Отзыв

официального оппонента
на диссертационную работу Солодова Алексея Петровича
"ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ
В ТЕОРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ И
КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ",
представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук по специальности
1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Экстремальные задачи занимают центральное место как в вещественном, так и в комплексном анализе. Кроме вопросов, связанных с отысканием точных оценок, экстремальные задачи естественно возникают и при исследовании качественных вопросов. Например, проблема конформного отображения связана с решением некоторой экстремальной задачи. Диссертация А.П. Солодова посвящена исследованию экстремальных задач в теории ортогональных рядов и геометрической теории функций комплексного переменного. Первые три главы относятся к первому направлению, а четвёртая — ко второму.

В первой и второй главах диссертации изучаются тригонометрические ряды по синусам с монотонными коэффициентами. Найдена неулучшаемая оценка снизу верхнего предела отношения суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами к мажоранте Салема при стремлении переменной к нулю справа. Предложенная в работе модификация функции Салема позволила получить новую оценку сверху для суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами, что представляет собой дальнейшее развитие результатов С.А. Теляковского и А.Ю. Попова. Кроме того, с использованием этой же модификации функции Салема получена оценка снизу сумм рядов по синусам с выпуклыми коэффициентами. В третьем параграфе первой главы получен аналог теоремы Хартмана— Винтнера о положительности суммы ряда по синусам в правой полуокрестности нуля для некоторых квазимонотонных последовательностей коэффициентов. Получено описание квазимонотонных последовательностей с указанным свойством. Показано также, что отрицательная часть ряда по синусам для квазимонотонных последовательностей не обязана стремиться к нулю.

Во второй главе диссертации изучается асимптотическое поведение в правой полуокрестности нуля сумм ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами. Здесь уточняется один результат А.Ю. Попова о миноранте суммы ряда для выпуклой и стремящейся к нулю последовательности коэффициентов. При этом наряду с функцией Салема используется некоторая её моди-

фикация, что позволило получить в некотором смысле оптимальные оценки. Получены также точные значения постоянных в теореме С.А. Теляковского. В четвёртом параграфе второй главы получено уточнение асимптотики суммы ряда по синусам с выпуклой, медленно меняющейся последовательностью коэффициентов, полученной С. Алянчичем, Р. Бояничем и М. Томичем.

Тематика исследований третьей главы восходит к работам Д.Е. Меньшова и Г. Радемахера, связанных с изучением вопроса сходимости почти всюду рядов по общим ортогональным системам. Развитие этой тематики было связано с установлением точности так называемых множителей Вейля, что привело к изучению специальных свойств тёплицевых матриц. Основные результаты третьей главы обусловлены задачей Б.С. Кашина о построении матриц A размера $N \times N$, для которых отношение норм $||A^s||/||A||$ имеет порядок $\log_2 N$ при $N \to \infty$. Здесь A^s — верхняя треугольная матрица, у которой элементы выше главной диагонали совпадают с соответствующими элементами матрицы A, $||A||$ — операторная норма матрицы. Автору удалось получить обобщение конструкции примера А. Паскевича ортонормированной системы, который устанавливает точность теоремы Меньшова— Радемахера о множителе Вейля. Предложен также метод построения обобщённых тёплицевых матриц с экстремально большой L_2-нормой максимального оператора.

Условия однолистности голоморфной функции имеют как чисто теоретическое значение, так и прикладной интерес. В частности, в методе комплексного потенциала однолистность связана с физической реализуемостью модели. В связи с этим достаточным условиям однолистности посвящено большое количество работ. При этом, как правило, в качестве областей однолистности выступали круги. Действительно, если голоморфная функция имеет в точке ненулевую производную, то она однолистна в некоторой окрестности этой точки. Потому естественным направлением исследований является поиск радиусов однолистности в том или ином классе голоморфных функций. Классическим в этом направлении является результат Ландау: если функция f голоморфна в единичном круге, нормирована условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ и $|f(z)| \leq M$, $M > 1$, для всех z из единичного круга, то она однолистна в круге $|z| < M - \sqrt{M^2 - 1}$, причем оценка точная. Другое направление в отыскании радиусов однолистности в различных классах голоморфных функций связано с аналитическим выражением геометрических свойств образов окружностей. Здесь в качестве радиусов однолистности выступают радиусы звездообразности и выпуклости. Нехари открыл направление получения радиусов однолистности, используя оценки на производную Шварца. Недавно было обнаружено, что в случае наличия двух неподвижных точек у голоморфного отображения единичного круга в себя (одна из неподвижных точек должна располагаться на границе круга) между неподвижными точками при определённых значениях угловой производной в граничной неподвиж-

ной точке возникает область однолистности. Аналогичная ситуация возникает и тогда, когда обе неподвижные точки расположены на границе единичного круга. Четвёртая глава диссертации посвящена изучению вопроса максимального расширения этих областей однолистности. Полученные здесь результаты оказались близки к неулучшаемым.

Таким образом, автор продемонстрировал владение методами вещественного, комплексного и функционального анализа, получив новые результаты, представляющие значительный интерес в различных областях математики. Все результаты, выносимые на защиту, получены лично автором, снабжены подробными доказательствами, доложены на многочисленных международных конференциях и научных семинарах, своевременно опубликованы в центральных российских и зарубежных журналах. Диссертация аккуратно оформлена и существенных замечаний по её содержанию нет. Автореферат правильно и достаточно полно отражает основные результаты диссертации.

Диссертация является законченным профессионально зрелым исследованием, вносящим значительный вклад в актуальные разделы математического анализа.

Диссертация соответствует паспорту научной специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора наук в Положении о присуждении учёных степеней, а её автор безусловно заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук.

Официальный оппонент:
Горяйнов Виктор Владимирович
доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.01-математический анализ)
профессор кафедры высшей математики
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)
141701, Московская обл., г. Долгопрудный,
Институтский переулок, д. 9
Тел.: +7(495)576-51-55
goriainov.vv@mipt.ru
05.10.2021

Горяйнов



ЗАВЕРЯЮ
УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ
(УЧЕНОГО) СОВЕТА МФТИ
ЕГ ЕВСЕЕВ