrak{g}_{\geq 0}$.

**Утверждение 4** . *Для любого $n$ алгебра $\mathfrak{g}_+$ многообразия $M^n$ бесконечномерна.*

Данное утверждение вытекает из следующего:

**Утверждение 5** . *Для любых* $n$, $k$ $(1 \leq k \leq n)$, *и любого монома* $g_0(z,w)$ *веса* $m > 1$ *существуют такие векторы* $g_j(z,w)$, *состоящие из голоморфных в некоторой окрестности нуля функций, что поле*

$2\ Re\ (g_0(z,w)\frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j})$ *является касательным к* $M^n$.

**Доказательство.** В силу теоремы 1 можно считать $M^n$ модельной поверхностью. Построим векторы $g_j(z,w)$ индукцией по $j$. Сначала рассмотрим индукционный переход.

Предположим, что все $g_j(z,w)$, $j \leq J-1$, найдены. Построим $g_J(z,w)$.

Для этого рассмотрим уравнения

$v_J = \Phi_J(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{J-1})$

и запишем условие касания:

$2\mathrm{Re}(g_0(z,w)\frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j})(v_J - \Phi_J(z,\bar{z},u_2,...,u_{J-1})) = \frac{1}{2i}(g_J(z,w) - \bar{g}_J(z,w)) - 2\mathrm{Re}(g_0(z,w)\frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{J-1} g_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j})(\Phi_J(z,\bar{z},u_2,...,u_{J-1})) = 0.$

Выражение $2\mathrm{Re}(g_0(z,w)\frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{J-1} g_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j})(\Phi_J(z,\bar{z},u_2,...,u_{J-1}))$ имеет вес $J+m-1$ и является суммой плюригармонических форм (возможно, равных нулю) и нормализованных форм. Все нормализованные формы можно разложить по базисным формам веса $J+m-1$, равным мнимым частям компонент вектора $w_{J+m-1}$, поэтому компоненты искомого вектора $g_J(z,w)$ будут суммами соответствующих плюригармонических форм и компонент вектора $w_{J+m-1}$.

База индукции есть частный случай рассмотренного построения.

Утверждение 5 доказано.

Отметим также несколько свойств для поверхностей беско-

нечной коразмерности.

Многообразие называется жестким, если правые части его локальных определяющих соотношений, через которые выражаются мнимые части переменных $w$, не зависят от переменных $u$.

**Свойство 1.** Алгебра $\mathfrak{g}$ любого жесткого многообразия бесконечной коразмерности бесконечномерна (за счет сдвигов на вещественные постоянные по переменным $w_j$).

С помощью конструкции Пуанкаре (см., например, [4]) стандартным образом доказывается

**Свойство 2.** Размерность алгебры $\mathfrak{g}_{\geq 0}$ модельной поверхности оценивает сверху размерность алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$ самой поверхности.

## 3. Примеры многообразий с конечномерными алгебрами $\mathfrak{g}_+$

Рассмотрим отдельно случай $n = 1$ и построим сначала поверхность $M_{1,1}$, для которой $\dim(\mathfrak{g}_+) = 1$, затем – поверхность $M_{s,1}$, для которой $\dim(\mathfrak{g}_+) = s$, а также поверхность $M_{0,1}$, для которой $\dim(\mathfrak{g}_+) = 0$. После этого перейдем к случаю $n > 1$ и построим примеры поверхностей $M_{s,n}$, для которых $\dim(\mathfrak{g}_+) = s$, взяв прямые суммы поверхностей, построенных для $n = 1$.

**Случай n = 1.**

Пусть $F(z, \bar{z}) = z^{d-1}\bar{z} + \bar{z}^{d-1}z$ – однородный полином нечетной степени $d$ без плюригармонических слагаемых, $X = 2\mathrm{Re}(z^l \frac{\partial}{\partial z})$, $l > 1$, а $M_{1,1}$ – поверхность, заданная в окрестности нуля системой уравнений вида:

$\mathrm{Im}\ w_1 = F(z, \bar{z})$,

$\mathrm{Im}\ w_2 = X(F(z, \bar{z}))$,

...

$\mathrm{Im}\ w_k = X^{k-1}(F(z,\bar{z}))$,

$\dots$ .

Тогда поле $\Xi = (2\mathrm{Re}(\sum_{j=1}^{\infty} w_{j+1}\frac{\partial}{\partial w_j}) + X)$ есть элемент $\mathfrak{g}_+$. Действительно, имеем: $\Xi(\mathrm{Im}\ w_k - X^{k-1}(F(z,\bar{z}))) = \mathrm{Im}\ w_{k+1} - X^k(F(z,\bar{z})) = 0$.

Введем веса переменных следующим образом: вес переменной $z$ положим равным единице, а веса переменных $w_k$ положим равными $d + (l-1)(k-1)$.

**Утверждение 6** . *Алгебра $\mathfrak{g}_+$ поверхности $M_{1,1}$ не содержит отличных от $\Xi$ элементов.*

Для доказательства утверждения 6 нам потребуются вспомогательные леммы.

**Лемма 1** . *Ненулевые элементы $\mathfrak{g}_+$ поверхности $M_{1,1}$ имеют вид $2\mathrm{Re}(h(z,w)\frac{\partial}{\partial z}) + \mathcal{W}$, где $h(z,w) \not\equiv 0$.*

Здесь и далее $\mathcal{W}$ обозначает поля, содержащие дифференцирования по переменным $w_j$.

**Доказательство.** Пусть ненулевое поле $W = 2\mathrm{Re}(\sum_{j=1}^{\infty} W_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j})$ лежит в алгебре $\mathrm{aut}(M_{1,1})$. Тогда, записывая условие касания, получим $2\mathrm{Re}(W_j) = 0$, откуда следует, что $W_j$ являются мнимыми константами для всех $j$, и поэтому $W \notin \mathfrak{g}_+$. Лемма 1 доказана.

**Лемма 2** . *Пусть поле $2\mathrm{Re}(z^L\frac{\partial}{\partial z}) + \mathcal{W}$ лежит в алгебре $aut(M_{1,1})$. Тогда $L = l$, причем все коэффициенты поля определены однозначно.*

**Доказательство.** Записывая условие касания $(2\mathrm{Re}(z^L\frac{\partial}{\partial z} + W_1(z,w)\frac{\partial}{\partial w_1}) + \mathcal{W})\mathrm{Im}\ w_1 = (2\mathrm{Re}(z^L\frac{\partial}{\partial z} + W_1(z,w)\frac{\partial}{\partial w_1}) + \mathcal{W})F(z,\bar{z})$, получаем

$$\frac{1}{2i}(W_1 - \bar{W}_1) = z^L \frac{\partial F}{\partial z} + \bar{z}^L \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}. \tag{3.2}$$

Пусть $W_1 = \sum_j W_{1,j}(z) w^j$, где $j$ – мультистепень, т.е. $w^j = w_1^{j_1} ... w_s^{j_s}$ для некоторых неотрицательных целых чисел $j_1, ..., j_s$. Далее через $|j|$ будем обозначать сумму $j_1 + ... + j_s$. В силу однородности $F$ достаточно рассмотреть случай однородной функции $W_1(z, w) = \sum_{r,j} W_{1,r,j} z^r w^j$. При этом функция $W_1$ есть многочлен, т.к. сумма $\sum_{r,j} W_{1,r,j} z^r w^j$ конечна ввиду возрастания весов переменных $w_k$. Тогда $W_{1,r,0} = 0$ при всех $r$, т.к. в правой части (3.2) отсутствуют плюригармонические слагаемые. Отсюда получаем, что вес левой части (3.2) не меньше веса $w_1$, т.е. $l - 1 + d$, поэтому $L \geq l$. Далее, выражая $w$ через $\bar{w}, z, \bar{z}$ из системы определяющих уравнений, получаем равенства $(W_{1,r,j} z^r - \bar{W}_{1,r,j} \bar{z}^r) \bar{w}^j = 0$, откуда $W_{1,r,j} = 0$ при $r > 1$, т.е. $W_1(z, w) = \sum W_{1,0,j} w^j$.

Рассмотрим множество $\Gamma$ тех $j$, $|j| > 1$, для которых моном $W_{1,0,j} w^j$ входит в выражение для $W_1(z, w)$. В нем рассмотрим подмножество $\Gamma_1$ тех $j$, для которых $w^j$ делится на $w_1$. Выражая $w$ через $\bar{w}, z, \bar{z}$, получаем для всех $j \in \Gamma_1$ равенство:

$2iF(z, \bar{z}) W_{1,0,j} \frac{\bar{w}^j}{\bar{w}_1} = 0,$

откуда $W_{1,0,j} = 0$ для всех $j \in \Gamma_1$.

Далее, рассматривая множество $\Gamma_2$ тех $j$, для которых $w^j$ делится на $w_2$, получаем равенство:

$2iXF(z, \bar{z}) W_{1,0,j} \frac{\bar{w}^j}{\bar{w}_2} = 0,$

откуда $W_{1,0,j} = 0$ для всех $j \in \Gamma_2$.

Продолжая аналогичным образом последовательно рассматривать множества $\Gamma_t$ тех $j$, для которых $w^j$ делится на $w_t$, получаем равенства:

$2iX^{t-1} F(z, \bar{z}) W_{1,0,j} \frac{\bar{w}^j}{\bar{w}_t} = 0,$

откуда $W_{1,0,j} = 0$ для всех $j \in \Gamma_t$.

Поскольку вес полинома $W_1$ ограничен, то за конечное число шагов мы получим равенства нулю всех коэффициентов $W_{1,0,j} = 0$ при $|j| > 1$.

Поэтому в силу однородности $W_1$ имеем, что $W_1 = \alpha w_s$ для некоторой константы $\alpha$ и некоторого номера $s$, откуда получаем $\mathrm{Re}\,\alpha X^{s-1}(F(z,\bar{z})) = z^L\frac{\partial F}{\partial z} + \bar{z}^L\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$. Это равенство возможно лишь при $L \leq l$, т.к. иначе множества бистепеней по переменным $z, \bar{z}$ мономов в правой и левой части равенства были бы различны, что невозможно. Отсюда и из полученного выше неравенства $L \geq l$ следует $L = l$.

Т.к. коэффициент при $\frac{\partial}{\partial z}$ равен $z^l$, то единственность поля следует из леммы 1: действительно, если поле определено неоднозначно, то возьмем два разных поля и, вычтя одно из другого, получим, что их разность должна быть нулевой, что противоречит предположению о неоднозначной определенности поля.

Лемма 2 доказана.

**Доказательство утверждения 6.** Пусть в обозначениях леммы 1 $h(z,w) = \sum_j h_j(z)w^j$, где $j$ – мультистепень. В силу однородности $F$ достаточно рассмотреть случай однородного многочлена $h$, т.е. $h(z,w) = \sum_{r,j} h_{r,j} z^r w^j$. Пусть число $r_{max}$ равно наибольшему значению индекса $r$ в выражении для $h$. Тогда, записывая условие касания и выражая $w$ через $\bar{w}, z, \bar{z}$, получаем, что $2\mathrm{Re}(z^{r_{max}}\frac{\partial}{\partial z}) + \mathcal{W}$ должно лежать в $\mathfrak{g}_+$, откуда по лемме 2 получаем, что $r_{max} = l$. С другой стороны, если вес полинома $h$ больше $l$, то, выразив $w$ через $\bar{w}, z, \bar{z}$ в условии касания, получим равенство $aX^s(F(z,\bar{z}))\cdot z^l\frac{\partial}{\partial z}F(z,\bar{z}) = bX^t(F(z,\bar{z}))$ для $a, b \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ и некоторых целых неотрицательных $t$ и $s$, что невозможно. Отсюда получаем, что вес $h(z,w)$ равен $l$, т.е. $h(z,w) = cz^l$, где $c$ – константа. Снова записывая условия касания, получаем, что $c$ вещественна.

Утверждение 6 доказано.

Пусть $\tilde{F}(z,\bar{z}) = F(z,\bar{z}) + o(d)$, а $\tilde{M}_{1,1}$ – поверхность, заданная с помощью $\tilde{F}(z,\bar{z})$ и $z^l$.

**Следствие 1** . *Алгебра $\mathfrak{g}_+$ поверхности $\tilde{M}_{1,1}$ одномерна.*

**Доказательство.** По свойству 2 размерность $\dim(\mathfrak{g}_+)$ не превосходит единицы. Но $\dim(\mathfrak{g}_+)$ также и не меньше единицы, т.к. поле $\Xi$, построенное для поверхности $\tilde{M}_{1,1}$, является касательным к ней.

Следствие 1 доказано.

**Утверждение 7** . *Для любого натурального числа $s$ существует поверхность бесконечной коразмерности и CR-размерности 1, такая что размерность ее алгебры $\mathfrak{g}_+$ равна $s$.*

**Доказательство.** Построим систему уравнений, задающих искомую поверхность $M_{s,1}$ в некоторой окрестности нуля, индуктивно.

Пусть $F(z,\bar{z}) = z^{d-1}\bar{z} + \bar{z}^{d-1}$ – однородный полином степени $d$, $1 < l_1 < ... < l_s$ – набор натуральных чисел, $X_j = 2\mathrm{Re}(z^{l_j}\frac{\partial}{\partial z}), 1 \le j \le s$. На первом шаге построения имеем уравнение:

$\mathrm{Im}\ w_0 = F(z,\bar{z})$.

На втором шаге имеем систему уравнений:

$\mathrm{Im}\ w_0 = F(z,\bar{z})$,

$\mathrm{Im}\ w_{j_1} = X_{j_1}(F(z,\bar{z})),\ 1 \le j_1 \le s$.

На шаге с номером $k$ имеем систему уравнений:

$\mathrm{Im}\ w_0 = F(z,\bar{z})$,

$\mathrm{Im}\ w_{j_1} = X_{j_1}(F(z,\bar{z})),\ 1 \le j_1 \le s$,

...

$\mathrm{Im}\ w_{j_1,...,j_k} = X_{j_1}...X_{j_k}(F(z,\bar{z})),\ 1 \le j_1,...,j_k \le s.$

Получаем последовательность систем уравнений, таких что каждая последующая система содержит уравнения предыдущей. Выбирая из всей совокупности уравнений такую максимальную подсистему, что правые части всех ее уравнений линейно независимы, получаем искомую систему уравнений.

Теперь построим $s$ полей, принадлежащих алгебре $\mathfrak{g}_+$. Для этого рассмотрим поля вида $2\mathrm{Re}(z^{l_j}\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{s=1}^{\infty} W_{j,s}(z,w)\frac{\partial}{\partial w_s}), 1 \le j \le s$. Доказательство того, что функции $W_{j,s}(z,w)$ определены однозначно и равны некоторым из координат $w_{j_1,...,j_k}$ и что других касательных полей нет, проводится аналогично доказательству утверждения 5. Отличие заключается в том, что вместо леммы 2 нужно воспользоваться ее модификацией (которая доказывается аналогично):

**Лемма 3** . *Пусть поле* $2\mathrm{Re}(z^L\frac{\partial}{\partial z}) + \mathcal{W}$ *лежит в алгебре* $aut(M_{s,1})$. *Тогда* $L = l_j$ *для некоторого* $j,\ 1 \le j \le s$.

Утверждение 7 доказано.

Пусть $\tilde{F}(z,\bar{z}) = F(z,\bar{z}) + o(d)$, а $\tilde{M}_{s,1}$ – поверхность, заданная с помощью $\tilde{F}(z,\bar{z})$ и $z^{l_j}$ описанным в доказательстве утверждения 7 способом. Аналогично следствию 1 получаем

**Следствие 2** . *Алгебра* $\mathfrak{g}_+$ *поверхности* $\tilde{M}_{s,1}$ *имеет размерность* $s$.

Пусть $F_1(z,\bar{z}), F_2(z,\bar{z}), ..., F_k(z,\bar{z}), ...$ – однородные полиномы нечетных степеней $1 < d_1 < ... < d_k < ...$ без плюригармонических слагаемых, причем $(2\mathrm{Re}(az^t\frac{\partial}{\partial z}))(F_1(z,\bar{z})) \ne F_k(z,\bar{z})$ для всех $a,t,k$ (этого всегда можно добиться, выбирая $d_2 >> d_1$, т.к. число мономов однородной степени $d_k$ растет с ростом $d_k$).

Рассмотрим поверхность $M_{0,1}$, заданную в окрестности нуля системой уравнений вида:

$\mathrm{Im}\ w_1 = F_1(z, \bar{z})$,

$\mathrm{Im}\ w_2 = F_2(z, \bar{z})$,

...

$\mathrm{Im}\ w_k = F_k(z, \bar{z})$,

... .

**Утверждение 8** . *Алгебра* $\mathfrak{g}_+$ *поверхности* $M_{0,1}$ *тривиальна.*

**Доказательство.** Доказательство того, что все поля, касательные к $M_{0,1}$, должны иметь вид $2\mathrm{Re}(az^L\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{\infty} W_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j})$, где $W_j(z,w)$ есть линейные функции от $w$, аналогично доказательству леммы 2. Но в силу выбора полиномов $F_k(z,\bar{z})$ поле такого вида не может быть касательным к $M_{0,1}$.

Утверждение 8 доказано.

Случай $n = 1$ рассмотрен.

**Случай n > 1.**

Рассмотрим прямую сумму одного экземпляра поверхности $M_{s,1}$ и $(n-1)$ экземпляра поверхности $M_{0,s}$.

А именно, пусть $F(z_n, \bar{z}_n), F_{k,m}(z_m, \bar{z}_m)$, где $1 \le m \le n-1$, $1 \le k < \infty$, – однородные полиномы степеней $d, ..., d_{m,k} > 1$, причем $d_{m,1} < ... < d_{m,k} < ...$; $1 < l_1 < ... < l_s$ – набор натуральных чисел, $X_j = 2\mathrm{Re}(z^{l_j}\frac{\partial}{\partial z}), 1 \le j \le s$.

Пусть $M_{s,n}$ – многообразие, заданное в окрестности нуля системой уравнений:

$\mathrm{Im}\ w_{1,1} - F_{1,1}(z_1, \bar{z}_1) = 0$,

...

$\mathrm{Im}\ w_{1,n-1} - F_{1,n-1}(z_{n-1}, \bar{z}_{n-1}) = 0$,

$$\begin{aligned}
&\text{Im } w_{1,n} - F(z_n, \bar{z}_n) = 0,\\
&\text{Im } w_{2,1} - F_{2,1}(z_1, \bar{z}_1) = 0,\\
&...\\
&\text{Im } w_{2,n-1} - F_{2,n-1}(z_{n-1}, \bar{z}_{n-1}) = 0,\\
&\text{Im } w_{2,n-1+j_1} - X_{j_1}(F(z_n, \bar{z}_n)) = 0,\ 1 \le j_1 \le s.\\
&...\\
&\text{Im } w_{k,1} - F_{k,1}(z_1, \bar{z}_1) = 0,\\
&...\\
&\text{Im } w_{k,n-1} - F_{k,n-1}(z_{n-1}, \bar{z}_{n-1}) = 0,\\
&\text{Im } w_{k,j_1,...,j_k} - X_{j_1}...X_{j_k}(F(z_n, \bar{z}_n)) = 0,\ 1 \le j_1, ..., j_k \le s,\\
&... \ .
\end{aligned}$$

**Утверждение 9** . *Алгебра* $\mathfrak{g}_+$ *поверхности* $M_{s,n}$ *имеет размерность* $s$.

**Доказательство.** Предположим, что касательное поле имеет вид $2\text{Re}(f(z_1, ..., z_n, w)\frac{\partial}{\partial z_m}) + \mathcal{W}$, где $f(z_1, ..., z_n)$ – однородный полином веса $\mu > 1$. Аналогично доказанному в лемме 2 получаем, что $f$ не зависит от $w$ и что остальные коэффициенты данного поля являются линейными функциями от компонент вектора $w$. Запишем условие касания для второго по порядку уравнения, зависящего от переменной $z_m$ (т.е. для уравнения $0 = \text{Im } w_{2,n-1} - F_{2,n-1}(z_{n-1}, \bar{z}_{n-1})$, если $m < n$, или для уравнения $0 = \text{Im } w_{2,n} - X_{j_1}(F(z_n, \bar{z}_n))$, если $m = n$). Получим, что некоторые из мономов делятся на $z_m\bar{z}_m$. Следовательно, компоненты вектора $w$, от которых зависят коэффициенты рассматриваемого поля, выражаются через переменные $z_m, \bar{z}_m$ и компоненты вектора $\bar{w}$. Поэтому полином $f(z_1, ..., z_n)$ может зависеть только от переменной $z_m$, а значит, размерность алгебры $\mathfrak{g}_+$ прямого произведения равна сумме размерностей алгебр прямых сомножителей.

Утверждение 9 доказано.

Для поверхностей $M_{s,n}$ имеет место аналог следствия 2.

Пусть $\tilde{M}_{s,n}$ – поверхность, заданная с помощью $\tilde{F}(z_n, \bar{z}_n) = F(z_n, \bar{z}_n) + o(d), \tilde{F}_{k,m}(z_m, \bar{z}_m) = F_{k,m}(z_m, \bar{z}_m) + o(d)$.

**Следствие 3** . *Алгебра* $\mathfrak{g}_+$ *поверхности* $\tilde{M}_{s,n}$ *имеет размерность* $s$.

Случай $n > 1$ рассмотрен.

## 4. Системы дифференциальных уравнений, соответствующие многообразиям $M_{s,n}$

Пусть $H$ – гильбертово пространство с координатами $(z, w) = (z_1, ..., z_n, w)$, где $w$ бесконечномерна, $M$ – подмногообразие $H$, заданное в окрестности начала координат системой уравнений $\mathcal{F}(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = 0$. Для всех точек $(\zeta, \omega)$ из этой окрестности комплексные подмногообразия $Q(\zeta, \omega) := \{(z, w) : \mathcal{F}(z, \zeta, w, \omega) = 0\}$ называются многообразиями Сегре. Переменные $w$ рассматриваются как зависимые от переменных $z$, т.е. $w = w(z)$.

Для вполне невырожденных многообразий $M^n$, рассмотренных выше, можно выписать систему дифференциальных уравнений второго порядка, решениями которой являются их многообразия Сегре. Для этого применим конструкцию, описанную в [18]. Данная конструкция переносится на случай бесконечномерного пространства, поскольку теорема о неявной функции, теорема о существовании и единственности решения для систем дифференциальных уравнений и теорема Фробениуса применимы и в бесконечномерном пространстве (см. [11]).

Рассмотрим систему уравнений $2i\mathcal{F}^n(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = w - \bar{w}$, определяющую $M^n$ в окрестности нуля, и осуществим такую линейную замену координат, что первое уравнение системы при-

мет вид $\tilde{v}_1 = z_1\bar{z}_1 + ... + z_n\bar{z}_n$ (далее для простоты обозначений тильду над $w_1$ опускаем).

Продифференцировав соответствующее ему уравнение $w_1 - \omega_1 = 2i(z_1\zeta_1 + ... + z_n\zeta_n)$ по переменным $z_1, ..., z_n$, выразим переменные $\zeta_1, ..., \zeta_n$:

$(w_1)_{z_1} = 2i\zeta_1,$

...

$(w_1)_{z_n} = 2i\zeta_n,$

где нижний индекс $z_j$ обозначает частную производную по этой переменной.

Отсюда получаем искомую систему:

$(w_1)_{z_jz_k} = 0,\ 1 \le j,k \le n,$

$\frac{1}{2i}(w_t)_{z_j} = ((\mathcal{F}^n)_t(z,\zeta,w,\omega(\zeta,z,w)))_{z_j},\ 1 \le j \le n,\ t > 1,$

в которую нужно подставить выражения для $\zeta$ через производные функции $w_1$.

Если полиномы $F(z_n,\bar{z}_n), F_{1,m}(z_m,\bar{z}_m),\ 1 \le m \le n-1$, участвующие в определении многообразия $M_{s,n}$, равны соответственно мономам $z_n\bar{z}_n$ и $z_m\bar{z}_m,\ 1 \le m \le n-1$, то для многообразия $M_{s,n}$, заданного с помощью системы $2i\mathcal{F}_{s,n}(z,\bar{z},w,\bar{w}) = w - \bar{w}$, дифференциальные уравнения выписываются аналогично (после линейной замены координат):

$(w_1)_{z_jz_k} = 0,\ 1 \le j,k \le n,$

$\frac{1}{2i}(w_t)_{z_j} = ((\mathcal{F}_{s,n})_t(z,\zeta,w,\omega(\zeta,z,w)))_{z_j},\ 1 \le j \le n,\ t > 1,$

в которую нужно подставить выражения для $\zeta$ через производные функции $w_1$.

Конструкции, описанные для многообразий $M^n$ и $M_{s,n}$, являются частными случаями следующей более общей ситуации. Рассмотрим многообразие $M$ типа $(n,k)$, заданное в окрестности нуля системой уравнений $2i\mathcal{F}(z,\bar{z},w,\bar{w}) = w - \bar{w}$, имеющей вид:

$v_1 = \sum_j |z_j|^2,$

$v_2 = F_2(z, \bar{z}, u_1)$,

...

$v_l = F_l(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{l-1})$,

... ,

где $F_l$ – однородные полиномы степени $d_l$, $n$ – CR-размерность, а величины $n$ и $k$ могут быть как конечными, так и бесконечными.

Соответствующие параметры $\zeta_j$ выражаются через производные $(w_1)_{z_j}$, а выражения для параметров $\omega_j = \omega_j(\zeta, z, w)$ вычисляются рекуррентным образом.

Получаем аналогичную рассмотренным выше систему:

$(w_1)_{z_j z_k} = 0,\ 1 \le j, k \le n,$

$\frac{1}{2i}(w_t)_{z_j} = ((\mathcal{F})_t(z, \zeta, w, \omega(\zeta, z, w)))_{z_j},\ 1 \le j \le n,\ t > 1,$

в которую нужно подставить выражения для $\zeta$ через производные функции $w_1$.

Пользуясь теоремой о неявной функции, можно также построить систему уравнений для многообразия $\tilde{M}$, заданного в окрестности нуля системой уравнений $2i\tilde{\mathcal{F}}(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = w - \bar{w}$, имеющей вид:

$v_1 = \sum_j |z_j|^2 + O(3)$,

$v_2 = F_2(z, \bar{z}, u_1) + O(d_1)$,

...

$v_l = F_l(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{l-1}) + O(d_l)$,

... .

# Глава 4

# Модификация теоремы Блума-Грэма: введение весов в комплексном касательном пространстве

## 1. Введение.

Полиномиальные модели широко используются в CR-геометрии. Их основное применение связано с изучением автоморфизмов ростков CR-многообразий, и здесь существенную роль играет разложение функции по однородным и квазиоднородным компонентам (см. [5], [28], [29], [36]). При этом подходе с помощью весов различают координаты комплексной касательной и трансверсальные направления. Но возможны ситуации, когда необходимо с помощью весов ввести различия внутри комплексной касательной – такой случай рассмотрен в примере 3 (см. пункт 3).

В работе [25] была введена характеристика ростка вещественного подмногообразия комплексного пространства, которая теперь называется типом ростка по Блуму-Грэму. Там же проводится различие между ростками конечного и бесконечного типа. Если тип конечен, то он имеет два эквивалентных определения: бескоординатное – через вид алгебры Ли касательных векторных полей и координатное – через вид локальных уравнений

ростка. Дадим более точные определения.

Пусть $\mathcal{L}^1$ – распределение комплексных касательных пространств к гладкому ($C^\infty$) порождающему $CR$-многообразию $M \in \mathbb{C}^n$ коразмерности $k$ в окрестности точки $p$. С ним можно связать систему распределений $\mathcal{L}^j$, определяемую индуктивно, а именно $\mathcal{L}^{j+1} = [\mathcal{L}^j, \mathcal{L}^1] + \mathcal{L}^j$, где $[\mathcal{L}^j, \mathcal{L}^1]$ – распределение, порождаемое скобками полей из $\mathcal{L}^j$, $\mathcal{L}^1$ и сопряженных к ним. Положим $n_1$ равным номеру первого скачка размерности $\mathcal{L}^j$, а именно первому номеру $j > 1$, т.ч. $q_1 = \dim \mathcal{L}^j - \dim \mathcal{L}^1 > 0$. Таким же образом кодируем место ($n_2$) второго скачка размерности $\mathcal{L}^j$ и сам этот скачок ($q_2$). И так далее. Пусть $s$ – число скачков. Тогда мы получаем неубывающую последовательность натуральных чисел $2 \leq m_1 \leq ... \leq m_k$:

**Определение 1 (геометрическое):** Последовательность

$$(m_1, ..., m_k) = (\underbrace{n_1, ..., n_1}_{q_1}, \underbrace{n_2, ..., n_2}_{q_2}, ..., \underbrace{n_s, ..., n_s}_{q_s})$$

будем называть *геометрическим типом.*

Если $\sum_{i=1}^{s} q_i = k$, то будем говорить, что росток имеет *конечный тип.* Если же $\sum_{i=1}^{s} q_i < k$, то росток имеет *бесконечный тип*, который записывается в виде последовательности

$$(m_1, ..., m_k) = (\underbrace{n_1, ..., n_1}_{q_1}, \underbrace{n_2, ..., n_2}_{q_2}, ..., \underbrace{n_s, ..., n_s}_{q_s}, \underbrace{\infty, ..., \infty}_{k-q_1-...-q_s}).$$

Перейдем к определению координатного типа.

Пусть в точке $p \in \mathbb{C}^n$ задан росток $M_p$ гладкого порождающего $CR$-многообразия, чья $CR$-размерность равна $n - k$, а коразмерность равна $k$. Введем в окрестности точки $p$ систему координат $(z_1, \ldots, z_{n-k}, w_1, \ldots, w_k)$, и назначим всем переменным веса: вес всех $z_j$ равен единице, вес $w_i$ равен $m_i$,

$2 \leq m_1 \leq ... \leq m_k$. Пусть уравнения ростка можно записать в виде:

$$r_i = 2\,\mathrm{Re}\, w_i + p_i(z, \bar{z}, w, \bar{w}) + o(m_i) = 0, \quad i = 1, ..., k, \tag{1.1}$$

где $p_i$ – однородные многочлены веса $m_i$, записанные в стандартной форме (см. [25]) $o(m_i)$ – функция, формальный ряд Тейлора которой состоит из слагаемых большего веса.

**Определение 2 (координатное):** Полученную последовательность $(m_1, ..., m_k)$ будем называть *координатным типом.*

**Теорема 1**(Блум-Грэм, 1977, [25]): Пусть $M_p$ – росток гладкого порождающего многообразия конечного геометрического типа $(m_1, ..., m_k)$. Тогда существует система координат, в которой он задается уравнениями вида (1.1), т.е. он имеет такой же координатный тип.

Ясно, что координаты $z = (z_1, \ldots, z_{n-k})$ – это координаты комплексной касательной к $M$ в точке $p$, а $w = (w_1, \ldots, w_k)$ – это координаты, которые дополняют $z$ до всего пространства.

В данной главе приводится обобщение типа по Блуму-Грэму – взвешенный тип. Модификации, связанной с выбором весов в комплексной касательной, в данной работе подвергается как определение типа, так и сама теорема Блума-Грэма. Суть этого обобщения в том, что различным координатам комплексной касательной $(z_1, \ldots, z_{n-k})$ назначаются произвольные натуральные веса. Это придает взвешенному типу большую гибкость и удобство в приложениях ([5], [36]). Далее (см.теорему 2) доказывается аналог теоремы Блума-Грэма о соотношении координатного и бескоординатного определений взвешенного типа. Данная теорема демонстрирует связь между геометрическими данными, которые можно получить при вычислении коммутаторов

голоморфных касательных векторных полей (всю необходимую информацию об этих коммутаторах содержит в себе геометрический тип поверхности) и представимостью поверхности уравнениями специального вида. Основное отличие заключается в том, что в наших рассмотрениях вместо длин коммутаторов векторных полей используются веса коммутаторов векторных полей. В обозначениях и структуре работы мы следуем статье [25], за исключением термина "голоморфное векторное поле" , который сейчас понимают по-другому. А именно, те поля, которые в [25] называются голоморфными векторными полями, сейчас принято называть полями типа (1,0), или комплексными векторными полями.

## 2. Основные определения.

Пусть $M$ – гладкое вещественное подмногообразие открытого подмножества $U$ в $\mathbb{C}^n$, $p \in M$. *Комплексным векторным полем* на $U$ будем называть такое гладкое векторное поле $F$, для которого $F(p) \in T^{1,0}(\mathbb{C}^n, p)$, где $T^{1,0}(\mathbb{C}^n, p)$ – голоморфное подпространство комплексифицированного касательного пространства $\mathbb{C}T(\mathbb{C}^n, p) = T^{1,0}(\mathbb{C}^n, p) \oplus T^{0,1}(\mathbb{C}^n, p)$ в точке $p$. Комплексное векторное поле, касательное к $M$, – такое $F$, что $F(p) \in \mathbb{C}T(M, p) \quad \forall p \in M$ и $F(p) \in T^{1,0}(\mathbb{C}^n, p) \quad \forall p \in U$.

Пусть $F_i$, $i = 1, ..., k$, – набор комплексных векторных полей. Будем говорить, что выражение вида $F = [F_{i_\mu}, [F_{i_{\mu-1}}, ...[F_{i_2}, F_{i_1}]...]]$, где $1 \leq i_j \leq k$, – это коммутатор *длины* $\mu$.

Пусть $\mathcal{L}^\mu$ – модуль векторных полей (над $C^\infty(U)$, $U \in \mathbb{C}^n$ – открытое подмножество), порожденный комплексными касательными векторными полями, их сопряженными и коммутаторами таких полей длины не выше $\mu$.

Перейдем к описанию модификации геометрического определения типа.

*Веса* для локальных координат $(z_1, ..., z_{n-k}, w_1, ..., w_k)$ в точке $p$ определим следующим образом: $z_i$ имеет вес $\lambda_i$, где $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n-k})$ – *произвольный* набор натуральных чисел, а $w_i$ имеет вес $l_i$, где $l = (l_1, ..., l_k)$, $\quad 2 \leq l_1 \leq ... \leq l_k \leq +\infty$ – набор натуральных чисел, значения которых мы определим позднее. Такую систему координат будем называть *взвешенной системой координат*. Дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial w_j}$ имеют соответствующие отрицательные веса $-\lambda_i, -l_j$.

Будем писать $wt_P(\phi) = \gamma$, если в формальном ряде Тейлора функции $\phi$ присутствует моном веса $\gamma$, но нет мономов меньшего веса. Дифференциальным мономом мы называем выражение вида:

$$B\, z^\alpha \bar{z}^\beta w^\gamma \bar{w}^\delta \frac{\partial^a}{\partial z^a} \frac{\partial^b}{\partial \bar{z}^b} \frac{\partial^c}{\partial w^c} \frac{\partial^d}{\partial \bar{w}^d}, \tag{2.1}$$

которое представляет собой оператор частного дифференцирования по набору координат с коэффициентом, равным произведению постоянной и степеней координат (здесь $B$ – ненулевая константа, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-k})$, $\quad \beta = (\beta_1, ..., \beta_{n-k})$, $\quad \gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_k)$, $\quad \delta = (\delta_1, ..., \delta_k)$, $\quad a = (a_1, ..., a_{n-k})$, $\quad b = (b_1, ..., b_{n-k})$, $\quad c = (c_1, ..., c_k)$, $\quad d = (d_1, ..., d_k)$ – мультииндексы). Вес дифференциального монома (2.1) полагаем равным:

$$\sum_{i=1}^{n-k} (\alpha_i + \beta_i - a_i - b_i)\lambda_i + \sum_{i=1}^{k} (\gamma_i + \delta_i - c_i - d_i) l_i.$$

Весом дифференциального оператора, который представляет собой сумму дифференциальных мономов, будем называть минимальный из весов его мономов. Если веса всех мономов дифференциального оператора $Q$ одинаковы и равны $\gamma$, то будем говорить, что $Q$ *однородного веса* $\gamma$.

Будем говорить, что многообразие *однородно* по отношению к данному выбору весов, если в системе $(z, w; \lambda, l)$ локальных координат с весами оно задано функциями вида:

$$r_i = 2\,\mathrm{Re}\, w_i + p_i(z, \bar{z}, w_1, \bar{w}_1, ..., w_i, \bar{w}_i),$$

где $p_i$ – однородного веса $m_i$.

Поверхности, не являющиеся однородными можно рассматривать как возмущения однородных поверхностей слагаемыми большего веса, т.к. основную роль в доказательстве играет однородная часть младшего веса. Она является модельной по отношению к классу возмущенных поверхностей (см. [5]).

Выберем веса переменных $z = (z_1, \ldots, z_{n-k})$ равными $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n-k})$.

Обозначим через $R_w$ матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial w_k} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial r_k}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial r_k}{\partial w_k} \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

а через $R_z$ – матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial z_{n-k}} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial r_k}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial r_k}{\partial z_{n-k}} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Тогда векторные поля $L_1, ..., L_{n-k}$, определяемые формулой

$$L_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - (R_z)^T (R_w^{-1})^T \Big(\frac{\partial}{\partial w_1}, \frac{\partial}{\partial w_1}, ..., \frac{\partial}{\partial w_k}\Big)^T,$$

где $T$ обозначает транспонирование, задают локальный базис в $\mathcal{L}^1$ в окрестности нуля ([19], предложение 1.6.1).

Положим *вес* коммутатора вида $L = [L_{i_\mu}, [L_{i_{\mu-1}}, ...[L_{i_2}, L_{i_1}]...]]$, где $1 \leq i_j \leq k$, равным сумме $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_{i_j}$.

Тогда $\mathcal{L}^\mu$ распадаются на весовые компоненты $\mathcal{L}^\mu_m = \mathcal{L}^\mu_m(\lambda)$, которые объединяются в прямую сумму $\mathcal{L}_m = \oplus_\mu \mathcal{L}^\mu_m$.

**Определение 3:** ***Взвешенный геометрический тип*** в точке определим как набор тех $m$, которые соответствуют увеличению размерности $\mathcal{L}_m(p)$, т.е. таких $n_i$, для которых $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}_{n_i}(p)/\mathcal{L}_{n_i-1}(p)) = q_i \geq 1$, причем при увеличении размерности не менее чем на 1 соответствующее $n_i$ повторяется $q_i$ раз.

Итак, получаем набор:

$$(m_1, ..., m_k) = (\underbrace{n_1, ..., n_1}_{q_1}, \underbrace{n_2, ..., n_2}_{q_2}, ..., \underbrace{n_s, ..., n_s}_{q_s}),$$

где $s$ – число скачков.

Если $\sum_{i=1}^{s} q_i = k$, то будем говорить, что росток имеет *конечный тип*. Если же $\sum_{i=1}^{s} q_i < k$, то росток имеет *бесконечный тип*, который записывается в виде последовательности

$$(m_1, ..., m_k) = (\underbrace{n_1, ..., n_1}_{q_1}, \underbrace{n_2, ..., n_2}_{q_2}, ..., \underbrace{n_s, ..., n_s}_{q_s}, \underbrace{\infty, ..., \infty}_{k-q_1-...-q_s}).$$

Пусть в точке $p$ задан росток $M_p$ порождающего многообразия, чья $CR$-размерность равна $n-k$, а коразмерность равна $k$. Пусть уравнения ростка можно записать в виде:

$$r_i = 2\,\mathrm{Re}\, w_i + p_i(z, \bar{z}, w, \bar{w}) + o(m_i) = 0, \quad i = 1, ..., k, \tag{2.2}$$

где $p_i$ – однородный многочлен веса $m_i$, а $o(m_i)$ – функция, формальный ряд Тейлора которой состоит из слагаемых большего веса. Причем $p_i$ удовлетворяют следующим двум условиям:

I) $p_i$ не содержит мономов вида

$$c\, z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_{n-k}^{\alpha_{n-k}} \cdot u_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot u_{i-1}^{\beta_{i-1}}$$

и сопряженных к ним ни при каких степенях $\alpha_\nu, \beta_\nu$ и при $c \neq 0$;

II) $p_i$ не содержит слагаемых вида

$$c\, p_i\, u_i^{\beta_i} \cdot u_{i+1}^{\beta_{i+1}} \cdot \ldots \cdot u_k^{\beta_k}$$

при $c \neq 0$.

**Определение 4:** Полученную последовательность $(m_1, ..., m_k)$ будем называть ***взвешенным координатным типом***.

Введем *скалярное произведение* в пространстве алгебраических полиномов однородного веса от переменных $z, \bar{z}, w, \bar{w}$ (т.е. тех полиномов, которые равны сумме мономов одинакового веса) следующим образом:

$$(p, q) = p\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}}\Big)\bar{q}(z, \bar{z}, w, \bar{w}), \tag{2.3}$$

т.е. в $p(z, \bar{z}, w, \bar{w})$ переменные $z, \bar{z}, w, \bar{w}$ заменяем на соответствующие дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}}$ и применяем полученный дифференциальный полином к $\bar{q}(z, \bar{z}, w, \bar{w})$.

В пространстве дифференциальных операторов однородного веса с постоянными коэффициентами положим

$$(P, Q) = P\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}}\Big)\bar{Q}(z, \bar{z}, w, \bar{w}), \tag{2.4}$$

т.е. в $\bar{Q}(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}})$ дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}}$ заменяем на соответствующие переменные

$z, \bar{z}, w, \bar{w}$ и применяем к полученному полиному $\bar{Q}(z, \bar{z}, w, \bar{w})$ дифференциальный оператор $P(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}})$.

Пусть $\mathcal{A}$ – множество всех наборов $(l_1, ..., l_k), \quad l_1 \leq ... \leq l_k$, где $2 \leq l_i \leq +\infty$. Частичный порядок на $\mathcal{A}$ вводим следующим образом: если $l = (l_1, ..., l_k), \quad l' = (l'_1, ..., l'_k)$, то $l \leq l'$, если $\forall i \quad l_i \leq l'_i$.

## 3. Примеры.

Рассмотрим примеры типов поверхностей:

*Пример 1:*

Рассмотрим пример поверхности бесконечного типа. Пусть в пространстве $\mathbb{C}^6$ с координатами $(z_1, z_2, z_3, w_1 = u_1 + iv_1, w_2 = u_2 + iv_2, w_3 = u_3 + iv_3)$ поверхность $CR$-размерности 3 и коразмерности 3 задана уравнениями:

$$r_1 = 2\,u_1 + |z_1|^2 = 0,$$

$$r_2 = 2\,u_2 + |z_1|^4 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 0,$$

$$r_3 = 2\,u_3 = 0.$$

Выберем веса координат $(z_1, z_2, z_3; w_1, w_2, w_3)$ равными $(\lambda, l) = (1, 2, 2; 2, 4, \infty)$, чтобы уравнения стали однородными. Тогда взвешенный геометрический тип в начале координат равен $(2, 4, \infty)$. Таким образом, рассматриваемая поверхность является поверхностью бесконечного типа.

*Пример 2:* Пусть в пространстве $\mathbb{C}^4$ с координатами $(z_1, z_2, w_1, w_2)$ поверхность $CR$-размерности 2 и коразмерности 2 задана уравнениями:

$$r_1 = 2\,u_1 + |z_1|^4 = 0,$$

$$r_2 = 2\,u_2 + |z_2|^2 = 0,$$

набор весов координат $(z_1, z_2; w_1, w_2)$ равен $(\lambda, l) = (1, 2; 4, 4)$. Тогда взвешенный геометрический тип в начале координат равен $(4, 4)$.

*Пример 3* (см. также [10]): Рассмотрим в $\mathbb{C}^3$ с координатами $(z_1, z_2, w)$ поверхность $CR$-размерности 2 и коразмерности 1, заданную уравнениями:

$$r = 2\,u + |z_1|^2 + |z_2|^2(\bar{z}_1 + z_1) = 0.$$

Этот пример в $\mathbb{C}^3$ интересен тем, что при выборе равных весов переменных $(\lambda, l) = (1, 1; \infty)$ модельная поверхность (т.е. поверхность, заданная младшими весовыми компонентами уравнения) голоморфно вырождена (т.е. имеет ненулевое голоморфное касательное векторное поле), тогда как при выборе неравных весов $(\lambda, l) = (2, 1; 4)$ тип модельной поверхности конечен.

## 4. Формулировка теоремы.

**Теорема 2:** Пусть $M_p$ – росток порождающего гладкого многообразия конечного взвешенного геометрического типа $(m_1, ..., m_k)$. Тогда существует система взвешенных координат, в которой он задается уравнениями вида (2.2), т.е. он имеет такой же взвешенный координатный тип.

## 5. Доказательство в случае взвешенно однородной поверхности.

Для начала отметим, что если $M$ задано системой уравнений, приведенной к каноническому виду (см. ниже), то, как будет видно из доказательства теоремы, в этом случае взвешенный координатный тип определяет взвешенный геометрический тип, равный координатному.

Без ограничения общности будем предполагать, что точка $p$ – начало координат. Пусть $r_1, ..., r_k$ – вещественнозначные гладкие функции, $M$ – однородное многообразие, т.е. в системе $(z, w; \lambda, l)$ локальных координат с весами определяющие функции имеют вид:

$$r_i = 2\,\mathrm{Re}\, w_i + p_i(z, \bar{z}, w_1, \bar{w}_1, ..., w_i, \bar{w}_i), \quad i = 1, ..., k,$$

где $p_i$ – однородного веса $m_i$.

Рассмотрим дифференциальные операторы:

$$T_s^0 = \frac{\partial}{\partial z_s}, \quad s = 1, ..., n-k,$$

$$T_s^i = T_s^{i-1} - T_s^{i-1}(r_i)\frac{\partial}{\partial w_i}, \quad i = 1, ..., k.$$

**Лемма.**
1) $T_s^i$ касательны к поверхности $r_1 = ... = r_i = 0$ и имеют однородный вес $-\lambda_s$.
2) Коммутатор векторных полей $T_s^i, \quad \bar{T}_s^i, \quad s = 1, ..., k$, длины $\mu$ при фиксированном $i$ имеет однородный вес $-\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_{s_j}$, где $s_j$ соответствуют вхождению $T_{s_j}^i$ или $\bar{T}_{s_j}^i$ в коммутатор.
*Доказательство:* Доказательство проводится индукцией по $i$ и полностью аналогично приведенному в [25] для случая равных весов переменных $z$.

Рассматривая вес коммутатора $C$ из леммы, замечаем, что его коэффициенты $A_j, B_j$ при $\frac{\partial}{\partial w_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}_j}$, где $j \le i$, обращаются в нуль в начале координат, если вес $C$ меньше $m_j$, и равны нулю тождественно, если вес $C$ больше $m_j$. Это следует из того, что вес коэффициентов неотрицателен. Таким образом, начало координат имеет тип $(n_1, ..., n_k)$, где $n_i = m_i$, если существует коммутатор веса $m_i$ с ненулевым коэффициентом при $\frac{\partial}{\partial w_j}$, и

$n_i = +\infty$ в противном случае.

Пусть $X_s, \quad Y_s, \quad s = 1, ..., n-k$ – две группы некоммутирующих переменных. Рассмотрим вложенный коммутатор длины $\mu$ этих переменных вида $[..., [X_s, Y_t]...]$, т.е. скобка, вложенная во все остальные, содержит переменные из $X_s$ и из $Y_s$. Такие коммутаторы представляются в виде суммы некоммутативных полиномов вида $C = C_1 + C_2$, где $C_1$ – сумма мономов вида $A_1...A_\mu$, в которых $A_\mu$ – переменная из группы $X_s$ (остальные $A_j$ могут быть переменными из обеих групп), а $C_2$ – сумма мономов вида $B_1...B_\mu$, в которых $B_\mu$ – переменная из группы $Y_s$ (остальные $B_j$ могут быть переменными из обеих групп). Запись $C(T^i, \bar{T}^i)$ означает, что вместо переменных $X_s, Y_s$ в коммутатор подставлены $T^i_s, \bar{T}^i_s$ соответственно. Для коммутаторов данного вида выполнено следующее соотношение ([25]):

$$C(T^i, \bar{T}^i) = C(T^{i-1}, \bar{T}^{i-1}) - C_1(T^{i-1}, \bar{T}^{i-1})(r_i)\frac{\partial}{\partial w_i} - \\ -C_2(T^{i-1}, \bar{T}^{i-1})(r_i)\frac{\partial}{\partial \bar{w}_i}.$$

Если длина $C \geq 2$, то повторное применение этого соотношения дает:

$$C(T^i, \bar{T}^i) = -\sum_{j=1}^{i} C_1(T^{j-1}, \bar{T}^{j-1})(r_j)\frac{\partial}{\partial w_j} - \\ \sum_{j=1}^{i} C_2(T^{j-1}, \bar{T}^{j-1})(r_j)\frac{\partial}{\partial \bar{w}_j}.$$

Пусть $w_j = u_j + iv_j, \quad \pi_i$ – двойственный к $p_i$ оператор, т.е. $\pi_j = p_j\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \frac{\partial}{\partial w_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}_j}\right)$ ($\pi_j = 0$, если $p_j = 0$). Явными алгебраическими заменами координат и определяющих функций,

которые дословно переносятся из рассмотренного в [25] случая равных единичных весов переменных $z$, систему уравнений, задающую $M$, можно привести к виду:

$$r_i = 2u_i + p_i(z, \bar{z}, v_1, ..., v_{i-1}),$$

где $p_i$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $p_i$ однородного веса $m_i$ или тождественно равны нулю.

2) Отсутствуют голоморфные и антиголоморфные слагаемые.

3) $p_i$ зависят от $z, \bar{z}, v_1, ..., v_{i-1}$ и не зависят от $v_i, ..., v_k$.

4) Отсутствуют слагаемые вида $cv^a z^\alpha$ или $\bar{c}v^a z^\alpha$, где $v^a = v_1^{a_1}...v_{i-1}^{a_{i-1}}, \quad c \in \mathbb{C}$.

5) $\left(\frac{\partial}{\partial v_{i-1}}\right)^{a_{i-1}} \left(\frac{\partial}{\partial v_{i-2}}\right)^{a_{i-2}} ... \left(\frac{\partial}{\partial v_j}\right)^{a_j} \pi_j(p_i)(0) = 0 \quad \forall j < i$ и неотрицательных $a^{i-1}, ..., a^j$.

Доказательство проводится по индукции. Т.к. однородность при рассматриваемых заменах сохраняется, то доказательство для равных весов остается в силе и в случае произвольных весов.

База индукции: функция $p_1$ зависит только от $z, \bar{z}$, а плюригармонические слагаемые можно убрать, добавив к $w_1$ голоморфный полином.

Шаг индукции: фиксируем $i$ и предположим, что $p_1, ..., p_{i-1}$ имеют требуемый вид. Плюригармонические слагаемые можно убрать голоморфной заменой координат. В слагаемых, содержащих $u_j, \quad j < i$, заменим $u_j$ на $-\frac{1}{2}p_j$. Далее, заметим, что $cv^a z^\alpha + \bar{c}v^a \bar{z}^\alpha = 2\,\mathrm{Re}\,(bw^a z^\alpha) +$(слагаемые, содержащие переменные $u$) при подходящем выборе $b \in \mathbb{C}$ (здесь $c \in \mathbb{C}$). Слагаемое $bw^a z^\alpha$ можно убрать, добавив его к переменной $w_i$. Переменные $u_j$ заменим на $-\frac{1}{2}p_j$, причем по предположению индукции новых слагаемых вида $v^a z^\alpha$ или $v^a \bar{z}^\alpha$ при этом не появится.

Теперь рассмотрим условие 5). Пусть оно не выполнено. Рассмотрим сначала случай $(a_{i-1}, a_{i-2}, ..., a_j) \neq 0$. Упорядочим слагаемые $v^a$ лексикографически относительно показателей степеней $(a_{i-1}, a_{i-2}, ..., a_j)$. Покажем, что можно добавить к $p_i$ слагаемое вида $ev_{i-1}^{a_{i-1}}...v_j^{a_j}p_j, \quad e \in \mathbb{R}$, чтобы выполнялось 5).

Выберем $b \in \mathbb{C}$ так, чтобы $b(\sqrt{-1})^{a_{i-1}+...+a_j} = -1$.

Тогда $\frac{2}{a_j+1}\mathrm{Re}(bw_{i-1}^{a_{i-1}}...w_{j+1}^{a_{j+1}}w_j^{a_j+1}) = -2v_{i-1}^{a_{i-1}}...v_j^{a_j}u_j +$(слагаемые, которые содержат либо множитель $u_k, \quad k \neq j$, либо не менее трех множителей $u_k, \quad k = j, ..., i-1$). Сделаем замену переменной $w_i \longrightarrow w_i - \frac{be}{a_j+1}w_{i-1}^{a_{i-1}}...w_{j+1}^{a_{j+1}}w_j^{a_j+1}$, $p_i \longrightarrow p_i - 2ev_{i-1}^{a_{i-1}}...v_j^{a_j}u_j$, подставив, как и выше, $\frac{1}{2}p_k$ вместо $u_k$. Теперь нужно учесть оставшиеся слагаемые: во-первых, ясно, что слагаемых вида $cv^a z^\alpha + \bar{c}v^a\bar{z}^\alpha$ не появится; во-вторых, мы можем получить слагаемые, которые изменят значение выражения $\left(\frac{\partial}{\partial v_{i-1}}\right)^{b_{i-1}}\left(\frac{\partial}{\partial v_{i-2}}\right)^{b_{i-2}}...\left(\frac{\partial}{\partial v_l}\right)^{b_l}\pi_l(p_i)(0)$ при некоторых показателях степеней $(b_{i-1}, ..., b_l)$. Но из вида оставшихся слагаемых ясно, что $(b_{i-1}, ..., b_l) < (a_{i-1}, a_{i-2}, ..., a_j)$. Поэтому, повторяя описанную процедуру, за конечное число шагов мы получим 5).

Осталось рассмотреть случай $(a_{i-1}, a_{i-2}, ..., a_j) = 0$. В данном случае требуемое равенство можно получить, применив метод ортогонализации Грама-Шмидта относительно скалярного произведения (2.3).

Тем самым требуемый вид получен. Такой вид будем называть каноническим.

## 6. Разложение пространства дифференциальных операторов однородного веса с постоянными коэффициентами в прямую сумму.

Зафиксируем $i, 1 \leq i \leq k$. Пусть $p_1, ..., p_i$ – функции однородного веса и канонического вида, причем $p_1, ..., p_{i-1}$ не равны тождественно нулю. Пусть $\mathcal{Q}_\mu$ – пространство операторов с постоянными коэффициентами веса $-\mu$, зависящих от $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial v_1}, ..., \frac{\partial}{\partial v_{i-1}}$. Обозначим через $\mathcal{Q}^j_\mu$ операторы, зависящие только от $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial v_1}, ..., \frac{\partial}{\partial v_{j-1}}$.

Определим подпространство $\mathcal{G}^j_\mu$ в $\mathcal{Q}^j_\mu$ как подпространство, состоящее из таких операторов $Q$, которые содержат смешанные производные по $z, \bar{z}$, и выполнено условие $Q(v_{j-1}^{a_{j-1}} v_{j-2}^{a_{j-2}} ... v_l^{a_l} p_l)(0) = 0$.

Определим подпространство $\mathcal{H}^j_\mu$ в $\mathcal{Q}^j_\mu$ индуктивно. Положим, что $\mathcal{H}^1_\mu$ – нулевое подпространство $\mathcal{Q}^j_\mu$, а для $j > 1$ определим $\mathcal{H}^j_\mu$ как линейную оболочку операторов вида $(\frac{\partial}{\partial v_{j-1}})^{a_{j-1}} (\frac{\partial}{\partial v_{j-2}})^{a_{j-2}} ... (\frac{\partial}{\partial v_l})^{a_l} \pi_l$, где $\pi_l$ – двойственный к $p_l$ оператор, $1 \leq l \leq j-1$ и все степени неотрицательны.

Определим подпространство $\mathcal{Z}^j_\mu$ в $\mathcal{Q}^j_\mu$ как подпространство таких операторов, которые не содержат одновременно дифференцирований по $z$ и $\bar{z}$.

Заметим, что замена $z_s$ на $z_s^{\lambda_s}$, где $\lambda_s$ – вес соответствующей переменной $z_s$, и замена весов $\lambda_s$ на единичные сохраняет однородность уравнений и дифференциальных операторов. К полученной системе уравнений применима теорема о разложении $\mathcal{Q}^j_\mu$ в ортогональную прямую сумму операторов. Выделяя подпространство $\tilde{\mathcal{Q}}^j_\mu$ в $\mathcal{Q}^j_\mu$, соответствующее исходным операторам, и подпространства $\tilde{\mathcal{G}}^j_\mu$, $\tilde{\mathcal{H}}^j_\mu$ и $\tilde{\mathcal{Z}}^j_\mu$ в $\tilde{\mathcal{Q}}^j_\mu$, определяемые аналогичным образом, и возвращаясь к исходным переменным и весам, мы получаем аналогичное разложение:

$$\tilde{\mathcal{Q}}^j_\mu = \tilde{\mathcal{G}}^j_\mu \oplus \tilde{\mathcal{H}}^j_\mu \oplus \tilde{\mathcal{Z}}^j_\mu.$$

## 7. Вычисление типа в однородном случае и заверше-

**ние доказательства.**

Теперь, опираясь на полученные в предыдущих пунктах равенства, являющиеся аналогами вспомогательных утверждений, которые используются для определения типа в однородном случае, повторяя те же рассуждения, получим, что для $j = 1, ..., i$ существует коммутатор $F^j \in \mathcal{L}_{m_j}$, такой что:

$$F^j(T^k, \bar{T}^k) = \frac{\partial}{\partial v_j} + \sum_{l=j+1}^{k} (A_l^j \frac{\partial}{\partial w_l} + B_l^j \frac{\partial}{\partial \bar{w}_l}).$$

Отсюда следует, что ноль – точка типа $(m_1, ..., m_{i-1}, m_i, ...)$, если $p_i \neq 0$ тождественно, и типа $(m_1, ..., m_{i-1}, \infty, ...)$ иначе.

Для перехода к общему случаю выделим в уравнениях часть однородного младшего веса. Действуя так же, как в случае равных весов переменных $z$, получим, что слагаемые старшего веса в уравнениях не влияют на слагаемые старшего веса в касательных полях, а значит, тип точки определяется выделенной однородной частью, откуда следует заключение теоремы.

# Литература


[1] В.К. Белошапка, О размерности группы автоморфизмов аналитической гиперповерхности, Известия АН СССР, сер. мат., 1979, т.43, №2, стр. 243-266.

[2] В.К. Белошапка, Пример непродолжаемого голоморфного преобразования аналитической гиперповерхности, Математические заметки, 1982, т.32, №1, стр. 121-123.

[3] В.К. Белошапка, О голоморфных преобразованиях квадрики, Математический сборник, 1991, №2, стр. 203-219.

[4] В. К. Белошапка, "Вещественные подмногообразия комплексного пространства: их полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации", УМН, 57:1(343) (2002), 3–44; Russian Math. Surveys, 57:1 (2002), 1–41.

[5] В. К. Белошапка, "Универсальная модель вещественного подмногообразия", Матем. заметки, 75:4 (2004), 507–522; Math. Notes, 75:4 (2004), 475–488.

[6] В. К. Белошапка, "Пространство орбит группы автоморфизмов модельной поверхности типа (1,2)", Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2008, № 3, 13–16.

[7] В.К. Белошапка, Метод модельной поверхности: бесконечномерная версия, Труды Математического института им. В.А. Стеклова, 2012, т. 279, с. 20-30.

[8] Р. В. Гаммель, И. Г. Коссовский, “Оболочка голоморфности модельной поверхности степени три и феномен “жесткости””, Тр. МИАН, 253 (2006), 30–45.

[9] В. В. Ежов. Асимптотика поведения строго псевдовыпуклой поверхности вдоль ее цепи.— Изв. АН СССР, Сер. мат., 1983, 47 : 4, с. 560—586.

[10] А. Е. Ершова, “Автоморфизмы 2-невырожденных гиперповерхностей в $C^3$”, Матем. заметки, 69:2 (2001), 214–222; Math. Notes, 69:2 (2001), 188–195.

[11] А. Картан, Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971.

[12] Н. Г. Кружилин. Оценка изменения нормального параметра цепи на строго псевдовыпуклой поверхности.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1983, 47 : 5.

[13] А. В. Лобода. О локальных автоморфизмах вещественно-аналитических гиперповерхностей.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1981, 45 : 3, с. 620—645.

[14] А. В. Лобода, “О сферичности жестких гиперповерхностей в $C^2$”, Матем. заметки, 62:3 (1997), 391–403.

[15] А.В. Лобода, "Голоморфно-однородные вещественные гиперповерхности в $C^3$". Труды ММО, т. 81, вып. 2, 2020. С. 61-136.

[16] С. И. Пинчук. Граничная теорема единственности для голоморфных функций нескольких комплексных переменных.— Мат. заметки, 1974, 15 : 2, с. 205—212.

[17] С.И. Пинчук, О голоморфных отображениях вещественно аналитических гиперповерхностей, Докл. АН СССР, 236, № 3 (1977), 544-547.

[18] А. Б. Сухов, "О преобразованиях аналитических CR-структур", Изв. РАН. Сер. матем., 67:2 (2003), 101–132.

[19] M.S. Baouendi, P. Ebenfelt, L.P. Rothschild, Real Submanifolds in Complex Space and Their Mappings, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1999.

[20] V.Beloshapka, Automorphisms of Degenerate Hypersurfaces in $C^2$ and a Dimension Conjecture, Russian Journal of Mathematical Physics, 1996, vol.4, no.3, p.393.

[21] V.K. Beloshapka, I. Kossovskiy, Homogeneous Hypersurfaces In $C^3$ Assotiated With A Model CR-Cubic, J Geom Anal (2010) 20: 538-564.

[22] V.K. Beloshapka, I.G. Kossovskiy, Classification Of Homogeneous CR-Manifolds In Dimension 4, Journal of Mathematical Analysis and Application, 374 (2011) 655-672.

[23] V.K. Beloshapka, "Can a stabilizer be eight-dimensional?", Russian Journal of Mathematical Physics, 2012, Volume 19, Issue 2, pp 135–145.

[24] Beloshapka V.K., CR-manifolds of finite Bloom-Graham type: the model surface method, Russian Journal of Mathematical Physics,Vol.27, No.2, 2020.

[25] Th. Bloom and I. Graham, "On "Type" Conditions for Generic Real Submanifolds of $C^n$ ", Invent. Math. 40, 217–243 (1977).

[26] D.Burns, S. Schneider , R. O. Wells . Deformations of strictly pseudoconvex domains.— Invent. Math., 1978, 46 : 3, p. 237—253.

[27] E. Cartan. Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes. Ann. Math. Pura Appl. (4). 1932, V. 11, 17–90.

[28] D. Catlin, Boundary invariants of pseudoconvex domains, Ann. of Math. 120 (1984) 529-586.

[29] D. Catlin, Subelliptic estimates for $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudoconvex domains, Ann. of Math. 126 (1987) 131-191.

[30] S. S. Chern and J. K. Moser, Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math., 133 (1974), no. 3–4, 219–271.

[31] V.Ezhov, G. Schmalz. A matrix Poincaré formula for holomorphic automorphisms of quadrics of higher codimension. Real associative quadrics. J. Geom. Anal., 1997, V.8, №1, 27–41.

[32] V. Ezhov, A. Isaev, G. Schmalz. Invariants of elliptic and hyperbolic CR-structures of codimension 2, Internat. J. Math., 1999, V.10, №1, 1–52.

[33] C. L. Fefferman. The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains.— Invent. Math., 1974, 24 : 1, p. 1—65.

[34] G. Fels and W. Kaup, Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5. Acta Math. 201, 1-82 (2008).

[35] Jan Gregorovic, On the Beloshapka's rigidity conjecture for real submanifolds in complex space, arXiv:1807.03502.

[36] Martin Kolar, Francine Meylan, and Dmitri Zaitsev, Chern-Moser operators and polynomial models in CR geometry, Adv. Math. 263 (2014), 321–356.

[37] Poincaré, M.H. Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme. Rend. Circ. Matem. Palermo 23, 185–220 (1907).

[38] M. Sabzevari, A. Spiro. On the geometric order of totally nondegenerate CR manifolds, https://arxiv.org/abs/1807.03076.

[39] Stanton, N., Infinitesimal CR automorphisms of rigid hypersurfaces, Amer. J. Math. 117 (1995), 141—167.

[40] Stanton, N., Infinitesimal CR automorphisms, Amer. J. Math. 118 (1996), 209—233.

[41] N.Tanaka. On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables. J. Math. Soc. Japan. 1962, V.14, 397–429.

[42] S. M. Webster. On the Moser normal form at a non-ombilic points.— Math. Ann., 1978, 23 : 2, p. 97—102.

[43] D.Zaitsev, Germs of local automorphisms of real-analytic CR-structures and analytic dependence of k-jets, Math. Res. Lett., V.4, P. 1-20 (1997).

**Работы автора по теме диссертации:**

*Статьи в научных журналах Web of Science, Scopus, RSCI*

[44] М. А. Степанова, “Модификация теоремы Блума–Грэма: введение весов в комплексном касательном пространстве”, Тр. ММО, 79, № 2, 2018, 237–246.

[45] М. А. Степанова, “Об автоморфизмах CR-подмногообразий комплексного гильбертова пространства”, Сиб. электрон. матем. изв., 17 (2020), 126–140.

[46] М. А. Степанова, “Голоморфно однородные CR-многообразия и их модельные поверхности”, Изв. РАН. Сер. матем., 85:3 (2021), 203–209.

[47] М. А. Степанова, “О CR-многообразиях бесконечного типа по Блуму-Грэму”, Труды ММО (в печати).