Отзыв
официального оппонента

на диссертацию Солодова Алексея Петровича
«Экстремальные задачи в теории
ортогональных рядов и комплексном анализе»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Актуальность темы диссертации. Диссертация посвящена решению важных и трудных экстремальных задач для рядов по синусам, матриц, связанных с проблемой сходимости почти всюду ортогональных рядов, и областей однолистности голоморфных функций.

В теории тригонометрических рядов весьма содержательным для исследований оказался класс рядов по синусам $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, определяемых последовательностями $b = \{b_n\}$, монотонно убывающими к нулю. Эти ряды сходятся всюду на периоде $[-\pi, \pi]$, причем вне любой окрестности нуля равномерно. Для них были найдены критерии равномерной сходимости и ограниченности, интегрируемости их суммы $g(b, x)$ по Лебегу, принадлежности классу $Lip\,\alpha$, $0 < \alpha < 1$, и т.д. Понятно, что основной задачей здесь является исследование порядкового и асимптотического поведения суммы $g(b, x)$ при $x \to +0$. Для монотонных последовательностей большую роль в этих исследованиях сыграла кусочно-линейная мажоранта Р. Салема $v(b, x)$, а для выпуклых последовательностей и разности суммы и ее главного асимптотического члена — мажоранта С.А. Теляковского $\sigma(b, x)$, позволившие получить с помощью двусторонних оценок качественную картину поведения суммы. На современном этапе активно решаются экстремальные задачи поиска в этих оценках точных постоянных, уточнения асимптотики суммы синус-ряда.

В теории ортогональных рядов центральной проблемой является изучение сходимости почти всюду. Д.Е. Меньшов и независимо Г. Радемахер доказали, что $\log_2^2 n$ является точным множителем Вейля для сходимости почти всюду на классе всех ортонормированных систем. Пример ортонормированной системы, показывающий точность теоремы Меньшова–Радемахера, был построен Д.Е. Меньшовым с помощью матрицы Гильберта. Для системы Меньшова норма максимального оператора на первых N функциях системы имеет наибольший порядок $\log_2 N$. Долгое время принципиально новых примеров ортонормированных систем и матриц не было, пока А. Паскевич не предложил свою конструкцию матрицы из блоков 3×3. Как показал В.И. Мацаев, нужные матрицы являются экстремальными по порядку для величины $\sup(\|A^s\|/\|A\|) \asymp \log_2 N$, где A — матрица порядка N и A^s — верхняя треугольная матрица, у которой элементы выше главной диагонали совпадают с соответствующими элементами матрицы A. Разнообразие таких

матриц позволило бы строить ортонормированные системы с дополнительными свойствами. Б.С. Кашин поставил задачу найти подходы к построению экстремальных в указанном смысле матриц.

Исследование областей однолистности для голоморфных функций является старой задачей комплексного анализа. Одним из центральных результатов в этом направлении стало описание Э. Ландау максимального круга однолистности для ограниченных голоморфных отображений единичного круга с центром в нуле в круг с центром в нуле и большего чем 1 радиуса, для которых дополнительно нуль неподвижная точка, а производная в нуле равна 1. Ж. Валирон доказал, что голоморфное отображение единичного круга в себя, у которого неподвижная точка расположена на границе и угловая производная в ней конечна, локально однолистно в некотором секторе с вершиной в неподвижной точке. С другой стороны, на классе таких отображений, даже если значения угловых производных ограничены в совокупности, нет непустых областей однолистности. Но если дополнительно потребовать неподвижную точку в нуле, то, как показал В.В. Горяйнов, область однолистности появляется. Описание точной области однолистности в этом случае становится важной задачей.

Во всех отмеченных проблемах в диссертации получено или полное решение, или существенное продвижение.

Краткое содержание диссертации и общая характеристика. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Объем работы составляет 238 страниц, список литературы содержит 123 наименования.

Во введении приведены исторические сведения по изучаемым вопросам, обоснована актуальность исследования, сформулированы цели, кратко изложено содержание, приведена апробация результатов.

В первой главе исследуются ряды по синусам с монотонными или квазимонотонными коэффициентами в правой полуокрестности нуля.

Из неравенства $g(b,x) \le v(b,x)$, $x \in (0,\pi)$, доказанного А.Ю. Поповым, и результатов П. Хартмана, А. Винтнера и С.А. Теляковского вытекает, что наибольшее значение по всем монотонным последовательностям верхнего предела отношения $g(b,x)$ к $v(b,x)$ при $x \to +0$ равно 1. В диссертации доказано, что наименьшее значение этого предела равно $2\pi^{-2}$. Мажоранта Салема не является минорантой суммы синус-ряда с постоянной $2\pi^{-2}$ даже для выпуклых последовательностей. Предложена новая кусочно-линейная мажоранта $u(b,x)$, которая для $g(b,x)$ и монотонных последовательностей является мажорантой с константой 1, а для выпуклых последовательностей является минорантой с постоянной $2\pi^{-2}$ в некоторой правой полуокрестности нуля. Описаны квазимонотонные последовательности, определяемые с помощью положительных неубывающих последовательностей, для которых

сумма синус-ряда положительна в некоторой правой полуокрестности нуля. Для двух классов монотонных последовательностей, для которых последовательность $\{kb_k\}$ не возрастает или не убывает, найдены асимптотически точные оценки суммы $g(b, x)$, использующие мажоранту Салема.

Во второй главе исследуются ряды по синусам с выпуклыми коэффициентами.

Предложена модифицированная функция Салема, которая для рядов по синусам с выпуклыми коэффициентами является минорантой суммы с постоянной $2\pi^{-2}$, в определенном смысле оптимальной. В двусторонней оценке С.А. Теляковского разности суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами и ее главного асимптотического члена через мажоранту Теляковского найдены точные постоянные. В асимптотике суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами и медленно меняющейся последовательностью $\{k\Delta b_k\}$ найден второй член, уточняющий главный член асимптотики С. Алянчича, Р. Боянича и М. Томича.

При получении результатов первой и второй глав соискатель продемонстрировал виртуозную технику как в части получения общих результатов, так и при построении многочисленных примеров, демонстрирующих их точность.

В третьей главе предложен метод построения ортогональных матриц с логарифмическим порядком роста норм их верхних треугольных матриц.

Матрица Гильберта — теплицева, определяемая с помощью операции сложения на группе характеров одномерного тора. Матрица Паскевича — обобщенная теплицева, определяемая с помощью операции сложения на группе характеров нульмерной компактной абелевой группы $\mathbb{Z}_3^\infty$. Предлагается рассмотреть обобщенные теплицевы матрицы, определяемые с помощью операции сложения на группе характеров произвольной компактной абелевой группы, например, нульмерной группы $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p_i}$, $p_i \geq 3$, группой характеров которой является система Прайса. Для работы с такими матрицами, для их норм получена оценка, аналогичная известной оценке норм классических теплицевых матриц. Доказывается, что существуют обобщенные теплицевы матрицы H_{m_j} порядка $m_j = \prod_{i=1}^{j} p_i$, нормы которых ограничены, а нормы их верхних треугольных матриц растут как $\log_2 m_j$. В эту схему укладывается рассмотрение матрицы Паскевича. Предложенный подход можно считать определенным решением задачи Б.С. Кашина.

В случае, когда все $p_i = 4$, построена ортогональная обобщенная теплицева матрица B_N порядка $M = 4^{N+1}$, для которой норма матрицы B_N^s имеет порядок $\log_2 M$. Эта матрица определяет ортонормированную систему с экстремально большой L^2-нормой максимального оператора и доказывает точность теоремы Меньшова–Радемахера. У матрицы B_N есть дополнительное важное свойство: отношение наибольшего модуля элементов к наименьше-

му модулю элементов равно $\sqrt{M}/2$, что лучше, чем у матрицы Гильберта (порядка M).

Матрица B_N состоит из блоков 4×4. Из двоичных блоков подобную матрицу, по-видимому, построить нельзя. Б.С. Кашину удалось построить матрицу A из двоичных блоков, для которой отношение норм матриц A^s и A имеет порядок квадратного корня из логарифма. В третьей главе построена аналогичная, но ортогональная матрица и с элементами, равными по модулю.

Глава 4 посвящена нахождению областей однолистности на классах голоморфных функций в единичном круге с двумя неподвижными точками.

Получено описание точной области однолистности для голоморфных отображений единичного круга в себя и имеющих две неподвижные точки в нуле и на границе в 1, в которой угловая производная не превосходит значений из интервала $(1, 4]$. Это аналог теоремы Э. Ландау для рассматриваемого класса голоморфных отображений. Подробно изучены свойства отображений из этого класса.

Получены асимптотически точные двусторонние оценки областей однолистности на классах голоморфных отображений единичного круга в себя с двумя диаметрально противоположными граничными неподвижными точками и инвариантным диаметром в зависимости от значения произведения угловых производных в граничных неподвижных точках.

Результаты этой главы технически очень сложные. Потребовалось доказывать многочисленные многопараметрические неравенства, устанавливать тонкие свойства некоторых многочленов двух переменных, зависящих от параметров. Результаты получены под значительным воздействием исследований и методов В.В. Горяйнова. Но для точного описания областей однолистности соискателю пришлось разрабатывать и свои методы.

Новизна и основные результаты. Таким образом, в диссертации проделана большая и содержательная работа. Все заявленные результаты получены диссертантом самостоятельно и являются новыми. Диссертант нашел ряд новых подходов для решения актуальных и трудных задач теории ортогональных рядов и комплексного анализа. Наиболее значимыми из них являются следующие:

1. Предложены две новые модификации мажоранты Салема. Первая является точной мажорантой с коэффициентом 1 для суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами, а первая и вторая являются точными минорантами с коэффициентом $2\pi^{-2}$ в правой полуокрестности нуля для суммы ряда с выпуклыми коэффициентами.

2. В двусторонней оценке С.А. Теляковского разности суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами и ее главного асимптотического члена через мажоранту Теляковского найдены точные постоянные.

3. В асимптотике суммы ряда по синусам с выпуклыми, медленно меняющимися и регулярными коэффициентами найден второй член, уточняющий главный член асимптотики С. Алянчича, Р. Боянича и М. Томича.

4. Построена ортогональная обобщенная теплицева матрица из блоков 4×4 с логарифмическим ростом нормы верхней треугольной матрицы, определяющая ортонормированную систему с экстремально большой L^2-нормой максимального оператора. Это новая конструкция построения ортогональных систем, устанавливающих точность теоремы Меньшова–Радемахера.

5. Описана точная область однолистности для голоморфных отображений единичного круга в себя, имеющих две неподвижные точки в нуле и на границе в 1, в которой угловая производная не превосходит значений из интервала $(1, 4]$.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность. Полученные в диссертации результаты сформулированы в виде корректных математических утверждений, снабжены строгими доказательствами. Основные результаты диссертации опубликованы в 13 статьях в журналах из перечня ВАК и входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science и Scopus. Шесть работ написаны в соавторстве с А.Ю. Поповым или О.С. Кудрявцевой. В диссертации результаты соавторов этих статей разделены. Основные результаты доложены на 5 ведущих по тематике диссертации семинарах и 17 профильных конференциях. Таким образом, результаты являются строго обоснованными и достоверными. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретическую направленность. Результаты представляют существенный вклад в решение экстремальных задач в теории ортогональных рядов и комплексном анализе. Построенные экстремальные матрицы могут найти практическое применение в задачах анализа данных. Результаты диссертации могут быть использованы в организациях, научных институтах, занимающихся проблемами вещественного и комплексного анализа, в частности, в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН и его Санкт-Петербургском отделении, Институте математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Институте математики Сибирского Отделения РАН, в учебном процессе при чтении спецкурсов в МГУ им. М.В. Ломоносова, Московском физико-техническом институте, Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского, Санкт-Петербургском государственном университете, Тульском государственном университете и других.

Замечания. Диссертация выполнена на высоком научном уровне и тщательно отредактирована, вместе с тем имеется небольшое количество опечаток (например, на странице 131 допущена опечатка в слове “результат”; на

странице 143 при оценке норм множитель $2/\pi$ должен стоять за скобками). Почему-то во введении теоремы Меньшова названы леммами. Также во введении на страницах 16, 21, 23 с разной степенью подробности описываются одни и те же результаты С.А. Теляковского и А.Ю. Попова. Очевидно, это сделано с целью сохранения целостности изложения, однако внимательному читателю данные повторы могут показаться излишними. Наверное, можно было бы в научной новизне уменьшить число (9) основных результатов.

Но эти замечания никак не влияют на достоверность результатов и не умаляют высоких достоинств диссертации.

Заключение

Диссертация Солодова Алексея Петровича «Экстремальные задачи в теории ортогональных рядов и комплексном анализе» является законченной квалификационной научно-исследовательской работой, в которой решены задачи, вносящие существенный вклад в развитие теории экстремальных задач в вещественном и комплексном анализе. Диссертационная работа соответствует требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор, Солодов Алексей Петрович, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:
Иванов Валерий Иванович, В.И.Иванов
доктор физико-математических наук
по специальности 1.1.1 — вещественный,
комплексный и функциональный анализ,
профессор кафедры прикладной математики и информатики
Института прикладной математики и компьютерных наук
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Тульский государственный университет»

Адрес: 300012, г. Тула, пр. Ленина, 92,
тел. +7(4872)35-34-44, e-mail: info@tsu.tula.ru

27.09.2021

Подпись В.И. Иванова заверяю

Начальник административно-
кадрового управления ТГУ М.В. Лунев
27.09.2021