Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

Солодов Алексей Петрович

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ И КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ

Специальность 1.1.1 — вещественный, комплексный и
функциональный анализ

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2021

Оглавление

Введение **6**

1 Ряды по синусам с монотонными и квазимонотонными коэффициентами **43**

1.1 Точная оценка снизу верхнего предела отношения суммы синус-ряда с монотонными коэффициентами к мажоранте Салема 43

1.1.1 Формулировка основных результатов 43

1.1.2 Вспомогательные утверждения 44

1.1.3 Доказательство основного результата 46

1.2 Уточнённая оценка сверху суммы ряда по синусам 48

1.2.1 Формулировка основных результатов 48

1.2.2 Доказательство оценки сверху 49

1.2.3 Оценка снизу суммы ряда по синусам через уточнённую мажоранту 52

1.3 Критерий положительности суммы ряда по синусам с квазимонотонными коэффициентами 55

1.3.1 Формулировка основных результатов 55

1.3.2 Двусторонняя оценка остатка ряда с квазимонотонными коэффициентами 57

1.3.3 Оценка снизу суммы по косинусам 61

1.3.4 Аналог теоремы Хартмана—Винтнера для рядов с квазимонотонными коэффициентами 63

1.3.5 Критерий ограниченности отрицательной части суммы ряда по синусам с квазимонотонными коэффициентами 68

1.3.6 Обобщение критерия интегрируемости Янга на ряды с квазимонотонными коэффициентами 71

1.3.7 Условие суммируемости отрицательной части ряда по синусам с квазимонотонными коэффициентами 73
1.4 Точные константы в оценках сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами при дополнительном условии регулярности последовательности коэффициентов 79
1.4.1 Формулировка основных результатов 79
1.4.2 Вспомогательные результаты 80
1.4.3 Оценка снизу суммы ряда по синусам на классе $\mathcal{B}\downarrow$ 82
1.4.4 Оценка сверху суммы ряда по синусам на классе $\mathcal{B}\uparrow$ 86

2 Ряды по синусам с выпуклыми коэффициентами 89
2.1 Точная оценка снизу суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами 89
2.1.1 Формулировка основных результатов 89
2.1.2 Уточнённая оценка снизу суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами 94
2.1.3 Исследование асимптотики функции $w(\boldsymbol{b}, x)$ 100
2.1.4 Доказательство точности оценки снизу 107
2.2 Точные константы в двусторонней оценке С. А. Теляковского суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами 115
2.2.1 Постановка задачи и формулировка основных результатов . 115
2.2.2 Вспомогательные утверждения 116
2.2.3 Оценка сверху суммы ряда по синусам 119
2.2.4 Оценка снизу суммы ряда по синусам 123
2.3 Точная двусторонняя оценка суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами 128
2.3.1 Формулировка результатов 128
2.3.2 Оценка отклонения суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами от её миноранты 128
2.3.3 Оценка отклонения суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами от её мажоранты 129

2.4 Уточнение асимптотики Алянчича, Боянича, Томича для суммы ряда по синусам с выпуклыми медленно меняющимися коэффициентами . . . 131
2.4.1 Формулировка основных результатов . . . 131
2.4.2 Вспомогательные утверждения . . . 132
2.4.3 Асимптотика суммы ряда по синусам в регулярном случае . 138

3 Ряды по общим ортогональным системам 141
3.1 Оценка операторной нормы обобщённой тёплицевой матрицы . . . 141
3.1.1 Формулировка основного результата . . . 141
3.1.2 Доказательство основного результата . . . 142
3.1.3 Примеры обобщений матриц Гильберта . . . 143
3.2 Пример ортогональной системы с экстремально большой L_2-нормой максимального оператора . . . 147
3.2.1 Формулировка результатов . . . 147
3.2.2 Построение ортогональных обобщённых тёплицевых матриц при помощи системы Прайса . . . 148
3.2.3 Примеры ортогональных блочных матриц, имеющих экстремально большую L_2-норму максимального оператора . . . 154
3.2.4 Ортогональный аналог двоичной матрицы Кашина . . . 158

4 Области однолистности на классах голоморфных отображений круга в себя 161
4.1 Двусторонняя оценка областей однолистности классов голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками . . . 161
4.1.1 Предварительные сведения и обозначения . . . 161
4.1.2 Постановка задачи . . . 164
4.1.3 Формулировка основных результатов . . . 170
4.1.4 Вспомогательные утверждения . . . 172
4.1.5 Доказательство основных результатов . . . 179
4.1.6 Оценки размера областей однолистности . . . 181
4.1.7 Случай произвольной внутренней точки . . . 185

4.2 Точная область однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками 188
4.2.1 Формулировка основного результата 188
4.2.2 Инволюция круга и её свойства 189
4.2.3 Вспомогательные утверждения 192
4.2.4 Доказательство основного неравенства 195
4.2.5 Доказательство основного результата 199
4.2.6 Оценки размера областей однолистности 204
4.2.7 Случай произвольной внутренней неподвижной точки 206
4.3 Асимптотически точная двусторонняя оценка областей однолистности голоморфных отображений круга в себя с инвариантным диаметром 208
4.3.1 Предварительные сведения и постановка задачи 208
4.3.2 Формулировка основных результатов 210
4.3.3 Области однолистности для функций с двумя граничными неподвижными точками 211
4.3.4 Вспомогательные результаты 217
4.3.5 Область однолистности в случае граничных неподвижных точек и инвариантного диаметра 221

Литература **227**

Введение

Актуальность темы. Систематические исследования тригонометрических рядов восходят к знаменитой работе Ж.-Б. Фурье „Аналитическая теория тепла” (1807 г.), опубликованной в 1822—1824 гг., в которой был предложен метод разложения в ряды по синусам решения краевой задачи для уравнения теплопроводности. С тех пор ряды по синусам и общие тригонометрические ряды стали мощным инструментом при решении задач математической физики и задач теории приближения функций. Возможность такого использования стала ясна после основополагающей работы Г. Л. Дирихле (1829 г.) о разложении произвольной функции на $[0, 2\pi]$, имеющей конечное число участков монотонности, во всюду сходящийся к ней общий тригонометрический ряд, а также после появления теоремы К. Вейерштрасса (1885 г.), утверждающей, что произвольную непрерывную 2π-периодическую функцию можно с любой наперёд заданной точностью приблизить тригонометрическим полиномом. Впоследствии в развитие теории тригонометрических рядов внесли вклад такие известные математики как Б. Риман, М. Жордан, Э. Гейне, Г. Кантор, А. Лебег, Л. Фейер, Г. Х. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Н. Н. Лузин, И. И. Привалов, А. Н. Колмогоров, Д. Е. Меньшов, а в последнее время — Л. Карлесон, Ч. Фефферман, С. В. Конягин, Л. В. Жижиашвили, А. А. Талалян, А. М. Олевский, В. В. Арестов, А. Г. Бабенко, И. Л. Блошанский, Н. Ю. Антонов, Н. Н. Холщевникова, Д. В. Горбачёв и др. Фундаментальные монографии по тригонометрическим рядам написаны Н. К. Бари [6], А. Зигмундом [24], Г. Х. Харди и В. В. Рогозинским [60], Р. Боасом [75].

Одной из важных областей в теории тригонометрических рядов является исследование рядов по синусам и по косинусам с монотонными коэффици-

ентами. Интерес к таким рядам связан, в первую очередь, с тем, что многие специальные ряды, возникающие в приложениях, имеют как раз монотонные коэффициенты. Кроме того, поскольку такие ряды сходятся в каждой точке, то возникает возможность провести довольно полное их исследование. Исследованием тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами занимались Р. Салем, С. Идзуми, П. Л. Ульянов, С. Б. Стечкин, С. А. Теляковский, Г. А. Фомин, М. И. Дьяченко, А. Ю. Попов, А. С. Белов, В. Ф. Гапошкин, С. Ю. Тихонов, К. А. Оганесян и др.

Несмотря на то, что ряды по синусам с монотонными коэффициентами с качественной точки зрения хорошо изучены, в последнее время активно исследуются экстремальные задачи, связанные с поиском точных постоянных в классических оценках. Решению этих задач посвящены первая и вторая главы диссертации.

Другое направление диссертационного исследования связано с изучением вопроса сходимости почти всюду рядов по общим ортогональным системам. Теория общих ортогональных рядов является важной частью метрической теории функций. Получаемые результаты находят применение в функциональном анализе, математической физике, вычислительной математике и других областях. Известными книгами по теории ортогональных рядов являются монографии С. Качмажа и Г. Штейнгауза [26], Г. Алексича [5], Б. С. Кашина и А. А. Саакяна [28].

Отправной точкой в исследовании сходимости почти всюду рядов по общим ортогональным системам является теорема, доказанная Д. Е. Меньшовым (1920 г.) и, независимо, Г. Радемахером (1921 г.), о том, что $\log_2^2 n$ является точным множителем Вейля на классе всех ортонормированных систем. Этот фундаментальный результат позволяет делать более глубокие выводы о характерных особенностях сходимости ортогональных рядов в сравнении с теоремами, установленными в специальных случаях. Теорема Меньшова—Радемахера явилась итогом длительных исследований, ей предшествовали работы П. Фату, Г. Вейля, Е. Гобсона, М. Планшереля, Г. Х. Харди, Н. Н. Лузина. Впоследствии её обобщения были установлены Л. В. Канторовичем, Р. Салемом, А. А. Талаляном, А. Вальфишем. Многие математики занимались сложной задачей о

получении более точной, чем вытекающей из теоремы Меньшова—Радемахера, оценки множителя Вейля для конкретной ортонормированной системы. В частности, Л. Карлесон доказал, что тригонометрическая система является системой сходимости. Исследования Д. Е. Меньшова в разных постановках продолжали П. Л. Ульянов, В. И. Мацаев, С. В. Бочкарёв, К. Тандори, Дж. Беннетт, П. Биллард, Б. С. Кашин, А. А. Талалян, С. Ш. Галстян, Г. А. Карагулян, В. И. Иванов, Т. П. Лукашенко, А. Паскевич и др.

Как показал С. Качмаж [97], пример Меньшова, устанавливающий точность теоремы Меньшова—Радемахера, фактически основан на тёплицевой матрице, построенной Д. Гильбертом. В третьей главе диссертации предложен новый метод построения примеров ортонормированных систем, устанавливающих точность теоремы Меньшова—Радемахера, на основе обобщённых тёплицевых матриц, которые, в свою очередь, связаны со свойствами рядов по системе характеров на компактных абелевых группах. Скажем, что изучение указанных рядов представляет активно развивающееся направление современного гармонического анализа. Из основных монографий на эту тему следует отметить книгу Б. И. Голубова, А. В. Ефимова и В. А. Скворцова [9], а также книгу Г. Н. Агаева, Н. Я. Виленкина, Г. М. Джафарли и А. И. Рубинштейна [1].

Третье направление диссертационного исследования относится к решению экстремальных задач, которые связаны с понятием однолистности. Однолистные функции являются самыми простыми и наиболее интересными для изучения аналитическими функциями. Однолистность функции в области является её важнейшей геометрической характеристикой. Кроме того, в приложениях однолистность часто связана с физической реализуемостью математической модели. Классическими книгами по теории однолистных функций являются монографии Г. М. Голузина [10], Н. А. Лебедева [37], Х. Поммеренке [109], П. Дюрена [89], А. Гудмана [92], Дж. Дженкинса [17], И. М. Милина [40], В. Н. Дубинина [20], [88]. Отметим обзор Г. В. Кузьминой [35], [36], посвящённый методам геометрической теории функций, а также обзоры Ф. Г. Авхадиева, Л. А. Аксентьева, А. М. Елизарова [2], [3], [4] по достаточным условиям однолистности.

Для аналитических в единичном круге функций хорошо известными являются такие достаточные условия однолистности, как признаки выпуклости,

звёздообразности, почти выпуклости, условия Базилевича, Носиро—Варшавского, Нехари, Беккера, Альфорса и другие.

В связи с исследованием однолистности различных функций, структурных формул, интегральных представлений, решений краевых задач возник широкий круг новых достаточных условий однолистности, вместе с тем обогатился набор применяемых методов. Различные обобщения и уточнения известных достаточных условий однолистности, а также комбинированные и новые условия однолистности с применением разнообразных методов получали З. Нехари, А. Гудман, С. Одзаки, Т. Умедзава, И. Е. Базилевич, Й. Беккер, Х. Поммеренке, С. Р. Насыров, Л. А. Аксентьев, Ф. Г. Авхадиев, П. Л. Шабалин, В. В. Покорный, Д. В. Прохоров, В. Н. Дубинин и многие другие математики.

Довольно сложной является задача нахождения радиусов однолистности на классе функций. Основная трудность состоит в подборе соответствующего достаточного условия однолистности и получении нужных оценок в рассматриваемом классе. Один из первых результатов в этом направлении принадлежит Э. Ландау (1926 г.), который в связи с теоремой Блоха о существовании круга, являющегося однолистным образом некоторой части единичного круга при отображении, осуществляемом голоморфной в единичном круге функцией со стандартной нормировкой, нашёл точное значение радиуса голоморфизма обратной функции и, одновременно с этим, вычислил точное значение радиуса однолистности. В различных постановках решением задачи о поиске областей однолистности занимались Ж. Валирон, З. Нехари, А. Гудман, Т. МакГрегор, Х. Поммеренке, Й. Беккер, Г. В. Кузьмина, В. В. Горяйнов, В. В. Старков и др.

В. В. Горяйнов (2017 г.) изучал влияние угловых производных в граничных неподвижных точках голоморфных отображений единичного круга в себя на свойства отображений внутри единичного круга. В частности, он выделил условия на угловые производные, при которых внутри единичного круга возникают области однолистности. В четвёртой главе диссертации исследования В. В. Горяйнова продолжены, решена задача о нахождении неулучшаемых областей однолистности на классах голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы явля-

ется решение ряда экстремальных задач в теории ортогональных рядов и в геометрической теории функций комплексного переменного. Для достижения этой цели в диссертации рассматриваются следующие основные задачи.

1. Получить точные решения экстремальных задач для специальных классов сумм рядов по синусам.

2. Получить близкую к неулучшаемой двустороннюю оценку суммы ряда по синусам с выпуклыми, медленно меняющимися коэффициентами.

3. Разработать метод построения ортонормированных систем с экстремально большой L_2-нормой максимального оператора на основе обобщённых тёплицевых матриц.

4. Найти точные области однолистности на классах голоморфных отображений единичного круга в себя с двумя неподвижными точками.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории ортогональных рядов, гармонического анализа, теории функций действительного и комплексного переменного.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем.

1. Обнаружено, что положительность суммы ряда по синусам в некоторой правой полуокрестности нуля имеет место не только в случае монотонной последовательности коэффициентов, но и для некоторых квазимонотонных последовательностей. Получено полное описание класса квазимонотонных последовательностей с указанным свойством.

2. Получена модификация функции Салема, позволяющая получать оценки снизу сумм рядов по синусам с выпуклыми коэффициентами с эффективной точностью, не зависящей от того, сколь медленно меняется последовательность коэффициентов.

3. Найдены оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами специальных классов через мажоранту Салема. Показана асимптотическая

неулучшаемость полученных оценок на рассматриваемых классах последовательностей коэффициентов.

4. Получены точные двусторонние оценки сумм для класса рядов по синусам с выпуклыми и выпуклыми, медленно меняющимися коэффициентами. Построены примеры, демонстрирующие высокую точность оценок.

5. Уточнена асимптотика С. Алянчича, Р. Боянича и М. Томича суммы рядов по синусам на классе выпуклых, медленно меняющихся последовательностей. Получен второй член асимптотики в регулярном случае.

6. Обобщена предложенная А. Паскевичем конструкция примера ортонормированной системы, который устанавливает точность теоремы Меньшова—Радемахера о множителе Вейля для сходимости почти всюду рядов по общим ортогональным системам. Предложен метод построения обобщённых тёплицевых матриц с экстремально большой L_2-нормой максимального оператора.

7. Построен пример ортонормированной системы с экстремально большой L_2-нормой максимального оператора, основанный на матрице, имеющей улучшенные характеристики в сравнении с матрицей Гильберта.

8. Найдены точные области однолистности на классах голоморфных отображений единичного круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками в зависимости от значений угловой производной в граничной неподвижной точке и расположения внутренней неподвижной точки. Этот результат является аналогом теоремы Ландау для функций соответствующего класса.

9. Получены асимптотически точные двусторонние оценки областей однолистности на классах голоморфных отображений единичного круга в себя с двумя диаметрально противоположными граничными неподвижными точками и инвариантным диаметром в зависимости от значения произведения угловых производных в граничных неподвижных точках.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в гармоническом

анализе, теории сходимости почти всюду по общим ортогональным системам, геометрической теории функций комплексного переменного.

Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности „Математика”.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих семинарах:

- научный семинар механико-математического факультета МГУ по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН, профессора Б. С. Кашина, академика РАН, профессора С. В. Конягина, д.ф.-м.н., профессора Б. И. Голубова, д.ф.-м.н., профессора М. И. Дьяченко, 2015, 2018, 2020 гг.;

- научный семинар Математического института им. В. А. Стеклова по комплексному анализу (Семинар Гончара) под руководством чл.-корр. РАН, профессора Е. М. Чирки и чл.-корр. РАН, профессора А. И. Аптекарева, 2018, 2020 гг.;

- научный семинар механико-математического факультета МГУ по теории тригонометрических и ортогональных рядов под руководством д.ф.-м.н., профессора М. К. Потапова, д.ф.-м.н., профессора М. И. Дьяченко, д.ф.-м.н., профессора Т. П. Лукашенко, д.ф.-м.н., профессора В. А. Скворцова (неоднократно, 2015–2019 гг.);

- научный семинар Математического института им. В. А. Стеклова по теории приближений под руководством д.ф.-м.н., профессора С. А. Теляковского (1932—2020), 2013, 2015, 2017, 2018, 2019 гг.;

- межвузовский научно-исследовательский семинар по математике „Анализ и его приложения” под руководством д.ф.-м.н., профессора Г. Г. Брайчева, д.ф.-м.н., профессора И. В. Тихонова, д.ф.-м.н., профессора В. Б. Шерстюкова, 2017 г.

Сообщения о результатах диссертации делались на конференциях:

- Воронежская зимняя математическая школа „Современные методы теории функций и смежные проблемы” (Воронеж, 2005, 2007, 2011, 2015, 2017, 2019 гг.);
- международный симпозиум „Ряды Фурье и их приложения” (Ростов-на-Дону, 2005 г.);
- международная Саратовская зимняя школа „Современные проблемы теории функций и их приложения” (Саратов, 2008, 2014, 2016, 2018, 2020 гг.);
- международная школа-конференция „Analysis, Geometry and Probability” (Москва, 2016 г.);
- международная конференция „Harmonic Analysis and Approximations” (Цахкадзор, Армения, 2018 г.);
- международная школа-конференция „High-dimensional Approximation and Discretization” (Москва, 2018 г.);
- международная конференция „Analysis Mathematica International Conference” (Будапешт, Венгрия, 2019 г.);
- международная школа-конференция „Комплексный анализ и его приложения” (Краснодар, 2021 г.).

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 13 работах [31]—[33], [44]—[46], [49]—[54], [117]. Все статьи опубликованы в изданиях, входящих в утверждённый ВАК перечень ведущих рецензируемых изданий. Все статьи (или их переводные версии) опубликованы в журналах, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science и Scopus.

Личный вклад. Научные результаты, выносимые на защиту и составляющие содержание диссертационной работы, получены автором самостоятельно. Для полноты изложения в текст диссертационного исследования включены некоторые результаты, полученные соавторами (А. Ю. Попов, О. С. Кудрявцева) в совместных работах. Вклад соавторов отмечен в тексте диссертации и отделён от результатов автора.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и библиографического списка, содержащего 123 наименования. Главы разбиты на параграфы, параграфы разбиты на подпараграфы (пункты). Используется подчинённая нумерация. Общий объём диссертации составляет 238 страниц.

Перейдём к обзору результатов по главам и параграфам.

В **главе 1** изучается асимптотическое поведение в правой полуокрестности нуля сумм рядов по синусам

$$g(\boldsymbol{b}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \tag{1}$$

с монотонными и квазимонотонными коэффициентами $\boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$.

В **§1.1** рассматривается сумма ряда по синусам (1), последовательность коэффициентов $\boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ которого монотонно стремится к нулю:

$$b_1 > 0, \qquad b_{k+1} \leqslant b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$$

Обозначим через $\mathcal{M}$ класс таких последовательностей. Известно, что ряд (1) сходится всюду и сумма этого ряда, функция $g(\boldsymbol{b}, x)$, непрерывна на $(0, 2\pi)$.

Мажорантой Салема (см. [114], [6], [24], [75]) называется кусочно-линейная функция переменной $x \in (0, \pi]$, определяемая монотонной последовательностью $\boldsymbol{b}$ и равная

$$v(\boldsymbol{b}, x) = x \sum_{k=1}^{m(x)} k b_k. \tag{2}$$

Здесь, а также в первых двух главах $m(x) = [\pi/x]$, а запись $[t]$ обозначает целую часть числа t. Эта функция была введена Р. Салемом [114] в задаче получения двусторонней оценки суммы ряда (1). Детальному обсуждению связи суммы ряда по синусам с её мажорантой Салема в случае, когда последовательность коэффициентов удовлетворяет дополнительному условию выпуклости (то есть $b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2} \geqslant 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}$), будет посвящена глава 2. Тем не менее, даже при отсутствии условия выпуклости коэффициентов с мажорантой Салема связан ряд интересных экстремальных задач.

А. Ю. Попов [43] доказал, что функция Салема (2) является мажорантой $g(\boldsymbol{b}, x)$ на интервале $(0, \pi)$, какова бы ни была последовательность $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$.

Следовательно, для всех $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$ верно неравенство

$$\bar{l}(\boldsymbol{b}) = \overline{\lim_{x \to +0}} \frac{g(\boldsymbol{b}, x)}{v(\boldsymbol{b}, x)} \leqslant 1. \tag{3}$$

Хорошо известно, что оценка снизу $g(\boldsymbol{b}, x)$ через функцию Салема $v(\boldsymbol{b}, x)$ на классе $\mathcal{M}$ невозможна. В то же время, величина $\bar{l}(\boldsymbol{b})$, как мы покажем, допускает оценку снизу на всём классе $\mathcal{M}$.

П. Хартман и А. Винтнер [95] доказали следующий результат, из которого, в частности, следует положительность $g(\boldsymbol{b}, x)$ в некоторой, вообще говоря, зависящей от $\boldsymbol{b}$ окрестности нуля.

Теорема 1.А (П. Хартман, А. Винтнер)**.** *Для всех $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$ верно предельное соотношение*

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(\boldsymbol{b}, x)}{x} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} k b_k, & \text{если } \sum_{k=1}^{\infty} k b_k < +\infty, \\ +\infty, & \text{если } \sum_{k=1}^{\infty} k b_k = +\infty. \end{cases} \tag{4}$$

Асимптотическая оценка $g(\boldsymbol{b}, x) - v(\boldsymbol{b}, x) = O\bigl(x^3 \sum_{k=1}^{m(x)} k^3 b_k\bigr)$, $x \to +0$, выведенная С. А. Теляковским [120], и теорема 1.А позволяют доказать предельное соотношение

$$b_k = O\left(k^{-2}\right), \quad \boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{M} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x \to +0} \frac{g(\boldsymbol{b}, x)}{v(\boldsymbol{b}, x)} = 1. \tag{5}$$

Из (3) и (5) следует, что $\max_{\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}} \bar{l}(\boldsymbol{b}) = 1$.

Чему же равна точная нижняя грань $\bar{l}(\boldsymbol{b})$, взятая по всем последовательностям $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$?

Последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *медленно меняющейся*, если для любого $\delta > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\beta_{[\delta k]}}{\beta_k} = 1.$$

Функция b, заданная на луче $[1, +\infty)$, называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если для любого $\delta > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{b(\delta x)}{b(x)} = 1.$$

Понятие медленного изменения последовательности (или функции) было введено Й. Караматой [98] (см. также [48]).

С. Алянчич, Р. Боянич и М. Томич [65] (см. также [24]) установили следующий результат.

Теорема 1.B (С. Алянчич, Р. Боянич, М. Томич)**.** *Пусть* $\boldsymbol{b}$ *— выпуклая, медленно меняющаяся, стремящаяся к нулю последовательность. Тогда верна асимптотика*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \sim \frac{b_{m(x)}}{x}, \quad x \to +0. \tag{6}$$

Здесь и далее запись $f(x) \sim g(x)$, $x \to +0$, означает выполнение предельного соотношения $\lim\limits_{x\to+0} f(x)/g(x) = 1$.

Так как в случае медленного изменения последовательности $\boldsymbol{b}$ имеет место асимптотическое соотношение

$$x \sum_{k=1}^{m(x)} k b_k \sim \frac{1}{2}\, x b_{m(x)} m^2(x) \sim \frac{\pi^2}{2}\, \frac{b_{m(x)}}{x}, \quad x \to +0, \tag{7}$$

(оно будет доказано в главе 2, лемма 2.20), то теорема 1.B влечёт равенство

$$\lim_{x\to+0} \frac{g(\boldsymbol{b}, x)}{v(\boldsymbol{b}, x)} = \frac{2}{\pi^2}\,.$$

Следовательно, верно неравенство $\inf_{\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}} \bar{l}(\boldsymbol{b}) \leqslant 2\pi^{-2}$. Будет доказано, что на самом деле имеет место равенство.

Теорема 1.1. *Справедливо равенство* $\min_{\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}} \bar{l}(\boldsymbol{b}) = 2\pi^{-2}$.

В **§1.2** будет получена новая оценка сверху для суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами.

Рассмотрим сумму ряда по синусам (1), последовательность коэффициентов $\boldsymbol{b}$ которого образует монотонную, стремящуюся к нулю последовательность. Р. Салем при некоторых дополнительных предположениях на $\boldsymbol{b}$ установил существование таких положительных величин $C_1(\boldsymbol{b})$, $C_2(\boldsymbol{b})$, что верна двусторонняя оценка

$$C_2(\boldsymbol{b}) v(\boldsymbol{b}, x) \leqslant g(\boldsymbol{b}, x) \leqslant C_1(\boldsymbol{b}) v(\boldsymbol{b}, x), \quad 0 < x \leqslant x_0. \tag{8}$$

С. А. Теляковский [120], [57] улучшил этот результат, выведя оценку (8) с абсолютными постоянными C_1 и C_2, освободив последовательность $\boldsymbol{b}$ от дополнительных требований и показав, что оценка сверху выполняется для любой монотонной последовательности $\boldsymbol{b}$, а оценка снизу — для любой выпуклой.

А. Ю. Попов [43] получил точные значения постоянных в оценках Теляковского. А именно, им были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.C (А. Ю. Попов)**.** *Для любой невозрастающей и стремящейся к нулю последовательности* $\boldsymbol{b}$ *выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \leqslant v(\boldsymbol{b}, x), \quad 0 < x \leqslant \pi. \tag{9}$$

Теорема 1.D (А. Ю. Попов)**.** *Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности* $\boldsymbol{b}$ *выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x) - 0.46\, b_{m(x)}, \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Как будет следовать из результатов главы 2, оценка (10), вообще говоря, не выполняется при отсутствии второго отрицательного слагаемого в её правой части. Возникает вопрос, можно ли видоизменить мажоранту Салема $v(\boldsymbol{b}, x)$ так, чтобы двусторонняя оценка с постоянными $C_1 = 1$ и $C_2 = 2\pi^{-2}$ всё же выполнялась бы в некоторой правой окрестности нуля? Ответ на данный вопрос положителен. Оказывается, оценка (9) допускает усиление. В качестве новой мажоранты рассмотрим функцию

$$u(\boldsymbol{b}, x) = x \sum_{k=1}^{[(m(x)+1)/2]} k b_k + x \sum_{k=[(m(x)+3)/2]}^{m(x)} \big(m(x) + 1 - k\big) b_k, \tag{11}$$

которая, очевидно, не превышает $v(\boldsymbol{b}, x)$, а для $x \in (0, \pi/2]$ — даже $v_0(\boldsymbol{b}, x)$ (см. (24)). Более того, разность $v(\boldsymbol{b}, x) - u(\boldsymbol{b}, x)$ при $x \to +0$ по порядку не меньше $b_{m(x)}/x$ и может тем самым для некоторых последовательностей $\boldsymbol{b}$ даже стремиться к бесконечности. Тем не менее функция $u(\boldsymbol{b}, x)$ является мажорантой суммы ряда по синусам $g(\boldsymbol{b}, x)$. А именно, справедливо следующее уточнение теоремы 1.C.

Теорема 1.4. *Для любой неубывающей и стремящейся к нулю последовательности* $\boldsymbol{b}$ *выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \leqslant u(\boldsymbol{b}, x), \quad 0 < x \leqslant \pi.$$

С другой стороны, поскольку новая мажоранта меньше, чем $v_0(\boldsymbol{b}, x)$, мы вправе ожидать от неё более простой оценки снизу по сравнению с той, что

будет получена в главе 2 (см. теорему 2.6). Действительно, функция $2\pi^{-2}u(\boldsymbol{b},x)$ оказывается минорантой суммы ряда по синусам уже не только в некоторой окрестности нуля, а практически на всём промежутке $(0,\pi/2]$.

Теорема 1.5. *Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности* $\boldsymbol{b}$ *выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b},x)\geqslant\frac{2}{\pi^2}\,u(\boldsymbol{b},x),\quad 0<x\leqslant\frac{9\pi}{20}. \tag{12}$$

Правая граница промежутка $9\pi/20$ в теореме 1.5 очень близка к $\pi/2$, однако распространить оценку (12) на весь интервал $(0,\pi/2)$ нельзя, что показывает следующий пример.

Пример. Пусть $g(x)=4\sin x+3\sin 2x+2\sin 3x+\sin 4x$. Последовательность коэффициентов $g(x)$ выпукла, но в то же время

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=2<\frac{7}{\pi}=\frac{2}{\pi^2}\,u\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

В **§1.3** мы рассматриваем сумму ряда по синусам (1), коэффициенты которого образуют стремящуюся к нулю и „почти монотонную” последовательность.

Введём расширения множества $\mathcal{M}$. Пусть $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная неубывающая последовательность положительных чисел. Символом $\mathcal{M}_\Lambda$ обозначим множество всех последовательностей $\boldsymbol{b}=\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых справедливо включение $\{b_k/\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}\in\mathcal{M}$. Очевидно, что $\mathcal{M}\subset\mathcal{M}_\Lambda$, а равенство $\mathcal{M}=\mathcal{M}_\Lambda$ выполняется тогда и только тогда, когда Λ — постоянная последовательность. Множество $\mathcal{M}_\Lambda$ назовём классом квазимонотонных относительно Λ последовательностей.

Разумеется, чем быстрее растёт последовательность Λ, тем шире класс $\mathcal{M}_\Lambda$. Мы будем рассматривать только ограниченные последовательности Λ (в силу монотонности их элементы имеют конечный предел). На первый взгляд может показаться, что если последовательность Λ ограничена, то класс $\mathcal{M}_\Lambda$ является „незначительным” расширением $\mathcal{M}$ и многие теоремы, справедливые для рядов (1) с коэффициентами из $\mathcal{M}$, автоматически переносятся на ряды с коэффициентами из $\mathcal{M}_\Lambda$. Действительно, теорема о сходимости в каждой точке $x\in\mathbb{R}$ ряда (1) с коэффициентами из $\mathcal{M}$ легко переносится на ряд с коэффициентами из $\mathcal{M}_\Lambda$ (какова бы ни была неубывающая и ограниченная последова-

тельность Λ), но в вопросе о поведении отрицательной части суммы ряда (1) в некоторой правой полуокрестности нуля картина совершенно иная.

Теорема 1.А влечёт за собой положительность функции $g(\boldsymbol{b}, x)$ в некоторой правой полуокрестности нуля для любой $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$. Нас интересует вопрос: как ведёт себя при стремлении x к нулю справа отрицательная часть суммы ряда (1) с квазимонотонными коэффициентами, и при каком условии на последовательность Λ в (4) можно заменить $\mathcal{M}$ на $\mathcal{M}_\Lambda$? В дальнейшем предполагается, что Λ — произвольная неубывающая и ограниченная последовательность положительных чисел, $\lambda = \lim_{k\to\infty} \lambda_k$. Будет получено условие на последовательность Λ, необходимое и достаточное для того, чтобы для класса $\mathcal{M}_\Lambda$ выполнялся аналог теоремы Хартмана—Винтнера (теорема 1.А).

Теорема 1.6. *Если* $\sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda - \lambda_k) < +\infty$, *то предельное соотношение* (4) *выполняется, какова бы ни была последовательность* $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda$.

Если же $\sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda - \lambda_k) = +\infty$, *то существует такая последовательность* $\widetilde{\boldsymbol{b}} = \{\widetilde{b}_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{M}_\Lambda$, *что* $\sum_{k=1}^{\infty} k\widetilde{b}_k = +\infty$, *но* $\underline{\lim}_{x\to+0}\, g(\widetilde{\boldsymbol{b}}, x)/x = -\infty$.

Таким образом, отрицательная часть суммы ряда (1) с квазимонотонными (даже относительно ограниченной последовательности Λ) коэффициентами, вообще говоря, не обязана быть тождественным нулём в некоторой правой полуокрестности нуля, если $\sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda - \lambda_k) = +\infty$. Должна ли отрицательная часть суммы ряда (1) быть бесконечно малой при $x \to +0$? Мы покажем, что, воообще говоря, не должна.

Теорема 1.7. *Если* $\overline{\lim}_{k\to\infty} k(\lambda - \lambda_k) < +\infty$, *то* $\underline{\lim}_{x\to+0}\, g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant 0$ $(\forall \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda)$. *Если же* $\overline{\lim}_{k\to\infty} k(\lambda - \lambda_k) = +\infty$, *то существует такая последовательность* $\widetilde{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{M}_\Lambda$, *что* $\underline{\lim}_{x\to+0}\, g(\widetilde{\boldsymbol{b}}, x) = -\infty$.

Наконец, поставим вопрос об интегрируемости отрицательной части суммы ряда (1) на интервале $(0, \pi)$. Вопрос об интегрируемости самой суммы ряда (1) решается просто: критерий интегрируемости $g(\boldsymbol{b}, \cdot)$, найденный В. Янгом [123] в случае $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$, мы обобщаем на последовательности $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda$, если Λ ограничена:

$$g(\boldsymbol{b}, \cdot) \in L(0, \pi) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} < +\infty, \qquad \boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{M}_\Lambda.$$

Но если $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$, то $g^-(\boldsymbol{b}, \cdot) \in C[0, \pi]$, а как видно из теоремы 1.7 в слу-

чае $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda$ возможна ситуация $g^-(\boldsymbol{b},\cdot) \notin L_\infty(0,\pi)$. А возможно ли, что $g^-(\boldsymbol{b},\cdot) \notin L(0,\pi)$ для какой-либо пары Λ и $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda$? Получено условие на последовательность Λ, достаточное для справедливости включения

$$g^-(\boldsymbol{b},\cdot) \in L(0,\pi) \quad \forall \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda. \tag{13}$$

Это условие состоит в сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k/k)$, где $\mu_k = \lambda - \lambda_k$. Но мы не знаем, является ли это условие необходимым. Вопрос о справедливости импликации

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{k} = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \exists \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda \colon g^-(\boldsymbol{b},\cdot) \notin L(0,\pi)$$

остаётся открытым. Весьма вероятно, что эта импликация верна, но пока она не доказана. Существование последовательности $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{M}_\Lambda$, порождающей ряд (1) с неинтегрируемой на $(0,\pi)$ отрицательной частью, доказано при значительно бóльших ограничениях на Λ.

Теорема 1.8 (А. Ю. Попов)**.** *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{k} < +\infty, \quad \mu_k = \lambda - \lambda_k,$$

то справедливо соотношение (13)*. Если же последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *вогнута (то есть* $\lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} \leqslant 0$*,* $k \in \mathbb{N}$*),* $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *медленно меняется,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^{3/2}}{k} = +\infty, \tag{14}$$

то существует последовательность $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{M}_\Lambda$*, порождающая ряд* (1)*, отрицательная часть суммы которого не интегрируема на* $(0,\pi)$*.*

Если μ_k монотонна (как в нашем случае), то её медленное изменение означает справедливость равенства $\lim_{k\to\infty} (\mu_{2k}/\mu_k) = 1$. В качестве стремящихся к нулю, медленно меняющихся выпуклых последовательностей $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ (вогнутость $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ равносильна выпуклости $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$), удовлетворяющих условию (14), можно взять, например, такие:

$$\mu_k = \ln^{-p}(k+1), \quad 0 < p \leqslant \frac{2}{3},$$

$$\mu_k = (\ln\ln(k+2))^p \, (\ln(k+2))^{-2/3}, \quad -\frac{2}{3} \leqslant p < 0,$$

и так далее. Заметим, что вопросы об оценке модулей сумм рядов и остатков рядов по синусам и косинусам с монотонными коэффициентами изучались С. Б. Стечкиным [55], а о сходимости таких рядов в метрике L — С. А. Теляковским и Г. А. Фоминым [58], но в их работах рассматривались неограниченные последовательности Λ и, естественно, результаты существенно отличались от полученных нами.

В **§1.4** мы изучаем ряды по синусам (1), последовательности коэффициентов которых не только монотонно стремятся к нулю, но и принадлежат следующим двум специальным классам.

Первый класс — обозначим его $\mathcal{B}\downarrow$ — состоит из всех последовательностей $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$, удовлетворяющих условию

$$(k+1)b_{k+1} \leqslant kb_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Иначе говоря, последовательность $\{kb_k\}_{k=1}^{\infty}$ не возрастает.

Другой класс — обозначим его $\mathcal{B}\uparrow$ — состоит из всех последовательностей $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$, удовлетворяющих противоположному (15) условию (последовательность $\{kb_k\}_{k=1}^{\infty}$ не убывает)

$$kb_k \leqslant (k+1)b_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Сравним поведение суммы ряда (1) с мажорантой Салема (2) на указанных классах. Р. Салем доказал существование таких положительных постоянных $C_1(\boldsymbol{b})$, $C_2(\boldsymbol{b})$, что $\forall \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$ верны оценки

$$g(\boldsymbol{b}, x) \leqslant C_1(\boldsymbol{b}) v(\boldsymbol{b}, x), \quad 0 < x \leqslant \pi, \tag{16}$$

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant C_2(\boldsymbol{b}) v(\boldsymbol{b}, x), \quad 0 < x \leqslant x_0. \tag{17}$$

Оценка снизу (17) выведена при дополнительных условиях: последовательность $\boldsymbol{b}$ выпукла и $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\uparrow$.

С. А. Теляковский [120], [57] улучшил эти результаты, выведя оценки (16) и (17) с абсолютными постоянными C_1 и C_2, $x_0 = \pi/2$ и сняв требование $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\uparrow$. А. Ю. Попов [43] доказал, что в (16) можно взять $C_1 = 1$: функция $v(\boldsymbol{b}, x)$ на самом деле является мажорантой для $g(\boldsymbol{b}, x)$. Очевидно, что взять постоянную $C_1 < 1$ в общем случае нельзя. А. Ю. Поповым [43] также найдено „асимптотически неулучшаемое" оптимальное значение постоянной $C_2 = 2\pi^{-2} = 0.202\ldots$.

Точнее говоря, в предположении $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$ и выпуклости $\boldsymbol{b}$ выведена оценка снизу (см. теорему 1.D)

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x) - 0.46 b_{m(x)}, \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

и в то же время, если $\boldsymbol{b}$ выпукла и медленно меняется, то верна следующая асимптотика (см. (7)):

$$g(\boldsymbol{b}, x) \sim \frac{2}{\pi^2} v(\boldsymbol{b}, x), \quad x \to +0.$$

Как уже упоминалось ранее, оценки снизу вида (17), если не требовать от последовательности $\boldsymbol{b}$ ничего кроме монотонного стремления к нулю, получить нельзя.

Нами найдены оценка снизу вида (17) с асимптотически неулучшаемой на классе $\mathcal{B}\downarrow$ константой C_2 и усиление оценки (16) с асимптотически неулучшаемой константой $C_1 < 1$ на классе $\mathcal{B}\uparrow$.

Теорема 1.9. *Если $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\downarrow$, то при любом $x \in (0, \pi/3]$ верна оценка снизу*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \left(\underline{I} - \frac{1}{m(x)}\right) v(\boldsymbol{b}, x) - \frac{3}{2}\, b_{m(x)+1} \sin\frac{x}{2},$$

где

$$\underline{I} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = 0.451\ldots.$$

В то же время существуют такие последовательности $\underline{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{B}\downarrow$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$x_n > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad g(\underline{\boldsymbol{b}}, x_n) \sim \underline{I}\, v(\underline{\boldsymbol{b}}, x_n), \quad n \to \infty.$$

Теорема 1.10. *Если $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\uparrow$, то при любом $x \in (0, \pi)$ верна оценка сверху*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \leqslant \overline{I} \left(1 + \frac{1}{m(x)}\right) v(\boldsymbol{b}, x) + \frac{1}{2}\, b_{m(x)+1} \operatorname{tg}\frac{x}{4},$$

где

$$\overline{I} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = 0.589\ldots.$$

В то же время существуют такие последовательности $\overline{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{B}\uparrow$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$x_n > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad g(\overline{\boldsymbol{b}}, x_n) \sim \overline{I}\, v(\overline{\boldsymbol{b}}, x_n), \quad n \to \infty.$$

В **главе 2** изучается асимптотическое поведение в правой полуокрестности нуля сумм рядов по синусам (1) с выпуклыми коэффициентами.

Одно из направлений исследования — сравнение суммы ряда по синусам, функции $g(\boldsymbol{b}, x)$, с более просто устроенной кусочно-линейной функцией — мажорантой Салема $v(\boldsymbol{b}, x)$ (см. (2)). Р. Салем [114] (см. также [6, гл. X, §7, теорема 1]) установил следующий результат.

Теорема 2.A (Р. Салем). *Пусть $\boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ — выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность, а $\{kb_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность. Тогда найдётся такое x_0, что*

$$C_1(\boldsymbol{b})v(\boldsymbol{b}, x) \leqslant g(\boldsymbol{b}, x) \leqslant C_2(\boldsymbol{b})v(\boldsymbol{b}, x), \quad 0 < x < x_0, \tag{18}$$

для некоторых величин $C_1(\boldsymbol{b})$ и $C_2(\boldsymbol{b})$.

Необходимо ли в теореме Салема дополнительное условие монотонности последовательности $\{kb_k\}_{k=1}^{\infty}$? Можно ли в оценке (18) вместо величин $C_1(\boldsymbol{b})$ и $C_2(\boldsymbol{b})$ взять абсолютные постоянные? Каковы точные значения этих постоянных? Нельзя ли изменить функцию Салема $v(\boldsymbol{b}, x)$ так, чтобы получить более эффективные оценки функции $g(\boldsymbol{b}, x)$? Ответы на первые три вопроса даны в работах С. Идзуми [96], С. А. Теляковского [120], [57] и А. Ю. Попова [43]. В главе 2 будет построена функция $v_0(\boldsymbol{b}, x)$, в терминах которой оценка снизу суммы ряда по синусам $g(\boldsymbol{b}, x)$ оказывается значительно более точной.

С. А. Теляковский [120], [57] улучшил результат Р. Салема, одновременно упростив доказательство. Он показал, что левая часть неравенства (18) справедлива для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности $\boldsymbol{b}$, а правая часть — даже для любой монотонной последовательности, причём постоянные в обеих оценках абсолютные.

Теорема 2.B (С. А. Теляковский). *Пусть $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$. Тогда найдётся такая постоянная $C_2 > 0$, что*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \leqslant C_2 v(\boldsymbol{b}, x), \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{11}.$$

Если же последовательность $\boldsymbol{b}$ ещё и выпукла, найдётся такая постоянная $C_1 > 0$, что

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant C_1(\boldsymbol{b})v(\boldsymbol{b}, x), \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{11}.$$

Как уже упоминалось выше, А. Ю. Попов [43] вычислил точные значения постоянных в теореме Теляковского: $C_1 = 2\pi^{-2}$, $C_2 = 1$.

Другое направление исследований поведения функции $g(\boldsymbol{b}, x)$ в окрестности нуля — получение точных порядковых соотношений для достаточно регулярных последовательностей $\boldsymbol{b}$. Первые результаты в этом направлении были получены Г. Х. Харди и В. В. Рогозинским в работе [94] (см. также [24, гл. V, §2, теорема 2.6]), а впоследствии их исследования были продолжены С. Алянчичем, Р. Бояничем и М. Томичем (см. теорему 1.B).

Теорема 2.C (Г. Х. Харди, В. В. Рогозинский)**.** *Пусть члены последовательности $\boldsymbol{b}$ представимы в виде $b_k = \beta_k/k^p$, где $0 < p < 2$, а последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ медленно меняется. Тогда верна асимптотика*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \sim \Gamma(1-p)\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) x^{p-1}\beta_{m(x)}, \quad x \to +0.$$

Замечание. Для $p = 1$ значение коэффициента понимается как предел при $p \to 1$.

Нетрудно заметить, что утверждения теорем 1.B и 2.C могут быть сформулированы в терминах функции Салема $v(\boldsymbol{b}, x)$. Асимптотику в теореме 1.B можно переписать в следующей эквивалентной форме (см. (7)):

$$g(\boldsymbol{b}, x) \sim \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x), \quad x \to +0. \tag{19}$$

Точно так же (см. лемму 2.20) и для всех p, $0 < p < 2$, при $x \to +0$ имеем

$$\begin{aligned}\Gamma(1-p)\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) x^{p-1}\beta_{m(x)} &\sim \pi^{p-2}\Gamma(1-p)\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) x m^{2-p}(x)\beta_{m(x)} \\ &\sim (2-p)\pi^{p-2}\Gamma(1-p)\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) x \sum_{k=1}^{m(x)} k^{1-p}\beta_k \\ &= (2-p)\pi^{p-2}\Gamma(1-p)\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) x \sum_{k=1}^{m(x)} k b_k.\end{aligned}$$

Тем самым, порядковое соотношение теоремы 2.C можем записать в виде

$$g(\boldsymbol{b}, x) \sim (2-p)\pi^{p-2}\Gamma(1-p)\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) v(\boldsymbol{b}, x), \quad x \to +0. \tag{20}$$

Результат теоремы 2.C, конечно, не переносится на случай $p = 2$. Однако использование функции $v(\boldsymbol{b}, x)$ позволяет и в этом случае получить асимптотику

суммы ряда по синусам. Нетрудно показать, что порядковое соотношение (20) выполняется при всех p, $0 \leqslant p \leqslant 2$, если для $p = 0$, 1 и 2 значение коэффициента понимается как соответствующий предел.

Теоремы 1.C и 1.D наряду с асимптотикой (20) показывают, что функция Салема $v(\boldsymbol{b}, x)$ эффективна для получения как двусторонних оценок, так и точных порядковых соотношений. Более того, сравнение оценок (9) и (10) с порядковым соотношением (20) при $p = 2$ и $p = 0$ соответственно, доказывает точность постоянных 1 и $2\pi^{-2}$ в теоремах 1.C и 1.D. Другими словами, имеют место равенства

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{b}} \overline{\lim_{x\to+0}} \frac{g(\boldsymbol{b}, x)}{v(\boldsymbol{b}, x)} &= 1, \\ \min_{\boldsymbol{b}} \underline{\lim_{x\to+0}} \frac{g(\boldsymbol{b}, x)}{v(\boldsymbol{b}, x)} &= \frac{2}{\pi^2}, \end{aligned} \tag{21}$$

причём максимум берётся по всем монотонным и стремящимся к нулю последовательностям $\boldsymbol{b}$, а минимум — по всем выпуклым.

В **§2.1** детально исследуется оценка снизу функции $g(\boldsymbol{b}, x)$ в правой окрестности нуля через мажоранту Салема $v(\boldsymbol{b}, x)$ (см. (2)). Приведём часть формулировки теоремы С. А. Теляковского [120], [57], об уточнении которой идёт речь в этом параграфе.

Теорема 2.D (С. А. Теляковский)**.** *Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности $\boldsymbol{b}$ выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \frac{b_{m(x)}}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{\pi m(x)} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k^2 (b_k - b_{k+1}), \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{11}.$$

Как отметил А. Ю. Попов [43], это неравенство, применив преобразование Абеля, можно переписать следующим образом:

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant b_{m(x)} \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{m(x)}{\pi} \right) + \frac{2}{\pi m(x)} \sum_{k=1}^{m(x)} \left(k - \frac{1}{2} \right) b_k,$$

откуда, ввиду того, что $m(x) \leqslant \pi/x$, сразу получается оценка

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \frac{2}{\pi^2} v(\boldsymbol{b}, x) - \frac{x}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m(x)} b_k - b_{m(x)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right). \tag{22}$$

Нетрудно заметить, что порядок третьего слагаемого в (22) меньше порядка второго, причём оба слагаемых стремятся к нулю при $x \to +0$ быстрее, чем функция $v(\boldsymbol{b}, x)$ (если последняя вообще стремится к нулю при $x \to +0$). Таким образом,

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \left(\frac{2}{\pi^2} + o(1)\right) v(\boldsymbol{b}, x), \quad x \to +0.$$

Более того, А. Ю. Попов уточнил второе слагаемое в (22). А именно, им была доказана следующая теорема.

Теорема 2.E (А. Ю. Попов)**.** *Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности* $\boldsymbol{b}$ *выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x) - \frac{1}{\pi}\, b_{m(x)} - b_{m(x)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right), \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{23}$$

Замечание. Последнее слагаемое в оценке (23) отрицательно, причём для всех $x \in (0, \pi/2]$ выполняется неравенство

$$0 < \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \leqslant \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

Как следует из соотношения (21), главное слагаемое в правых частях неравенств (22) и (23) увеличить нельзя. Поэтому возможность уменьшить второе слагаемое в (22) представляет следующий этап уточнения оценки. Действительно, нетрудно заметить, что $b_{m(x)}/\pi < (x/\pi^2) \sum_{k=1}^{m(x)} b_k + o(b_{m(x)})$, $x \to +0$. В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли вообще отказаться от отрицательных слагаемых, даже столь небольших как $b_{m(x)}$, и уточнить теорему 2.E в духе теоремы 1.C? А именно, верна ли оценка $g(\boldsymbol{b}, x) > 2\pi^{-2} v(\boldsymbol{b}, x)$ в некоторой окрестности нуля?

Мы покажем, что, вообще говоря, нет. Тем не менее, тенденция к положительности разности $g(\boldsymbol{b}, x) - 2\pi^{-2} v(\boldsymbol{b}, x)$ будет наблюдаться для всех выпуклых последовательностей $\boldsymbol{b}$, а для достаточно широких классов более-менее регулярных последовательностей $\boldsymbol{b}$ будет иметь место и полная положительность в некоторой окрестности нуля.

Принимая во внимание теорему 1.2 из главы 1, уместно отметить любопытный факт: даже сумма ряда по синусам с монотонными коэффициентами $g(\boldsymbol{b}, x)$, для которой, вообще говоря, можно гарантировать лишь положительность в некоторой окрестности нуля (см. [95]), всё-таки в некоторых точках

больше, чем $2\pi^{-2}v(\boldsymbol{b},x)$. Если же вместо монотонности $\boldsymbol{b}$ потребовать выпуклость, то точек положительности разности $g(\boldsymbol{b},x)-2\pi^{-2}v(\boldsymbol{b},x)$ станет больше, но полной положительности на классе всех выпуклых последовательностей достичь не удастся.

Наконец, из полученных результатов будет видно, какую функцию лучше использовать вместо мажоранты Салема $v(\boldsymbol{b},x)$ с тем, чтобы получить наиболее точные оценки суммы ряда по синусам.

Основными результатами §2.1 являются следующие теоремы.

Теорема 2.4. *Существует выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$, для которой найдётся последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n\to+0$, такая, что*

$$g(\boldsymbol{b},x_n)<\frac{2}{\pi^2}\,v(\boldsymbol{b},x_n).$$

Иначе говоря, будет показано, что функция Салема с точной константой не является, вообще говоря, минорантой для суммы ряда по синусам на классе всех выпуклых последовательностей $\boldsymbol{b}$. Мы покажем также, что в качестве альтернативы можно взять модифицированную функцию Салема

$$v_0(\boldsymbol{b},x)=x\biggl(\sum_{k=1}^{m(x)-1}kb_k+\frac{m(x)}{2}\,b_{m(x)}\biggr). \tag{24}$$

Теорема 2.6. *Пусть $\boldsymbol{b}$ — положительная, выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность. Тогда для некоторого $x_0>0$ выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b},x)>\frac{2}{\pi^2}\,v_0(\boldsymbol{b},x),\quad 0<x<x_0.$$

Для любого $\varepsilon>0$ существует выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$, для которой найдётся последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n\to+0$, такая, что

$$g(\boldsymbol{b},x_n)<\frac{2}{\pi^2}\,x_n\biggl(\sum_{k=1}^{m(x_n)-1}kb_k+\biggl(\frac{1}{2}+\varepsilon\biggr)m(x_n)b_{m(x_n)}\biggr).$$

Иными словами, коэффициент $1/2$ перед слагаемым $m(x)b_{m(x)}$ в модифицированной мажоранте Салема точный. Тем самым, для оценки снизу суммы

ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами функция $v_0(\boldsymbol{b}, x)$ в некотором смысле оптимальна.

В **§2.2** будут найдены точные константы в оценке С. А. Теляковского, полученной им для суммы ряда по синусам (1) с последовательностью коэффициентов $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$ при дополнительном условии выпуклости.

С. Алянчич, Р. Боянич и М. Томич (см. теорему 1.B) при дополнительном условии медленного изменения последовательности $\boldsymbol{b}$ нашли асимптотику суммы ряда (1):

$$g(\boldsymbol{b}, x) \sim \frac{b_{m(x)}}{x} \sim \frac{b_{m(x)}}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, \quad x \to +0. \tag{25}$$

С. А. Теляковский [120], [57], [56] заметил, что сумма ряда (1) с выпуклыми коэффициентами (при „небольших" значениях x) всегда превосходит величину $\big(b_{m(x)}/2\big) \operatorname{ctg}(x/2)$. Он показал, что разность между суммой ряда (1) и главным членом её асимптотического разложения

$$g(\boldsymbol{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \tag{26}$$

удобно сравнивать с функцией

$$\sigma(\boldsymbol{b}, x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k^2 \Delta^1 b_k, \qquad \Delta^1 b_k = b_k - b_{k+1} > 0, \tag{27}$$

и что функции (26) и (27) одного порядка при $x \to +0$.

Теорема 2.F (С. А. Теляковский)**.** *Существуют такие положительные абсолютные постоянные C_1 и C_2, что для разности* (26) *имеет место оценка*

$$C_1\, \sigma(\boldsymbol{b}, x) \leqslant g(\boldsymbol{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \leqslant C_2\, \sigma(\boldsymbol{b}, x), \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{11},$$

какова бы ни была выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$.

Теорема 2.F, в частности, даёт остаточный член в асимптотике (25). Действительно, в случае медленного изменения последовательности $\boldsymbol{b}$ имеем

$$\frac{1}{m(x)} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k b_k \sim \frac{1}{2} m(x) b_{m(x)} \sim \frac{\pi}{2} \frac{b_{m(x)}}{x}, \quad x \to +0.$$

С другой стороны, медленное изменение последовательности $\boldsymbol{b}$ влечёт порядковое соотношение $\Delta^1 b_k = o\,(b_k/k)$ при $k \to \infty$ (см. [48, гл. II, §2, теорема 2.4]), а значит верна асимптотическая оценка

$$\sigma(\boldsymbol{b}, x) = o\left(\frac{1}{m(x)} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k b_k\right) = o\left(\frac{b_{m(x)}}{x}\right), \quad x \to +0.$$

Будут получены точные постоянные в теореме 2.F, а именно: будут вычислены значения величин

$$\overline{C} = \sup_{\boldsymbol{b}} \varlimsup_{x \to +0} \frac{g(\boldsymbol{b}, x) - (b_{m(x)}/2)\operatorname{ctg}(x/2)}{\sigma(\boldsymbol{b}, x)}, \tag{28}$$

$$\underline{C} = \inf_{\boldsymbol{b}} \varliminf_{x \to +0} \frac{g(\boldsymbol{b}, x) - (b_{m(x)}/2)\operatorname{ctg}(x/2)}{\sigma(\boldsymbol{b}, x)}. \tag{29}$$

Точная верхняя и нижняя грани в (28) и (29) берутся по всем выпуклым и стремящимся к нулю последовательностям $\boldsymbol{b}$.

Теорема 2.8. *Справедливы равенства*

$$\overline{C} = \frac{\pi}{2}, \qquad \underline{C} = \frac{3(\pi - 1)}{\pi^2},$$

причём точная верхняя грань в (28) *и точная нижняя грань в* (29) *достигаются на медленно меняющихся последовательностях.*

В **§2.3** обсуждается вопрос, какие значения может принимать разность между суммой ряда по синусам (1) и её асимптотически точными мажорантой и минорантой на классе всех выпуклых последовательностей коэффициентов.

Как уже упоминалось, из результатов §2.1 будет следовать, что на классе всех выпуклых, стремящихся к нулю последовательностей $\boldsymbol{b}$ имеет место оценка снизу

$$g(\boldsymbol{b}, x) > \frac{2}{\pi^2}\, v_0(\boldsymbol{b}, x),$$

где функция $v_0(\boldsymbol{b}, x)$ определяется формулой (24), справедливая в некоторой правой полуокрестности нуля, зависящей, вообще говоря, от последовательности $\boldsymbol{b}$ (см. теорему 2.4). При этом не только постоянная $2\pi^{-2}$, но и коэффициент $1/2$ в последнем слагаемом функции $v_0(\boldsymbol{b}, x)$, неулучшаемы (см. теорему 2.6).

В §2.3 будет доказан более сильный результат.

Теорема 2.13. *Существует выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность* $\boldsymbol{b}$*, для которой найдётся последовательность точек* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*,* $x_n \to +0$*, такая, что*

$$g(\boldsymbol{b}, x_n) < \frac{2}{\pi^2}\, v_0(\boldsymbol{b}, x_n) + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\pi^2 b_1 x_n b_{m(x_n)}^2} + \frac{9+\pi^2}{6\pi^2} x_n b_{m(x_n)}.$$

Таким образом, для некоторой выпуклой последовательности коэффициентов найдётся стремящаяся к нулю последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ со свойством

$$\frac{2}{\pi^2}\, v_0(\boldsymbol{b}, x_n) < g(\boldsymbol{b}, x_n) < \frac{2}{\pi^2}\, v_0(\boldsymbol{b}, x_n) + o\left(\sqrt[3]{x_n}\right).$$

В частности, на классе выпуклых, медленно меняющихся и стремящихся к нулю последовательностей $\boldsymbol{b}$ имеет место равенство

$$\min_{\boldsymbol{b}} \varliminf_{x\to+0} \frac{g(\boldsymbol{b}, x) - 2\pi^{-2} v_0(\boldsymbol{b}, x)}{\sqrt[3]{x}} = 0.$$

С другой стороны, один из результатов §2.2 (теорема 2.9) будет состоять в том, что на классе всех выпуклых, стремящихся к нулю последовательностей $\boldsymbol{b}$ выполняется оценка сверху

$$g(\boldsymbol{b}, x) < \frac{b_{m(x)}}{2} \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} \sum_{k=1}^{m(x)-1} \binom{k+1}{2} \Delta^1 b_k, \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{11}.$$

Оказывается, оценка сверху ещё более точная в сравнении с оценкой снизу.

Теорема 2.14. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность* $\boldsymbol{b}$ *и последовательность точек* $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$*,* $x_l \to +0$*, такие, что*

$$g(\boldsymbol{b}, x_l) > \frac{b_{m(x_l)}}{2} \operatorname{ctg}\frac{x_l}{2} + 2\sin\frac{x_l}{2} \sum_{k=1}^{m(x_l)-1} \binom{k+1}{2} \Delta^1 b_k - b_1 x_l^{3-\varepsilon}.$$

Тем самым, при каждом $\varepsilon > 0$ для некоторой выпуклой последовательности коэффициентов найдётся стремящаяся к нулю последовательность точек $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$ со свойством

$$\frac{b_{m(x_l)}}{2} \operatorname{ctg}\frac{x_l}{2} + 2\sin\frac{x_l}{2} \sum_{k=1}^{m(x_l)-1} \binom{k+1}{2} \Delta^1 b_k - o\left(x_l^{3-\varepsilon}\right) < g(\boldsymbol{b}, x_l)$$

$$< \frac{b_{m(x_l)}}{2} \operatorname{ctg}\frac{x_l}{2} + 2\sin\frac{x_l}{2} \sum_{k=1}^{m(x_l)-1} \binom{k+1}{2} \Delta^1 b_k.$$

В частности, на классе выпуклых, медленно меняющихся и стремящихся к нулю последовательностей $\boldsymbol{b}$ имеет место равенство

$$\min_{\boldsymbol{b}} \varlimsup_{x\to+0} \frac{(b_{m(x)}/2)\operatorname{ctg}(x/2) + 2\sin(x/2)\sum\limits_{k=1}^{m(x)-1}\binom{k+1}{2}\Delta^1 b_k - g(\boldsymbol{b},x)}{x^{3-\varepsilon}} = 0, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

В **§2.4** уточняется асимптотика суммы ряда (1), установленная С. Аляничем, Р. Бояничем, М. Томичем (см. (6)), в случае, когда последовательность коэффициентов удовлетворяет дополнительному условию регулярности.

Задача нахождения эффективных двусторонних оценок суммы ряда по синусам, когда последовательность коэффициентов $\boldsymbol{b}$ медленно меняется, является наиболее принципиальной. В этом случае последовательность частичных сумм ряда (1) сходится очень медленно, а его сумма $g(\boldsymbol{b},x)$ может оказаться даже несуммируемой.

С. А. Теляковский сравнил разность между суммой ряда по синусам и главным членом её асимптотического поведения с функцией $\sigma(\boldsymbol{b},x)$ (см. (27)) и тем самым усилил теорему 1.B (см. теорему 2.F).

Вместо функции $\sigma(\boldsymbol{b},x)$ рассмотрим сравнимую с ней по порядку функцию

$$\sigma_0(\boldsymbol{b},x) = x\sum_{k=1}^{m(x)-1}\frac{k(k+1)}{2}\Delta^1 b_k. \tag{30}$$

Если последовательность $\boldsymbol{b}$ медленно меняется, то имеет место порядковое соотношение $\Delta^1 b_k = o\,(b_k/k)$ при $k\to\infty$ [48, гл. II, §2, теорема 2.4], с учётом которого из (30) немедленно выводится (см. лемму 2.20) асимптотика

$$\sigma_0(\boldsymbol{b},x) = o\left(x\sum_{k=1}^{m(x)-1} k b_k\right) = o\left(\frac{b_{m(x)}}{x}\right).$$

Тем самым, в случае медленного изменения последовательности $\boldsymbol{b}$ второе слагаемое в асимптотике $g(\boldsymbol{b},x)$ одного порядка с функцией $\sigma_0(\boldsymbol{b},x)$.

В §2.2 найдены точные значения постоянных в теореме 2.F. А именно, на классе всех выпуклых последовательностей $\boldsymbol{b}$ решены экстремальные задачи:

$$\max_{\boldsymbol{b}} \varlimsup_{x\to+0} \frac{g(\boldsymbol{b},x) - b_{m(x)}/x}{\sigma_0(\boldsymbol{b},x)} = 1, \tag{31}$$

$$\min_{\boldsymbol{b}} \varliminf_{x\to+0} \frac{g(\boldsymbol{b},x) - b_{m(x)}/x}{\sigma_0(\boldsymbol{b},x)} = \frac{6(\pi-1)}{\pi^3}. \tag{32}$$

Заметим, что в примерах, устанавливающих точность предельных соотношений (31) и (32), последовательность $\boldsymbol{b}$ медленно меняется. Тем самым, справедливость соотношений (31) и (32) сохраняется, если максимум и минимум брать на классе всех выпуклых, медленно меняющихся последовательностей $\boldsymbol{b}$.

В §2.4 мы дополним двустороннюю оценку суммы ряда по синусам с выпуклой последовательностью коэффициентов, полученную в §2.2, асимптотическим соотношением, уточняющим теорему 1.B в случае медленного изменения последовательности $\{k\Delta^1 b_k\}_{k=1}^{\infty}$. Заметим, что это условие несколько сильнее условия медленного изменения последовательности $\boldsymbol{b}$, при выполнении которого справедливо соотношение (6).

Теорема 2.15. *Пусть $\boldsymbol{b}$ — неотрицательная, выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность. Если последовательность $\{k\Delta^1 b_k\}_{k=1}^{\infty}$ медленно меняется, то*

$$g(\boldsymbol{b},x)-\frac{b_{m(x)}}{x}\sim(\gamma+\ln\pi)\frac{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}{x},\quad x\to+0.$$

Через γ обозначена постоянная Эйлера.

Глава 3 посвящена исследованию экстремальных вопросов, связанных со сходимостью почти всюду рядов по общим ортогональным системам.

Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система (далее будем писать ОНС). Неубывающая последовательность неотрицательных чисел $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *множителем Вейля* для $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, если какова бы ни была последовательность коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\omega_n < +\infty$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)$ сходится почти всюду. Знаменитая теорема Меньшова—Радемахера (см. [102], [112], [38, гл. 3, §3, теорема 2], [28, гл. 9, §1, теорема 1]) утверждает, что последовательность $\omega_n=\log_2^2(n+1)$ является точным множителем Вейля на классе всех ОНС. Другими словами, какова бы ни была ОНС $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, условие $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\log_2^2(n+1)<+\infty$ влечёт сходимость почти всюду ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)$. Обратно, существует такая ОНС $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, что для любой неубывающей последовательности неотрицательных чисел $\omega_n=o(\log_2^2(n+1))$ найдётся последовательность коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, обладающая свойством $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\omega_n<+\infty$, такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)$ расходится почти всюду. Эти результаты основаны на следующих леммах Меньшова [28, гл. 9, §1, лемма 1,

с. 333 и лемма 1, с. 336].

Теорема 3.A (Д. Е. Меньшов). *Пусть номер N является степенью двойки, $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ — ОНС. Тогда для любого набора коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^N$ выполняется неравенство*

$$\int_0^1 \max_{1\leqslant j\leqslant N}\left|\sum_{n=1}^{j} c_n\psi_n(x)\right|^2 dx \leqslant (\log_2 N+1)^2\sum_{n=1}^{N} c_n^2.$$

Теорема 3.B (Д. Е. Меньшов). *Существует положительная постоянная C такая, что для каждого номера N найдётся ОНС $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ определённых на отрезке $[0,1]$ функций, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^1 \max_{1\leqslant j\leqslant N}\left|\sum_{n=1}^{j} \psi_n(x)\right|^2 dx > CN\log_2^2 N.$$

Эти теоремы тесно связаны со следующим утверждением о матрицах, установленным гораздо позднее в функциональном анализе (см. [39], [42]).

Для каждой матрицы A обозначим через A^s верхнюю треугольную матрицу, у которой элементы выше главной диагонали совпадают с соответствующими элементами матрицы A, а через $\|A\|$ — операторную норму матрицы A (как оператора в евклидовом пространстве).

Теорема 3.C (В. И. Мацаев). *Существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что для каждого номера $N\geqslant 2$ выполняется неравенство*

$$C_1\log_2 N \leqslant \sup\frac{\|A^s\|}{\|A\|} \leqslant C_2\log_2 N,$$

где супремум берётся по всем ненулевым $N\times N$ матрицам A.

Из теоремы 3.B вытекает, что для построенной Д. Е. Меньшовым системы норма *максимального оператора*

$$S^*\colon l_2^N\to L_2,\quad \text{где}\quad S^*\{a_n\}=\max_{1\leqslant j\leqslant N}\left|\sum_{n=1}^{j} a_n\psi_n(x)\right|,$$

оценивается снизу как $\log_2 N$. При построении системы функций, удовлетворяющих условиям теоремы 3.B, и в теореме 3.C используются свойства матрицы

Гильберта $\{1/(i-j)\}_{i,j=1}^{\infty}$ (на главной диагонали, при $i=j$, элементы матрицы полагаем равными нулю). Эта тёплицева матрица, порождённая последовательностью $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$, имеет конечную операторную норму. В то же время сумма элементов над главной диагональю в N-м столбце имеет порядок $\log_2 N$. Позднее рядом авторов приводились другие доказательства теорем 3.B и 3.C, однако, как отмечено в [28], все они так или иначе использовали конструкцию матрицы Гильберта. В связи с этим Б. С. Кашиным неоднократно ставилась задача о разработке новых подходов к построению матриц размера $N \times N$, для которых отношение норм $\|A^s\|/\|A\|$ имеет порядок $\log_2 N$ при $N \to \infty$.

Первый пример такой матрицы, состоящей из троичных блоков, был предложен А. Паскевичем [107]. Позднее А. Паскевич использовал построенную им матрицу для получения теоремы типа Тандори об описании множества коэффициентов сходящегося почти всюду ряда по ОНС (см. [108]).

В **§3.1** предложен метод построения так называемых *обобщённых тёплицевых матриц*, удовлетворяющих условиям теоремы 3.C. Такие матрицы имеют вид $\{h_{i\ominus j}\}$, где $\{h_n\}$ — набор чисел, а '$\ominus$' — вычитание, порождённое группой характеров $\{\chi_n\}$ компактной абелевой группы X.

Следующее утверждение является обобщением классического результата о нормах тёплицевых матриц (см. [28, гл. 5, §1, лемма 2, с. 170]).

Теорема 3.1. *Пусть $\{h_k\}_{k=0}^{N-1}$ — конечный набор комплексных чисел. Тогда для операторной нормы матрицы $H = \{h_{m\ominus n}\}_{m,n=0}^{N-1}$ справедлива оценка*

$$\|H\| \leqslant \left\| \sum_{k=0}^{N-1} h_k \chi_k(x) \right\|_{L^\infty(X)}.$$

Также будет показано, что как матрица Гильберта, так и матрица Паскевича являются частными случаями общей конструкции: матрица Гильберта строится по группе характеров $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, а матрица Паскевича — по троичной системе Прайса. Таким образом, матрица Паскевича в определённом смысле аналогична матрице Гильберта. При помощи теоремы 3.1 будет построен ряд других примеров обобщённых тёплицевых матриц, наибольший интерес среди которых представляет матрица, составленная из блоков 4×4.

В то же время как матрицы Гильберта и Паскевича, так и другие матрицы, построенные в §3.1 на основе общей конструкции, имеют сильную локализацию

в окрестности главной диагонали: элементы матриц $N \times N$ в окрестности правого верхнего и левого нижнего угла в N раз меньше элементов в окрестности диагонали. Отметим также, что Б. С. Кашиным [27] и Е. М. Дюжевым [22], [23] строились примеры матриц A_N с растущей вместе с N величиной $\|A_N^s\|/\|A_N\|$ на основе двоичных блоков. В этих примерах свойства обобщённых тёплицевых матриц не использовались. Однако для данных конструкций норма максимального оператора хотя и растёт при $N \to \infty$, но со скоростью $\sqrt{\log_2 N}$.

Г. А. Карагулян в [25] получил глубокий результат, построив такую перестановку тригонометрической системы, что норма максимального оператора для этой перестановки оценивается снизу как $\log_2 N$.

В **§3.2**, применяя метод, разработанный в §3.1, мы построим обобщённую тёплицеву матрицу, порождённую группой характеров над прямым произведением групп $\mathbb{Z}_4$, удовлетворяющую условиям теоремы 3.C и имеющую улучшенные характеристики в сравнении с матрицами Гильберта и Паскевича.

Для каждого $N \geqslant 1$ определим набор чисел $\{d_n\}_{n=0}^{4^{N+1}-1}$ следующим образом:

$$d_n = \begin{cases} -2^{-k-1}, & \text{если } n = 4^k + \sum\limits_{m=1}^{k} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1 \text{ или } 3,\ 0 \leqslant k < N-1, \\ 2^{-k-1}, & \text{если } n = 3 \cdot 4^k + \sum\limits_{m=1}^{k} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1 \text{ или } 3,\ 0 \leqslant k < N-1, \\ -2^{-N-1}, & \text{если } n = 4^{N-1} + \sum\limits_{m=1}^{N-1} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1 \text{ или } 3, \\ 3 \cdot 2^{-N-1}, & \text{если } n = 3 \cdot 4^{N-1} + \sum\limits_{m=1}^{N-1} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1 \text{ или } 3, \\ -2^{-N-1}, & \text{если } n = 4^N + \sum\limits_{m=1}^{N} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1 \text{ или } 3, \\ 2^{-N-1}, & \text{если } n = p \cdot 4^N + \sum\limits_{m=1}^{N} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1 \text{ или } 3,\ p = 2 \text{ или } 3, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{33}$$

Будет построена система ортогональных $M \times M$ матриц ($M = 4^{N+1}$), удовлетворяющих условиям теоремы 3.C, у которых отношение максимального по модулю элемента к минимальному по модулю ненулевому элементу равно $\sqrt{M}/2$, что несколько лучше матрицы Гильберта, где соответствующее от-

ношение равно M.

Теорема 3.5. *Матрица* $B_N = \{d_{n\ominus m}\}_{n,m=0}^{4^{N+1}-1}$, *задаваемая соотношением* (33), *ортогональна.*

Теорема 3.7. *Для матрицы* $B_N = \{d_{n\ominus m}\}_{n,m=0}^{4^{N+1}-1}$, *определяемой соотношением* (33), *выполняется оценка*

$$\frac{\|B_N^s\|}{\|B_N\|} \geqslant \frac{N+3}{4}.$$

Заметим также, что как и в случае матрицы Гильберта, логарифмический рост нормы верхних треугольных матриц B_N^s достигается на векторах $2^{-N-1}\{1,1,\ldots,1\}$. Используя последнее соображение, будет явно предъявлена ОНС $\{\psi_n\}_{n=1}^N$, удовлетворяющая теореме 3.B.

В **главе 4** исследуется экстремальная задача нахождения областей однолистности на классах голоморфных в некоторой области функций. Поиск области однолистности голоморфной функции является важнейшей задачей геометрической теории функций. Именно эту область голоморфная функция конформно отображает на некоторую область в образе. Кроме того, однолистность голоморфной в области функции влечёт дополнительные свойства и характеристики функции и осуществляемого ею отображения. Наиболее известны теоремы покрытия, искажения, вращения, неравенство Бибербаха для коэффициентов (см. [10], [73], [78], [79]).

Обсудим для начала вопрос об однолистности в окрестности внутренней точки области. Разумеется, необходимым условием однолистности функции в некоторой окрестности точки, то есть *локальной однолистности*, является отличие от нуля её производной в этой точке. Конечно, о размере этой окрестности при столь общем предположении ничего сказать нельзя. Для конкретизации размеров данной окрестности (величины радиуса однолистности) необходима дополнительная информация о функции.

С оценкой снизу радиуса однолистности связано много работ. Общеизвестны оценки снизу радиуса круга, в котором голоморфная функция не только однолистна, но и отображает его на выпуклую, звёздообразную либо спиралевидную области (см. [119], [64], [118]). В общем случае хорошо известны достаточные условия однолистности З. Нехари, связанные с оценкой производной Швар-

ца, а также условие Й. Беккера. З. Нехари [103] показал, что локально однолистная в единичном круге с центром в нуле функция f является однолистной, если *производная Шварца* $\{f,z\} = \big(f''(z)/f'(z)\big)' - 0.5\big(f''(z)/f'(z)\big)^2$ допускает в этом круге следующую оценку: $\big|\{f,z\}\big| \leqslant 2/(1-|z|^2)^2$. Другим достаточным условием однолистности функции f в единичном круге является следующая оценка с точной константой: $\big|\{f,z\}\big| \leqslant \pi^2/2$. Й. Беккер [68] доказал, что однолистность в единичном круге локально однолистной функции имеет место в случае справедливости в единичном круге неравенства $(1-|z|^2)\big|zf''(z)/f'(z)\big| \leqslant 1$.

Что касается оценок сверху, то радиус однолистности не может быть больше расстояния от центра круга до ближайшего нуля производной. Одно из наиболее известных необходимых условий однолистности также принадлежит З. Нехари. Он показал (см. [103]), что однолистность в единичном круге локально однолистной функции влечёт следующую оценку в единичном круге производной Шварца: $\big|\{f,z\}\big| \leqslant 6/(1-|z|^2)^2$. Однако, как для данного условия, так и в случае других оценок сверху радиуса однолистности так или иначе возникает труднопреодолимый зазор между необходимостью и достаточностью. Объясняется это тем, что однолистность может нарушаться не только из-за препятствия, связанного с нулевым значением производной, но и по другой причине: образ границы круга однолистности может иметь точку самосоприкосновения (см., например, [34]). В этой же работе Г. В. Кузьминой получены условия однолистности голоморфной функции в круге, учитывающие подобный эффект.

Поиску разнообразных условий однолистности посвящено большое количество работ (см., например, [62], [74], [82], [104], [106], [113]). Отметим работу [2], содержащую обзор основных результатов по условиям однолистности и обширную библиографию, а также монографии [89], [109], содержащие классические условия однолистности.

Совершенно иная ситуация возникает при оценке радиуса однолистности не для индивидуальной голоморфной функции, а на классе функций. В этом случае зазор между необходимыми и достаточными условиями оказывается существенно меньшим, а для некоторых классов нижняя и верхняя оценки вообще смыкаются. Э. Ландау [99] рассмотрел класс ограниченных фиксированной постоянной отображений единичного круга со стандартной нормировкой и вы-

числил точное значение радиуса однолистности на этом классе.

Теорема 4.A (Э. Ландау)**.** *Пусть f голоморфно отображает единичный круг с центром в нуле в круг с центром в нуле, радиус которого равен N, где N — некоторое число, большее единицы. Кроме того, $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$. Тогда f однолистна в круге с центром в нуле, радиус $R(N)$ которого равен $N\left(N - \sqrt{N^2 - 1}\right)$.*

При этом функция

$$f(z) = Nz\,\frac{1 - Nz}{N - z}$$

удовлетворяет условиям $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$, ограничена числом N в единичном круге и имеет нулевую производную в точке $z = R(N)$.

Рассмотрим теперь случай граничной бесконечно удалённой точки, производную в которой будем понимать в смысле углового предела. Что касается *локальной однолистности в граничной неподвижной точке*, то, как показал Ж. Валирон [8], здесь она также имеет место в случае отличной от нуля угловой производной.

Теорема 4.B (Ж. Валирон)**.** *Пусть g голоморфно отображает правую полуплоскость в себя, $\angle\lim_{z\to\infty} g(z) = \infty$, причём угловая производная g в бесконечности отлична от нуля. Тогда для любого $\varphi \in (0, \pi/2)$ найдётся достаточно большое $R > 0$ такое, что g однолистна в секторе*

$$\mathscr{V}(\varphi, R) = \big\{\zeta \in \mathbb{C}\colon |\arg\zeta| < \varphi \text{ и } |\zeta| > R\big\}.$$

Теорему 4.B можно переформулировать в терминах класса функций, отображающих единичный круг в себя.

Теорема 4.B′. *Пусть f голоморфно отображает единичный круг с центром в нуле в себя, оставляет неподвижной точку a единичной окружности и имеет в ней конечную угловую производную. Тогда для любого $\varphi \in (0, \pi/2)$ найдётся достаточно малое $r > 0$ такое, что f однолистна в секторе*

$$\mathscr{W}(\varphi, r) = \Big\{z \in \mathbb{C}\colon \big|\arg(a - z)\big| < \varphi \quad и \quad |z - a| < r\Big\}. \tag{34}$$

Таким образом, мы видим, что в плане локальной однолистности угловая производная не сильно слабее обычной. В то время, как голоморфная функция

с отличной от нуля производной однолистна в некотором круге, функция, имеющая ненулевую угловую производную, однолистна в некотором секторе раствора сколь угодно близкого к π. Разумеется, радиус сектора зависит не только от величины угла, но и от самой функции. Более того, Х. Поммеренке [110] установил, что если угловая производная равна единице, то однолистность будет иметь место не только в секторе, но даже в некоторой области, граница которой касается единичной окружности.

Аналогия с внутренней точкой наблюдается также в задачах описания областей однолистности для индивидуальных функций. Приведём один из недавних результатов в данном направлении, принадлежащий Й. Беккеру и Х. Поммеренке [69]. Ими получено достаточное условие однолистности в области для функции, имеющей конечную угловую производную в граничной точке, в определённом смысле аналогичное результатам З. Нехари и Й. Беккера для случая внутренней точки.

Теорема 4.C (Й. Беккер, Х. Поммеренке)**.** *Пусть f — голоморфное отображение единичного круга с центром в нуле в себя, причём $f(1) = 1$ (в смысле углового предела). Если угловая производная функции f в точке $z = 1$ конечна, то f однолистна в области*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1 \quad и \quad \frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \cdot \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} > \frac{f'(1)}{2} \right\}. \tag{35}$$

В частности, в качестве сектора (34), в котором функция f однолистна, можно выбрать сектор, содержащийся в области (35).

В то же время ситуация с выделением областей однолистности на классе функций с условием на производную в граничной точке кардинально отличается от случая внутренней точки. Даже для достаточно малого угла раствора сектора (34) выбрать единое значение радиуса сектора однолистности на классе, состоящем из функций, имеющих ограничение на угловую производную в граничной точке, вообще говоря, нельзя, что будет показано в **§4.1**.

Теорема 4.6. *При любом $\alpha > 1$ на классе функций, отображающих единичный круг с центром в нуле в себя и удовлетворяющих условиям $f(1) = 1$ и $f'(1) < \alpha$ (в смысле углового предела), нет непустых областей однолистности.*

Теорема 4.6′. *При любом β, $0 < \beta < 1$, на классе функций, отображающих правую полуплоскость в себя и удовлетворяющих условиям $f(\infty) = \infty$ и $f'(\infty) > \beta$ (в смысле углового предела), нет непустых областей однолистности.*

Сравнивая это утверждение с результатом теоремы 4.A, можно сделать вывод, что условие на угловую производную значительно слабее условия на производную во внутренней точке, а классы, содержащие лишь условие на угловую производную в граничной неподвижной точке, слишком обширны с точки зрения выделения областей однолистности. Тем самым, возникает естественная необходимость к ограничению на значение производной в граничной неподвижной точке добавить ещё некоторое условие. В качестве такого условия можно рассмотреть наличие дополнительной неподвижной точки. При этом дополнительная неподвижная точка может располагаться как внутри области, так и на её границе.

Отметим, что классы функций с неподвижными точками являются классическим объектом исследований в связи с различными задачами. Изучению влияния угловых производных в граничных неподвижных точках на значения производной во внутренней неподвижной точке, а также получению неравенств для угловых производных посвящены работы К. Коувена и Х. Поммеренке [86], Х. Поммеренке и А. Васильева [111], Дж. Андерсона и А. Васильева [66], В. В. Горяйнова [14], [15], В. Н. Дубинина [19], [21], коллективов авторов В. Болотников, М. Элин и Д. Шойхет [76], П. А. Гуменюк и Д. В. Прохоров [93] и др. Другая задача, исследование которой основано на анализе неподвижных точек, связана с возможностью вложения голоморфного отображения в однопараметрическую полугруппу. Активное развитие этого направления стимулируется широким кругом приложений, например, в теории случайных ветвящихся процессов [61], [67], в некоммутативной теории вероятностей [91], в теории композиционных операторов [115], [116]. Важные результаты, связанные с описанием однопараметрических полугрупп голоморфных отображений с неподвижными точками, получены в работах К. Лёвнера [101], Э. Берксона и Г. Порта [72], К. Коувена [85], В. В. Горяйнова [11]—[13], коллективов авторов М. Элин, В. В. Горяйнов, С. Рейх, Д. Шойхет [90], М. Д. Контрерас, С. Диаз-Мадригал,

Х. Поммеренке [83], [84], Ф. Браччи, М. Д. Контрерас, С. Диаз-Мадригал [77], В. В. Горяйнов и О. С. Кудрявцева [18]. Выделим ещё одно направление — развитие аналога параметрического метода для исследования внутренних задач теории однолистных функций с ограничениями на угловую производную в граничной неподвижной точке [14].

В **§4.1** и **§4.2** мы исследуем классы функций, имеющих ограничение на значение производной в граничной неподвижной точке, а также дополнительное условие наличия и локализации внутренней неподвижной точки. Изучая влияние угловой производной на свойства функций внутри единичного круга, В. В. Горяйнов [15] обнаружил на данных классах существование областей однолистности. В §4.1 метод, разработанный в [15], применяется для нахождения более широких областей однолистности и получения оценок сверху. В §4.2 с помощью разработанного нового подхода экстремальная задача поиска области однолистности на классе функций с внутренней и граничной неподвижными точками и ограничением на значение угловой производной в граничной точке решается полностью. А именно, получена точная область однолистности на данном классе. Это приводит к аналогу классического результата Ландау (теорема 4.A) для соответствующего класса функций.

Теорема 4.7. *Пусть $\alpha \in (1, 4]$. Если f — голоморфная функция, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя и удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f'(1) \leqslant \alpha$ (в смысле углового предела), тогда f однолистна в области*

$$\mathscr{D}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1 \quad и \quad \frac{\left|1 - 2z + |z|^2\right|}{1 - |z|^2} < \frac{1}{\sqrt{\alpha - 1}} \right\}.$$

Какова бы ни была область $\mathscr{Y}$, содержащаяся в единичном круге с центром в нуле, $\mathscr{D}(\alpha) \subsetneq \mathscr{Y}$, найдётся голоморфная функция f, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя, со свойствами $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f'(1) \leqslant \alpha$, не однолистная в области $\mathscr{Y}$.

В **§4.3** рассматривается сужение класса функций, имеющих ограничение на значение производной в граничной неподвижной точке, посредством наличия второй неподвижной точки, расположенной на границе единичного круга. А именно, изучается класс голоморфных отображений единичного круга в себя

с двумя диаметрально противоположными граничными неподвижными точками и инвариантным диаметром. Такие отображения образуют важный с точки зрения приложений класс функций. Он естественным образом возникает, например, при исследовании классической задачи теории ветвящихся случайных процессов о возможности вложения дискретного процесса с вероятностной производящей функцией f в ветвящийся процесс с непрерывным временем. Отображения с инвариантным диаметром изучались в [29] в связи с задачей вложения голоморфного отображения в однопараметрическую полугруппу, наследующую свойства исходного отображения; в [30] — в связи с задачей вложения конформного отображения в дифференцируемое эволюционное семейство. В §4.3 получены асимптотически точные двусторонние оценки областей однолистности на рассматриваемом классе функций в зависимости от значения произведения угловых производных в граничных неподвижных точках.

Теорема 4.9. *Фиксируем $\alpha \in (1, 9)$. Для каждой точки z_0 границы области*

$$\overline{\mathscr{U}}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1 \quad и \quad \frac{|1 - z^2|}{1 - |z|^2} < \frac{2\sqrt[4]{\alpha}}{\sqrt{(3 + \sqrt{\alpha})(\sqrt{\alpha} - 1)}} \right\}$$

найдётся голоморфная функция f_{z_0}, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя, со свойствами $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$, $f((-1, 1)) = (-1, 1)$ и $f'(1)f'(-1) \leqslant \alpha$ (в смысле углового предела), производная которой в точке z_0 обращается в нуль.

Теорема 4.11. *Пусть $\alpha \in (1, 9)$. Если f — голоморфная функция, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя и удовлетворяющая условиям $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$, $f((-1, 1)) = (-1, 1)$ и $f'(1)f'(-1) \leqslant \alpha$ (в смысле углового предела), тогда f однолистна в области*

$$\underline{\mathscr{U}}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1 \quad и \right.$$
$$\left. \frac{|1 - z^2|}{1 - |z|^2} < \sqrt{1 + \left(\sqrt{k(\alpha) + 1} + \operatorname{sign}(25 - 9\alpha) \sqrt{k(\alpha)} \right)^2} \right\},$$

где

$$k(\alpha) = \frac{(9\alpha - 25)^2 \, (183 - 37\sqrt{\alpha})}{128(\alpha - 1)(9 - \alpha)(85 - 12\sqrt{\alpha})}.$$

Глава 1. Ряды по синусам с монотонными и квазимонотонными коэффициентами

1.1. Точная оценка снизу верхнего предела отношения суммы синус-ряда с монотонными коэффициентами к мажоранте Салема

1.1.1. Формулировка основных результатов

Найдена неулучшаемая оценка снизу верхнего предела отношения суммы ряда по синусам (1) с монотонными коэффициентами к мажоранте Салема (2).

Теорема 1.1. *Справедливо равенство* $\min_{\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}} \bar{l}(\boldsymbol{b}) = 2\pi^{-2}$.

Принимая во внимание теорему 1.B для доказательства теоремы 1.1 достаточно убедиться в том, что $\bar{l}(\boldsymbol{b}) \geqslant 2\pi^{-2}\ \forall \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$. Мы докажем более тонкий результат.

Теорема 1.2. *Для любой последовательности* $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$ *существует такая последовательность положительных чисел* $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$, $\lim_{p\to\infty} x_p = 0$, *что при всех* $p \in \mathbb{N}$ *верны неравенства* $g(\boldsymbol{b}, x_p) > 2\pi^{-2} v(\boldsymbol{b}, x_p)$.

Теорема 1.2 в свою очередь следует из теоремы 1.3.

Теорема 1.3. *Даны произвольные* $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$ *и* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда существует такое натуральное число* $N > n$, *что выполняется неравенство*

$$\int_{\pi/(2N)}^{\pi/(2n)} \big(g(\boldsymbol{b}, x) - 2\pi^{-2} v(\boldsymbol{b}, x)\big)\, dx > 0. \tag{1.1}$$

Существование последовательности $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$, которое утверждается в теореме 1.2, выводится из теоремы 1.3 методом математической индукции. Действительно, возьмём $n = 1$ и согласно теореме 1.3 найдём такое натуральное

$N > 1$, что выполняется (1.1). Положим $N = n_1$. Если набор номеров $\{n_k\}_{k=1}^{p}$ уже построен, то для $n = n_p$ снова найдём такое N, чтобы выполнялось условие (1.1), и обозначим его через n_{p+1}. В результате получим последовательность номеров $\{n_p\}_{p=1}^{\infty}$ такую, что

$$\int_{\pi/(2n_{p+1})}^{\pi/(2n_p)} \big(g(\boldsymbol{b}, x) - 2\pi^{-2} v(\boldsymbol{b}, x)\big)\, dx > 0.$$

На каждом интервале $\big(\pi/\left(2n_{p+1}\right), \pi/\left(2n_p\right)\big)$ выберем точку x_p, в которой

$$g(\boldsymbol{b}, x_p) - 2\pi^{-2} v(\boldsymbol{b}, x_p) > 0.$$

Очевидно, построенная последовательность $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2.

1.1.2. Вспомогательные утверждения

Доказательству теоремы 1.3 предпошлём четыре леммы.

Лемма 1.1. *Пусть $n, \nu \in \mathbb{N}$, $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}$. Тогда*

$$S = \sum_{k=n(4\nu-3)+1}^{n(4\nu+1)} \beta_k \cos\frac{\pi k}{2n} \leqslant 0.$$

Доказательство. Обозначим $A = n(4\nu-3)$ и разобьём сумму S на две части:

$$S = \sum_{k=A+1}^{A+2n} \beta_k \cos\frac{\pi k}{2n} + \sum_{k=A+2n+1}^{A+4n} \beta_k \cos\frac{\pi k}{2n} = \sum_{j=1}^{2n} \beta_{A+j} \cos\frac{\pi(A+j)}{2n}$$
$$+ \sum_{j=1}^{2n} \beta_{A+2n+j} \cos\frac{\pi(A+2n+j)}{2n} = \sum_{j=1}^{2n} (\beta_{A+2n+j} - \beta_{A+j}) \sin\frac{\pi j}{2n}.$$

Поскольку $\sin\big(\pi j/(2n)\big) > 0$ при $1 \leqslant j < 2n$, $\beta_{A+2n+j} \leqslant \beta_{A+j}$, то все слагаемые в последней сумме неположительны, а значит, и $S \leqslant 0$. Лемма доказана. □

Лемма 1.2. *Пусть $n, N \in \mathbb{N}$, $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}$. Тогда верны неравенства*

$$\sum_{k=2N}^{\infty} \beta_k \cos\frac{\pi k}{2N} \geqslant -N\beta_{2N}, \qquad \left|\sum_{k=2N}^{\infty} \beta_k \cos\frac{\pi k}{2n}\right| \leqslant 2n\beta_{2N}.$$

Доказательство. Разобьём первую сумму на две части:

$$\sum_{k=2N}^{3N}\beta_k\cos\frac{\pi k}{2N}+\sum_{k=3N+1}^{\infty}\beta_k\cos\frac{\pi k}{2N}=\sum_{k=2N}^{3N-1}\beta_k\cos\frac{\pi k}{2N}-\sum_{q=N+1}^{\infty}\beta_{2N+q}\cos\frac{\pi q}{2N}. \tag{1.2}$$

Ввиду двойного неравенства $-1\leqslant\cos\bigl(\pi k/(2N)\bigr)<0$, $2N\leqslant k<3N$, а также неотрицательности и монотонности $\{\beta_k\}$ имеем

$$\sum_{k=2N}^{3N-1}\beta_k\cos\frac{\pi k}{2N}\geqslant-\sum_{k=2N}^{3N-1}\beta_k\geqslant-N\beta_{2N}. \tag{1.3}$$

Последнюю сумму в (1.2) разобьём на блоки:

$$\sum_{q=N+1}^{\infty}\beta_{2N+q}\cos\frac{\pi q}{2N}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{q=N(4\nu-3)+1}^{N(4\nu+1)}\beta_{2N+q}\cos\frac{\pi q}{2N}. \tag{1.4}$$

Согласно лемме 1.1 каждая внутренняя сумма в (1.4) неположительна, а значит, $\sum_{q=N+1}^{\infty}\beta_{2N+q}\cos\bigl(\pi q/(2N)\bigr)\leqslant0$. Отсюда и из (1.2), (1.3) получаем первое неравенство леммы.

Второе неравенство является прямым следствием (при $x=\pi/(2n)$) оценки модуля остатка ряда с монотонными коэффициентами

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}\beta_k\cos kx\right|\leqslant\beta_n\frac{\pi}{x},\quad 0<x\leqslant\pi.$$

Эта оценка доказывается при помощи преобразования Абеля с использованием оценки ядра Дирихле подобно рассуждениям, приведённым в [6, гл. X, §4]. Лемма доказана. □

Лемма 1.3. *Если* $\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}$, $n\in\mathbb{N}$, *то верно неравенство*

$$4\sum_{k=1}^{n}kb_k\geqslant b_1+\sum_{k=1}^{2n}kb_k.$$

Доказательство. Пользуясь монотонностью последовательности $\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}$, находим

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n}kb_k\leqslant b_n\sum_{k=n+1}^{2n}k=b_n\frac{3n^2+n}{2}\leqslant b_n\frac{3n^2+3n-2}{2}\\ =3b_n\left(\frac{2}{3}+\sum_{k=2}^{n}k\right)\leqslant2b_1+3\sum_{k=2}^{n}kb_k=-b_1+3\sum_{k=1}^{n}kb_k.\end{aligned}$$

Прибавив к обеим частям $\sum_{k=1}^{n} kb_k$, получим доказываемое неравенство. Лемма доказана. □

Лемма 1.4. *Если $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$, $N \in \mathbb{N}$, то верно неравенство*

$$\sum_{k=1}^{2N-1} kb_k \leqslant Nb_1 + 2N^2 b_{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}.$$

Доказательство. Разобьём левую часть доказываемого неравенства на две суммы и оценим каждую отдельно, пользуясь монотонностью последовательности $\boldsymbol{b}$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{2N-1} kb_k = \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} kb_k + \sum_{k=\lfloor\sqrt{N}\rfloor+1}^{2N-1} kb_k \leqslant \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \left\lfloor\sqrt{N}\right\rfloor b_1 + b_{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \sum_{k=\lfloor\sqrt{N}\rfloor+1}^{2N-1} k$$
$$\leqslant Nb_1 + b_{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \sum_{k=1}^{2N-1} k \leqslant Nb_1 + 2N^2 b_{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}.$$

Лемма доказана. □

1.1.3. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1.3. Для произвольных номеров $n, s \in \mathbb{N}$ положим $N = n(2s+1)$ и вычислим интеграл

$$\begin{aligned} I_{n,N} &= \int_{\pi/(2N)}^{\pi/(2n)} \big(g(\boldsymbol{b}, x) - 2\pi^{-2} v(\boldsymbol{b}, x)\big)\, dx \\ &= \int_{\pi/(2N)}^{\pi/(2n)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx\right) dx - 2\pi^{-2} \int_{\pi/(2N)}^{\pi/(2n)} x \left(\sum_{k=1}^{m(x)} kb_k\right) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{\pi/(2N)}^{\pi/(2n)} \sin kx\, dx - 2\pi^{-2} \sum_{l=2n}^{2N-1} \left(\sum_{k=1}^{l} kb_k\right) \int_{\pi/(l+1)}^{\pi/l} x\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \left(\cos\frac{\pi k}{2N} - \cos\frac{\pi k}{2n}\right) - \sum_{l=2n}^{2N-1} \left(\left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{(l+1)^2}\right) \sum_{k=1}^{m} kb_k\right). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Мы воспользовались возможностью изменить порядок интегрирования и суммирования при вычислении интеграла от $g(\boldsymbol{b}, x)$ вследствие равномерной сходимости ряда по синусам с коэффициентами из $\mathcal{M}$ на любом отрезке, лежащем

внутри интервала $(0, 2\pi)$, а также постоянством функции $\sum_{k=1}^{m(x)} kb_k$ на интервалах $\pi/(l+1) < x < \pi/l$, $l \in \mathbb{N}$. Преобразуем последнюю сумму в (1.5) по Абелю:

$$\sum_{l=2n}^{2N-1} \left(\left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{(l+1)^2} \right) \sum_{k=1}^{l} kb_k \right) = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{2n} kb_k - \frac{1}{4N^2} \sum_{k=1}^{2N-1} kb_k + \sum_{k=2n+1}^{2N-1} \frac{b_k}{k}. \quad (1.6)$$

Объединяя (1.5), (1.6), получим

$$I_{n,\,N} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \left(\cos \frac{\pi k}{2N} - \cos \frac{\pi k}{2n} \right) - \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{2n} kb_k + \frac{1}{4N^2} \sum_{k=1}^{2N-1} kb_k - \sum_{k=2n+1}^{2N-1} \frac{b_k}{k}.$$

Разобьём найденное представление $I_{n,\,N}$ на несколько сумм:

$$\begin{aligned} I_{n,\,N} = &- \sum_{k=n+1}^{2N-1} \frac{b_k}{k} \cos \frac{\pi k}{2n} + \sum_{k=2N}^{\infty} \frac{b_k}{k} \left(\cos \frac{\pi k}{2N} - \cos \frac{\pi k}{2n} \right) + \sum_{k=1}^{2N-1} \frac{b_k}{k} \left(\cos \frac{\pi k}{2N} - 1 \right) \\ &+ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k} \left(1 - \cos \frac{\pi k}{2n} \right) - \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{2n} kb_k + \frac{1}{4N^2} \sum_{k=1}^{2N-1} kb_k. \quad (1.7) \end{aligned}$$

Оценим отдельно первые пять слагаемых. По лемме 1.1

$$\sum_{k=n+1}^{n(4s+1)} \frac{b_k}{k} \cos \frac{\pi k}{2n} = \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{k=n(4\nu-3)+1}^{n(4\nu+1)} \frac{b_k}{k} \cos \frac{\pi k}{2n} \leqslant 0. \quad (1.8)$$

Поскольку $\cos\bigl(\pi k/(2n)\bigr) \leqslant 0$, $n(4s+1) < k < n(4s+2)$, то

$$\sum_{k=n(4s+1)+1}^{n(4s+2)-1} \frac{b_k}{k} \cos \frac{\pi k}{2n} \leqslant 0. \quad (1.9)$$

Складывая (1.8), (1.9) и учитывая, что $2N = n(4s+2)$, приходим к оценке первого слагаемого в (1.7):

$$-\sum_{k=n+1}^{2N-1} \frac{b_k}{k} \cos \frac{\pi k}{2n} \geqslant 0. \quad (1.10)$$

Применив лемму 1.2 для второго слагаемого в (1.7) при $\beta_k = b_k/k$, получим

$$\sum_{k=2N}^{\infty} \frac{b_k}{k} \left(\cos \frac{\pi k}{2N} - \cos \frac{\pi k}{2n} \right) \geqslant -\frac{b_{2N}}{2} - \frac{nb_{2N}}{N} = -\frac{b_{2N}}{2} - \frac{b_{2N}}{2s+1} > -b_{2N}. \quad (1.11)$$

Оценим остальные слагаемые:

$$\sum_{k=1}^{2N-1} \frac{b_k}{k}\left(\cos\frac{\pi k}{2N}-1\right) = -2\sum_{k=1}^{2N-1}\frac{b_k}{k}\sin^2\frac{\pi k}{4N} \geqslant -\frac{\pi^2}{8N^2}\sum_{k=1}^{2N-1} kb_k > -\frac{5}{4N^2}\sum_{k=1}^{2N-1} kb_k\,, \tag{1.12}$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{b_k}{k} \geqslant 0, \tag{1.13}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}\left(1-\cos\frac{\pi k}{2n}\right) = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}\sin^2\frac{\pi k}{4n} > \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kb_k\,. \tag{1.14}$$

В последнем переходе мы использовали неравенство $\sin(\pi t/4) > t/\sqrt{2}$, $t \in (0,1)$. Применяя (1.10)—(1.14), выводим из (1.7) следующую оценку:

$$I_{n,N} \geqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kb_k - \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n} kb_k - \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{2N-1} kb_k - b_{2N}.$$

Отсюда и из лемм 1.3, 1.4 получаем $I_{n,N} \geqslant b_1/\left(4n^2\right) - b_1/N - 2b_{\left[\sqrt{N}\right]} - b_{2N}$. Тем самым при любых $n, s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 4n$, $N = n(2s+1)$, верна оценка снизу

$$I_{n,N} \geqslant b_1/\left(8n^2\right) - 3b_{\left[\sqrt{N}\right]}.$$

А так как $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$, то при всех достаточно больших $N \in \mathbb{N}$ правая часть положительна, а значит, $I_{n,N} > 0$. Теорема доказана. □

1.2. Уточнённая оценка сверху суммы ряда по синусам

1.2.1. Формулировка основных результатов

Получена оценка сверху суммы ряда по синусам (1) с монотонными коэффициентами через функцию $u(\boldsymbol{b}, x)$ (см. (11)).

Теорема 1.4. *Для любой неубывающей и стремящейся к нулю последовательности $\boldsymbol{b}$ выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \leqslant u(\boldsymbol{b}, x), \quad 0 < x \leqslant \pi.$$

При дополнительном предположении выпуклости последовательности $\boldsymbol{b}$ получена оценка снизу.

Теорема 1.5. *Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности* $\boldsymbol{b}$ *выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b},x)\geqslant\frac{2}{\pi^2}\,u(\boldsymbol{b},x),\quad 0<x\leqslant\frac{9\pi}{20}. \tag{1.15}$$

1.2.2. Доказательство оценки сверху

Для сопряжённого ядра Дирихле будем использовать обозначение

$$\widetilde{D}_k(x)=\sum_{n=1}^{k}\sin nx=\frac{\cos(x/2)-\cos\left(k+1/2\right)x}{2\sin(x/2)}. \tag{1.16}$$

Воспользуемся оценкой остатка суммы ряда по синусам, полученной А. Ю. Поповым.

Лемма 1.5. *Если последовательность* $\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}$*, то для остатка ряда* (1) *справедливы следующие оценки сверху:*

$$\sum_{k=m(x)+1}^{\infty}b_k\sin kx\leqslant\frac{1}{2}\,b_{m(x)+1}\operatorname{tg}\frac{x}{4}.$$

Доказательство. Воспользовавшись преобразованием Абеля, находим

$$\begin{aligned}r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}b_k\sin kx&=\sum_{k=n+1}^{\infty}b_k\left(\widetilde{D}_k(x)-\widetilde{D}_{k-1}(x)\right)\\&=-b_{n+1}\widetilde{D}_n(x)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\widetilde{D}_k(x)(b_k-b_{k+1}).\end{aligned} \tag{1.17}$$

Ввиду неотрицательности всех разностей b_k-b_{k+1} приходим к оценке сверху

$$\begin{aligned}r_n(x)&\leqslant-b_{n+1}\widetilde{D}_n(x)+\left(\sup_{k\geqslant n+1}\widetilde{D}_k(x)\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}(b_k-b_{k+1})\\&=b_{n+1}\sup_{k\geqslant n+1}\left(\widetilde{D}_k(x)-\widetilde{D}_n(x)\right)=b_{n+1}\sup_{k\geqslant n+1}\frac{\cos(n+1/2)x-\cos(k+1/2)x}{2\sin(x/2)}.\end{aligned}$$

А так как $\cos(k+1/2)x\geqslant-1$, то

$$r_n(x)\leqslant b_{n+1}\,\frac{1+\cos(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}=b_{n+1}\,\frac{\cos^2(n/2+1/4)x}{\sin(x/2)}. \tag{1.18}$$

До сих пор $n\in\mathbb{N}$ было произвольным. Теперь возьмём $n=m(x)$. Тогда включение $x\in\big(\pi/\big(m(x)+1\big),\pi/m(x)\big]$ влечёт за собой двойное неравенство

$$\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\leqslant\left(\frac{m(x)}{2}+\frac{1}{4}\right)x\leqslant\frac{\pi}{2}+\frac{x}{4},$$

вследствие которого

$$\left|\cos\left(\frac{m(x)}{2}+\frac{1}{4}\right)x\right| \leqslant \sin\frac{x}{4}, \quad 0<x\leqslant\pi. \tag{1.19}$$

Из (1.18) и (1.19) находим

$$\begin{aligned} r_{m(x)}(x) &= \sum_{k=m(x)+1}^{\infty} b_k \sin kx \leqslant b_{m(x)+1}\sin^2\frac{x}{4}\operatorname{cosec}\frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{2}\,b_{m(x)+1}\operatorname{tg}\frac{x}{4} \leqslant \frac{1}{2}\,b_{m(x)+1}\sin\frac{x}{2}, \quad 0<x\leqslant\pi. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1.4. Применяя лемму 1.5, имеем

$$g(\boldsymbol{b},x) \leqslant \sum_{k=1}^{m(x)} b_k \sin kx + \frac{1}{2}\,b_{m(x)+1}\operatorname{tg}\frac{x}{4}, \quad 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно установить, что для всех x, $0<x\leqslant\pi/2$, выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{m(x)} b_k \sin kx + \frac{1}{2}\,b_{m(x)+1}\operatorname{tg}\frac{x}{4} \leqslant u(\boldsymbol{b},x),$$

которое равносильно следующему

$$\frac{1}{2}\,b_{m(x)+1}\operatorname{tg}\frac{x}{4} \leqslant \sum_{k=1}^{[(m(x)+1)/2]} b_k(kx-\sin kx)+\sum_{k=[(m(x)+3)/2]}^{m(x)} b_k\big((m(x)+1-k)x-\sin kx\big). \tag{1.20}$$

Двойное неравенство $m(x)x\leqslant\pi<\big(m(x)+1\big)x$ влечёт оценку

$$0\leqslant\pi-kx\leqslant\big(m(x)+1-k\big)x\leqslant\frac{\pi}{2},$$

справедливую для всех k, $m(x)/2<k\leqslant m(x)$, и x, $\pi/\big(m(x)+1\big)<x\leqslant\pi/m(x)$. Следовательно, для всех $x\in\big(\pi/\big(m(x)+1\big),\pi/m(x)\big]$ выполняются неравенства

$$\sin kx \leqslant kx, \quad 1\leqslant k\leqslant\frac{m(x)+1}{2}, \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} \sin kx=\sin(\pi-kx)\leqslant\sin\big(m(x)+1-k\big)x &\leqslant\big(m(x)+1-k\big)x, \\ \frac{m(x)}{2}<k&\leqslant m(x). \end{aligned} \tag{1.22}$$

В силу (1.21) и (1.22) все слагаемые правой части (1.20) неотрицательны. Таким образом, учитывая монотонность последовательности $\boldsymbol{b}$, для доказательства теоремы осталось проверить, что для всех $x \in \bigl(\pi/\bigl(m(x)+1\bigr), \pi/m(x)\bigr]$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4} \leqslant \sum_{k=1}^{[(m(x)+1)/2]} (kx - \sin kx) + \sum_{k=[(m(x)+3)/2]}^{m(x)} \Bigl(\bigl(m(x)+1-k\bigr)x - \sin kx\Bigr),$$

равносильное следующему

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4} \leqslant \frac{x}{2}\left(m^2(x) + m(x) + 2\left[\frac{m(x)+1}{2}\right]^2 - 2m(x)\left[\frac{m(x)+1}{2}\right]\right) - \widetilde{D}_{m(x)}(x). \tag{1.23}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $x \in (0, \pi/4]$ и, соответственно, $m(x) \geqslant 4$. Нетрудно заметить, что

$$m^2(x) + m(x) + 2\left[\frac{m(x)+1}{2}\right]^2 - 2m(x)\left[\frac{m(x)+1}{2}\right] \geqslant \frac{m(x)\bigl(m(x)+2\bigr)}{2}. \tag{1.24}$$

Учитывая (1.24) и оценку $\widetilde{D}_{m(x)}(x) \leqslant \operatorname{cosec}(x/2)$, $\pi/\bigl(m(x)+1\bigr) < x \leqslant \pi/m(x)$, приходим к выводу, что для доказательства (1.23) достаточно установить справедливость неравенства

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4} \leqslant \frac{xm(x)\bigl(m(x)+2\bigr)}{4} - \frac{1}{\sin(x/2)},$$

равносильного следующему

$$\sin^2\frac{x}{4} \leqslant m(x)\bigl(m(x)+2\bigr)\frac{x}{4}\sin\frac{x}{2} - 1. \tag{1.25}$$

С помощью оценок $\sin(x/4) \leqslant x/4$ и $\sin(x/2) \geqslant \sqrt{2}x/\pi$, справедливых на промежутке $(0, \pi/4]$, можно вывести (1.25) из неравенства

$$\frac{x^2}{16} \leqslant \frac{m(x)\bigl(m(x)+2\bigr)x^2}{2\sqrt{2}\pi} - 1.$$

Последнее, в свою очередь, вытекает из следующей цепочки неравенств, справедливых для $x \in \bigl(\pi/\bigl(m(x)+1\bigr), \pi/m(x)\bigr]$,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{16} &\leqslant \frac{\pi^2}{16m^2(x)} \leqslant \frac{\pi^2}{256} < \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{50\sqrt{2}} - 1 \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}\bigl(m(x)+1\bigr)^2} - 1 \\ &= \frac{\pi m(x)\bigl(m(x)+2\bigr)}{2\sqrt{2}\bigl(m(x)+1\bigr)^2} - 1 \leqslant \frac{m(x)\bigl(m(x)+2\bigr)x^2}{2\sqrt{2}\pi} - 1.\end{aligned}$$

Осталось проверить справедливость (1.23) для $x \in (\pi/4, \pi/2]$. Рассмотрим два случая: $x \in (\pi/4, \pi/3]$ и $x \in (\pi/3, \pi/2]$.

Если $x \in (\pi/3, \pi/2]$, то $m(x) = 2$ и (1.23) принимает вид

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4} \leqslant 2x - \sin x - \sin 2x.$$

Это неравенство верно, так как

$$\max_{x\in[\pi/3,\pi/2]} \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} < \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = \min_{x\in[\pi/3,\pi/2]} (2x - \sin x - \sin 2x).$$

Если $x \in (\pi/4, \pi/3]$, то $m(x) = 3$ и (1.23) принимает вид

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4} \leqslant 4x - \sin x - \sin 2x - \sin 3x.$$

Аналогично предыдущему случаю имеем

$$\max_{x\in[\pi/4,\pi/3]} \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < \pi - \sqrt{2} - 1 = \min_{x\in[\pi/4,\pi/3]} (4x - \sin x - \sin 2x - \sin 3x).$$

Теорема полностью доказана. □

1.2.3. Оценка снизу суммы ряда по синусам через уточнённую мажоранту

Доказательство теоремы 1.5. Пусть сначала $x \in (0, \pi/4]$. В силу теоремы 2.E достаточно доказать неравенство

$$\frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x) - \frac{1}{\pi}\, b_{m(x)} - b_{m(x)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right) \geqslant \frac{2}{\pi^2}\, u(\boldsymbol{b}, x),$$

равносильное следующему

$$\frac{2}{\pi^2}\, x \sum_{k=[(m(x)+3)/2]}^{m(x)} \big(2k - m(x) - 1\big) b_k \geqslant \frac{1}{\pi}\, b_{m(x)} + b_{m(x)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right).$$

Ввиду монотонности $\boldsymbol{b}$ остаётся проверить, что

$$\frac{2}{\pi^2}\, x \sum_{k=[(m(x)+3)/2]}^{m(x)} \big(2k - m(x) - 1\big) \geqslant \frac{1}{\pi} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}. \tag{1.26}$$

Действительно, имеем следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi^2}\, x \sum_{k=[(m(x)+3)/2]}^{m(x)} \big(2k - m(x) - 1\big) &= \frac{2}{\pi^2}\, x \left[\frac{m(x)+1}{2}\right] \left(m(x) - \left[\frac{m(x)+1}{2}\right]\right) \\ &\geqslant \frac{x\big(m(x)+1\big)\big(m(x)-1\big)}{2\pi^2} \geqslant \frac{m(x)-1}{2\pi} \geqslant \frac{3}{2\pi}.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\max_{(0,\pi/4]}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)=\frac{5}{\pi}-\frac{\sqrt{2}+1}{2}<\frac{3}{2\pi}.$$

Тем самым, неравенство (1.26) доказано.

Пусть теперь $x\in(\pi/4,\pi/3]$. Рассмотрим следующее представление суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами (см. [120] и (2.30)):

$$g(\boldsymbol{b},x)=\sum_{k=1}^{2}\widetilde{D}_k(x)\Delta^1 b_k+\frac{b_3}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4\sin^2(x/2)}\sum_{k=3}^{\infty}\bigl(\sin 3x-\sin(k+1)x\bigr)\Delta^2 b_k, \tag{1.27}$$

где $\Delta^2 b_k=\Delta^1\Delta^1 b_k=b_k-2b_{k+1}+b_{k+2}$. Оценим последнее слагаемое (1.27) так, как это сделано в [120], [43]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\sin^2(x/2)}\sum_{k=3}^{\infty}\bigl(\sin 3x-\sin(k+1)x\bigr)\Delta^2 b_k &\geqslant \inf_{k\geqslant 3}\frac{\sin 3x-\sin(k+1)x}{4\sin^2(x/2)}\sum_{k=3}^{\infty}\Delta^2 b_k\\ &=\inf_{k\geqslant 3}\frac{\sin 3x-\sin(k+1)x}{4\sin^2(x/2)}\Delta^1 b_3\geqslant\frac{\sin 3x-1}{4\sin^2(x/2)}\Delta^1 b_3.\end{aligned} \tag{1.28}$$

Учитывая (1.27) и (1.28), для проверки оценки (1.15) на промежутке $(\pi/4,\pi/3]$ достаточно доказать справедливость неравенства

$$\sin x\Delta^1 b_1+(\sin x+\sin 2x)\Delta^1 b_2+\frac{b_3}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{\sin 3x-1}{4\sin^2(x/2)}\Delta^1 b_3\geqslant\frac{2}{\pi^2}x(b_1+2b_2+b_3),$$

равносильного следующему

$$\begin{aligned}&b_1\left(\sin x-\frac{2}{\pi^2}\,x\right)+b_2\left(\sin 2x-\frac{4}{\pi^2}\,x\right)\\ &+b_3\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\sin x-\sin 2x-\frac{1-\sin 3x}{4\sin^2(x/2)}-\frac{2}{\pi^2}\,x\right)+b_4\frac{1-\sin 3x}{4\sin^2(x/2)}\geqslant 0.\end{aligned} \tag{1.29}$$

Так как последовательность $\boldsymbol{b}$ выпукла, для любых неотрицательных чисел λ и μ верна оценка

$$\lambda b_1+\mu b_4\geqslant(2\lambda-\mu)b_2+(2\mu-\lambda)b_3. \tag{1.30}$$

Применяя (1.30) при $\lambda=\sin x-2\pi^{-2}x$ и $\mu=(1-\sin 3x)/\bigl(4\sin^2(x/2)\bigr)$, получаем

$$\begin{aligned}&b_1\left(\sin x-\frac{2}{\pi^2}x\right)+b_4\frac{1-\sin 3x}{4\sin^2(x/2)}\\ &\quad\geqslant b_2\left(2\sin x-\frac{4}{\pi^2}\,x-\frac{1-\sin 3x}{4\sin^2(x/2)}\right)+b_3\left(\frac{1-\sin 3x}{2\sin^2(x/2)}+\frac{2}{\pi^2}\,x-\sin x\right).\end{aligned} \tag{1.31}$$

В силу (1.31) для доказательства (1.29) осталось проверить неравенство

$$\left(2\sin x+\sin 2x-\frac{1-\sin 3x}{4\sin^2(x/2)}-\frac{8}{\pi^2}\,x\right)b_2 + \left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{1-\sin 3x}{4\sin^2(x/2)}-2\sin x-\sin 2x\right)b_3\geqslant 0. \quad (1.32)$$

Наконец, поскольку

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{1-\sin 3x}{4\sin^2(x/2)}-2\sin x-\sin 2x=\frac{1-2\sin x}{4\sin^2(x/2)}<0,\qquad \frac{\pi}{4}<x\leqslant\frac{\pi}{3},$$

неравенство (1.32) сводится к оценке

$$\left(2\sin x+\sin 2x-\frac{1-\sin 3x}{4\sin^2(x/2)}-\frac{8}{\pi^2}\,x\right) + \left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{1-\sin 3x}{4\sin^2(x/2)}-2\sin x-\sin 2x\right)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{8}{\pi^2}\,x\geqslant 0,$$

справедливой ввиду того, что

$$\min_{x\in[\pi/4,\pi/3]}\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{8}{\pi^2}\,x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{8}{3\pi}>0.$$

В заключение рассмотрим случай $x\in(\pi/3,9\pi/20]$. Опять используем представление (2.30) функции $g(\boldsymbol{b},x)$ и оценку остатка, получаемую аналогично (1.28),

$$g(\boldsymbol{b},x)=\sin x\,\Delta^1 b_1+\frac{b_2}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4\sin^2(x/2)}\sum_{k=2}^{\infty}\bigl(\sin 2x-\sin(k+1)x\bigr)\Delta^2 b_k, \quad (1.33)$$

$$\frac{1}{4\sin^2(x/2)}\sum_{k=2}^{\infty}\bigl(\sin 2x-\sin(k+1)x\bigr)\Delta^2 b_k\geqslant\frac{\sin 2x-1}{4\sin^2(x/2)}\Delta^1 b_2. \quad (1.34)$$

В силу (1.33) и (1.34) достаточно доказать неравенство

$$\sin x\,\Delta^1 b_1+\frac{b_2}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x-1}{4\sin^2(x/2)}\,\Delta^1 b_3\geqslant\frac{2}{\pi^2}\,x(b_1+b_2),$$

равносильное следующему

$$b_1\left(\sin x-\frac{2}{\pi^2}\,x\right)+b_2\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\sin x-\frac{1-\sin 2x}{4\sin^2(x/2)}-\frac{2}{\pi^2}\,x\right)+b_3\frac{1-\sin 2x}{4\sin^2(x/2)}\geqslant 0. \quad (1.35)$$

Оценим левую часть (1.35), используя выпуклость $\boldsymbol{b}$ и положительность функции $1+\sin x-2\sin 2x$ на $(\pi/3,9\pi/20]$:

$$b_1\left(\sin x-\frac{2}{\pi^2}\,x\right)+b_2\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\sin x-\frac{1-\sin 2x}{4\sin^2(x/2)}-\frac{2}{\pi^2}\,x\right)+b_3\frac{1-\sin 2x}{4\sin^2(x/2)}$$

$$= b_1\left(\sin x - \frac{2}{\pi^2}\,x\right) - b_2\left(\frac{1+\sin x - 2\sin 2x}{4\sin^2(x/2)} + \frac{2}{\pi^2}\,x\right) + b_3\frac{1-\sin 2x}{4\sin^2(x/2)}$$
$$\geqslant b_1\left(\sin x - \frac{2}{\pi^2}\,x\right) - \frac{b_1+b_3}{2}\left(\frac{1+\sin x - 2\sin 2x}{4\sin^2(x/2)} + \frac{2}{\pi^2}\,x\right) + b_3\frac{1-\sin 2x}{4\sin^2(x/2)}$$
$$= b_1\left(\frac{3\sin x - 1}{8\sin^2(x/2)} - \frac{3x}{\pi^2}\right) + b_3\left(\frac{1-\sin x}{8\sin^2(x/2)} - \frac{x}{\pi^2}\right). \tag{1.36}$$

Функция $(3\sin x - 1)\operatorname{cosec}^2(x/2)$ убывает на $[\pi/3, 9\pi/20]$, так как

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3\sin x - 1}{\sin^2(x/2)}\right) = \frac{\operatorname{ctg}(x/2) - 3}{\sin^2(x/2)} \leqslant 4(\sqrt{3} - 3) < 0.$$

Следовательно,

$$\min_{x\in[\pi/3,\,9\pi/20]}\left(\frac{3\sin x - 1}{8\sin^2(x/2)} - \frac{3x}{\pi^2}\right) \geqslant \frac{1}{2} - \frac{3}{2\pi} > 0. \tag{1.37}$$

В силу (1.37) справедлива оценка

$$b_1\left(\frac{3\sin x - 1}{8\sin^2(x/2)} - \frac{3x}{\pi^2}\right) + b_3\left(\frac{1-\sin x}{8\sin^2(x/2)} - \frac{x}{\pi^2}\right)$$
$$\geqslant b_3\left(\frac{3\sin x - 1}{8\sin^2(x/2)} - \frac{3x}{\pi^2} + \frac{1-\sin x}{8\sin^2(x/2)} - \frac{x}{\pi^2}\right) = b_3\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{4x}{\pi^2}\right) \geqslant 0. \tag{1.38}$$

Последнее неравенство выполняется ввиду того, что

$$\min_{x\in[\pi/3,\,9\pi/20]}\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{4x}{\pi^2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{40} - \frac{9}{5\pi} > 0.$$

Объединяя (1.36) и (1.38), устанавливаем справедливость оценки (1.35). Теорема доказана. □

1.3. Критерий положительности суммы ряда по синусам с квазимонотонными коэффициентами

1.3.1. Формулировка основных результатов

Исследуется поведение при стремлении x к нулю справа отрицательной части суммы ряда (1) с квазимонотонными коэффициентами, найдено условие на произвольную неубывающую и ограниченную последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел, при выполнении которого в предельном соотношении Хартмана—Винтнера (см. теорему 1.A)

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(\boldsymbol{b}, x)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \quad \forall b \in \mathcal{M} \tag{1.39}$$

можно заменить $\mathcal{M}$ на класс $\mathcal{M}_\Lambda$ всех последовательностей $\boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k=1}^\infty$, для которых справедливо включение $\{b_k/\lambda_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{M}$. Полагаем, что $\lambda = \lim_{k\to\infty} \lambda_k$.

Теорема 1.6. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda - \lambda_k) < +\infty, \tag{1.40}$$

то предельное соотношение (1.39) *выполняется, какова бы ни была последовательность* $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda$. *Если же* $\sum_{k=1}^\infty k(\lambda - \lambda_k) = +\infty$, *то существует такая последовательность* $\widetilde{\boldsymbol{b}} = \{\widetilde{b}_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{M}_\Lambda$, *что* $\sum_{k=1}^\infty k\widetilde{b}_k = +\infty$, *но* $\underline{\lim}_{x\to+0} g(\widetilde{\boldsymbol{b}}, x)/x = -\infty$.

Установлено, что отрицательная часть суммы ряда (1) с квазимонотонными коэффициентами, вообще говоря, не должна быть бесконечно малой при $x \to +0$.

Теорема 1.7. *Если*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, k(\lambda - \lambda_k) < +\infty, \tag{1.41}$$

то $\underline{\lim}_{x\to+0} g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant 0$ $(\forall \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda)$. *Если же* $\overline{\lim}_{k\to\infty} k(\lambda - \lambda_k) = +\infty$, *то существует такая последовательность* $\widetilde{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{M}_\Lambda$, *что* $\underline{\lim}_{x\to+0} g(\widetilde{\boldsymbol{b}}, x) = -\infty$.

Обобщён критерий интегрируемости $g(\boldsymbol{b}, \cdot)$, найденный В. Янгом [123] в случае $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$, на последовательности $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda$, если Λ ограничена:

$$g(\boldsymbol{b}, \cdot) \in L(0, \pi) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} < +\infty, \qquad \boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{M}_\Lambda. \tag{1.42}$$

Получено условие на последовательность Λ, достаточное для интегрируемости отрицательной части суммы ряда (1) на интервале $(0, \pi)$, то есть справедливости включения

$$g^-(\boldsymbol{b}, \cdot) \in L(0, \pi) \quad \forall \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda. \tag{1.43}$$

Теорема 1.8 (А. Ю. Попов)**.** *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{k} < +\infty, \quad \mu_k = \lambda - \lambda_k, \tag{1.44}$$

то справедливо соотношение (1.43). *Если последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *вогнута (то есть* $\lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} \leqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$*),* $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *медленно меняется,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^{3/2}}{k} = +\infty,$$

то существует последовательность $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{M}_\Lambda$*, порождающая ряд* (1)*, отрицательная часть суммы которого не интегрируема на* $(0, \pi)$.

1.3.2. Двусторонняя оценка остатка ряда с квазимонотонными коэффициентами

При любом $x \in (0, \pi]$ рассмотрим остаток ряда

$$R(\boldsymbol{b}, x) = \sum_{k=2m(x)+1}^{\infty} b_k \sin kx. \tag{1.45}$$

Основным результатом этого пункта является следующая лемма.

Лемма 1.6. *Если* Λ *— произвольная неубывающая и ограниченная последовательность,* $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda$*, то при любом* $x \in (0, \pi]$ *верно двойное неравенство*

$$- b_{2m(x)+1} \left(\frac{5}{2} \sin \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \frac{\lambda - \lambda_{2m(x)+1}}{\lambda_{2m(x)+1}} \operatorname{cosec} \frac{x}{2} \right) \leqslant R(\boldsymbol{b}, x)$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{\lambda - \lambda_{2m(x)+1}}{\lambda_{2m(x)+1}} \right) b_{2m(x)+1} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \operatorname{cosec} \frac{x}{2} \right). \tag{1.46}$$

Сначала докажем другую лемму. Пусть $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$. Если $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$, то очевидно равенство $r_n = b_n$. Оценим сверху r_n в более общем случае $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda$.

Лемма 1.7. *При любом* $n \in \mathbb{N}$ *верна оценка*

$$r_n \leqslant b_n \left(1 + 2 \, \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda_n} \right).$$

Доказательство. При любом $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$|b_k - b_{k+1}| = \left| b_k - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} b_{k+1} + \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} b_{k+1} - b_{k+1} \right|$$
$$\leqslant \left| b_k - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} b_{k+1} \right| + \left| b_{k+1} \Big(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} - 1 \Big) \right|. \tag{1.47}$$

Ввиду невозрастания $\{b_k/\lambda_k\}$ и неубывания $\{\lambda_k\}$ верны неравенства

$$b_k - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} b_{k+1} \geqslant 0, \qquad b_{k+1} \geqslant 0, \qquad \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} - 1 \leqslant 0,$$

которые позволяют в правой части (1.47) избавиться от модулей и получить оценку

$$|b_k - b_{k+1}| \leqslant b_k - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} b_{k+1} + b_{k+1}\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) = b_k - b_{k+1} + 2b_{k+1}\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right).$$

Сложив эти оценки по $k \in [n, +\infty)$, приходим к неравенству

$$\sum_{k=n}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) + 2\sum_{k=n}^{\infty} b_{k+1}\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right). \tag{1.48}$$

Поскольку $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$, то

$$\sum_{k=n}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_n. \tag{1.49}$$

Имеем далее

$$\sum_{k=n}^{\infty} b_{k+1}\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_{k+1}}{\lambda_{k+1}} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \leqslant \frac{b_n}{\lambda_n} \sum_{k=n}^{\infty} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \frac{b_n}{\lambda_n}(\lambda - \lambda_n). \tag{1.50}$$

Из (1.48)—(1.50) получаем требуемый результат:

$$\sum_{k=n}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \leqslant b_n + 2\,\frac{b_n}{\lambda_n}(\lambda - \lambda_n) = b_n\left(1 + 2\,\frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda_n}\right).$$

Лемма доказана. □

Доказательство леммы 1.6. Преобразуем остаток ряда по Абелю. Находим

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{b}, x) = \sum_{k=2m(x)+1}^{\infty} b_k\big(\widetilde{D}_k(x) - \widetilde{D}_{k-1}(x)\big) &= -b_{2m(x)+1}\widetilde{D}_{2m(x)}(x) \\ &+ \sum_{k=2m(x)+1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})\widetilde{D}_k(x) = -b_{2m(x)+1}\widetilde{D}_{2m(x)}(x) \\ + \sum_{k=2m(x)+1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})\frac{\cos(x/2) - 1}{2\sin(x/2)} &+ \sum_{k=2m(x)+1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})\frac{1 - \cos(k+1/2)\,x}{2\sin(x/2)}. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Из представления (1.51) выводим оценки снизу и сверху

$$R(\boldsymbol{b},x)\geqslant\frac{\cos\left(2m(x)+1/2\right)x-\cos\left(x/2\right)}{2\sin\left(x/2\right)}\,b_{2m(x)+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=2m(x)+1}^{\infty}(b_k-b_{k+1})^{+}\operatorname{tg}\frac{x}{4}$$
$$-\sum_{k=2m(x)+1}^{\infty}(b_k-b_{k+1})^{-}\,\frac{1-\cos\left(k+1/2\right)x}{2\sin\left(x/2\right)},\tag{1.52}$$

$$R(\boldsymbol{b},x)\leqslant\frac{\cos\left(2m(x)+1/2\right)x-\cos\left(x/2\right)}{2\sin\left(x/2\right)}\,b_{2m(x)+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=2m(x)+1}^{\infty}(b_k-b_{k+1})^{-}\operatorname{tg}\frac{x}{4}$$
$$+\sum_{k=2m(x)+1}^{\infty}(b_k-b_{k+1})^{+}\,\frac{1-\cos\left(k+1/2\right)x}{2\sin\left(x/2\right)}.\tag{1.53}$$

Ввиду неравенства $b_{k+1}/\lambda_{k+1}\leqslant b_k/\lambda_k$ имеем

$$b_k-b_{k+1}\geqslant b_k-b_k\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}=\frac{b_k}{\lambda_k}(\lambda_k-\lambda_{k+1}).$$

Следовательно,

$$(b_k-b_{k+1})^{-}\leqslant\frac{b_k}{\lambda_k}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\leqslant\frac{b_{2m(x)+1}}{\lambda_{2m(x)+1}}(\lambda_{k+1}-\lambda_k).\tag{1.54}$$

Из (1.54) находим

$$\sum_{k=2m(x)+1}^{\infty}(b_k-b_{k+1})^{-}\leqslant\frac{b_{2m(x)+1}}{\lambda_{2m(x)+1}}\sum_{k=2m(x)+1}^{\infty}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)=\frac{b_{2m(x)+1}}{\lambda_{2m(x)+1}}(\lambda-\lambda_{2m(x)+1}).\tag{1.55}$$

Из равенств $a^{+}=\big(a+|a|\big)/2$, (1.49) и леммы 1.7 находим

$$\sum_{k=2m(x)+1}^{\infty}(b_k-b_{k+1})^{+}\leqslant b_{2m(x)+1}\left(1+\frac{\lambda-\lambda_{2m(x)+1}}{\lambda_{2m(x)+1}}\right).\tag{1.56}$$

Из включения $x\in\big(\pi/\big(m(x)+1\big),\pi/m(x)\big]$ следует, что

$$\frac{\cos\left(2m(x)+1/2\right)x-\cos\left(x/2\right)}{2\sin\left(x/2\right)}=-\frac{\sin\left(m(x)+1/2\right)x\cdot\sin m(x)x}{\sin\left(x/2\right)}$$
$$\geqslant-\sin\frac{\pi\left(2m(x)+1\right)}{2(m(x)+1)}\,\sin\frac{\pi m(x)}{m(x)+1}\Big/\sin\frac{\pi}{2(m(x)+1)}$$
$$=-\sin\frac{\pi}{m(x)+1}\geqslant-2\sin\frac{x}{2}.\tag{1.57}$$

Оценка же сверху

$$\frac{\cos\left(2m(x)+1/2\right)x-\cos\left(x/2\right)}{2\sin\left(x/2\right)}\leqslant\frac{1-\cos\left(x/2\right)}{2\sin\left(x/2\right)}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4}\tag{1.58}$$

очевидна. На основании (1.55)—(1.58) мы можем продолжить оценки (1.52) и (1.53). Получим

$$R(\boldsymbol{b},x)\geqslant -2b_{2m(x)+1}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\,b_{2m(x)+1}\left(1+\frac{\lambda-\lambda_{2m(x)+1}}{\lambda_{2m(x)+1}}\right)\operatorname{tg}\frac{x}{4}$$
$$-\frac{b_{2m(x)+1}}{\lambda_{2m(x)+1}}\frac{\lambda-\lambda_{2m(x)+1}}{\sin\left(x/2\right)}\geqslant -\frac{5}{2}\,b_{2m(x)+1}\sin\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\frac{\lambda-\lambda_{2m(x)+1}}{\lambda_{2m(x)+1}}\,b_{2m(x)+1}\operatorname{cosec}\frac{x}{2},$$
$$R(\boldsymbol{b},x)\leqslant\frac{1}{2}\,b_{2m(x)+1}\operatorname{tg}\frac{x}{4}\left(1+\frac{\lambda-\lambda_{2m(x)+1}}{\lambda_{2m(x)+1}}\right)$$
$$+\,b_{2m(x)+1}\left(1+\frac{\lambda-\lambda_{2m(x)+1}}{\lambda_{2m(x)+1}}\right)\operatorname{cosec}\frac{x}{2}.$$

Лемма доказана. □

Будем придерживаться стандартного обозначения для ядра Дирихле:

$$D_k(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos nx=\frac{\sin\left(k+1/2\right)x}{2\sin(x/2)}. \tag{1.59}$$

Лемма 1.8. *Если* $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{M}_\Lambda$, $N\in\mathbb{N}$, *то*

$$\left|\sum_{k=N}^{\infty}\beta_k\cos kx\right|\leqslant\beta_N\left(1+\frac{\lambda-\lambda_N}{\lambda_N}\right)\operatorname{cosec}\frac{x}{2},\quad x\in(0,\pi).$$

Доказательство. Осуществим преобразование Абеля остатка ряда. Находим

$$\sum_{k=N}^{\infty}\beta_k\cos kx=\sum_{k=N}^{\infty}\beta_k\big(D_k(x)-D_{k-1}(x)\big)=-\beta_N D_{N-1}(x)+\sum_{k=N}^{\infty}(\beta_k-\beta_{k+1})D_k(x).$$

С учётом леммы 1.7 имеем

$$\left|-\beta_N D_{N-1}(x)+\sum_{k=N}^{\infty}(\beta_k-\beta_{k+1})D_k(x)\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(\beta_N+\sum_{k=N}^{\infty}|\beta_k-\beta_{k+1}|\right)\operatorname{cosec}\frac{x}{2}$$
$$\leqslant\beta_N\left(1+\frac{\lambda-\lambda_N}{\lambda_N}\right)\operatorname{cosec}\frac{x}{2}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.9. *Если* $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{M}_\Lambda$, $N\in\mathbb{N}$, *то*

$$\left|\sum_{k=N}^{\infty}\beta_k\sin kx\right|\leqslant\beta_N\left(1+\frac{\lambda-\lambda_N}{\lambda_N}\right)\operatorname{cosec}\frac{x}{2},\qquad x\in(0,\pi).$$

Доказательство. Осуществив преобразование Абеля остатка ряда, находим

$$\sum_{k=N}^{\infty}\beta_k\sin kx=\sum_{k=N}^{\infty}\beta_k\big(\widetilde{D}_k(x)-\widetilde{D}_{k-1}(x)\big)=-\beta_N\widetilde{D}_{N-1}(x)+\sum_{k=N}^{\infty}(\beta_k-\beta_{k+1})\widetilde{D}_k(x).$$

С учётом леммы 1.7 имеем

$$\begin{aligned}\Big|-\beta_N\widetilde{D}_{N-1}(x)+\sum_{k=N}^{\infty}(\beta_k-\beta_{k+1})\widetilde{D}_k(x)\Big|&\leqslant\frac{1}{2}\left(\beta_N+\sum_{k=N}^{\infty}|\beta_k-\beta_{k+1}|\right)\operatorname{cosec}\frac{x}{2}\\&\leqslant\beta_N\left(1+\frac{\lambda-\lambda_N}{\lambda_N}\right)\operatorname{cosec}\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

1.3.3. Оценка снизу суммы по косинусам

Рассмотрим сумму

$$\tau(\boldsymbol{b},x)=\sum_{k=1}^{m(x)}b_{k+m(x)}\cos kx,\tag{1.60}$$

где, как и выше, $0<x\leqslant\pi$, $\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}_\Lambda$.

Лемма 1.10. *При любом $x\in(0,\pi]$ верна оценка снизу*

$$\tau(\boldsymbol{b},x)\geqslant-\frac{b_{m(x)}}{\lambda_{m(x)}}\sum_{1\leqslant k<m(x)/2}\big(\lambda-\lambda_{k+m(x)}\big)-b_{2m(x)}.\tag{1.61}$$

Доказательство. Положим $p=m(x)/2$. Число p может быть либо целым, либо полуцелым, но независимо от этого сумма косинусов

$$\cos(p-\nu)x+\cos(p+\nu)x=2\cos px\cos\nu x\tag{1.62}$$

при любом $\nu\in[0,p]$ неотрицательна. Если число p целое, то сумму (1.60) можно представить как сумму по всем $k=p\pm\nu$, где ν пробегает все целые значения от 1 до $p-1$, и ещё двух слагаемых с номерами $k=p$ и $k=2p$. Если же число p является полуцелым, то сумму (1.60) можно представить как сумму по всем $k=p\pm\nu$, где ν пробегает все полуцелые значения от $1/2$ до $p-1$, и ещё одного слагаемого с номером $k=m(x)$. Множество значений, пробегаемых ν, обозначим A. В результате получим равенство

$$\begin{aligned}\tau(\boldsymbol{b},x)=&\sum_{\nu\in A}\big(b_{m(x)+p-\nu}\cos(p-\nu)x+b_{m(x)+p+\nu}\cos(p+\nu)x\big)\\&+\delta b_{m(x)+p}\cos px+b_{2m(x)}\cos m(x)x,\end{aligned}$$

где $\delta = 0$, если p нецелое и $\delta = 1$, если p является целым. Поскольку

$$\cos px = \cos(m(x)x/2) \geqslant 0,$$

то очевидна оценка

$$\begin{aligned}\tau(\boldsymbol{b}, x) &\geqslant \sum_{\nu\in A}\big(b_{m(x)+p-\nu}\cos(p-\nu)x + b_{m(x)+p+\nu}\cos(p+\nu)x\big) - b_{2m(x)}\\ &= \sum_{\nu\in A}\big(b_{m(x)+p-\nu} - b_{m(x)+p+\nu}\big)\cos(p-\nu)x\\ &+ \sum_{\nu\in A} b_{m(x)+p+\nu}\big(\cos(p-\nu)x + \cos(p+\nu)x\big) - b_{2m(x)}.\end{aligned}$$

Теперь, воспользовавшись неотрицательностью суммы (1.62), продолжим оценку следующим образом:

$$\begin{aligned}\tau(\boldsymbol{b}, x) &\geqslant \sum_{\nu\in A}\big(b_{m(x)+p-\nu} - b_{m(x)+p+\nu}\big)\cos(p-\nu)x - b_{2m(x)}\\ &\geqslant -\sum_{\nu\in A}\big(b_{m(x)+p-\nu} - b_{m(x)+p+\nu}\big)^{-} - b_{2m(x)}.\end{aligned} \tag{1.63}$$

Из определения класса $\mathcal{M}_\Lambda$ следуют неравенства

$$b_{n_2} \leqslant \frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}}\, b_{n_1}, \quad n_1 < n_2. \tag{1.64}$$

Следовательно,

$$b_{n_1} - b_{n_2} \geqslant b_{n_1}\left(1 - \frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad (b_{n_1} - b_{n_2})^{-} \leqslant b_{n_1}\left(\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}} - 1\right).$$

Отсюда и из (1.63) находим

$$\begin{aligned}\tau(\boldsymbol{b}, x) &\geqslant -\sum_{\nu\in A} b_{m(x)+p-\nu}\left(\frac{\lambda_{m(x)+p+\nu}}{\lambda_{m(x)+p-\nu}} - 1\right) - b_{2m(x)}\\ &\geqslant -\sum_{\nu\in A} b_{m(x)+p-\nu}\left(\frac{\lambda}{\lambda_{m(x)+p-\nu}} - 1\right) - b_{2m(x)}\\ &= -\sum_{\nu\in A}\frac{b_{m(x)+p-\nu}}{\lambda_{m(x)+p-\nu}}\big(\lambda - \lambda_{m(x)+p-\nu}\big) - b_{2m(x)}\\ &= -\sum_{1\leqslant k<m(x)/2}\frac{b_{m(x)+k}}{\lambda_{m(x)+k}}\big(\lambda - \lambda_{m(x)+k}\big) - b_{2m(x)}.\end{aligned}$$

Отсюда и из монотонности отношения b_n/λ_n получаем (1.61). Лемма доказана.

□

1.3.4. Аналог теоремы Хартмана—Винтнера для рядов с квазимонотонными коэффициентами

Доказательство теоремы 1.6. Возьмём произвольную неубывающую последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda = \lim_{k\to\infty}\lambda_k$, удовлетворяющую условию (1.40). Заметим, что из (1.40) и монотонности разности $\lambda - \lambda_k$ следует предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty} k^2(\lambda - \lambda_k) = 0. \tag{1.65}$$

Пусть $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda$. Обозначим

$$S(\boldsymbol{b}, x) = \sum_{k=1}^{2m(x)} b_k \sin kx. \tag{1.66}$$

Из (1.66) и (1.45) следует равенство

$$g(\boldsymbol{b}, x) = S(\boldsymbol{b}, x) + R(\boldsymbol{b}, x). \tag{1.67}$$

Из (1.46) находим

$$\frac{R(\boldsymbol{b}, x)}{x} \geqslant -B(x) b_{2m(x)+1}, \tag{1.68}$$

где

$$B(x) = \frac{5\sin(x/2)}{2x} + \frac{3(\lambda - \lambda_{2m(x)+1})}{2\lambda_{2m(x)+1} x \sin(x/2)}. \tag{1.69}$$

Из (1.65) и эквивалентности $x \sim \pi/m(x)$, $x \to +0$, следует, что второе слагаемое в (1.69) стремится к нулю при $x \to +0$ и $\lim_{x\to+0} B(x) = 5/4$. Отсюда, из (1.68) и равенства $\lim_{x\to+0} b_{m(x)} = 0$ заключаем, что отношение $R(\boldsymbol{b}, x)/x$ оценивается снизу отрицательной и бесконечно малой при $x \to +0$ функцией, то есть

$$\varliminf_{x\to+0} \frac{R(\boldsymbol{b}, x)}{x} \geqslant 0. \tag{1.70}$$

Из (1.67) и (1.70) заключаем, что для доказательства предельного соотношения (1.39) (для любой последовательности $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda$ и рассматриваемых в теореме последовательностей Λ) достаточно вывести импликацию

$$\sum_{k=1}^{\infty} k b_k = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to0} \frac{S(\boldsymbol{b}, x)}{x} = +\infty. \tag{1.71}$$

(В случае сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k b_k$ имеет место включение $g(\boldsymbol{b}, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ и предельное соотношение (1.39) верно без предположения квазимонотонности последовательности $\boldsymbol{b}$.)

Итак, займёмся выводом (1.71). Обозначим $\alpha(x) = \pi - xm(x)$,

$$S_1(\boldsymbol{b}, x) = \sum_{k=1}^{m(x)} (b_k - b_{k+m(x)}) \sin kx, \qquad S_2(\boldsymbol{b}, x) = \sum_{k=1}^{m(x)} b_{k+m(x)} \sin kx \tag{1.72}$$

и преобразуем сумму $S(\boldsymbol{b}, x)$:

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{b}, x) &= \sum_{k=1}^{m(x)} \bigl(b_k \sin kx + b_{k+m(x)} \sin(k + m(x))x\bigr) \\ &= S_1(\boldsymbol{b}, x) + \sum_{k=1}^{m(x)} \bigl(b_{k+m(x)} \sin kx + \sin(kx + \pi - \alpha(x))\bigr) \\ &= S_1(\boldsymbol{b}, x) + \sum_{k=1}^{m(x)} b_{k+m(x)} \bigl(\sin kx + \sin(\alpha(x) - kx)\bigr) \\ &= S_1(\boldsymbol{b}, x) + (1 - \cos\alpha(x)) S_2(\boldsymbol{b}, x) + \sin\alpha(x)\, \tau(\boldsymbol{b}, x). \end{aligned} \tag{1.73}$$

Воспользовавшись леммой 1.10, а также неотрицательностью второго слагаемого в (1.73), получаем оценку снизу (очевидно, что $0 \leqslant \alpha(x) \leqslant \pi/(m(x)+1) < x$)

$$S(\boldsymbol{b}, x) \geqslant S_1(\boldsymbol{b}, x) - \sin x \left(\frac{b_{m(x)}}{\lambda_{m(x)}} \sum_{1 \leqslant k < m(x)/2} (\lambda - \lambda_{k+m(x)}) + b_{2m(x)} \right). \tag{1.74}$$

Даже при условии (1.41) (и тем более при условии (1.40)) имеем

$$\lim_{x \to +0} \left(\frac{b_{m(x)}}{\lambda_{m(x)}} \sum_{1 \leqslant k < m(x)/2} (\lambda - \lambda_{k+m(x)}) + b_{2m(x)} \right) = 0. \tag{1.75}$$

Из (1.74), (1.75) видно, что для доказательства (1.71) достаточно установить справедливость импликации

$$\sum_{k=1}^{\infty} k b_k = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to +0} \frac{S_1(\boldsymbol{b}, x)}{x} = +\infty \qquad \forall \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda.$$

Стремление отношения $S_1(\boldsymbol{b}, x)/x$ к $+\infty$ мы получим, доказав неравенства

$$\varliminf_{x \to +0} \frac{S_1(\boldsymbol{b}, x)}{x} \geqslant M \qquad \forall M > 0. \tag{1.76}$$

Возьмём произвольное число $M > 0$, зафиксируем его и выберем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{k=1}^{N} k b_k > \pi M, \qquad \sum_{k=N+1}^{\infty} k(\lambda - \lambda_k) < M, \qquad \frac{b_k}{\lambda_k} < 1 \quad \text{при } k \geqslant N+1. \tag{1.77}$$

Положим

$$\beta = \min_{1\leqslant k\leqslant N} b_k. \tag{1.78}$$

Из определения класса $\mathcal{M}_\Lambda$ видно, что если $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda$ и какой-либо из элементов $\boldsymbol{b}$ равен нулю, то все элементы этой последовательности с бóльшими номерами также равны нулю. Но тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} kb_k$ сходится, а мы рассматриваем случай расходимости. Поэтому в нашем случае все элементы b_k положительны и $\beta > 0$. Следовательно, ввиду стремления к нулю b_k найдётся такой номер $m_0 \geqslant 6$, что

$$b_{m(x)} \leqslant \frac{\beta}{3} \quad \forall\, m(x) \geqslant m_0. \tag{1.79}$$

Покажем, что при любом $x \in (0, \pi/m_0]$ выполняется неравенство

$$S_1(\boldsymbol{b}, x) \geqslant Mx. \tag{1.80}$$

Это неравенство очевидным образом повлечёт за собой справедливость оценки снизу (1.76). Имеем

$$S_1(\boldsymbol{b}, x) = \sum_{k=1}^{N} (b_k - b_{k+m(x)}) \sin kx + \sum_{k=N+1}^{m(x)} (b_k - b_{k+m(x)}) \sin kx.$$

Поскольку $x \leqslant \pi/m_0$, то $m(x) \geqslant m_0$. Следовательно, согласно (1.79) верно неравенство

$$b_{k+m(x)} \leqslant \frac{\beta}{3} \leqslant \frac{b_k}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad b_k - b_{k+m(x)} \geqslant \frac{2}{3} b_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

Отсюда, учитывая двустороннюю оценку синуса

$$\frac{3\alpha(x)}{\pi} \leqslant \sin \alpha(x) < \alpha(x), \quad 0 < \alpha(x) \leqslant \frac{\pi}{6}, \tag{1.81}$$

выводим

$$S_1(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \frac{2x}{\pi} \sum_{k=1}^{N} kb_k - \sum_{k=N+1}^{m(x)} (b_k - b_{k+m(x)})^- kx. \tag{1.82}$$

Согласно (1.64) имеем

$$(b_k - b_{k+m(x)})^- \leqslant b_k \left(\frac{\lambda_{k+m(x)}}{\lambda_k} - 1 \right) = \frac{b_k}{\lambda_k} (\lambda_{k+m(x)} - \lambda_k) \leqslant \frac{b_k}{\lambda_k} (\lambda - \lambda_k). \tag{1.83}$$

Из (1.82), (1.83) находим

$$S_1(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \frac{2x}{\pi} \sum_{k=1}^{N} kb_k - x \sum_{k=N+1}^{m(x)} \frac{b_k}{\lambda_k} k(\lambda - \lambda_k). \tag{1.84}$$

Наконец, воспользовавшись неравенствами (1.77), приходим к оценке

$$S_1(\boldsymbol{b}, x) > \frac{2x}{\pi}\,\pi M - x \sum_{k=N+1}^{m(x)} k(\lambda - \lambda_k) > 2Mx - Mx = Mx,$$

которую и требовалось доказать (см. (1.80)). Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы возьмём произвольную неубывающую и ограниченную последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda = \lim_{k\to\infty} \lambda_k$, удовлетворяющую условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda - \lambda_k) = +\infty, \tag{1.85}$$

и построим последовательность $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{M}_\Lambda$, для которой справедливо равенство $\underline{\lim}_{x\to+0}\bigl(g(\tilde{\boldsymbol{b}}, x)/x\bigr) = -\infty$. Сначала рекуррентно определим возрастающую последовательность натуральных чисел $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим $m_1 = 1$, а m_n определяется через m_{n-1} следующим образом. Находится номер m'_n такой (он существует в силу (1.85)), что выполняется неравенство

$$\sum_{k=m_{n-1}}^{m'_n} k(\lambda - \lambda_k) > \pi m_{n-1}^5. \tag{1.86}$$

Затем мы берём номер $m_n > 6m'_n$ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\lambda - \lambda_{m_n} < \frac{1}{2}\bigl(\lambda - \lambda_{m'_n}\bigr). \tag{1.87}$$

(Это возможно ввиду стремления к нулю разности $\lambda - \lambda_k$ и не обращения её в нуль ни при каком значении k.) После построения последовательности $\{m_n\}$, последовательность $\tilde{\boldsymbol{b}}$ зададим формулами

$$\tilde{b}_1 = \lambda_1, \qquad \tilde{b}_k = m_n^{-2}\lambda_k, \quad 2m_n \leqslant k < 2m_{n+1}. \tag{1.88}$$

Включение $\{\tilde{b}_k/\lambda_k\} \in \mathcal{M}$ является очевидным, а значит $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{M}_\Lambda$.

Положим $x_n = \pi/m_n$ и оценим сверху $g(\tilde{\boldsymbol{b}}, x_n)$. Согласно лемме 1.6 и (1.88) имеем

$$R^+(\tilde{\boldsymbol{b}}, x_n) = O\left(\frac{\tilde{b}_{2m_n+1}}{x_n}\right) = O\left(m_n^{-1}\right) = O(x_n). \tag{1.89}$$

Арифметическая природа чисел x_n и соотношения (1.72), (1.73) влекут за собой равенства $\alpha(x_n) = 0$,

$$S(\tilde{\boldsymbol{b}}, x_n) = S_1(\tilde{\boldsymbol{b}}, x_n). \tag{1.90}$$

Воспользовавшись при $k \in [2m_{n-1}, 2m_n - 1]$ выражениями (1.88) для $\tilde{b}_k$, находим

$$S_1(\tilde{\boldsymbol{b}}, x_n) = \sum_{k=1}^{2m_{n-1}-1} (\tilde{b}_k - \tilde{b}_{k+m_n}) \sin kx_n + m_{n-1}^{-2} \sum_{k=2m_{n-1}}^{m_n} (\lambda_k - \lambda_{k+m_n}) \sin kx_n. \quad (1.91)$$

Ввиду положительности элементов последовательности $\tilde{\boldsymbol{b}}$ и неположительности каждого слагаемого во второй сумме (1.91) верна оценка сверху

$$S_1(\tilde{\boldsymbol{b}}, x_n) < \sum_{k=1}^{2m_{n-1}} b_k \sin kx_n - m_{n-1}^{-2} \sum_{k=2m_{n-1}}^{m'_n} (\lambda_{k+m_n} - \lambda_k) \sin kx_n. \quad (1.92)$$

Первую сумму в (1.92) оценим сверху с помощью неравенств $\sin kx_n < kx_n$ и $\tilde{b}_k < \lambda$:

$$\sum_{k=1}^{2m_{n-1}} \tilde{b}_k \sin kx_n < \lambda \sum_{k=1}^{2m_{n-1}} kx_n < 3\lambda m_{n-1}^2 x_n. \quad (1.93)$$

Из неубывания последовательности Λ и (1.87) следует, что при любом $k \leqslant m'_n$ верны неравенства

$$\lambda_{k+m_n} - \lambda_k \geqslant \lambda_{m_n} - \lambda_{m'_n} \geqslant \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_{m'_n}) \geqslant \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_k). \quad (1.94)$$

Из (1.94), (1.81) и (1.86) получаем оценку снизу второй суммы в (1.92):

$$\begin{aligned} \sum_{k=2m_{n-1}}^{m'_n} (\lambda_{k+m_n} - \lambda_k) \sin kx_n &\geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=2m_{n-1}}^{m'_n} (\lambda - \lambda_k) \frac{3}{\pi} kx_n \\ &= \frac{3}{2\pi} x_n \sum_{k=2m_{n-1}}^{m'_n} k(\lambda - \lambda_k) > \frac{3}{2} x_n m_{n-1}^5. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Из (1.92), (1.93), (1.95) находим

$$S_1(\tilde{\boldsymbol{b}}, x_n) < 3\lambda m_{n-1}^2 x_n - m_{n-1}^3 x_n. \quad (1.96)$$

Соотношения (1.67), (1.89), (1.90) и (1.96) влекут за собой асимптотическую оценку

$$g(\tilde{\boldsymbol{b}}, x_n) < 3\lambda m_{n-1}^2 x_n - m_{n-1}^3 x_n + O(x_n),$$

из которой сразу следует предельное соотношение $\lim_{n\to\infty} g(\tilde{\boldsymbol{b}}, x_n)/x_n = -\infty$, доказывающее вторую часть теоремы. Теорема 1.6 полностью доказана. □

1.3.5. Критерий ограниченности отрицательной части суммы ряда по синусам с квазимонотонными коэффициентами

Доказательство теоремы 1.7. Возьмём произвольную неубывающую последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda = \lim_{k\to\infty}\lambda_k$, удовлетворяющую условию (1.41). Данное условие перепишем так:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} k(\lambda - \lambda_k) = C < +\infty. \tag{1.97}$$

Из (1.97) и (1.46) находим $R(\boldsymbol{b}, x) \geqslant -b_{2m(x)+1}B_1(x)$, где

$$B_1(x) = \frac{5}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{3C\operatorname{cosec}(x/2)}{2\lambda_{2m(x)+1}(2m(x)+1)}, \qquad 0 < x < \pi.$$

Из эквивалентности $m(x) \sim \pi/x$, $x \to +0$, сразу же видно, что

$$\lim_{x\to+0} B_1(x) = \frac{3C}{2\pi\lambda},$$

и в силу стремления к нулю последовательности $\boldsymbol{b}$ отсюда следует, что $R(\boldsymbol{b}, x)$ оценивается снизу бесконечно малой при $x \to +0$ величиной. Тем самым,

$$\varliminf_{x\to+0} R(\boldsymbol{b}, x) \geqslant 0. \tag{1.98}$$

Оценим снизу сумму S_1 (см. (1.72)). Возьмём произвольное число $\varepsilon \in (0, 1)$ и зафиксируем его. Поскольку $b_k/\lambda_k \searrow 0$, то существует такой номер $N = N(\varepsilon)$ (выберем его для определённости наименьшим возможным), что

$$\frac{b_N}{\lambda_N} < \frac{\varepsilon}{\pi C} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{b_k}{\lambda_k} < \frac{\varepsilon}{\pi C} \quad \forall k \geqslant N. \tag{1.99}$$

Как и в (1.78) определим величину β. Если $\beta = 0$, то все числа b_k, начиная с некоторого, равны нулю и сумма ряда (1) — тригонометрический полином по синусам — положительна в некоторой правой полуокрестности нуля. Поэтому рассмотрим случай $\beta > 0$. Взяв в этом случае число m_0 в соответствии с (1.79), при любом $x \in (0, \pi/m_0]$ получим неравенство (1.84). Из (1.84), (1.99), (1.97) находим

$$S_1(\boldsymbol{b}, x) > -x\sum_{k=N+1}^{m(x)} \frac{b_k}{\lambda_k}k(\lambda - \lambda_k) \geqslant -Cx\sum_{k=N+1}^{m(x)} \frac{b_k}{\lambda_k}$$

$$> -\frac{x\varepsilon}{\pi}\sum_{k=N+1}^{m(x)} 1 > -\frac{x\varepsilon}{\pi}m(x) \geqslant -\varepsilon.$$

Согласно (1.74) и (1.75) имеем $S(\boldsymbol{b},x)\geqslant S_1(\boldsymbol{b},x)+o(1)$, $x\to+0$. Следовательно,

$$\varliminf_{x\to+0} S(\boldsymbol{b},x)\geqslant-\varepsilon. \tag{1.100}$$

Наконец, из (1.67), (1.98), (1.100) выводим неравенство $\varliminf_{x\to+0} g(\boldsymbol{b},x)\geqslant-\varepsilon$. Но поскольку число ε можно взять произвольно малым, то это влечёт за собой неравенство $\varliminf_{x\to+0} g(\boldsymbol{b},x)\geqslant 0$, которое и требовалось доказать. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы возьмём произвольную неубывающую последовательность положительных чисел $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=\lambda$, для которой выполняется предельное соотношение

$$\varlimsup_{k\to\infty} k(\lambda-\lambda_k)=+\infty, \tag{1.101}$$

и построим такую последовательность $\widetilde{\boldsymbol{b}}\in\mathcal{M}_\Lambda$, что

$$\varliminf_{x\to+0} g(\widetilde{\boldsymbol{b}},x)=-\infty. \tag{1.102}$$

Последовательность $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ устроена примерно так же, как и в доказательстве теоремы 1.6, но имеются небольшие отличия.

Мы рекуррентно определяем быстро стремящуюся к бесконечности последовательность натуральных чисел $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($m_1=1$) и полагаем

$$\widetilde{b}_k=\lambda_k,\quad 1\leqslant k\leqslant 4m_2,\qquad \widetilde{b}_k=m_n^{-2}\lambda_k,\quad 4m_n<k\leqslant 4m_{n+1},\quad n\geqslant 2. \tag{1.103}$$

Из (1.103) сразу же следует включение $\widetilde{\boldsymbol{b}}\in\mathcal{M}_\Lambda$.

Опишем процесс построения $\{m_n\}$ и докажем равенство (1.102). Прежде всего убедимся в том, что из (1.101) следует более сильное предельное соотношение

$$\varlimsup_{k\to\infty} k(\lambda_{2k}-\lambda_k)=+\infty. \tag{1.104}$$

Действительно, если бы равенство (1.104) не выполнялось, то существовала бы такая постоянная $c>0$, что при всех $p\in\mathbb{N}$ была бы верна оценка $\lambda_{2p}-\lambda_p\leqslant c/p$, из которой следует противоречие с (1.101):

$$\lambda-\lambda_k=\sum_{\nu=1}^{\infty}(\lambda_{2^\nu k}-\lambda_{2^{\nu-1}k})\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c}{2^{\nu-1}k}=\frac{2c}{k}\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

Согласно (1.104) существует такая последовательность k_s, что верно равенство

$$\lim_{s\to\infty} k_s(\lambda_{2k_s} - \lambda_{k_s}) = +\infty.$$

Разредим последовательность k_s, а именно: возьмём такую её подпоследовательность $k_{s_n} = m_n$ ($n \geqslant 2$, $m_1 = 1$), чтобы выполнялись неравенства

$$m_n > 8m_{n-1}^4, \qquad m_n(\lambda_{2m_n} - \lambda_{m_n}) > 4m_{n-1}^3. \tag{1.105}$$

Положим $x_n = \pi/(2m_n)$, тогда $m(x_n) = 2m_n$. Оценим сверху сумму $S(\widetilde{\boldsymbol{b}}, x_n)$ (см. (1.66)). Ввиду арифметической природы точек x_n и (1.72), (1.73), с учётом явного выражения $\widetilde{b}_k$ (1.103) находим

$$S(\widetilde{\boldsymbol{b}}, x_n) = S_1(\widetilde{\boldsymbol{b}}, x_n) = \sum_{k=1}^{2m_n} \left(\widetilde{b}_k - \widetilde{b}_{k+2m_n}\right) \sin\frac{\pi k}{2m_n} = \sum_{k=1}^{4m_{n-1}} \left(\widetilde{b}_k - \widetilde{b}_{k+2m_n}\right) \sin\frac{\pi k}{2m_n}$$
$$- m_{n-1}^{-2} \sum_{k=4m_{n-1}+1}^{2m_n} (\lambda_{k+2m_n} - \lambda_k) \sin\frac{\pi k}{2m_n}. \tag{1.106}$$

Из положительности элементов последовательности $\widetilde{\boldsymbol{b}}$, неотрицательности разностей $\lambda_p - \lambda_q$, $1 \leqslant q < p$, положительности синуса на $(0, \pi)$ следует, что если в первой сумме (1.106) $\widetilde{b}_k - \widetilde{b}_{k+2m_n}$ заменить на $\widetilde{b}_k$, а из второй суммы удалить некоторые слагаемые, то получится оценка сверху:

$$S(\widetilde{\boldsymbol{b}}, x_n) \leqslant \sum_{k=1}^{4m_{n-1}} \widetilde{b}_k \sin\frac{\pi k}{2m_n} - m_{n-1}^{-2} \sum_{m_n/2<k\leqslant m_n} (\lambda_{k+2m_n} - \lambda_k) \sin\frac{\pi k}{2m_n}. \tag{1.107}$$

(Мы применяли также неравенство $4m_{n-1} \leqslant m_n/2$.) Для оценки сверху синуса в первой сумме (1.107) используем неравенство $\sin t < t$, $t > 0$, а для оценки снизу синуса во второй сумме (1.107) — неравенство $\sin(\pi t/2) \geqslant t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Получим

$$S(\widetilde{\boldsymbol{b}}, x_n) \leqslant \frac{\pi}{2m_n} \sum_{k=1}^{4m_{n-1}} k\widetilde{b}_k - m_{n-1}^{-2} \sum_{m_n/2<k\leqslant m_n} \frac{k(\lambda_{k+2m_n} - \lambda_k)}{m_n}$$
$$= O\left(\frac{m_{n-1}^2}{m_n}\right) - \frac{1}{2m_{n-1}^2} \sum_{m_n/2<k\leqslant m_n} (\lambda_{k+2m_n} - \lambda_k). \tag{1.108}$$

Ввиду монотонности последовательности Λ имеем

$$\lambda_{k+2m_n} - \lambda_k \geqslant \lambda_{2m_n} - \lambda_{m_n} \qquad \forall k \in (m_n/2, m_n]\,.$$

Отсюда и из второго неравенства (1.105) выводим оценку снизу

$$\sum_{m_n/2<k\leqslant m_n}(\lambda_{k+2m_n}-\lambda_k)\geqslant(\lambda_{2m_n}-\lambda_{m_n})\sum_{m_n/2<k\leqslant m_n}1$$
$$\geqslant(m_n/2)(\lambda_{2m_n}-\lambda_{m_n})>2m_{n-1}^3. \tag{1.109}$$

Из (1.108), (1.109) и первого неравенства (1.105) находим

$$\widetilde{S}(\widetilde{\boldsymbol{b}},x_n)\leqslant O\left(m_{n-1}^{-2}\right)-m_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{S}(\widetilde{\boldsymbol{b}},x_n)=-\infty. \tag{1.110}$$

Оценим остаток суммы ряда $R(\widetilde{\boldsymbol{b}},x_n)$. По лемме 1.6 имеем

$$R(\widetilde{\boldsymbol{b}},x_n)=R\left(\widetilde{\boldsymbol{b}},\frac{\pi}{2m_n}\right)=O\left(\widetilde{b}_{4m_n+1}x_n^{-1}\right)=O\left(m_n\widetilde{b}_{4m_n+1}\right). \tag{1.111}$$

Из (1.111) и (1.103) находим

$$R(\widetilde{\boldsymbol{b}},x_n)=O\left(m_n^{-1}\right)\qquad\Longrightarrow\qquad\lim_{n\to\infty}R(\widetilde{\boldsymbol{b}},x_n)=0. \tag{1.112}$$

Соотношения (1.110), (1.112) и (1.67) влекут за собой равенства

$$\lim_{n\to\infty}g(\widetilde{\boldsymbol{b}},x_n)=-\infty\qquad\Longrightarrow\qquad\varlimsup_{x\to+0}g(\widetilde{\boldsymbol{b}},x)=-\infty.$$

Вторая часть теоремы доказана, и доказательство теоремы 1.7 завершено. □

1.3.6. Обобщение критерия интегрируемости Янга на ряды с квазимонотонными коэффициентами

В этом пункте доказан критерий интегрируемости (1.42) суммы ряда (1) с коэффициентами из $\mathcal{M}_\Lambda$ при условии ограниченности последовательности Λ.

Докажем, что если

$$\boldsymbol{b}=\{b_k\}_{k=1}^\infty\in\mathcal{M}_\Lambda\quad\text{ и }\quad\sum_{k=1}^\infty\frac{b_k}{k}<+\infty, \tag{1.113}$$

то сумма ряда (1) интегрируема по Лебегу на $(0,\pi)$. Согласно (1.67) достаточно доказать интегрируемость на $(0,\pi)$ функций $S(\boldsymbol{b},\cdot)$ и $R(\boldsymbol{b},\cdot)$. Лемма 1.6 даёт оценку $R(\boldsymbol{b},x)=O\left(b_{2m(x)}x^{-1}\right)$, $0<x<\pi$. Поэтому

$$\int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n}\left|R(\boldsymbol{b},x)\right|dx=O\left(\frac{b_{2n}}{n}\right),\quad n\to\infty. \tag{1.114}$$

Из (1.113) и (1.114) следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n}\bigl|R(\boldsymbol{b},x)\bigr|\,dx$, а значит и интегрируемость функции R на $(0,\pi)$. Сумму $S(\boldsymbol{b},x)$ разобьём на две части:

$$S(\boldsymbol{b},x)=S_3(\boldsymbol{b},x)+S_4(\boldsymbol{b},x),\quad \text{где}$$
$$S_3(\boldsymbol{b},x)=\sum_{k=1}^{m(x)}b_k\sin kx,\qquad S_4(\boldsymbol{b},x)=\sum_{k=m(x)+1}^{2m(x)}b_k\sin kx.$$

Согласно (1.64) имеем

$$b_k\leqslant\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\,b_m\leqslant\frac{\lambda}{\lambda_1}\,b_m=O\,(b_m)\quad(k\geqslant m)\qquad\Longrightarrow$$
$$\bigl|S_4(\boldsymbol{b},x)\bigr|\leqslant\sum_{k=m(x)+1}^{2m(x)}b_k|\sin kx|\leqslant\sum_{k=m(x)+1}^{2m(x)}b_k=O\bigl(m(x)b_{m(x)}\bigr)=O\left(\frac{b_{m(x)}}{x}\right),$$

а значит $S_2(\boldsymbol{b},\cdot)\in L(0,\pi)$. Функция $S_1(\boldsymbol{b},x)$ положительна на интервале $(0,\pi)$ и поэтому её суммируемость на $(0,\pi)$ равносильна ограниченности последовательности интегралов

$$\begin{aligned}I_N&=\int_{\pi/N}^{\pi}S_3(\boldsymbol{b},x)\,dx=\sum_{n=1}^{N-1}\left(\int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\sin kx\right)dx\right)\\&=\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}\left(\cos\frac{\pi k}{n+1}-\cos\frac{\pi k}{n}\right)\leqslant\sum_{n=1}^{N-1}\left(\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n}b_k\right)\\&=\pi\sum_{k=1}^{N-1}\frac{b_k}{k}-\frac{\pi}{N}\sum_{k=1}^{N-1}b_k<\pi\sum_{k=1}^{N-1}\frac{b_k}{k}\,.\end{aligned}\tag{1.115}$$

Из (1.115) и (1.113) следует ограниченность I_N. Доказательство интегрируемости $g(\boldsymbol{b},\cdot)$ по Лебегу на $(0,\pi)$ завершено.

Теперь докажем, что если $\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}_\Lambda$ и существует предел

$$\lim_{t\to+0}\int_t^{\pi}g(\boldsymbol{b},x)\,dx=I\in\mathbb{R}\tag{1.116}$$

(это предположение является, вообще говоря, более слабым, чем суммируемость $g(\boldsymbol{b},\cdot)$ на $(0,\pi)$), то ряд в (1.113) сходится. Соотношение (1.116) равносильно существованию предела

$$\lim_{t\to+0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}\cos kt=I_0\in\mathbb{R}.$$

Так как лемма 1.8 влечёт за собой равенство $\lim_{t\to+0}\sum_{k\geqslant m(t)/3}(b_k/k)\cos kt=0$, то получаем ограниченность функции

$$\sum_{1\leqslant k<m(t)/3}\frac{b_k}{k}\cos kt\geqslant\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k<m(t)/3}\frac{b_k}{k}.$$

Таким образом, все частичные суммы ряда в (1.113) ограничены, и в силу положительности слагаемых он сходится.

В заключение пункта отметим, что в случае $\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}$ вывод включения $g(\boldsymbol{b},\cdot)\in L(0,\pi)$ из сходимости ряда в (1.113) существенно проще потому, что $g^-(\boldsymbol{b},\cdot)\in L_\infty(0,\pi)$ и, следовательно, достаточно доказать существование предела (1.116).

1.3.7. Условие суммируемости отрицательной части ряда по синусам с квазимонотонными коэффициентами

Для доказательства теоремы 1.8 нам потребуется лемма.

Лемма 1.11. *Пусть $n,l\in\mathbb{N}$, $\delta\in(0,1/4]$. Тогда верно неравенство*

$$\int_{\pi(2l-1)/n}^{\pi(2l+1)/n}\left(\frac{1-\delta-\cos nx}{x}\right)^-dx>\frac{\delta^{3/2}}{2\pi l}.$$

Доказательство. Обозначим $q=1-\delta$, $\alpha=\arccos q$. Имеем

$$\begin{aligned}\int_{\pi(2l-1)/n}^{\pi(2l+1)/n}\left(\frac{1-\delta-\cos nx}{x}\right)^-dx&=\int_{(2\pi l-\alpha)/n}^{(2\pi l+\alpha)/n}\frac{\cos nx-q}{x}\,dx\\&=\int_{2\pi l-\alpha}^{2\pi l+\alpha}\frac{\cos t-q}{t}\,dt=\int_0^\alpha(\cos\tau-q)\left(\frac{1}{2\pi l-\tau}+\frac{1}{2\pi l+\tau}\right)d\tau\\&=\int_0^\alpha\frac{4\pi l(\cos\tau-q)}{(4\pi l)^2-\tau^2}\,d\tau>\frac{1}{\pi l}\int_0^\alpha(\cos\tau-q)d\tau\\&=\frac{\sin\alpha-q\alpha}{\pi l}>\frac{1}{\pi l}\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{6}-q\alpha\right)=\frac{\alpha}{\pi l}\left(\delta-\frac{\alpha^2}{6}\right).\end{aligned}$$

Осталось доказать неравенство

$$\alpha\left(\delta-\frac{\alpha^2}{6}\right)>\frac{\delta^{3/2}}{2},\quad\text{если }\ 0<\delta<\frac{1}{4}.$$

Поскольку $\sqrt{1-q^2}=\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{1-q^2}/q$ при любом $q\in(0,1)$, то

$$\begin{aligned}\alpha\left(\delta-\frac{\alpha^2}{6}\right)&>\sqrt{1-q^2}\left(\delta-\frac{1-q^2}{6q^2}\right)\\&=\sqrt{2\delta-\delta^2}\left(\delta-\frac{2\delta-\delta^2}{6q^2}\right)=\delta^{\frac{3}{2}}\sqrt{2-\delta}\left(1-\frac{2-\delta}{6q^2}\right).\end{aligned}$$

А так как при $\delta \in (0, 1/4]$ имеем

$$\sqrt{2-\delta}\left(1-\frac{2-\delta}{6q^2}\right) \geqslant \sqrt{\frac{7}{4}}\left(1-\frac{2}{6(1-1/4)^2}\right) = \frac{11\sqrt{7}}{54} > \frac{1}{2},$$

то лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1.8. Начнём с вывода импликации

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda-\lambda_k}{k} < +\infty, \quad \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_\Lambda \qquad \Longrightarrow \qquad g^-(\boldsymbol{b}, \cdot) \in L(0,\pi). \tag{1.117}$$

Обозначим $\mu_k = \lambda - \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$. Поскольку Λ не убывает, то $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{M}$. Из леммы 1.6 следует асимптотическая оценка

$$R^-(\boldsymbol{b}, x) = o\left(\mu_{m(x)} x^{-1}\right), \quad x \to +0,$$

которая вместе с условием (1.44) влечёт за собой суммируемость $R^-(\boldsymbol{b}, \cdot)$ на $(0, \pi)$ (рассуждение такого типа было проведено в пункте 1.3.6). Ввиду (1.67) осталось доказать суммируемость на $(0, \pi)$ функции $S(\boldsymbol{b}, \cdot)$. Из (1.74) находим

$$S^-(\boldsymbol{b}, x) \leqslant S_1^-(\boldsymbol{b}, x) + o(x)\left(1 + \sum_{k=1}^{m(x)} \mu_{k+m(x)}\right) \leqslant S_1^-(\boldsymbol{b}, x) + o(1), \quad x \to +0. \tag{1.118}$$

Из (1.72) и (1.83) и положительности $\sin kx$ на $(0, \pi)$ при $1 \leqslant k \leqslant m(x)$ выводим оценку

$$S_1^-(\boldsymbol{b}, x) \leqslant \sum_{k=1}^{m(x)} \frac{b_k}{\lambda_k} \mu_k \sin kx = O\left(\sum_{k=1}^{m(x)} \mu_k\right).$$

Следовательно,

$$\int_{\pi/\left(m(x)+1\right)}^{\pi/m(x)} S_1^-(\boldsymbol{b}, x)\, dx = O\left(\frac{1}{m^2(x)} \sum_{k=1}^{m(x)} \mu_k\right). \tag{1.119}$$

Ввиду равенства

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mu_k = \sum_{k=1}^{N} \mu_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n^2}$$

и (1.119) имеем

$$\int_{\pi/(N+1)}^{\pi} S_1^-(\boldsymbol{b}, x)\, dx = O\left(\sum_{k=1}^{N} \mu_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n^2}\right) = O\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\mu_k}{k}\right).$$

Отсюда и из условия (1.44) следует ограниченность последовательности интегралов $\int_{\pi/N}^{\pi} S_1^-(\boldsymbol{b}, x)\,dx$, а значит и суммируемость $S_1^-(\boldsymbol{b}, \cdot)$ на $(0, \pi)$. Ввиду (1.118) вместе с $S_1^-(\boldsymbol{b}, \cdot)$ суммируема на $(0, \pi)$ и функция $S^-(\boldsymbol{b}, \cdot)$. Вывод импликации (1.117) завершён.

Теперь возьмём произвольную вогнутую последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ (тогда $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ выпукла), удовлетворяющую условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^{3/2}}{k} = +\infty, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\mu_{2k}}{\mu_k} = 1, \tag{1.120}$$

и предъявим такую последовательность $\widetilde{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{M}_\Lambda$, что $g^-(\widetilde{\boldsymbol{b}}, \cdot) \notin L(0, \pi)$.

Для этого построим возрастающую последовательность натуральных чисел $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ и убывающую последовательность положительных чисел $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим $m_1 = \beta_1 = 1$. Если $N \in \mathbb{N}$ и числа $\{m_n\}_{n=1}^{N}$ и $\{\beta_n\}_{n=1}^{N}$ уже построены, то определим числа m_{N+1} и β_{N+1} следующим образом. Через μ обозначим функцию, значение которой в каждой натуральной точке k равно μ_k и

$$\mu(x) = \mu_k + (x - k)(\mu_{k+1} - \mu_k), \quad x \in [k, k+1].$$

Нетрудно убедиться в том, что эта функция убывает, выпукла (нестрого) и непрерывна на луче $[1, +\infty)$. В силу (1.120) она медленно меняется на бесконечности и

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mu^{3/2}(x)}{x}\,dx = +\infty. \tag{1.121}$$

Ввиду расходимости интеграла (1.121) существует такой номер $m_{N,1} > 3m_N^2$, что

$$\beta_N \int_{m_N}^{m_{N,1}} \frac{\mu^{3/2}(x)}{x}\,dx > N. \tag{1.122}$$

В качестве же m_{N+1} возьмём такой наименьший номер $k \geqslant m_{N,1}^2$, что

$$\mu_k < \frac{1}{N \ln\left(m_{N,1}/m_N\right)} \tag{1.123}$$

(это возможно ввиду стремления μ_k к нулю). Наконец, положим

$$\beta_{N+1} = \beta_N \mu_{m_{N+1}}. \tag{1.124}$$

Докажем, что интегралы от отрицательной части суммы ряда

$$g(\widetilde{\boldsymbol{b}}, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \lambda_k \sin kx \right) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{b}_k \sin kx, \tag{1.125}$$

взятые по отрезкам $J_N = [\pi/m_{N,1},\, \pi/m_N]$, стремятся к бесконечности. (Включение $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{M}_\Lambda$ очевидно, поскольку $\widetilde{b}_k/\lambda_k = \beta_n$ при $k \in [m_n, m_{n+1} - 1]$ и $\{\beta_n\}$ убывает.)

Для оценки снизу интегралов

$$I_N = \int_{J_N} g^-(\widetilde{\boldsymbol{b}}, x)\, dx \tag{1.126}$$

разобьём ряд (1.125) на три части:

$$g(\widetilde{\boldsymbol{b}}, x) = T_N(x) + \beta_N G_N(x) + R_N(x), \quad \text{где} \tag{1.127}$$

$$T_N(x) = \sum_{k=1}^{m_N-1} \widetilde{b}_k \sin kx, \qquad R_N(x) = \sum_{m_{N+1}}^{\infty} \widetilde{b}_k \sin kx, \tag{1.128}$$

$$\begin{aligned} G_N(x) &= \sum_{k=m_N}^{m_{N+1}-1} \lambda_k \sin kx \\ &= \lambda\, \frac{\cos\left(m_N - 1/2\right) x - \cos\left(m_{N+1} - 1/2\right) x}{2 \sin\left(x/2\right)} - \sum_{k=m_N}^{m_{N+1}-1} \mu_k \sin kx. \end{aligned} \tag{1.129}$$

Покажем, что основной вклад в интеграл (1.126) даст центральная часть ряда (1.127), а интегралы от модулей начала ряда T_N и остатка R_N по отрезкам J_N стремятся к нулю при $N \to \infty$. Действительно, в силу положительности всех слагаемых полинома $T_N(x)$ и неравенств $\sin kx < kx$, $1 \leqslant k \leqslant m_N$, при $x < \pi/m_N$ имеем

$$0 < T_N(x) < x \sum_{k=1}^{m_N-1} k\widetilde{b}_k \quad \Longrightarrow \quad T_N(x) = o\left(x\, m_N^2\right), \quad N \to \infty, \quad 0 < x < \frac{\pi}{m_N}.$$

Отсюда сразу же находим

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi/m_N} \left|T_N(x)\right| dx = 0. \tag{1.130}$$

По лемме 1.9 имеем $R_N(x) = O(b_{m_{N+1}}/x)$. Отсюда, учитывая (1.123) и (1.124), получаем асимптотические оценки

$$\begin{aligned} \int_{J_N} \left|R_N(x)\right| dx &= O\left(b_{m_{N+1}} \ln \frac{m_{N,1}}{m_N}\right) = O\left(\beta_{N+1} \ln \frac{m_{N,1}}{m_N}\right) \\ &= o\left(\mu_{m_{N+1}} \ln \frac{m_{N,1}}{m_N}\right) = o(1), \quad N \to \infty. \end{aligned} \tag{1.131}$$

Из (1.126)—(1.131) и очевидного неравенства

$$I_N \geqslant \beta_N \int_{J_N} G_N^-(x)\,dx - \int_{J_N} \bigl|T_N(x)\bigr|\,dx - \int_{J_N} \bigl|R_N(x)\bigr|\,dx$$

выводим асимптотическую оценку снизу при $N \to \infty$

$$I_N \geqslant \beta_N \int_{J_N} \left(\lambda\,\frac{1-\cos\left(m_{N+1}-1/2\right)x}{2\sin\left(x/2\right)} - \sum_{k=m_N}^{m_{N+1}-1} \mu_k \sin kx\right)^- dx + o(1).$$

Обозначим

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \sin kx. \tag{1.132}$$

Согласно теореме Алянчича—Боянича—Томича (см. теорему 1.B) сумма ряда по синусам с выпуклой, медленно меняющейся последовательностью коэффициентов $\{\mu_k\}$ имеет асимптотику

$$\varphi(x) \sim \frac{\mu_{m(x)}}{x} \sim \frac{\mu\left(\pi/x\right)}{x}, \quad x \to +0. \tag{1.133}$$

Напомним, что выше последовательность μ_k была продолжена до выпуклой функции на луче $[1, +\infty)$.

Оценив интегралы от модулей начала и остатка ряда (1.132) в точности так же, как в (1.130) и (1.131), приходим к асимптотическому неравенству

$$I_N \geqslant \beta_N \int_{J_N} \left(\lambda\,\frac{1-\cos\left(m_{N+1}-1/2\right)x}{2\sin\left(x/2\right)} - \varphi(x)\right)^- dx + o(1), \quad N \to \infty. \tag{1.134}$$

Теперь для удобства вычислений заменим в (1.134) функцию

$$\frac{1-\cos\left(m_{N+1}-1/2\right)x}{2\sin\left(x/2\right)} \quad \text{на} \quad \frac{1-\cos m_{N+1}x}{x}.$$

Погрешность такой замены в метрике $L(J_N)$ будет $O\left(m_N^{-1}\right) = o(1)$, $N \to \infty$. После этого увеличим функцию, интеграл от отрицательной части которой будем оценивать снизу, заменив $\varphi(x)$ на $\mu_{m(x)}/(2x)$ (см. (1.133)). В результате, вынеся за скобку постоянную λ, придём к задаче доказательства предельного соотношения

$$\lim_{N\to\infty} \left(\beta_N \widetilde{I}_N\right) = +\infty, \quad \text{где} \tag{1.135}$$

$$\widetilde{I}_N = \int_{J_N} \left(\frac{1-\cos m_{N+1}x - c\mu\left(\pi/x\right)}{x}\right)^- dx, \tag{1.136}$$

c — произвольная (но фиксированная) положительная постоянная.

Выберем N таким, чтобы

$$\mu\left(\frac{\pi}{m_N}\right) < \frac{1}{4c}. \tag{1.137}$$

Положим

$$l_{N,1} = \frac{1}{2}\left(\frac{m_{N+1}}{m_{N,1}} + 1\right), \qquad l_N = \frac{1}{2}\left(\frac{m_{N+1}}{m_N} - 1\right).$$

Для каждого $l \in [l_{N,1}, l_N]$ в силу убывания функции $\mu(x)$ и оценки (1.137), применяя лемму 1.11, получаем оценку

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi(2l-1)/m_{N+1}}^{\pi(2l+1)/m_{N+1}} \left(\frac{1 - c\mu\left(\pi/x\right) - \cos m_{N+1}x}{x}\right)^{-} dx \\
&> \int_{\pi(2l-1)/m_{N+1}}^{\pi(2l+1)/m_{N+1}} \left(\frac{1 - c\mu\big(m_{N+1}/(2l-1)\big) - \cos m_{N+1}x}{x}\right)^{-} dx \\
&> \frac{c^{3/2}}{2\pi}\,\frac{\mu^{3/2}\big(m_{N+1}/(2l-1)\big)}{l}.
\end{aligned}$$

Суммируя эти неравенства по всем $l \in [l_{N,1}, l_N]$, с учётом (1.136) находим

$$\widetilde{I}_N > \frac{c^{3/2}}{2\pi} \sum_{l\in[l_{N,1},\,l_N]} \frac{\mu^{3/2}\big(m_{N+1}/(2l-1)\big)}{l}. \tag{1.138}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\int_{m_N}^{m_{N,1}} \frac{\mu^{3/2}(x)}{x}\,dx &= \int_{J_N} \frac{\mu^{3/2}\left(\pi/x\right)}{x}\,dx \\
&= \sum_{l\in[l_{N,1},\,l_N]} \int_{\pi(2l-1)/m_{N+1}}^{\pi(2l+1)/m_{N+1}} \frac{\mu^{3/2}\left(\pi/x\right)}{x}\,dx + o(1), \quad N\to\infty.
\end{aligned} \tag{1.139}$$

С учётом монотонности $\mu(x)$ имеем

$$\int_{\pi(2l-1)/m_{N+1}}^{\pi(2l+1)/m_{N+1}} \frac{\mu^{3/2}\left(\pi/x\right)}{x}\,dx \leqslant \frac{2\mu^{3/2}\big(m_{N+1}/(2l+1)\big)}{2l-1} \leqslant 2\,\frac{\mu^{3/2}\big(m_{N+1}/(2l+1)\big)}{l+1}.$$

Суммируя эти неравенства по всем $l \in [l_{N,1}, l_N]$, приходим к оценке

$$\begin{aligned}
\sum_{l\in[l_{N,1},\,l_N]} \int_{\pi(2l-1)/m_{N+1}}^{\pi(2l+1)/m_{N+1}} \frac{\mu^{3/2}\left(\pi/x\right)}{x}\,dx &< 2 \sum_{l\in[l_{N,1}+1,\,l_N+1]} \frac{\mu^{3/2}\big(m_{N+1}/(2l-1)\big)}{l} \\
&= 2 \sum_{l\in[l_{N,1},\,l_N]} \frac{\mu^{3/2}\big(m_{N+1}/(2l-1)\big)}{l} + o(1), \quad N\to\infty.
\end{aligned} \tag{1.140}$$

Из (1.139) и (1.140) получаем неравенство

$$\int_{m_N}^{m_{N,1}} \frac{\mu^{3/2}(x)}{x}\,dx < 2 \sum_{l\in[l_{N,1},\,l_N]} \frac{\mu^{3/2}\bigl(m_{N+1}/(2l-1)\bigr)}{l} + o(1), \quad N\to\infty. \quad (1.141)$$

Наконец, из (1.138) и (1.141) выводим оценку

$$\widetilde{I}_N > \frac{c^{3/2}}{4\pi} \int_{m_N}^{m_{N,1}} \frac{\mu^{3/2}(x)}{x}\,dx + o(1), \quad N\to\infty.$$

Отсюда и из (1.122) сразу же следует предельное соотношение (1.135). Теорема 1.8 доказана. □

1.4. Точные константы в оценках сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами при дополнительном условии регулярности последовательности коэффициентов

1.4.1. Формулировка основных результатов

Найдены оценки сумм рядов по синусам (1), последовательности коэффициентов $\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}$ которых принадлежат классам $\mathcal{B}\downarrow$ и $\mathcal{B}\uparrow$ (см. введение), через мажоранту Салема $v(\boldsymbol{b},x)$ (см. (2)). Доказана асимптотическая неулучшаемость найденных оценок на таких классах последовательностей коэффициентов.

Теорема 1.9. *Если $\boldsymbol{b}\in\mathcal{B}\downarrow$, то при любом $x\in(0,\pi/3]$ верна оценка снизу*

$$g(\boldsymbol{b},x) \geqslant \left(\underline{I} - \frac{1}{m(x)}\right) v(\boldsymbol{b},x) - \frac{3}{2}\,b_{m(x)+1}\sin\frac{x}{2}\,,$$

где

$$\underline{I} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = 0.451\ldots.$$

В то же время существуют такие последовательности $\underline{\boldsymbol{b}}\in\mathcal{B}\downarrow$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$x_n>0 \quad (\forall n\in\mathbb{N}), \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad g(\underline{\boldsymbol{b}},x_n)\sim \underline{I}\,v(\underline{\boldsymbol{b}},x_n), \quad n\to\infty.$$

Теорема 1.10. *Если $\boldsymbol{b}\in\mathcal{B}\uparrow$, то при любом $x\in(0,\pi)$ верна оценка сверху*

$$g(\boldsymbol{b},x) \leqslant \overline{I}\left(1+\frac{1}{m(x)}\right) v(\boldsymbol{b},x) + \frac{1}{2}\,b_{m(x)+1}\operatorname{tg}\frac{x}{4}\,,$$

где

$$\overline{I} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = 0.589\ldots.$$

В то же время существуют такие последовательности $\overline{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{B}\uparrow$ *и* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *что*

$$x_n > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad g(\overline{\boldsymbol{b}}, x_n) \sim \overline{I}\, v(\overline{\boldsymbol{b}}, x_n), \quad n \to \infty.$$

1.4.2. Вспомогательные результаты

Доказательствам теорем предпошлём несколько лемм.

Лемма 1.12 (Неравенство Чебышева)**.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\{d_k\}_{k=1}^{n}$ *— невозрастающий набор положительных чисел. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Если $0 < \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_n$, *то верно неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} d_k\beta_k \leqslant \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} d_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \beta_k\Big).$$

2. Если $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n > 0$, *то верно неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} d_k\beta_k \geqslant \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} d_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \beta_k\Big).$$

Доказательство. В первом случае имеем

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n} (\beta_l - \beta_k)\,(d_k - d_l) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \beta_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} d_k\Big) - n\sum_{k=1}^{n} \beta_k d_k.$$

Аналогично действуем во втором случае:

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n} (\beta_k - \beta_l)\,(d_k - d_l) = n\sum_{k=1}^{n} \beta_k d_k - \Big(\sum_{k=1}^{n} \beta_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} d_k\Big).$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.13. *Если последовательность* $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$, *то для остатков ряда* (1) *справедливы следующие оценки снизу:*

$$\sum_{k=2m(x)+1}^{\infty} b_k \sin kx \geqslant -\frac{1}{2}\, b_{2m(x)+1} \operatorname{tg}\frac{x}{4}, \quad \frac{\pi}{m(x)+1/2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{m(x)},$$

$$\sum_{k=2m(x)+2}^{\infty} b_k \sin kx \geqslant -\frac{1}{2}\, b_{2m(x)+2} \operatorname{tg}\frac{x}{4}, \quad \frac{\pi}{m(x)+1} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{m(x)+1/2}].$$

Доказательство. Воспользовавшись представлением (1.17) и неотрицательностью всех разностей $b_k - b_{k+1}$, находим

$$\begin{aligned} r_n(x) &\geqslant -b_{n+1}\widetilde{D}_n(x) + \Big(\inf_{k\geqslant n+1} \widetilde{D}_k(x)\Big) \sum_{k=n+1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) \\ &= b_{n+1} \inf_{k\geqslant n+1} \Big(\widetilde{D}_k(x) - \widetilde{D}_n(x)\Big) \\ &= b_{n+1} \inf_{k\geqslant n+1} \frac{\cos(n+1/2)x - \cos(k+1/2)x}{2\sin(x/2)}\,. \end{aligned}$$

А так как $\cos(k+1/2)x \leqslant 1$, то

$$r_n(x) \geqslant b_{n+1}\,\frac{\cos(n+1/2)x - 1}{2\sin(x/2)} = -b_{n+1}\,\frac{\sin^2(n/2+1/4)x}{\sin(x/2)}\,. \tag{1.142}$$

Возьмём $n = 2m(x)$. Следствием включения $x \in \big[\pi/\big(m(x)+1/2\big), \pi/m(x)\big]$ является двойное неравенство

$$\pi - \frac{x}{4} \leqslant \left(m(x) + \frac{1}{4}\right) x \leqslant \pi + \frac{x}{4}.$$

Отсюда

$$\left|\sin\Big(m(x) + \frac{1}{4}\Big)x\right| \leqslant \sin\frac{x}{4}, \qquad 0 < x < \pi. \tag{1.143}$$

Если же $n = 2m(x)+1$, то включение $x \in \big[\pi/\big(m(x)+1\big), \pi/\big(m(x)+1/2\big)\big]$ влечёт за собой двойное неравенство

$$\pi - \frac{x}{4} \leqslant \left(m(x) + \frac{3}{4}\right) x \leqslant \pi + \frac{x}{4},$$

вследствие которого

$$\left|\sin\Big(m(x) + \frac{3}{4}\Big)x\right| \leqslant \sin\frac{x}{4}, \qquad 0 < x < \pi. \tag{1.144}$$

Из (1.142)—(1.144) находим

$$\begin{aligned} r_{2m(x)}(x) \geqslant -b_{2m(x)+1}\sin^2\frac{x}{4}\operatorname{cosec}\frac{x}{2} &= -\frac{1}{2}\,b_{2m(x)+1}\operatorname{tg}\frac{x}{4}, \\ &\frac{\pi}{m(x)+1/2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{m(x)}, \\ r_{2m(x)+1}(x) \geqslant -b_{2m(x)+2}\sin^2\frac{x}{4}\operatorname{cosec}\frac{x}{2} &= -\frac{1}{2}\,b_{2m(x)+2}\operatorname{tg}\frac{x}{4}, \\ &\frac{\pi}{m(x)+1} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{m(x)+1/2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.14. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\{a_k\}_{k=1}^n$ — невозрастающий набор положительных чисел, $\{s_k\}_{k=1}^n$ — набор действительных чисел, для которых найдётся такое $\nu \in (1, n)$, что*

$$\begin{aligned} s_k &\geqslant 0 \qquad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant \nu, \\ s_k &\leqslant 0 \qquad \text{при} \quad \nu + 1 \leqslant k \leqslant n. \end{aligned}$$

Тогда выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k s_k \geqslant a_\nu \sum_{k=1}^{n} s_k.$$

Доказательство. Из условия леммы получаем соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k s_k &= \sum_{k=1}^{\nu} a_k s_k + \sum_{k=\nu+1}^{n} a_k s_k \geqslant \Big(\min_{1\leqslant k\leqslant \nu} a_k\Big) \sum_{k=1}^{\nu} s_k + \Big(\max_{\nu\leqslant k\leqslant n} a_k\Big) \sum_{k=\nu+1}^{n} s_k \\ &= a_\nu \sum_{k=1}^{\nu} s_k + a_{\nu+1} \sum_{k=\nu+1}^{n} s_k \geqslant a_\nu \sum_{k=1}^{\nu} s_k + a_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} s_k = a_\nu \sum_{k=1}^{m} s_k. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

1.4.3. Оценка снизу суммы ряда по синусам на классе $\mathcal{B}\downarrow$

Доказательство теоремы 1.9. Начнём с оценки снизу частичной суммы ряда

$$\begin{aligned} S(x) = \sum_{k=1}^{2m(x)} b_k \sin kx &= \sum_{k=1}^{m(x)} \big(b_k - b_{m(x)+k}\big) \sin kx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m(x)} b_{m(x)+k} \Big(\sin kx + \sin\big(k + m(x)\big)x\Big). \end{aligned}$$

Поскольку $(m(x) + k)b_{m(x)+k} \leqslant kb_k$, то

$$b_k - b_{m(x)+k} \geqslant b_k - \frac{kb_k}{m(x) + k} = \frac{m(x)b_k}{m(x) + k} = \frac{b_k}{1 + k/m(x)}.$$

Следовательно, ввиду положительности $\sin kx$ при $1 \leqslant k \leqslant m(x)$ имеем

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^{m(x)} \big(b_k - b_{k+m(x)}\big) \sin kx \geqslant \sum_{k=1}^{m(x)} \frac{b_k \sin kx}{1 + k/m(x)} = x \sum_{k=1}^{m(x)} \beta_k d_k,$$

$$\text{где} \quad \beta_k = kb_k, \qquad d_k = \frac{\sin kx}{kx} \cdot \frac{1}{1 + k/m(x)}.$$

Поскольку функция $\sin t/t$ убывает на $[0,\pi]$, то набор чисел $\{d_k\}_{k=1}^{m(x)}$ является убывающим. Поэтому ввиду включения $\boldsymbol{b}\in\mathcal{B}\downarrow$ согласно пункту 2 леммы 1.12 находим

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m(x)}\frac{b_k\sin kx}{1+k/m(x)} &\geqslant x\left(\sum_{k=1}^{m(x)}kb_k\right)\frac{1}{m(x)}\sum_{k=1}^{m(x)}\frac{1}{1+k/m(x)}\cdot\frac{\sin kx}{kx}\\ &= v(\boldsymbol{b},x)\frac{1}{m(x)}\sum_{k=1}^{m(x)}\frac{1}{1+k/m(x)}\cdot\frac{\sin kx}{kx}\\ &\geqslant v(\boldsymbol{b},x)\frac{1}{m(x)}\sum_{k=1}^{m(x)}\frac{1}{1+k/m(x)}\cdot\frac{\sin\bigl(\pi k/m(x)\bigr)}{\pi k/m(x)}\\ &= v(\boldsymbol{b},x)\frac{1}{m(x)}\sum_{k=1}^{m(x)}f\left(\frac{k}{m(x)}\right),\end{aligned}$$

где

$$f(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t(1+t)}.$$

Ввиду двойного неравенства

$$\frac{1}{m(x)}\sum_{k=1}^{m(x)}f\left(\frac{k}{m(x)}\right)<\int_0^1 f(x)dx<\frac{1}{m(x)}\sum_{k=0}^{m(x)-1}f\left(\frac{k}{m(x)}\right),$$

справедливого для любой убывающей на $[0,1]$ функции f, имеем

$$\frac{1}{m(x)}\sum_{k=1}^{m(x)}f\left(\frac{k}{m(x)}\right)>\int_0^1 f(t)dt-\frac{f(0)}{m(x)}.$$

В нашем случае $f(0)=1$,

$$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\frac{\sin\pi t}{\pi t(1+t)}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin\pi t\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^2\frac{\sin\pi t}{t}\,dt=\underline{I}.$$

Поэтому приходим к оценке

$$\sum_{k=1}^{m(x)}\bigl(b_k-b_{k+m(x)}\bigr)\sin kx>\left(\underline{I}-\frac{1}{m(x)}\right)v(\boldsymbol{b},x).\tag{1.145}$$

Разумеется, эта оценка содержательна только при $m(x)\geqslant 3$, то есть при $0<x\leqslant\pi/3$.

Заметим, что при любом $m(x) \geqslant 3$ и фиксированном x из интервала $\big(\pi/(m(x)+1), \pi/m(x)\big)$ набор чисел

$$s_k = s_k(x) = \sin kx + \sin\big(k+m(x)\big)x = 2\cos\frac{m(x)x}{2}\,\sin\left(kx+\frac{m(x)x}{2}\right),$$
$$1 \leqslant k \leqslant m(x),$$

удовлетворяет условию леммы 1.14. Применив эту лемму, находим

$$S_2(x) = \sum_{k=1}^{m(x)} b_{m(x)+k}\big(\sin kx + \sin(k+m(x))x\big)$$
$$\geqslant b_{m(x)+\nu}\sum_{k=1}^{m(x)}\big(\sin kx + \sin(k+m(x))x\big) = b_{m(x)+\nu}\,\widetilde{D}_{2m(x)}(x), \qquad (1.146)$$

где $\nu \in (1, m(x))$. (Если $x = \pi/m(x)$, то $\sin kx + \sin(k+m(x))x = 0$ и $S_2(x) = 0$.)

При $x \in \big[\pi/\big(m(x)+1/2\big), \pi/m(x)\big]$ из (1.146), (1.16) находим

$$S_2(x) \geqslant b_{m(x)+\nu}\,\frac{\sin m(x)x\,\sin(m(x)+1/2)x}{\sin(x/2)}$$
$$\geqslant -b_{m(x)+\nu}\sin\frac{x}{2} \geqslant -b_{m(x)+1}\sin\frac{x}{2}. \qquad (1.147)$$

При $x \in \big[\pi/\big(m(x)+1\big), \pi/\big(m(x)+1/2\big)\big]$ из (1.146), (1.16) находим

$$S_2(x) \geqslant b_{m(x)+\nu}\,\frac{\sin m(x)x\,\sin(m(x)+1/2)x}{\sin(x/2)} \geqslant 0. \qquad (1.148)$$

Таким образом, из (1.145), (1.147) и (1.148) имеем

$$S(x) > \left(\underline{I} - \frac{1}{m(x)}\right) v(\boldsymbol{b}, x) - b_{m(x)+1}\sin\frac{x}{2}.$$

Отсюда в силу леммы 1.13 окончательно получаем

$$g(\boldsymbol{b}, x) = S(x) + \sum_{k=2m(x)+1}^{\infty} b_k \sin kx > \left(\underline{I} - \frac{1}{m(x)}\right) v(\boldsymbol{b}, x) - \frac{3}{2}\,b_{m(x)+1}\sin\frac{x}{2}.$$

Построим теперь пример последовательности $\underline{\boldsymbol{b}}$, устанавливающий асимптотическую точность константы $\underline{I}$. Возьмём сначала какую-либо убывающую, быстро стремящуюся к нулю последовательность $\{\alpha_k\}$, удовлетворяющую условию

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = 0. \qquad (1.149)$$

Затем построим столь быстро растущую последовательность номеров $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $n_1 = 0$, чтобы выполнялось предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{\alpha_k n_{k+1}} = 0. \tag{1.150}$$

Пусть последовательность $\underline{\boldsymbol{b}}$ имеет следующий вид:

$$b_p = \frac{\alpha_k}{p}, \quad n_k < p \leqslant n_{k+1}.$$

Тогда

$$g(\underline{\boldsymbol{b}}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{p=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{\sin px}{p}.$$

Положим $x_i = 2\pi/n_{i+1}$ и рассмотрим последовательность значений функций $g(\underline{\boldsymbol{b}}, x)$ и $v(\underline{\boldsymbol{b}}, x)$ в этих точках. Имеем

$$g(\underline{\boldsymbol{b}}, x_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{p=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{\sin\left(2\pi p/n_{i+1}\right)}{p}.$$

Очевидно, что достаточно оценить $g(\underline{\boldsymbol{b}}, x_i)$ снизу. С этой целью разобьём её на три суммы:

$$g(\underline{\boldsymbol{b}}, x_i) = \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k \sum_{p=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{\sin\left(2\pi p/n_{i+1}\right)}{p} + \alpha_i \sum_{p=n_i+1}^{n_{i+1}} \frac{\sin\left(2\pi p/n_{i+1}\right)}{p} + \sum_{k=i+1}^{\infty} \alpha_k \sum_{p=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{\sin\left(2\pi p/n_{i+1}\right)}{p}. \tag{1.151}$$

Для оценки третьей суммы воспользуемся стандартной оценкой остатка ряда и условием (1.149):

$$\sum_{k=i+1}^{\infty} \alpha_k \sum_{p=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{\sin\left(2\pi p/n_{i+1}\right)}{p} \leqslant \frac{\alpha_{i+1}}{n_{i+1}+1} \cdot \frac{1}{\sin\left(\pi/n_{i+1}\right)} \leqslant \frac{1}{2}\,\alpha_{i+1} = o(\alpha_i). \tag{1.152}$$

Первая сумма оценивается с учётом условия (1.150):

$$\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k \sum_{p=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{\sin\left(2\pi p/n_{i+1}\right)}{p} \leqslant \frac{2\pi}{n_{i+1}} \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k \left(n_{k+1} - n_k\right) < \frac{2\pi}{n_{i+1}} \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k n_{k+1} < \frac{2\pi n_i}{n_{i+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = o(\alpha_i). \tag{1.153}$$

Наконец, оценим вторую сумму. Имеем

$$\alpha_i \sum_{p=n_i+1}^{n_{i+1}} \frac{\sin\left(2\pi p/n_{i+1}\right)}{p} < \alpha_i \sum_{p=1}^{n_{i+1}} \frac{\sin\left(2\pi p/n_{i+1}\right)}{p}$$
$$= \alpha_i \frac{2\pi}{n_{i+1}} \sum_{p=1}^{n_{i+1}} \frac{\sin\left(2\pi p/n_{i+1}\right)}{\left(2\pi p/n_{i+1}\right)} = \alpha_i \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + o(\alpha_i). \tag{1.154}$$

Таким образом, из (1.151)—(1.154) выводим неравенство $g(\underline{\boldsymbol{b}}, x_i) < \pi \underline{I} \alpha_i + o(\alpha_i)$.

С другой стороны,

$$v(\underline{\boldsymbol{b}}, x_i) = \frac{2\pi}{n_{i+1}} \left(\sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k (n_{k+1} - n_k) + \alpha_i \left(\frac{n_{i+1}}{2} - n_i \right) \right)$$
$$= \pi\alpha_i + \frac{2\pi}{n_{i+1}} \sum_{k=2}^{i} n_k (\alpha_{k-1} - \alpha_k) = \pi\alpha_i + o(\alpha_i).$$

Тем самым, $g(\underline{\boldsymbol{b}}, x_i) < \big(\underline{I} + o(1)\big) v(\underline{\boldsymbol{b}}, x_i)$. Теорема 1.9 полностью доказана. □

1.4.4. Оценка сверху суммы ряда по синусам на классе $\mathcal{B}\uparrow$

Доказательство теоремы 1.10. Доказательство начнём с оценки сверху частичной суммы ряда. Согласно пункту 1 леммы 1.12 находим

$$\sum_{k=1}^{m(x)} b_k \sin kx = x \sum_{k=1}^{m(x)} k b_k \frac{\sin kx}{kx} \leqslant x \left(\sum_{k=1}^{m(x)} k b_k \right) \frac{1}{m(x)} \sum_{k=1}^{m(x)} \frac{\sin kx}{kx}$$
$$= v(\boldsymbol{b}, x) \frac{1}{m(x)} \sum_{k=1}^{m(x)} \frac{\sin kx}{kx} \leqslant v(\boldsymbol{b}, x) \frac{1}{m(x)} \sum_{k=1}^{m(x)} \frac{\sin\big(\pi k/\big(m(x)+1\big)\big)}{\pi k/\big(m(x)+1\big)}$$
$$= v(\boldsymbol{b}, x) \frac{1}{m(x)} \sum_{k=1}^{m(x)+1} f\left(\frac{k}{m(x)+1} \right), \tag{1.155}$$

где $f(t) = \sin t/t$ — убывающая на $(0, \pi]$ функция. Следовательно,

$$\frac{1}{m(x)+1} \sum_{k=1}^{m(x)+1} f\left(\frac{k}{m(x)+1} \right) < \int_0^1 f(t)dt. \tag{1.156}$$

Из (1.155) и (1.156) получаем

$$\sum_{k=1}^{m(x)} b_k \sin kx < \left(1 + \frac{1}{m(x)} \right) \overline{I} v(\boldsymbol{b}, x). \tag{1.157}$$

В силу леммы 1.5 остаток ряда оценивается следующим образом:

$$\sum_{k=m(x)+1}^{\infty} b_k \sin kx \leqslant \frac{1}{2}\, b_{m(x)+1} \operatorname{tg} \frac{x}{4}. \tag{1.158}$$

Из неравенств (1.157) и (1.158) вытекает первая часть теоремы.

Построим теперь пример последовательности $\overline{\boldsymbol{b}}$, устанавливающий асимптотическую точность полученной оценки сверху. Выберем последовательности номеров $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $q_1 = 0$, $q_k < p_k < q_{k+1}$, растущие настолько быстро, чтобы выполнялись соотношения

$$\lim_{k\to\infty} \frac{kq_k^2}{p_k} = 0, \tag{1.159}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_{k+1}} = 0. \tag{1.160}$$

Потребуем также, чтобы отношение q_{k+1}/p_k было целым и нечётным. Пусть последовательность $\overline{\boldsymbol{b}}$ имеет вид:

$$b_n = \frac{1}{n}, \quad q_k < n \leqslant p_k, \qquad \text{и} \qquad b_n = \frac{1}{p_k}, \quad p_k < n \leqslant q_{k+1}.$$

Тогда

$$g(\boldsymbol{b}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg(\sum_{n=q_k+1}^{p_k} \frac{\sin nx}{n} + \frac{1}{p_k} \sum_{n=p_k+1}^{q_{k+1}} \sin nx \Bigg).$$

Положим $x_j = \pi/p_j$ и рассмотрим последовательность значений, которые принимают функции $g(\boldsymbol{b}, x)$ и $v(\boldsymbol{b}, x)$ в этих точках. Имеем

$$g(\boldsymbol{b}, x_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg(\sum_{n=q_k+1}^{p_k} \frac{\sin(\pi n/p_j)}{n} + \frac{1}{p_k} \sum_{n=p_k+1}^{q_{k+1}} \sin(\pi n/p_j) \Bigg).$$

Достаточно ценить $g(\boldsymbol{b}, x_j)$ сверху. Разобьём полученную сумму на три:

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{b}, x_j) = {} & \sum_{k=1}^{j-1} \Bigg(\sum_{n=q_k+1}^{p_k} \frac{\sin(\pi n/p_j)}{n} + \frac{1}{p_k} \sum_{n=p_k+1}^{q_{k+1}} \sin(\pi n/p_j) \Bigg) \\ & + \Bigg(\sum_{n=q_j+1}^{p_j} \frac{\sin(\pi n/p_j)}{n} + \frac{1}{p_j} \sum_{n=p_j+1}^{q_{j+1}} \sin(\pi n/p_j) \Bigg) \\ & + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Bigg(\sum_{n=q_k+1}^{p_k} \frac{\sin(\pi n/p_j)}{n} + \frac{1}{p_k} \sum_{n=p_k+1}^{q_{k+1}} \sin(\pi n/p_j) \Bigg). \end{aligned} \tag{1.161}$$

Для оценки третьей суммы воспользуемся стандартной оценкой остатка ряда и условием (1.160):

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\biggl(\sum_{n=q_k+1}^{p_k}\frac{\sin\left(\pi n/p_j\right)}{n}+\frac{1}{p_k}\sum_{n=p_k+1}^{q_{k+1}}\sin\left(\pi n/p_j\right)\biggr)\geqslant-\frac{1}{q_{j+1}+1}\cdot\frac{1}{\sin\bigl(\pi/(2p_j)\bigr)}$$
$$\geqslant-\frac{p_j}{q_{j+1}}=o(1). \qquad (1.162)$$

Первая сумма, очевидно, неотрицательна. Наконец, оценим вторую сумму, в свою очередь состоящую из двух частей. Для оценки первой части воспользуемся условием (1.159):

$$\sum_{n=q_j+1}^{p_j}\frac{\sin(\pi n/p_j)}{n}=\sum_{n=1}^{p_j}\frac{\sin\left(\pi n/p_j\right)}{n}-\sum_{n=1}^{q_j}\frac{\sin\left(\pi n/p_j\right)}{n}\geqslant\sum_{n=1}^{p_j}\frac{\sin\left(\pi n/p_j\right)}{n}-\frac{q_j}{p_j}$$
$$=\frac{\pi}{p_j}\sum_{n=1}^{p_j}\frac{\sin\left(\pi n/p_j\right)}{\pi n/p_j}+o(1)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx+o(1). \qquad (1.163)$$

Другая же часть ввиду арифметической природы последовательностей $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ равна нулю. Действительно,

$$\sum_{n=p_j+1}^{q_{j+1}}\sin\left(\pi n/p_j\right)=\frac{\cos\bigl(\pi+\pi/(2p_j)\bigr)-\cos\bigl(\pi q_{j+1}/p_j+\pi/(2p_j)\bigr)}{2\sin\bigl(\pi/(2p_j)\bigr)}=0. \qquad (1.164)$$

Объединяя (1.161)—(1.164), приходим к оценке $g(\boldsymbol{b},x_j)\geqslant\pi\overline{I}+o(1)$.

С другой стороны, учитывая условие (1.161), имеем

$$v(\boldsymbol{b},x_j)=\frac{\pi}{p_j}\biggl(\sum_{k=1}^{j-1}\biggl(\sum_{n=q_k+1}^{p_k}1+\frac{1}{p_k}\sum_{n=p_k+1}^{q_{k+1}}n\biggr)+\sum_{n=q_j+1}^{p_j}1\biggr)$$
$$=\frac{\pi}{p_j}\biggl(\biggl(\sum_{k=1}^{j-1}p_k-q_k+\frac{q_{k+1}-p_k}{p_k}\cdot\frac{q_{k+1}+p_k+1}{2}\biggr)+p_j-q_j\biggr)$$
$$<\pi+\frac{3\pi jq_j^2}{p_j}=\pi+o(1).$$

Тем самым, $g(\boldsymbol{b},x_j)\geqslant\bigl(\overline{I}+o(1)\bigr)v(\boldsymbol{b},x_j)$. Теорема 1.10 доказана. □

Глава 2. Ряды по синусам с выпуклыми коэффициентами

2.1. Точная оценка снизу суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами

2.1.1. Формулировка основных результатов

Усилим сначала теорему 2.E, добавив в правой части (23) функцию

$$w(\boldsymbol{b},x)=x\sum_{k=1}^{m(x)-1}k^3\Delta^2 b_k. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности* $\boldsymbol{b}$ *и для всех* $x\in(0,\pi/2]$ *выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b},x)\geqslant\frac{2}{\pi^2}\,v(\boldsymbol{b},x)+\frac{\pi-2}{12\pi^2}\,w(\boldsymbol{b},x)-\frac{1}{\pi}\,b_{m(x)}-\left(\frac{m(x)}{\pi}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m(x)}\right)b_{m(x)}. \tag{2.2}$$

Доказательству этой теоремы будет посвящён пункт 2.1.2. Заметим, что последнее слагаемое в формуле (2.2) есть $o(x)$, $x\to+0$, но в то же время $\varliminf_{x\to+0}w(\boldsymbol{b},x)/x>0$ при любых $\boldsymbol{b}$, отличных от тождественно нулевой. Данное наблюдение позволяет уточнить теорему 2.E, отказавшись от вычитания в (23) третьего слагаемого.

Следствие 2.1. *Пусть* $\boldsymbol{b}$ *— положительная, выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность. Тогда для некоторого* $x_0>0$ *выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b},x)>\frac{2}{\pi^2}\,v(\boldsymbol{b},x)-\frac{1}{\pi}\,b_{m(x)},\qquad 0<x<x_0. \tag{2.3}$$

Это, на первый взгляд, небольшое усиление теоремы 2.E оказывается максимально допустимым, так как ни избавиться от второго слагаемого, ни даже

уменьшить коэффициент $1/\pi$ на классе всех выпуклых последовательностей $\boldsymbol{b}$ невозможно (см. теорему 2.5).

Как мы увидим впоследствии (см. пункт 2.1.3), функция $w(\boldsymbol{b}, x)$ довольно сложно устроена. Она может принимать как очень маленькие значения, порядок которых меньше $b_{m(x)}$, так и довольно большие, близкие по асимптотике к $v(\boldsymbol{b}, x)$. И всё же, если последовательность $\boldsymbol{b}$ достаточно регулярна, колебания $w(\boldsymbol{b}, x)$ будут не столь значительны, что позволяет установить для отдельных классов последовательностей положительность разности $g(\boldsymbol{b}, x) - 2\pi^{-2}v(\boldsymbol{b}, x)$ в некоторой окрестности нуля.

Теорема 2.2. *Пусть $\boldsymbol{b}$ — положительная, выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность, удовлетворяющая хотя бы одному из следующих условий:*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^3 \Delta^2 b_k > 0, \tag{2.4}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} k \Delta^2 b_k = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty. \tag{2.5}$$

Тогда для некоторого $x_0 > 0$ выполняется неравенство

$$g(\boldsymbol{b}, x) > \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x), \qquad 0 < x < x_0. \tag{2.6}$$

Если же последовательность $\boldsymbol{b}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^3 \Delta^2 b_k = +\infty, \tag{2.7}$$

то

$$\lim_{x\to+0} \left(g(\boldsymbol{b}, x) - \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x) \right) = +\infty.$$

Непосредственно из теоремы 2.2 можно получить достаточные условия на последовательность $\boldsymbol{b}$, более удобные для проверки и характеризующие степень регулярности $\boldsymbol{b}$.

Следствие 2.2. *Пусть $\boldsymbol{b}$ — положительная, выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность, которая удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:*

$$\lim_{k\to\infty} k^3 \Delta^2 b_k = 0, \tag{2.8}$$

$$\varliminf_{k\to\infty} k^3\Delta^2 b_k > 0, \tag{2.9}$$

$$\exists\, p \geqslant 1\colon \sum_{k=1}^{\infty} k^{3p-1}\left(\Delta^2 b_k\right)^p < \infty. \tag{2.10}$$

Тогда для некоторого $x_0 > 0$ выполняется неравенство

$$g(\boldsymbol{b}, x) > \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x), \qquad 0 < x < x_0.$$

Если же последовательность $\boldsymbol{b}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{k\to\infty} k^3\Delta^2 b_k = +\infty, \tag{2.11}$$

то

$$\lim_{x\to+0}\left(g(\boldsymbol{b}, x) - \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x)\right) = +\infty.$$

Здесь мы видим, что для того чтобы разность $g(\boldsymbol{b}, x) - 2\pi^{-2}v(\boldsymbol{b}, x)$ была положительной, достаточно выполнения одного из двух взаимоисключающих требований (2.8) или (2.9), накладываемых на последовательность $\boldsymbol{b}$. В первом условии требуется быстрое стремление к нулю второй разности, а во втором, наоборот, медленное. Условие же (2.10) позволяет второй разности наряду с маленькими значениями принимать и довольно большие, но не слишком часто.

Подробному исследованию асимптотики функции $w(\boldsymbol{b}, x)$, а также основанным на поведении этой функции доказательствам теоремы 2.2 и следствия 2.2 будет посвящён пункт 2.1.3.

Наконец, разберёмся, что же получается для произвольных выпуклых последовательностей $\boldsymbol{b}$. Как уже отмечалось, в наиболее принципиальном для оценки снизу случае, когда последовательность $\boldsymbol{b}$ медленно меняется и выполняется порядковое отношение (19), функция $v(\boldsymbol{b}, x)$ оказывается одного порядка с величиной $b_{m(x)}/x$. В связи с этим напрашивается сравнение разности $g(\boldsymbol{b}, x) - 2\pi^{-2}v(\boldsymbol{b}, x)$ с функцией $b_{m(x)}/x^{1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. В пункте 2.1.3 будет установлен следующий результат.

Теорема 2.3. *Пусть $\boldsymbol{b}$ — положительная, выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность, ε — положительное число. Тогда*

$$\varlimsup_{x\to+0} \frac{x^{1-\varepsilon}}{b_{m(x)}}\left(g(\boldsymbol{b}, x) - \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x)\right) = +\infty.$$

Другими словами, $g(\boldsymbol{b}, x)$ в некоторых точках должна быть намного больше, чем $2\pi^{-2}v(\boldsymbol{b}, x)$. А именно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдётся такая последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, стремящаяся к нулю, что

$$g(\boldsymbol{b}, x_n) > \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x_n) + x_n^{\varepsilon-1} b_{m(x)}.$$

В частности,

$$\inf_{\boldsymbol{b}} \overline{\lim_{x\to+0}} \left(g(\boldsymbol{b}, x) - \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x) \right) = +\infty,$$

где точная нижняя грань берётся по всем выпуклым, медленно меняющимся и стремящимся к нулю последовательностям $\boldsymbol{b}$.

Какова же точная нижняя грань нижнего предела при $x \to +0$ разности $g(\boldsymbol{b}, x) - 2\pi^{-2}v(\boldsymbol{b}, x)$ на классе выпуклых, медленно меняющихся и стремящихся к нулю последовательностей? Из теоремы 2.E вытекает, что она неотрицательна. На самом деле, имеет место равенство

$$\min_{\boldsymbol{b}} \underline{\lim_{x\to+0}} \left(g(\boldsymbol{b}, x) - \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x) \right) = 0.$$

Этот факт связан с тем, что для некоторых последовательностей $\boldsymbol{b}$ разность $g(\boldsymbol{b}, x) - 2\pi^{-2}v(\boldsymbol{b}, x)$ может в отдельных точках оказаться даже отрицательной.

Теорема 2.4. *Существует выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$, для которой найдётся последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \to +0$, такая, что*

$$g(\boldsymbol{b}, x_n) < \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x_n).$$

Более того, в пункте 2.1.4 мы докажем более тонкий результат, из которого немедленно выводится теорема 2.4.

Теорема 2.5. *Существует выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$, для которой справедливо равенство*

$$\overline{\lim_{x\to+0}} \frac{2\pi^{-2}v(\boldsymbol{b}, x) - g(\boldsymbol{b}, x)}{b_{m(x)}} = \frac{1}{\pi}. \tag{2.12}$$

Из теоремы 2.5 следует, что постоянная $1/\pi$ в оценке (2.3) точная.

Следствие 2.3. *На классе положительных, выпуклых и стремящихся к нулю последовательностей* $\boldsymbol{b}$ *выполняется соотношение*

$$\max_{\boldsymbol{b}} \overline{\lim_{x\to+0}} \frac{2\pi^{-2}v(\boldsymbol{b},x)-g(\boldsymbol{b},x)}{b_{m(x)}} = \frac{1}{\pi}.$$

Это утверждение позволяет уточнить результат С. Алянчича, Р. Боянича и М. Томича и указать для суммы ряда по синусам, последовательность коэффициентов которого выпукла и медленно меняется, асимптотически точную миноранту.

Следствие 2.4. *Для любой выпуклой, стремящейся к нулю и медленно меняющейся последовательности* $\boldsymbol{b}$ *найдётся такое* $x_0 > 0$*, что выполняется соотношение*

$$g(\boldsymbol{b},x) > \frac{2}{\pi^2}\,v(\boldsymbol{b},x) - \frac{1}{\pi}\,b_{m(x)}, \qquad 0 < x < x_0.$$

Существует выпуклая, стремящаяся к нулю и медленно меняющаяся последовательность $\boldsymbol{b}$*, для которой*

$$\overline{\lim_{x\to+0}} \frac{2\pi^{-2}v(\boldsymbol{b},x)-g(\boldsymbol{b},x)}{b_{m(x)}} = \frac{1}{\pi}.$$

Рассмотрим теперь следующую модификацию мажоранты Салема:

$$v_0(\boldsymbol{b},x) = x\left(\sum_{k=1}^{m(x)-1} kb_k + \frac{m(x)}{2}\,b_{m(x)}\right).$$

Вследствие очевидного равенства

$$\frac{2}{\pi^2}\,v(\boldsymbol{b},x) - \frac{1}{\pi}\,b_{m(x)} = \frac{2}{\pi^2}\,v_0(\boldsymbol{b},x) + o(x), \qquad x\to 0, \tag{2.13}$$

и приведённых выше результатов для оценки снизу суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами вместо мажоранты Салема $v(\boldsymbol{b},x)$ предпочтительнее использовать функцию $v_0(\boldsymbol{b},x)$. Действительно, из теорем 2.1 и 2.5 с учётом соотношения (2.13) легко получается следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Пусть* $\boldsymbol{b}$ *— положительная, выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность. Тогда для некоторого* $x_0 > 0$ *выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b},x) > \frac{2}{\pi^2}\,v_0(\boldsymbol{b},x), \qquad 0 < x < x_0.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$, для которой найдётся последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \to +0$, такая, что

$$g(\boldsymbol{b}, x_n) < \frac{2}{\pi^2}\, x_n \left(\sum_{k=1}^{m(x_n)-1} k b_k + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) m(x_n) b_{m(x_n)} \right).$$

2.1.2. Уточнённая оценка снизу суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами

Цель этого пункта — усилить теорему 1.C, получив более точную оценку снизу суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами. Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.1. *Для любого $x \in [0, \pi/2]$ выполняется неравенство*

$$\sin x \geqslant x - \frac{2(\pi - 2)}{\pi^2}\, x^2.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = (x - \sin x)x^{-2}$. Ввиду того, что $\varphi(\pi/2) = 2(\pi - 2)\pi^{-2}$, достаточно показать, что $\varphi(x)$ возрастает на $[0, \pi/2]$. Действительно, для всех $x \in (0, \pi/2)$ имеем

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\sin x - x(1 + \cos x)}{x^3} = \frac{2(1 + \cos x)\big(\operatorname{tg}(x/2) - x/2\big)}{x^3} > 0.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.2. *Для любого $y \geqslant 2$ функция*

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{xy(y+1)}{\pi^2} - \frac{(\pi - 2)x(\pi - yx)(y+1)(2y+1)}{2\pi^3}$$

убывает на промежутке $(0, \pi/y]$.

Доказательство. Действительно, производная функции $\psi(x)$ имеет вид

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{1}{4\sin^2(x/2)} - \frac{y(y+1)}{\pi^2} + \frac{(\pi - 2)(2yx - \pi)(y+1)(2y+1)}{2\pi^3}.$$

Легко видеть, что $d\psi/dx$ возрастает на промежутке $(0, \pi/y]$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что $d\psi/dx$ отрицательна в точке π/y.

Учитывая неравенства $y \geqslant 2$ и $\sin t \geqslant 2t/\pi$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, имеем

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=\pi/y} = -\frac{1}{4\sin^2(\pi/(2y))} - \frac{y(y+1)}{\pi^2} + \frac{(\pi-2)(y+1)(2y+1)}{2\pi^2}$$
$$< -\frac{y^2}{4} - \frac{y(y+1)}{\pi^2} + \frac{(y+1)(2y+1)}{\pi^2} = -\frac{y^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{\pi^2} < \left(\frac{9}{4\pi^2} - \frac{1}{4}\right) y^2 < 0.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.3. *Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности* $\boldsymbol{b}$ *имеет место равенство*

$$b_n = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n+1)\Delta^2 b_k.$$

Доказательство. Пользуясь стремлением к нулю последовательности $\boldsymbol{b}$, запишем b_n следующим образом:

$$b_n = \sum_{l=n}^{\infty} \Delta^1 b_l = \sum_{l=n}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \Delta^2 b_k. \tag{2.14}$$

В силу выпуклости последовательности $\boldsymbol{b}$ все слагаемые в (2.14) неотрицательны. Меняя порядок суммирования, получаем

$$\sum_{l=n}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \Delta^2 b_k = \sum_{k=n}^{\infty} \Delta^2 b_k \sum_{l=n}^{k} 1 = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n+1)\Delta^2 b_k.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.4. *Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности* $\boldsymbol{b}$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(2k - \frac{3k^2}{n}\right) b_k \geqslant \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \Delta^2 b_k - \frac{n+1}{2}\, b_n. \tag{2.15}$$

Доказательство. Поскольку последовательность $\boldsymbol{b}$ стремится к нулю, можем представить первое слагаемое левой части (2.15) следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} 2k b_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{\infty} 2k \Delta^1 b_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{l=j}^{\infty} 2k \Delta^2 b_l. \tag{2.16}$$

Все слагаемые (2.16) неотрицательны, так как последовательность $\boldsymbol{b}$ выпукла. Меняя порядок суммирования, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{l=j}^{\infty}2k\Delta^2 b_l = \sum_{l=1}^{n-1}\Delta^2 b_l\sum_{k=1}^{l}2k\sum_{j=k}^{l}1 + \sum_{l=n}^{\infty}\Delta^2 b_l\sum_{k=1}^{n}2k\sum_{j=k}^{l}1$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{n-1}l(l+1)(l+2)\Delta^2 b_l + \frac{n(n+1)}{3}\sum_{l=n}^{\infty}(3l-2n+2)\Delta^2 b_l. \quad (2.17)$$

Аналогично преобразуем и второе слагаемое в левой части (2.15)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}3k^2 b_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{\infty}3k^2\Delta^1 b_j = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{l=j}^{\infty}3k^2\Delta^2 b_l$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n-1}\Delta^2 b_l\sum_{k=1}^{l}3k^2\sum_{j=k}^{l}1 + \sum_{l=n}^{\infty}\Delta^2 b_l\sum_{k=1}^{n}3k^2\sum_{j=k}^{l}1$$
$$= \frac{1}{4n}\sum_{l=1}^{n-1}l(l+1)^2(l+2)\Delta^2 b_l + \frac{n+1}{4}\sum_{l=n}^{\infty}\big(4nl+n+2l+2-3n^2\big)\Delta^2 b_l. \quad (2.18)$$

Объединяя равенства (2.16)—(2.18), приходим к представлению левой части неравенства (2.15) в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\left(2k-\frac{3k^2}{n}\right)b_k = \frac{1}{12n}\sum_{l=1}^{n-1}l(l+1)(l+2)\,(4n-3l-3)\,\Delta^2 b_l$$
$$+\frac{n+1}{12}\sum_{l=n}^{\infty}\Delta^2 b_l\left(n^2+5n-6l-6\right). \quad (2.19)$$

Оценим каждую из сумм правой части (2.19):

$$\sum_{l=1}^{n-1}l(l+1)(l+2)\,(4n-3l-3)\,\Delta^2 b_l \geqslant n\sum_{l=1}^{n-1}l^3\Delta^2 b_l, \quad (2.20)$$

$$\sum_{l=n}^{\infty}\Delta^2 b_l\left(n^2+5n-6l-6\right) \geqslant -6\sum_{l=n}^{\infty}(l-n+1)\Delta^2 b_l. \quad (2.21)$$

С учётом леммы 2.3 из (2.19)—(2.21) окончательно получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\left(2k-\frac{3k^2}{n}\right)b_k \geqslant \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}k^3\Delta^2 b_k - \frac{n+1}{2}\,b_n.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.5. *Для любой выпуклой, стремящейся к нулю последовательности* $\boldsymbol{b}$ *и для всех* $x \in (0, \pi/2]$ *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m(x)-1} \widetilde{D}_k(x)\Delta^1 b_k \geqslant \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x) + \frac{\pi-2}{12\pi^2}\, w(\boldsymbol{b}, x)$$
$$- \left(\frac{xm(x)\big(m(x)+1\big)}{\pi^2} + \frac{(\pi-2)x\big(\pi - m(x)x\big)\big(m(x)+1\big)\big(2m(x)+1\big)}{2\pi^3} \right) b_{m(x)}.$$

Доказательство. С учётом вида сопряжённого ядра Дирихле (1.16) имеем

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m(x)-1} \widetilde{D}_k(x)\Delta^1 b_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m(x)-1} \frac{\sin(kx/2)\sin\big((k+1)x/2\big)}{\sin(x/2)}\Delta^1 b_k. \tag{2.22}$$

Пользуясь леммой 2.1, получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m(x)-1} \frac{\sin(kx/2)\sin\big((k+1)x/2\big)}{\sin(x/2)}\Delta^1 b_k \\
&\geqslant \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{m(x)-1} \left(\frac{kx}{2} - \frac{(\pi-2)k^2x^2}{2\pi^2}\right)\left(\frac{(k+1)x}{2} - \frac{(\pi-2)(k+1)^2x^2}{2\pi^2}\right)\Delta^1 b_k \\
&= \frac{x}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m(x)-1} \left(1 + \frac{(\pi-2)(\pi-kx)}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{\big(\pi-2\big)\big(\pi-(k+1)x\big)}{2\pi}\right)k(k+1)\Delta^1 b_k.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Поскольку $(a_1+a_2)(a_3+a_4) \geqslant a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3$, если все $a_i \geqslant 0$, можем продолжить оценку следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m(x)-1} \left(1 + \frac{(\pi-2)(\pi-kx)}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{\big(\pi-2\big)\big(\pi-(k+1)x\big)}{2\pi}\right)k(k+1)\Delta^1 b_k \\
&\qquad \geqslant \frac{x}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m(x)-1} k(k+1)\Delta^1 b_k + \frac{(\pi-2)x}{2\pi^3}\sum_{k=1}^{m(x)-1} \big(2\pi - (2k+1)x\big)k(k+1)\Delta^1 b_k.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Применим к обеим суммам правой части (2.24) преобразование Абеля

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m(x)-1} k(k+1)\Delta^1 b_k = -m(x)\big(m(x)+1\big)b_{m(x)} \\
&+ \sum_{k=1}^{m(x)} b_k\big(k(k+1) - k(k-1)\big) = -m(x)\big(m(x)+1\big)b_{m(x)} + 2\sum_{k=1}^{m(x)} kb_k,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m(x)-1} \big(2\pi-(2k+1)x\big)k(k+1)\Delta^1 b_k \\
&= -\Big(2\pi-\big(2m(x)+1\big)x\Big)m(x)\big(m(x)+1\big)b_{m(x)} \\
&\quad+\sum_{k=1}^{m(x)} b_k\Big(k(k+1)\big(2\pi-(2k+1)x\big)-k(k-1)\big(2\pi-(2k-1)x\big)\Big) \\
&= -\Big(2\pi-\big(2m(x)+1\big)x\Big)m(x)\big(m(x)+1\big)b_{m(x)}+2\sum_{k=1}^{m(x)}(2\pi k-3k^2x)b_k.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

В силу неравенства $xm(x)\leqslant\pi$ и леммы 2.4 последнее слагаемое в (2.26) можно оценить следующим неравенством:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m(x)}(2\pi k-3k^2x)b_k &\geqslant \pi\sum_{k=1}^{m(x)}\left(2k-\frac{3k^2}{m(x)}\right)b_k \\
&\geqslant \frac{\pi}{12}\sum_{k=1}^{m(x)-1}k^3\Delta^2 b_k-\frac{\pi\big(m(x)+1\big)}{2}b_{m(x)}.
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Объединяя (2.26) и (2.27), получаем

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m(x)-1} k(k+1)\big(2\pi-(2k+1)x\big)\Delta^1 b_k \geqslant \frac{\pi}{6}\sum_{k=1}^{m(x)-1}k^3\Delta^2 b_k \\
&-\pi\big(m(x)+1\big)b_{m(x)}-m(x)\big(m(x)+1\big)\Big(2\pi-\big(2m(x)+1\big)x\Big)b_{m(x)} \\
&=\frac{\pi}{6}\sum_{k=1}^{m(x)-1}k^3\Delta^2 b_k-x\big(\pi-m(x)x\big)\big(m(x)+1\big)\big(2m(x)+1\big)b_{m(x)}.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Складывая неравенства (2.25) и (2.28) с коэффициентами x/π^2 и $(\pi-2)x/(2\pi^3)$ соответственно, приходим к оценке

$$
\begin{aligned}
&\frac{x}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m(x)-1}k(k+1)\Delta^1 b_k+\frac{(\pi-2)x}{2\pi^3}\sum_{k=1}^{m(x)-1}k(k+1)\big(2\pi-(2k+1)x\big)\Delta^1 b_k \\
&\quad\geqslant\frac{2}{\pi^2}x\sum_{k=1}^{m(x)}kb_k+\frac{(\pi-2)x}{12\pi^2}\sum_{k=1}^{m(x)-1}k^3\Delta^2 b_k \\
&\quad-\left(\frac{xm(x)\big(m(x)+1\big)}{\pi^2}+\frac{(\pi-2)x\big(\pi-m(x)x\big)\big(m(x)+1\big)\big(2m(x)+1\big)}{2\pi^3}\right)b_{m(x)}.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Наконец, объединяя (2.22)—(2.24) и (2.29), завершаем доказательство леммы. □

Лемма 2.6. *Для любой выпуклой, стремящейся к нулю последовательности* $\boldsymbol{b}$ *и для всех* $x \in (0, \pi/2]$ *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m(x)-1} \widetilde{D}_k(x)\Delta^1 b_k + \frac{1}{4\sin^2(x/2)}\sum_{k=m(x)}^{\infty} \bigl(\sin m(x)x - \sin(k+1)x\bigr)\Delta^2 b_k \geqslant 0.$$

Это утверждение доказано С. А. Теляковским в [120] для $x \in (0, \pi/11]$ и распространено А. Ю. Поповым в статье [43] на промежуток $(0, \pi/2]$.

Доказательство теоремы 2.1. Воспользуемся представлением суммы ряда по синусам, полученным С. А. Теляковским:

$$g(\boldsymbol{b}, x) = \sum_{k=1}^{m(x)-1} \widetilde{D}_k(x)\Delta^1 b_k + \frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4\sin^2(x/2)}\sum_{k=m(x)}^{\infty} \bigl(\sin m(x)x - \sin(k+1)x\bigr)\Delta^2 b_k. \quad (2.30)$$

В силу леммы 2.6 из представления (2.30) вытекает неравенство

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m(x)-1} \widetilde{D}_k(x)\Delta^1 b_k + \frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}. \quad (2.31)$$

В работе [120] С. А. Теляковский воспользовался неравенством $\widetilde{D}_k(x) \geqslant 2\pi^{-2}k^2 x$ и получил для $g(\boldsymbol{b}, x)$ оценку снизу (22). А. Ю. Попов в [43] применил более точное неравенство $\widetilde{D}_k(x) \geqslant 2\pi^{-2}k(k+1)x$, благодаря чему усилил оценку Теляковского, получив неравенство (23). Здесь мы оценили сопряжённое ядро Дирихле ещё точнее (при помощи леммы 2.1). В результате более точных оценок мы доказали лемму 2.5, с помощью которой выводим из (2.31) следующее неравенство:

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \frac{2}{\pi^2}\,v(\boldsymbol{b}, x) + \frac{\pi-2}{12\pi^2}\,w(\boldsymbol{b}, x) + \left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{xm(x)\bigl(m(x)+1\bigr)}{\pi^2} - \frac{(\pi-2)x\bigl(\pi - m(x)x\bigr)\bigl(m(x)+1\bigr)\bigl(2m(x)+1\bigr)}{2\pi^3}\right) b_{m(x)}. \quad (2.32)$$

Наконец, применяя лемму 2.2, из (2.32) получаем требуемую оценку

$$g(\boldsymbol{b},x)\geqslant\frac{2}{\pi^2}\,v(\boldsymbol{b},x)+\frac{\pi-2}{12\pi^2}\,w(\boldsymbol{b},x)+\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m(x)}-\frac{m(x)}{\pi}-\frac{1}{\pi}\right)b_{m(x)}.$$

Теорема доказана. □

2.1.3. Исследование асимптотики функции $w(\boldsymbol{b},x)$

В этом пункте изучается поведение функции $w(\boldsymbol{b},x)$ при $x\to+0$ на классе всех выпуклых последовательностей $\boldsymbol{b}$, а также на некоторых подклассах. Полученные здесь результаты будут применены к оценке значений разности $g(\boldsymbol{b},x)-2\pi^{-2}v(\boldsymbol{b},x)$.

Покажем сначала, что для некоторых $\boldsymbol{b}$ функция $w(\boldsymbol{b},x)$ может принимать значения, по порядку меньшие, чем $b_{m(x)}$. Для построения примера такой последовательности нам понадобится конструкция, которая также будет использована в пункте 2.1.4.

Пусть задана возрастающая последовательность номеров $\{n_l\}_{l=0}^{\infty}$, $n_0=0$. Без ограничения общности будем предполагать, что $n_{l+1}>n_l+1$ для всех l. Как мы увидим ниже, на самом деле нам понадобится, чтобы последовательность $\{n_l\}_{l=0}^{\infty}$ довольно быстро возрастала. Последовательность неотрицательных чисел $\{\alpha_l\}_{l=1}^{\infty}$ выберем такой, чтобы

$$\sum_{l=1}^{\infty}n_l\alpha_l<+\infty,\tag{2.33}$$

$$\max_{i\geqslant l}\alpha_i>0,\qquad l\geqslant 0.\tag{2.34}$$

Последовательности $\mathbf{A}=\{A_l\}_{l=0}^{\infty}$ и $\mathbf{B}=\{B_l\}_{l=-1}^{\infty}$ зададим следующим образом:

$$A_l=\sum_{i=l+1}^{\infty}\alpha_i,\tag{2.35}$$

$$B_l=\sum_{i=l+1}^{\infty}(n_{i+1}-n_i)A_i.\tag{2.36}$$

Установим некоторые свойства последовательностей $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Лемма 2.7. *Пусть последовательность неотрицательных чисел* $\{\alpha_l\}_{l=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (2.33) *и* (2.34)*. Тогда справедливы соотношения*

$$0 < A_l < \infty, \quad l \geqslant 0, \qquad 0 < B_l < \infty, \quad l \geqslant -1, \tag{2.37}$$

$$A_{l-1} - A_l = \alpha_l, \quad l \geqslant 1, \qquad B_{l-1} - B_l = (n_{l+1} - n_l)A_l, \quad l \geqslant 0, \tag{2.38}$$

$$\lim_{l\to\infty} A_l = 0, \qquad \lim_{l\to\infty} B_l = 0, \tag{2.39}$$

$$B_l = \sum_{i=l+2}^{\infty} (n_i - n_{l+1})\alpha_i, \quad l \geqslant -1. \tag{2.40}$$

Доказательство. Выведем сначала соотношение (2.40). Для этого достаточно подставить (2.35) в (2.36), а затем изменить порядок суммирования.

$$\begin{aligned} B_l &= \sum_{i=l+1}^{\infty} (n_{i+1} - n_i)A_i = \sum_{i=l+1}^{\infty} (n_{i+1} - n_i) \sum_{j=i+1}^{\infty} \alpha_j \\ &= \sum_{j=l+2}^{\infty} \alpha_j \sum_{i=l+1}^{j-1} (n_{i+1} - n_i) = \sum_{j=l+2}^{\infty} (n_j - n_{l+1})\alpha_j. \end{aligned}$$

Положительность последовательности $\mathbf{A}$, а значит, и $\mathbf{B}$, немедленно следует из (2.34) и (2.35). Конечность A_l вытекает из соотношений (2.35) и (2.33). Конечность B_l легко вывести из (2.40), (2.33) и оценки

$$\sum_{i=l+2}^{\infty} (n_i - n_{l+1})\alpha_i \leqslant \sum_{i=l+2}^{\infty} n_i\alpha_i.$$

Наконец, учитывая (2.37), можно сразу получить равенства (2.38) и предельные соотношения (2.39) из (2.35) и (2.36). Лемма доказана. □

Последовательность $\boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ зададим следующим образом:

$$b_k = A_l(n_{l+1} - k + 1) + B_l, \qquad n_l < k \leqslant n_{l+1}, \quad l \geqslant 0. \tag{2.41}$$

Лемма 2.8. *Последовательность, определённая соотношением* (2.41)*, положительна, выпукла и стремится к нулю.*

Доказательство. Положительность последовательности $\boldsymbol{b}$ непосредственно вытекает из (2.37) и (2.41). Установим выпуклость последовательности $\boldsymbol{b}$. Рассмотрим несколько возможностей и в каждом случае явно вычислим вторую

разность. Если k таково, что для некоторого $l \geqslant 0$ выполняется неравенство $n_l < k < n_{l+1} - 1$, то

$$\begin{aligned}\Delta^2 b_k &= A_l(n_{l+1} - k + 1) + B_l - 2\big(A_l(n_{l+1} - k) + B_l\big) \\ &\quad + A_l(n_{l+1} - k - 1) + B_l = 0.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Если $k = n_{l+1} - 1$, $l \geqslant 0$, то вследствие соотношений (2.38) имеем

$$\begin{aligned}\Delta^2 b_k &= 2A_l + B_l - 2(A_l + B_l) + A_{l+1}(n_{l+2} - n_{l+1}) + B_{l+1} \\ &= A_{l+1}(n_{l+2} - n_{l+1}) + B_{l+1} - B_l = 0.\end{aligned} \tag{2.43}$$

Наконец, если $k = n_l$, $l \geqslant 0$, то опять же в силу равенств (2.38) получаем

$$\begin{aligned}\Delta^2 b_k &= A_{l-1} + B_{l-1} - 2\big(A_l(n_{l+1} - n_l) + B_l\big) + A_l(n_{l+1} - n_l - 1) + B_l \\ &= A_{l-1} - A_l - A_l(n_{l+1} - n_l) + B_{l-1} - B_l = \alpha_l \geqslant 0.\end{aligned} \tag{2.44}$$

Объединяя (2.42)—(2.44), заключаем, что вторая разность неотрицательна при любом k.

Поскольку последовательность $\boldsymbol{b}$ выпукла, для доказательства её стремления к нулю достаточно установить сходимость к нулю подпоследовательности $\{b_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$. Из (2.41) следует, что $b_{n_l} = A_{l-1} + B_{l-1}$. Учитывая (2.39), имеем $\lim_{n\to\infty} b_{n_l} = 0$. Лемма доказана. □

Теорема 2.7. *Существует выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$, для которой выполняется соотношение*

$$\varliminf_{x\to+0} \frac{w(\boldsymbol{b}, x)}{b_{m(x)}} = 0.$$

Доказательство. Выберем такую последовательность положительных чисел $\{\nu_l\}_{l=1}^{\infty}$, чтобы ряд $\sum_{l=1}^{\infty} \nu_l$ сходился. Последовательность целых неотрицательных чисел $\{n_l\}_{l=0}^{\infty}$, $n_0 = 0$, выберем растущей настолько быстро, чтобы выполнялись соотношения $n_l \geqslant 2n_{l-1}$ и

$$\lim_{l\to\infty} \frac{n_{l-1}^2}{n_l \sum_{i=l+1}^{\infty} \nu_i} = 0. \tag{2.45}$$

Числа α_l, $l \geqslant 1$, положим равными ν_l/n_l. Тогда последовательность $\{\alpha_l\}_{l=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (2.33) и (2.34). Последовательность $\boldsymbol{b}$, заданная соотношением (2.41), в силу леммы 2.8 положительна, выпукла и стремится к нулю.

Точки x_l, $l \geqslant 1$, выберем равными π/n_l. Тогда $m(x_l) = n_l$ и в силу соотношений (2.42)—(2.44) справедливо

$$w(\boldsymbol{b}, x_l) = \frac{\pi}{n_l} \sum_{k=1}^{n_l-1} k^3 \Delta^2 b_k = \frac{\pi}{n_l} \sum_{i=1}^{l-1} n_i^3 \alpha_i = \frac{\pi}{n_l} \sum_{i=1}^{l-1} n_i^2 \nu_i \leqslant \frac{\pi n_{l-1}^2}{n_l} \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i. \tag{2.46}$$

В то же время с учётом равенств (2.41), (2.35) и (2.40) получаем

$$\begin{aligned} b_{n_l} = A_{l-1} + B_{l-1} &= \sum_{i=l}^{\infty} \alpha_i + \sum_{i=l+1}^{\infty} (n_i - n_l)\alpha_i = \sum_{i=l}^{\infty} (n_i - n_l + 1)\alpha_i \\ &\geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=l+1}^{\infty} n_i \alpha_i = \frac{1}{2} \sum_{i=l+1}^{\infty} \nu_i. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Объединяя (2.46) и (2.47), с учётом (2.45) имеем

$$\lim_{l\to\infty} \frac{w(\boldsymbol{b}, x_l)}{b_{m(x_l)}} \leqslant \lim_{l\to\infty} \frac{2\pi\, n_{l-1}^2 \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i}{n_l \sum_{i=l+1}^{\infty} \nu_i} = 0.$$

Теорема доказана. □

Покажем теперь, что для некоторых подклассов выпуклых последовательностей $\boldsymbol{b}$ порядок функции $w(\boldsymbol{b}, x)$ при $x \to +0$ больше чем $b_{m(x)}$ и, как следствие, справедлива оценка (2.6).

Доказательство теоремы 2.2. В силу теоремы 2.1 достаточно доказать, что порядок функции $w(\boldsymbol{b}, x)$ будет при $x \to +0$ больше величины $b_{m(x)}$. С учётом леммы 2.3 и неравенства $x\big(m(x) - 1\big) > \pi/3$ имеем

$$\frac{b_{m(x)}}{w(\boldsymbol{b}, x)} < \frac{3}{\pi} \frac{\sum_{k=m(x)}^{\infty} k\Delta^2 b_k}{\big(m(x)-1\big)^{-1} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k^3 \Delta^2 b_k}. \tag{2.48}$$

Предположим, что выполнено (2.4). Тогда

$$\overline{\lim_{x\to+0}} \frac{\sum_{k=m(x)}^{\infty} k\Delta^2 b_k}{\big(m(x)-1\big)^{-1} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k^3 \Delta^2 b_k} \leqslant \frac{\lim_{x\to+0} \sum_{k=m(x)}^{\infty} k\Delta^2 b_k}{\underline{\lim}_{x\to+0} \big(m(x)-1\big)^{-1} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k^3 \Delta^2 b_k} = 0.$$

Если же выполнено (2.5), то справедливо

$$\overline{\lim_{x\to+0}} \frac{\sum_{k=m(x)}^{\infty} k\Delta^2 b_k}{\big(m(x)-1\big)^{-1} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k^3 \Delta^2 b_k} \leqslant \frac{\lim_{x\to+0} m(x) \sum_{k=m(x)}^{\infty} k\Delta^2 b_k}{\lim_{x\to+0} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k^3 \Delta^2 b_k} = 0.$$

В обоих случаях из (2.48) выводим

$$\lim_{x\to+0} \frac{b_{m(x)}}{w(\boldsymbol{b}, x)} = 0. \tag{2.49}$$

Следовательно, найдётся такое $x_0 > 0$, что для всех x, $0 < x < x_0$, выполняется неравенство

$$\frac{b_{m(x)}}{w(\boldsymbol{b}, x)} \leqslant \frac{\pi - 2}{24\pi}.$$

Отсюда и из теоремы 2.1 следует первая часть доказываемой теоремы. Второе утверждение немедленно выводится из (2.49) и того, что условие (2.7) влечёт равенство $\lim_{x\to+0} w(\boldsymbol{b}, x) = +\infty$. Таким образом, теорема 2.2 полностью доказана. □

Доказательство следствия 2.2. Проверим, что каждое из условий, накладываемых на последовательность $\boldsymbol{b}$, гарантирует выполнение либо (2.4), либо (2.5). Если $\boldsymbol{b}$ удовлетворяет условию (2.8), то

$$\sum_{k=n}^{\infty} k\Delta^2 b_k \leqslant \max_{k\geqslant n} k^3\Delta^2 b_k \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n} \max_{k\geqslant n} k^3\Delta^2 b_k = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty,$$

то есть выполнено (2.5).

Пусть $\boldsymbol{b}$ удовлетворяет условию (2.9). Тогда найдётся номер N, начиная с которого все члены последовательности $k^3\Delta^2 b_k$ больше $(1/2)\varliminf_{k\to\infty} k^3\Delta^2 b_k$. Следовательно, для всех $n \geqslant 2N$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^3\Delta^2 b_k \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} k^3\Delta^2 b_k \geqslant \frac{n-N}{2n} \varliminf_{k\to\infty} k^3\Delta^2 b_k \geqslant \frac{1}{4} \varliminf_{k\to\infty} k^3\Delta^2 b_k,$$

то есть выполнено (2.4).

Наконец, рассмотрим случай, когда $\boldsymbol{b}$ удовлетворяет условию (2.10). Если $p > 1$, положим $q = p/(p-1)$ и применим неравенство Гёльдера

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty} k\Delta^2 b_k &\leqslant \Big(\sum_{k=n}^{\infty} k^{3p-1}\left(\Delta^2 b_k\right)^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{(2-1/p)q}}\Big)^{1/q} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{q}\right)^{1/q} \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} k^{3p-1}\left(\Delta^2 b_k\right)^p\Big)^{1/p} = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Если же $p = 1$, то

$$\sum_{k=n}^{\infty} k\Delta^2 b_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty} k^2\Delta^2 b_k = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

В обоих случаях видно, что выполнение условия (2.10) влечёт также выполнение (2.5). Первая часть следствия доказана. Вторая часть немедленно выводится из того, что условие (2.7) вытекает из (2.11). □

Пример. Последовательность $\boldsymbol{b} = \left\{\ln^{-1}(1+k)\right\}_{k=1}^{\infty}$, очевидно, удовлетворяет условию (2.11). Следовательно,

$$\lim_{x\to+0}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{\ln(1+k)} - \frac{2x}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m(x)}\frac{k}{\ln(1+k)}\right) = +\infty.$$

Оценим теперь порядок больших значений $w(\boldsymbol{b}, x)$ на классе всех выпуклых последовательностей $\boldsymbol{b}$, или, что то же самое, порядок уклонения суммы ряда по синусам от её асимптотически точной миноранты.

Лемма 2.9. *Пусть последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел удовлетворяет условию*

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{k^2} < +\infty. \tag{2.50}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}\beta_k/k^2}{n^{\varepsilon-2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k} = 0. \tag{2.51}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon = 1/r$, $r \in \mathbb{N}$. Обозначим через s наибольшее целое неотрицательное число, не превосходящее $2r$, такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{k^{2-(2s-1)/(2r)}} < +\infty. \tag{2.52}$$

Существование такого s вытекает из того, что условие (2.52) выполняется для $s = 0$ ввиду (2.50) и оценки

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{k^{2+1/(2r)}} < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{k^2}.$$

Предположим, что $s = 2r$. Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}\beta_k/k^2}{n^{1/r-2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}\beta_k/k^{1/(2r)}}{n^{1/(2r)}\sum_{k=1}^{n}\beta_k} = 0,$$

и лемма доказана. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $s < 2r$. Поскольку s — наибольшее целое число, для которого сходится ряд (2.52), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{k^{2-(2s+1)/(2r)}} = +\infty. \tag{2.53}$$

Предположим, что соотношение (2.51) не выполнено, то есть справедливо

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k/k^2}{n^{1/r-2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k} > 0.$$

Это означает, что найдётся такая постоянная $C > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k^2} \geqslant C n^{1/r-2} \sum_{k=1}^{n} \beta_k. \tag{2.54}$$

Умножим обе части (2.54) на $n^{(2s-1)/(2r)-1}$ и просуммируем полученные неравенства по n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(2s-1)/(2r)-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k^2} \geqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{(2s+1)/(2r)-3} \sum_{k=1}^{n} \beta_k.$$

Изменим порядок суммирования в обеих частях этого неравенства. Принимая во внимание (2.53), имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta_k}{k^2} \sum_{n=1}^{k-1} n^{(2s-1)/(2r)-1} &\geqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sum_{n=k}^{\infty} n^{(2s+1)/(2r)-3} \\ &> \frac{2rC}{4r-2s-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k^{2-(2s+1)/(2r)}} = +\infty. \end{aligned} \tag{2.55}$$

С другой стороны, левая часть (2.55) должна быть конечна. Действительно, рассмотрим две возможности: $s = 0$ и $s > 0$. В первом случае вследствие условия (2.50) получаем оценку

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta_k}{k^2} \sum_{n=1}^{k-1} n^{-1/(2r)-1} < \zeta\left(1 + \frac{1}{2r}\right) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta_k}{k^2} < +\infty.$$

Если s положительно, то в силу (2.52) имеем

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta_k}{k^2} \sum_{n=1}^{k-1} n^{(2s-1)/(2r)-1} < \frac{2r}{2s-1} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta_k}{k^{2-(2s-1)/(2r)}} < +\infty.$$

В обоих случаях получаем противоречие с (2.55). Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 2.3. В силу теоремы 2.1 справедлива оценка

$$\frac{x^{1-\varepsilon}}{b_{m(x)}} \left(g(\boldsymbol{b}, x) - \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x) \right) \geqslant \frac{\pi - 2}{12\pi^2} \frac{x^{1-\varepsilon} w(\boldsymbol{b}, x)}{b_{m(x)}} + O\left(x^{1-\varepsilon}\right), \quad x \to +0. \tag{2.56}$$

Принимая во внимание (2.1), лемму 2.3 и неравенство $x(m(x)-1) > \pi/3$, получаем оценку

$$\frac{x^{1-\varepsilon} w(\boldsymbol{b}, x)}{b_{m(x)}} \geqslant \frac{x^{2-\varepsilon} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k^3 \Delta^2 b_k}{\sum_{k=m(x)}^{\infty} k \Delta^2 b_k} \geqslant \Big(\frac{\pi}{3}\Big)^{2-\varepsilon} \frac{\sum_{k=1}^{m(x)-1} k^3 \Delta^2 b_k}{\big(m(x)-1\big)^{2-\varepsilon} \sum_{k=m(x)}^{\infty} k \Delta^2 b_k}. \tag{2.57}$$

Поскольку $\boldsymbol{b}$ положительна и выпукла, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k\Delta^2 b_k$ сходится, а последовательность $\beta_k = k^3 \Delta^2 b_k$ удовлетворяет условию (2.50). Тогда в силу леммы 2.9 имеем

$$\varlimsup_{x \to +0} \frac{\sum_{k=1}^{m(x)-1} k^3 \Delta^2 b_k}{\big(m(x)-1\big)^{2-\varepsilon} \sum_{k=m(x)}^{\infty} k \Delta^2 b_k} = +\infty. \tag{2.58}$$

Объединяя (2.56)—(2.58), завершаем доказательство теоремы. □

2.1.4. Доказательство точности оценки снизу

Цель этого пункта — доказать теорему 2.5. Перед построением требуемой последовательности $\boldsymbol{b}$ докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 2.10. *Для любых $x \in (0, 2\pi)$ и $j > l$ справедливы равенства*

$$\sum_{k=l+1}^{j} \sin kx = \frac{\cos\,(l+1/2)\,x - \cos\,(j+1/2)\,x}{2\sin(x/2)}, \tag{2.59}$$

$$\sum_{k=l+1}^{j} k \sin kx = \frac{l\sin(l+1)x - (l+1)\sin lx - j\sin(j+1)x + (j+1)\sin jx}{4\sin^2(x/2)}. \tag{2.60}$$

Доказательство. Равенство (2.59) сразу следует из (1.16):

$$\sum_{k=l+1}^{j} \sin kx = \widetilde{D}_j(x) - \widetilde{D}_l(x) = \frac{\cos(l+1/2)x - \cos\,(j+1/2)\,x}{2\sin(x/2)}.$$

Равенство (2.60) получается из (1.59) дифференцированием

$$\begin{aligned}\sum_{k=l+1}^{j} k \sin kx &= \frac{d}{dx}\Big(D_l(x) - D_j(x)\Big) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin\,(l+1/2)\,x - \sin\,(j+1/2)\,x}{2\sin(x/2)}\right) \\ &= \frac{l\sin(l+1)x - (l+1)\sin lx - j\sin(j+1)x + (j+1)\sin jx}{4\sin^2(x/2)}.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.11. *Для любых чисел y и z, $2 \leqslant z \leqslant (3/2)y + 1$, верно неравенство*

$$(y+1)\sin\frac{\pi}{z} - \sin\frac{\pi(y+1)}{z} - \frac{4}{3\pi}(z+1)(3y-2z+2)\sin^2\frac{\pi}{2z} < \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi^3 y}{6z^3} - \frac{\pi y}{z^2}. \quad (2.61)$$

Доказательство. Поскольку для любых $x > 0$ выполняются неравенства $x - x^3/6 < \sin x < x$ и $\sin x \geqslant -1$, можно записать следующие оценки:

$$\sin\frac{\pi}{z} < \frac{\pi}{z}, \quad (2.62)$$

$$-\sin\frac{\pi(y+1)}{z} \leqslant 1, \quad (2.63)$$

$$-\frac{4}{3\pi}\sin^2\frac{\pi}{2z} < -\frac{4}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2z} - \frac{\pi^3}{48z^3}\right)^2 < -\frac{\pi}{3z^2} + \frac{\pi^3}{36z^4}. \quad (2.64)$$

Неравенства (2.62)—(2.64) умножим на $y+1$, 1 и $(z+1)(3y-2z+2)$ соответственно и после сложения получим

$$(y+1)\sin\frac{\pi}{z} - \sin\frac{\pi(y+1)}{z} - \frac{4}{3\pi}(z+1)(3y-2z+2)\sin^2\frac{\pi}{2z} < \frac{\pi(y+1)}{z} + 1 + (z+1)(3y-2z+2)\left(-\frac{\pi}{3z^2} + \frac{\pi^3}{36z^4}\right). \quad (2.65)$$

Ввиду того, что $z > 1$, имеем

$$(z+1)(3y-2z+2)\left(-\frac{\pi}{3z^2} + \frac{\pi^3}{36z^4}\right) < -\frac{\pi y(z+1)}{z^2} + \frac{2\pi(z^2-1)}{3z^2} + \frac{\pi^3 y(z+1)}{12z^4} < -\frac{\pi y(z+1)}{z^2} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi^3 y}{6z^3}. \quad (2.66)$$

Объединяя (2.65) и (2.66), приходим к оценке

$$(y+1)\sin\frac{\pi}{z} - \sin\frac{\pi(y+1)}{z} - \frac{4}{3\pi}(z+1)(3y-2z+2)\sin^2\frac{\pi}{2z} < \frac{\pi(y+1)}{z} + 1 - \frac{\pi y(z+1)}{z^2} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi^3 y}{6z^3} = -\frac{\pi y}{z^2} + \frac{\pi^3 y}{6z^3} + \frac{\pi}{z} + 1 + \frac{2\pi}{3}. \quad (2.67)$$

Наконец, учитывая неравенство $\pi/z + 1 + 2\pi/3 < 3\pi/2$, $z \geqslant 2$, из (2.67) выводим требуемую оценку (2.61). Лемма доказана. □

Приступим к построению последовательности $\boldsymbol{b}$, удовлетворяющей соотношению (2.12). Воспользуемся схемой, изложенной в пункте 2.1.3, с той лишь разницей, что последовательность номеров $\{n_l\}_{l=0}^{\infty}$ будет расти ещё быстрее, а последовательность чисел $\{\nu_l\}_{l=1}^{\infty}$ окажется разбавленной нулями.

Для возрастающей последовательности номеров $\{n_l\}_{l=0}^{\infty}$, $n_0 = 0$, со свойством $n_{l+1} > n_l + 1$ и неотрицательной последовательности чисел $\{\alpha_l\}_{l=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям (2.33) и (2.34), определим последовательности $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\boldsymbol{b}$ посредством соотношений (2.35), (2.36) и (2.41) соответственно. Напомним, что для построенных таким образом последовательностей справедливы леммы 2.7 и 2.8. Кроме того, данный вид последовательности $\boldsymbol{b}$ позволит нам получить более удобные представления функций для $g(\boldsymbol{b}, x)$ и $v(\boldsymbol{b}, x)$.

Лемма 2.12. *Для определённой соотношением* (2.41) *последовательности* $\boldsymbol{b}$ *справедливо следующее представление суммы ряда по синусам:*

$$g(\boldsymbol{b}, x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(n_k+1)\alpha_k - \frac{1}{4\sin^2(x/2)}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \sin(n_k+1)x.$$

Доказательство. В силу леммы 2.8 последовательность $\boldsymbol{b}$ выпукла и стремится к нулю. Следовательно, ряд по синусам с такими коэффициентами сходится. Разобьём его на пачки

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=n_l+1}^{n_{l+1}} b_k \sin kx. \tag{2.68}$$

Вычислим сумму внутри пачки. Для этого сначала воспользуемся соотношениями (2.41)

$$\sum_{k=n_l+1}^{n_{l+1}} b_k \sin kx = \big(A_l(n_{l+1}+1) + B_l\big)\sum_{k=n_l+1}^{n_{l+1}} \sin kx - A_k \sum_{k=n_l+1}^{n_{l+1}} k \sin kx, \tag{2.69}$$

а затем леммой 2.10

$$\begin{aligned}
&\big(A_l(n_{l+1}+1) + B_l\big)\sum_{k=n_l+1}^{n_{l+1}} \sin kx - A_l \sum_{k=n_l+1}^{n_{l+1}} k \sin kx \\
&= \big(A_l(n_{l+1}+1) + B_l\big)\frac{\cos(n_l+1/2)\,x - \cos(n_{l+1}+1/2)\,x}{2\sin(x/2)} \\
&- A_l \frac{n_l \sin(n_l+1)x - (n_l+1)\sin n_l x - n_{l+1}\sin(n_{l+1}+1)x + (n_{l+1}+1)\sin n_{l+1}x}{4\sin^2(x/2)} \\
&= \frac{1}{4\sin^2(x/2)}\Big(\big(A_l(n_{l+1}-n_l+1) + B_l\big)\sin(n_l+1)x \\
&- \big(A_l(n_{l+1}-n_l) + B_l\big)\sin n_l x - (A_l+B_l)\sin(n_{l+1}+1)x + B_l \sin n_{l+1}x\Big).
\end{aligned} \tag{2.70}$$

С учётом равенств (2.38) имеем

$$\begin{aligned}\big(A_l(n_{l+1}-n_l+1)+B_l\big)\sin(n_l+1)x-\big(A_l(n_{l+1}-n_l)+B_l\big)\sin n_lx\\ -(A_l+B_l)\sin(n_{l+1}+1)x+B_l\sin n_{l+1}x=A_l\big(\sin(n_l+1)x-\sin(n_{l+1}+1)x\big)\\ +B_{l-1}\big(\sin(n_l+1)x-\sin n_lx\big)-B_l\big(\sin(n_{l+1}+1)x-\sin n_{l+1}x\big).\end{aligned}\tag{2.71}$$

Наконец, из (2.69)—(2.71) выводим

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_l+1}^{n_{l+1}}b_k\sin kx=\frac{1}{4\sin^2(x/2)}\Big(A_l\big(\sin(n_l+1)x-\sin(n_{l+1}+1)x\big)\\ +B_{l-1}\big(\sin(n_l+1)x-\sin n_lx\big)-B_l\big(\sin(n_{l+1}+1)x-\sin n_{l+1}x\big)\Big).\end{aligned}\tag{2.72}$$

Таким образом, из (2.68) и (2.72) находим следующее представление суммы ряда по синусам:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx=\frac{1}{4\sin^2(x/2)}\sum_{l=0}^{\infty}\Big(A_l\big(\sin(n_l+1)x-\sin(n_{l+1}+1)x\big)\\ +B_{l-1}\big(\sin(n_l+1)x-\sin n_lx\big)-B_l\big(\sin(n_{l+1}+1)x-\sin n_{l+1}x\big)\Big).\end{aligned}\tag{2.73}$$

Разобьём ряд в правой части (2.73) на две суммы и вычислим каждую из них. Рассмотрим сначала частичную сумму ряда $\sum_{l=0}^{\infty}A_l\big(\sin(n_l+1)x-\sin(n_{l+1}+1)x\big)$ и применим к ней преобразование Абеля:

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{N}A_l\big(\sin(n_l+1)x-\sin(n_{l+1}+1)x\big)\\ &\quad=\sum_{l=1}^{N}(A_l-A_{l-1})\sin(n_l+1)x+A_0\sin x-A_N\sin(n_{N+1}+1)x\\ &\quad=A_0\sin x-\sum_{l=1}^{N}\alpha_l\sin(n_l+1)x-A_N\sin(n_{N+1}+1)x.\end{aligned}\tag{2.74}$$

Последний переход в (2.74) сделан с учётом соотношений (2.38). Вспоминая, что ряд $\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_l$ сходится, а последовательность A_N ввиду (2.39) стремится к нулю, можем перейти в (2.74) к пределу при $N\to\infty$

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_l\big(\sin(n_l+1)x-\sin(n_{l+1}+1)x\big)=A_0\sin x-\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_l\sin(n_l+1)x.\tag{2.75}$$

Рассмотрим теперь частичные суммы другой части ряда (2.73). Эти суммы легко вычисляются

$$\sum_{l=0}^{N}\Big(B_{l-1}\big(\sin(n_l+1)x-\sin n_l x\big)-B_l\big(\sin(n_{l+1}+1)x-\sin n_{l+1}x\big)\Big)$$
$$=B_{-1}\sin x-B_N\big(\sin(n_{N+1}+1)x-\sin n_{N+1}x\big). \tag{2.76}$$

Переходя к пределу в (2.76) при $N\to\infty$ и учитывая стремление к нулю последовательности B_N в силу (2.39), получаем

$$\sum_{l=0}^{\infty}\Big(B_{l-1}\big(\sin(n_l+1)x-\sin n_l x\big)-B_l\big(\sin(n_{l+1}+1)x-\sin n_{l+1}x\big)\Big)=B_{-1}\sin x. \tag{2.77}$$

Складывая (2.75) и (2.77), с учётом (2.38) получаем

$$\sum_{l=0}^{\infty}\Big(A_l\big(\sin(n_l+1)x-\sin(n_{l+1}+1)x\big)+B_{l-1}\big(\sin(n_l+1)x-\sin n_l x\big)$$
$$-B_l\big(\sin(n_{l+1}+1)x-\sin n_{l+1}x\big)\Big)$$
$$=\big(A_0(n_1+1)+B_0\big)\sin x-\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_l\sin(n_l+1)x. \tag{2.78}$$

Наконец, принимая во внимание (2.35) и (2.36), выводим из (2.73) и (2.78)

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_k\sin kx=\frac{1}{4\sin^2(x/2)}\Big(\sin x\sum_{l=1}^{\infty}(n_l+1)\alpha_l-\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_l\sin(n_l+1)x\Big).$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.13. *Для определённой соотношением* (2.41) *последовательности* $\boldsymbol{b}$ *справедливо следующее представление функции Салема:*

$$v(\boldsymbol{b},x)=\frac{x}{6}\Big(\sum_{k=1}^{l-1}n_k(n_k+1)(n_k+2)\alpha_k+n_l(n_l+1)\sum_{k=l}^{\infty}(3n_k-2n_l+2)\alpha_k\Big)$$

для всех $x\in\big(\pi/(n_l+1),\pi/n_l\big]$, $l\geqslant 1$.

Доказательство. Поскольку на рассматриваемом промежутке $m(x)=n_l$, с учётом (2.41) имеем

$$v(\boldsymbol{b},x)=x\sum_{k=1}^{n_l}kb_k=x\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}}k\big(A_i(n_{i+1}-k+1)+B_i\big). \tag{2.79}$$

Воспользуемся соотношениями (2.35) и (2.40)

$$k\big(A_i(n_{i+1}-k+1)+B_i\big)=k\bigg((n_{i+1}-k+1)\sum_{j=i+1}^{\infty}\alpha_j+\sum_{j=i+2}^{\infty}(n_j-n_{i+1})\alpha_j\bigg)$$

$$=k\bigg((n_{i+1}-k+1)\alpha_{i+1}+\sum_{j=i+2}^{\infty}(n_j-k+1)\alpha_j\bigg)=\sum_{j=i+1}^{\infty}k(n_j-k+1)\alpha_j. \quad (2.80)$$

Подставляя (2.80) в (2.79) и меняя порядок суммирования, получаем

$$v(\boldsymbol{b},x)=x\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{k=n_i+1}^{n_i}\sum_{j=i+1}^{\infty}k(n_j-k+1)\alpha_j=x\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}}k(n_j-k+1)$$

$$+x\sum_{j=l+1}^{\infty}\alpha_j\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}}k(n_j-k+1)=x\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\sum_{k=1}^{n_j}k(n_j-k+1)$$

$$+x\sum_{j=l+1}^{\infty}\alpha_j\sum_{k=1}^{n_l}k(n_j-k+1). \quad (2.81)$$

Вычисляя внутренние суммы в правой части (2.81), находим

$$\sum_{k=1}^{n_j}k(n_j-k+1)=\frac{n_j(n_j+1)(n_j+2)}{6}, \quad (2.82)$$

$$\sum_{k=1}^{n_l}k(n_j-k+1)=\frac{n_l(n_l+1)(3n_j-2n_l+2)}{6}. \quad (2.83)$$

Наконец, подставляя (2.82) и (2.83) в (2.81), окончательно получаем

$$v(\boldsymbol{b},x)=\frac{x}{6}\sum_{j=1}^{l-1}\alpha_j n_j(n_j+1)(n_j+2)+\frac{x}{6}\,n_l(n_l+1)\sum_{j=l}^{\infty}\alpha_j(3n_j-2n_l+2).$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 2.5. Рассмотрим такую последовательность неотрицательных чисел $\{\nu_l\}_{l=1}^{\infty}$, имеющую бесконечно много как нулевых, так и ненулевых членов, чтобы ряд $\sum_{l=1}^{\infty}\nu_l$ сходился и выполнялось условие

$$\sum_{i=l+1}^{\infty}\nu_i\sim\sum_{i=l}^{\infty}\nu_i,\qquad l\to\infty. \quad (2.84)$$

Последовательность номеров $\{n_l\}_{l=0}^{\infty}$, $n_0=0$, выберем так, чтобы для всех $l\geqslant 1$ выполнялось неравенство

$$n_l>(n_{l-1}+1)^3\,\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i}{\sum_{i=l}^{\infty}\nu_i}. \quad (2.85)$$

Числа α_l, $l \geqslant 1$, положим равными ν_l/n_l. Тогда ввиду сходимости ряда $\sum_{l=1}^{\infty} \nu_l$, а также вследствие наличия бесконечного количества ненулевых членов в последовательности $\{\nu_l\}_{l=1}^{\infty}$, последовательность $\{\alpha_l\}_{l=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (2.33) и (2.34). В силу леммы 2.8 последовательность $\boldsymbol{b}$, определённая соотношениями (2.41), положительна, выпукла и стремится к нулю, а ввиду (2.84) ещё и медленно меняется. Пусть l — такой номер, что $\nu_l = 0$. В силу лемм 2.12 и 2.13

$$\begin{aligned} &4\sin^2\frac{\pi}{2n_l}\left(g\left(\boldsymbol{b},\frac{\pi}{n_l}\right)-\frac{2}{\pi^2}v\left(\boldsymbol{b},\frac{\pi}{n_l}\right)\right)\\ &=\sum_{i=1}^{l-1}\alpha_i\left((n_i+1)\sin\frac{\pi}{n_l}-\sin\frac{\pi(n_i+1)}{n_l}-\frac{4n_i(n_i+1)(n_i+2)}{3\pi n_l}\sin^2\frac{\pi}{2n_l}\right)\\ &+\sum_{i=l+1}^{\infty}\alpha_i\left((n_i+1)\sin\frac{\pi}{n_l}-\sin\frac{\pi(n_i+1)}{n_l}-\frac{4}{3\pi}(n_l+1)(3n_i-2n_l+2)\sin^2\frac{\pi}{2n_l}\right). \end{aligned} \tag{2.86}$$

Оценим каждое из слагаемых правой части (2.86). Для оценки первого воспользуемся сначала неравенством $x - x^3/6 < \sin x < x$, $x > 0$,

$$\begin{aligned} &(n_i+1)\sin\frac{\pi}{n_l}-\sin\frac{\pi(n_i+1)}{n_l}-\frac{4n_i(n_i+1)(n_i+2)}{3\pi n_l}\sin^2\frac{\pi}{2n_l}\\ &\qquad<\frac{\pi(n_i+1)}{n_l}-\frac{\pi(n_i+1)}{n_l}+\frac{\pi^3(n_i+1)^3}{6n_l^3}=\frac{\pi^3(n_i+1)^3}{6n_l^3}. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Затем, учитывая (2.85), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{l-1}\alpha_i(n_i+1)^3 &\leqslant \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{l-1}\nu_i(n_i+1)^2<\frac{3}{2}(n_{l-1}+1)^2\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i<\frac{3n_l}{2n_{l-1}}\sum_{i=l}^{\infty}\nu_i\\ &=\frac{3n_l}{2n_{l-1}}\sum_{i=l+1}^{\infty}\nu_i. \end{aligned} \tag{2.88}$$

И наконец, объединяя (2.87) и (2.88), имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{l-1}\alpha_i\left((n_i+1)\sin\frac{\pi}{n_l}-\sin\frac{\pi(n_i+1)}{n_l}-\frac{4n_i(n_i+1)(n_i+2)}{3\pi n_l}\sin^2\frac{\pi}{2n_l}\right)\\ &\qquad<\frac{\pi^3}{4n_l^2n_{l-1}}\sum_{i=l+1}^{\infty}\nu_i. \end{aligned} \tag{2.89}$$

Перейдём к оценке второго слагаемого в правой части (2.86). Ввиду леммы 2.11

для всех $i > l$ выполняется неравенство

$$(n_i+1)\sin\frac{\pi}{n_l}-\sin(n_i+1)\frac{\pi}{n_l}-\frac{4}{3\pi}(n_l+1)(3n_i-2n_l+2)\sin^2\frac{\pi}{2n_l}$$
$$<\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi^3 n_i}{6n_l^3}-\frac{\pi n_i}{n_l^2}.$$

Снова пользуясь условием (2.85), получаем

$$\sum_{i=l+1}^{\infty}\alpha_i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi^3 n_i}{6n_l^3}-\frac{\pi n_i}{n_l^2}\right)=\frac{3\pi}{2}\sum_{i=l+1}^{\infty}\frac{\nu_i}{n_i}+\frac{\pi^3}{6n_l^3}\sum_{i=l+1}^{\infty}\nu_i-\frac{\pi}{n_l^2}\sum_{i=l+1}^{\infty}\nu_i$$
$$<\frac{3\pi}{2n_{l+1}}\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i+\frac{\pi^3}{6n_l^3}\sum_{i=l+1}^{\infty}\nu_i-\frac{\pi}{n_l^2}\sum_{i=l+1}^{\infty}\nu_i<\frac{9\pi+\pi^3}{6n_l^3}\sum_{i=l+1}^{\infty}\nu_i-\frac{\pi}{n_l^2}\sum_{i=l+1}^{\infty}\nu_i. \quad (2.90)$$

Объединяя (2.86), (2.89) и (2.90), приходим к следующей оценке

$$4\sin^2\frac{\pi}{2n_l}\left(g\left(\boldsymbol{b},\frac{\pi}{n_l}\right)-\frac{2}{\pi^2}v\left(\boldsymbol{b},\frac{\pi}{n_l}\right)\right)<\left(\frac{\pi^3}{4n_l^2n_{l-1}}+\frac{9\pi+\pi^3}{6n_l^3}-\frac{\pi}{n_l^2}\right)\sum_{i=l+1}^{\infty}\nu_i. \quad (2.91)$$

С другой стороны, вследствие соотношений (2.41), (2.35) и (2.40) имеем

$$b_{n_l}=A_{l-1}+B_{l-1}=\sum_{i=l}^{\infty}\alpha_i+\sum_{i=l+1}^{\infty}(n_i-n_l)\alpha_i=\sum_{i=l+1}^{\infty}(n_i+1-n_l)\alpha_i$$
$$<\sum_{i=l+1}^{\infty}n_i\alpha_i=\sum_{i=l+1}^{\infty}\nu_i. \quad (2.92)$$

В итоге из оценок (2.91) и (2.92) выводим

$$\frac{2\pi^{-2}v\left(\boldsymbol{b},\pi/n_l\right)-g\left(\boldsymbol{b},\pi/n_l\right)}{b_{n_l}}>\frac{\pi/n_l^2-\pi^3/(4n_l^2n_{l-1})-(9\pi+\pi^3)/(6n_l^3)}{4\sin^2(\pi/(2n_l))}$$
$$>\frac{1}{\pi}-\frac{\pi}{4n_{l-1}}-\frac{9+\pi^2}{6\pi n_l}. \quad (2.93)$$

Вспоминая, наконец, что номер l был выбран таким, что $\nu_l=0$, а также, что номеров с таким свойством бесконечно много, выделим подпоследовательность $\{\nu_{l_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\nu_{l_k}=0$ для всех k. Тогда последовательность $x_k=\pi/n_{l_k}$ стремится к нулю и удовлетворяет неравенству (2.93), откуда немедленно следует справедливость соотношения (2.12). Теорема 2.5 доказана. □

2.2. Точные константы в двусторонней оценке С. А. Теляковского суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами

2.2.1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Этот параграф посвящён уточнению двусторонних оценок суммы ряда по синусам (1) с выпуклыми коэффициентами через функцию

$$\sigma(\boldsymbol{b},x)=\frac{1}{m(x)}\sum_{k=1}^{m(x)-1}k^2\Delta^1 b_k,$$

полученных С. А. Теляковским [120], [57]. Наша цель — вычислить точные постоянные в теореме 2.F, то есть найти значения величин

$$\overline{C}=\sup_{\boldsymbol{b}}\varlimsup_{x\to+0}\frac{g(\boldsymbol{b},x)-(b_{m(x)}/2)\operatorname{ctg}(x/2)}{\sigma(\boldsymbol{b},x)},\tag{2.94}$$

$$\underline{C}=\inf_{\boldsymbol{b}}\varliminf_{x\to+0}\frac{g(\boldsymbol{b},x)-(b_{m(x)}/2)\operatorname{ctg}(x/2)}{\sigma(\boldsymbol{b},x)}.\tag{2.95}$$

Точная верхняя и нижняя грани в (2.94), (2.95) берутся по всем выпуклым и стремящимся к нулю последовательностям $\boldsymbol{b}$.

Теорема 2.8. *Справедливы равенства*

$$\overline{C}=\frac{\pi}{2},\qquad \underline{C}=\frac{3(\pi-1)}{\pi^2},$$

причём точная верхняя грань в (2.94) *и точная нижняя грань в* (2.95) *достигаются на медленно меняющихся последовательностях.*

Вместо $\sigma(\boldsymbol{b},x)$ мы рассмотрим сравнимую с $\sigma(\boldsymbol{b},x)$ по порядку функцию

$$\sigma_0(\boldsymbol{b},x)=x\sum_{k=1}^{m(x)-1}\binom{k+1}{2}\Delta^1 b_k.\tag{2.96}$$

Замечание. Очевидно, что для всех выпуклых и стремящихся к нулю последовательностей $\boldsymbol{b}$ справедливо равенство

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sigma_0(\boldsymbol{b},x)}{\sigma(\boldsymbol{b},x)}=\frac{\pi}{2}.\tag{2.97}$$

Теорема 2.9. *Сумма ряда* (1) *допускает оценку сверху, какова бы ни была выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность* $\boldsymbol{b}$*:*

$$g(\boldsymbol{b},x)<\frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{m(x)-1}\binom{k+1}{2}\Delta^1 b_k,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{11}\right].$$

Теорема 2.10. *Существуют выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность* $\boldsymbol{b}$ *и стремящаяся к нулю последовательность точек* $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$ *такие, что*

$$\lim_{l\to\infty}\frac{g(\boldsymbol{b},x_l)-b_{m(x_l)}/x_l}{\sigma_0(\boldsymbol{b},x_l)}=1. \tag{2.98}$$

Таким образом, на классе всех выпуклых последовательностей $\boldsymbol{b}$ решена следующая экстремальная задача, эквивалентная (2.94):

$$\max_{\boldsymbol{b}}\varlimsup_{x\to+0}\frac{g(\boldsymbol{b},x)-b_{m(x)}/x}{\sigma_0(\boldsymbol{b},x)}=1. \tag{2.99}$$

Теорема 2.11. *Сумма ряда* (1) *допускает оценку снизу, какова бы ни была выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность* $\boldsymbol{b}$*:*

$$g(\boldsymbol{b},x)>\frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{6(\pi-1)}{\pi^3}\,\sigma_0(\boldsymbol{b},x)-\frac{\Delta^1 b_{m(x)}}{\pi},\quad x\in\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big].$$

Теорема 2.12. *Существует выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность* $\boldsymbol{b}$*, для которой найдётся последовательность точек* $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$*,* $x_l\to+0$*, такая, что*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(\boldsymbol{b},x_l)-b_{m(x_l)}/x_l}{\sigma_0(\boldsymbol{b},x_l)}=\frac{6(\pi-1)}{\pi^3}. \tag{2.100}$$

Таким образом, на классе всех выпуклых последовательностей $\boldsymbol{b}$ решена следующая экстремальная задача, эквивалентная (2.95):

$$\min_{\boldsymbol{b}}\varliminf_{x\to+0}\frac{g(\boldsymbol{b},x)-b_{m(x)}/x}{\sigma_0(\boldsymbol{b},x)}=\frac{6(\pi-1)}{\pi^3}. \tag{2.101}$$

2.2.2. Вспомогательные утверждения

Для сопряжённого ядра Фейера будем использовать обозначение

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_k(x)&=\frac{1}{k+1}\sum_{n=1}^{k}\widetilde{D}_n(x)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{k+1}\frac{\sin(k+1)x}{4\sin^2(x/2)}\\&=\frac{(k+1)\sin x-\sin(k+1)x}{4(k+1)\sin^2(x/2)}.\end{aligned} \tag{2.102}$$

Нетрудно получить представление для суммы ряда (1) в том случае, когда последовательность коэффициентов $\boldsymbol{b}$ выпукла и стремится к нулю. Дважды применяя преобразование Абеля к (1), с учётом (2.102) имеем

$$g(\boldsymbol{b},x)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\Delta^2 b_k-\frac{1}{4\sin^2(x/2)}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta^2 b_k\sin(k+1)x. \tag{2.103}$$

Доказательство теоремы 2.F основано на представлении суммы ряда (1), полученном С. А. Теляковским в [120]:

$$g(\boldsymbol{b},x)=\frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{m(x)-1}\Delta^1 b_k\widetilde{D}_k(x)$$
$$+\frac{1}{4\sin^2(x/2)}\sum_{k=m(x)}^{\infty}\Delta^2 b_k\big(\sin mx-\sin(k+1)x\big).$$

Мы используем другое представление функции $g(\boldsymbol{b},x)$.

Лемма 2.14. *Какова бы ни была выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность* $\boldsymbol{b}$ *для суммы ряда по синусам* (1) *справедливо представление*

$$g(\boldsymbol{b},x)=\frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{m(x)-1}(k+1)\Delta^2 b_k\widetilde{F}_k(x)$$
$$-\frac{1}{4\sin^2(x/2)}\sum_{k=m(x)}^{\infty}\Delta^2 b_k\sin(k+1)x.$$

Доказательство. С учётом леммы 2.12 сумма ряда по синусам может быть представлена в следующем виде:

$$g(\boldsymbol{b},x)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\sum_{k=m(x)}^{\infty}(k+1)\Delta^2 b_k+\sum_{k=1}^{m(x)-1}(k+1)\Delta^2 b_k\widetilde{F}_k(x)$$
$$-\frac{1}{4\sin^2(x/2)}\sum_{k=m(x)}^{\infty}\Delta^2 b_k\sin(k+1)x. \tag{2.104}$$

Принимая во внимание лемму 2.3, имеем

$$\sum_{k=m(x)}^{\infty}(k+1)\Delta^2 b_k=b_{m(x)}+m(x)\Delta^1 b_{m(x)}. \tag{2.105}$$

Объединяя равенства (2.104) и (2.105), получаем требуемое представление. □

Применив к (2.96) преобразование Абеля, получим для $\sigma_0(\boldsymbol{b},x)$ следующее представление:

$$\sigma_0(\boldsymbol{b},x)=x\sum_{k=1}^{m(x)-1}\binom{k+2}{3}\Delta^2 b_k+x\binom{m(x)+1}{3}\Delta^1 b_{m(x)}. \tag{2.106}$$

Ниже мы воспользуемся следующей конструкцией. Для произвольной строго возрастающей последовательности номеров $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$, $n_0 = 0$, и неотрицательной последовательности $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ со свойством $\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k < \infty$ определим последовательности $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\alpha_k = \frac{\nu_k}{n_k + 2}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.107}$$

$$b_n = \sum_{p=k}^{\infty} (n_p + 1 - n)\alpha_p, \quad n_{k-1} < n \leqslant n_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.108}$$

Из определения последовательностей видно, что ряд в (2.108) сходится и, следовательно, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. В силу леммы 2.3 для вторых разностей последовательности $\boldsymbol{b}$ имеем следующее представление:

$$\Delta^2 b_n = \begin{cases} \alpha_k, & n = n_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ 0, & n \neq n_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{2.109}$$

Тем самым, построенная последовательность $\boldsymbol{b}$ выпукла. Наконец, в точках π/n, $n_{l-1} < n < n_l$, $l = 1, 2, \ldots$, значения функции $b_{m(x)}$ в силу (2.108) имеют вид

$$b_{m(\pi/n)} = \sum_{k=l}^{\infty} (n_k + 1 - n)\alpha_k. \tag{2.110}$$

Для построенной последовательности коэффициентов $\boldsymbol{b}$ из соотношений (2.106), (2.107) и (2.109) выводим

$$\sigma_0\left(\boldsymbol{b}, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{3n} \sum_{k=1}^{l-1} \binom{n_k + 1}{2} \nu_k + \frac{\pi}{3} \binom{n+1}{2} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{\nu_k}{n_k + 2}, \quad n_{l-1} < n < n_l. \tag{2.111}$$

Лемма 2.15 ([48, гл. I, §1.8, лемма 1.15])**.** *Пусть последовательность номеров $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, начиная с некоторого номера K, удовлетворяет условию $n_{k+1} > 2n_k$, $k \geqslant K$, а последовательность $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{p=k+1}^{\infty} \nu_p}{\sum_{p=k}^{\infty} \nu_p} = 1. \tag{2.112}$$

Тогда последовательность $\boldsymbol{b}$, определённая соотношениями (2.107), (2.108), медленно меняется.

Доказательство. Вследствие монотонности последовательности $\boldsymbol{b}$ достаточно показать, что $\lim_{n\to\infty}(b_{2n}/b_n)=1$. Если $n>n_K$, то при некотором k выполняется неравенство $n_{k-1}\leqslant n<2n\leqslant n_{k+1}$, а значит

$$\frac{b_{n_{k+1}}}{b_{n_{k-1}}}\leqslant\frac{b_{2n}}{b_n}\leqslant 1.$$

Таким образом, достаточно проверить, что $\lim_{k\to\infty}\left(b_{n_{k+1}}/b_{n_{k-1}}\right)=1$. Последнее вытекает из (2.107), (2.108) и (2.112). Лемма доказана. □

2.2.3. Оценка сверху суммы ряда по синусам

Для получения верхней оценки функции $g(\boldsymbol{b},x)$ докажем предварительно два неравенства.

Лемма 2.16. *При любых $k\in\mathbb{N}$ и $x\in[0,\pi/2]$ выполняется неравенство*

$$(k+1)\sin x-\sin(k+1)x\leqslant 8\binom{k+2}{3}\sin^3\frac{x}{2}. \tag{2.113}$$

Доказательство. Поскольку в точке $x=0$ значения обеих частей неравенства (2.113) совпадают, достаточно доказать неравенство для производных:

$$(k+1)\bigl(\cos x-\cos(k+1)x\bigr)\leqslant 3\binom{k+2}{3}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3}{2}x\right),$$

которое равносильно неравенству

$$\sin\frac{k}{2}x\,\sin\frac{k+2}{2}x\leqslant\frac{k(k+2)}{2}\,\sin\frac{x}{2}\,\sin x.$$

Последняя оценка имеет место для $x\in[0,\pi/2]$, так как для данных значений x выполняются неравенства

$$\left|\sin\frac{k}{2}x\right|\leqslant k\sin\frac{x}{2}\qquad\text{и}\qquad\left|\sin\frac{k+2}{2}x\right|\leqslant\frac{k+2}{2}\sin x.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.17. *При всех $x\in(0,\pi/11]$ выполняется неравенство*

$$3m(x)\sin x+3<4m(x)\bigl(m^2(x)-1\bigr)\sin^3\frac{x}{2}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что при каждом $k \geqslant 11$ функция

$$f_k(x) = 3k \sin x + 3 - 4k(k^2-1)\sin^3 \frac{x}{2}$$

убывает на отрезке $\bigl[\pi/(k+1), \pi/k\bigr]$. Действительно, при $k \geqslant 11$ для производной $f_k'(x)$ на указанном отрезке имеем оценку

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= 3k\left(\cos x - \frac{k^2-1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right)\right) \\ &= 3k\left(\cos x - (k^2-1)\sin\frac{x}{2}\sin x\right) \leqslant 3k\left(1 - \frac{2}{\pi^2}(k^2-1)x^2\right) \\ &\leqslant 3k\left(1 - 2\frac{k-1}{k+1}\right) = \frac{3k(3-k)}{k+1} < 0. \end{aligned}$$

Осталось показать, что для всех $k \geqslant 11$ значение $f_k\bigl(\pi/(k+1)\bigr) < 0$. При $k \geqslant 12$ с учётом неравенства $x - x^3/6 < \sin x < x$, $x > 0$, имеем

$$\begin{aligned} f_k\left(\frac{\pi}{k+1}\right) &= 3k\sin\frac{\pi}{k+1} + 3 - 4k(k^2-1)\sin^3\frac{\pi}{2(k+1)} \\ &< \frac{3\pi k}{k+1} + 3 - 4k(k^2-1)\left(\frac{\pi^3}{8(k+1)^3} - \frac{\pi^5}{16(k+1)^5}\right) \\ &= 3\pi + 3 - \frac{\pi^3}{2} + \frac{3\pi(\pi^2-6)}{2(k+1)} - \frac{\pi^3(16-\pi^2)}{16(k+1)^2} - \frac{\pi^5(3k+1)}{16(k+1)^4} \\ &< 3\pi + 3 - \frac{\pi^3}{2} + \frac{3\pi(\pi^2-6)}{2(k+1)} \leqslant 3\pi + 3 - \frac{\pi^3}{2} + \frac{3\pi(\pi^2-6)}{26} < 0. \end{aligned}$$

При $k = 11$ непосредственно проверяем, что верна оценка

$$\begin{aligned} f_{11}\left(\frac{\pi}{12}\right) &= 33\sin\frac{\pi}{12} + 3 - 5280\sin^3\frac{\pi}{24} \\ &= 8.25(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + 3 - 82.5\left(\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^3 = -0.2\ldots < 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 2.9. Применим представление суммы ряда (1), полученное в лемме 2.14. При помощи очевидного неравенства $\sin(k+1)x \geqslant -1$ и леммы 2.16 приходим к оценке

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{b}, x) \leqslant \frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{m(x)-1}\binom{k+2}{3}\Delta^2 b_k \\ + \frac{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \frac{\Delta^1 b_{m(x)}}{4\sin^2(x/2)}. \end{aligned} \tag{2.114}$$

Применив ко второму слагаемому в правой части (2.114) преобразование Абеля, получим

$$\sum_{k=1}^{m(x)-1}\binom{k+2}{3}\Delta^2 b_k=\sum_{k=1}^{m(x)-1}\binom{k+1}{2}\Delta^1 b_k-\binom{m(x)+1}{3}\Delta^1 b_{m(x)}. \tag{2.115}$$

Из (2.114) и (2.115) выводим оценку

$$g(\boldsymbol{b},x)\leqslant\frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{m(x)-1}\binom{k+1}{2}\Delta^1 b_k$$
$$+\Delta^1 b_{m(x)}\left(\frac{m(x)}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4\sin^2(x/2)}-2\sin\frac{x}{2}\binom{m(x)+1}{3}\right). \tag{2.116}$$

Согласно лемме 2.17 последнее слагаемое в (2.116) отрицательно. Теорема доказана. □

Следствие 2.5. *Сумма ряда* (1) *допускает оценки сверху*

$$g(\boldsymbol{b},x)<\frac{b_{m(x)}}{x}+\sigma_0(\boldsymbol{b},x),\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{11}\right], \tag{2.117}$$

$$g(\boldsymbol{b},x)<2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{m(x)}kb_k-\left(\frac{\pi^2}{2}-1\right)\frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\,b_{m(x)},\ \ x\in\left(0,\frac{\pi}{11}\right], \tag{2.118}$$

какова бы ни была выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$.

Неравенство (2.117) сразу вытекает из теоремы 2.9. Оценка (2.118) получается из теоремы 2.9 после применения преобразования Абеля.

Замечание. Оценка (2.118) адаптирована к случаю медленного изменения последовательности $\boldsymbol{b}$. Тем не менее, она усиливает оценку А. Ю. Попова (см. теорему 1.C) в случае произвольной выпуклой последовательности $\boldsymbol{b}$.

Доказательство теоремы 2.10. Обратимся к конструкции, изложенной в пункте 2.2.2. Неотрицательную последовательность $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ выберем так, чтобы она удовлетворяла условию (2.112). Последовательность целых неотрицательных чисел $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$, $n_0=0$, возьмём такой, чтобы для всех k выполнялось неравенство

$$n_{k+1}>(n_k+2)^9. \tag{2.119}$$

Тогда последовательности $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют всем условиям леммы 2.15. Поэтому последовательность $\boldsymbol{b}$, которую мы определим в соответствии

с (2.107) и (2.108), согласно лемме 2.15 окажется медленно меняющейся. Положим $x_k = \pi/N_k$, где $N_k = (n_{k-1}+2)^3$, $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что на такой последовательности точек выполняется предельное соотношение (2.98). В силу равенств (2.103), (2.109) и (2.110) имеем

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{b}, x_l) - \frac{b_{m(x_l)}}{x_l} &= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2N_l}\sum_{k=1}^{\infty}(n_k+1)\alpha_k \\ &- \frac{1}{4\sin^2(\pi/(2N_l))}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l} - \frac{N_l}{\pi}\sum_{k=l}^{\infty}(n_k+1-N_l)\alpha_k \\ &= \frac{1}{4\sin^2(\pi/(2N_l))}\left[\sum_{k=1}^{l-1}\left((n_k+1)\sin\frac{\pi}{N_l} - \sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l}\right)\alpha_k \right. \\ &\left. + \sum_{k=l}^{\infty}\left(\frac{4N_l^2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{2N_l} - \sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l}\right)\alpha_k\right] + \left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2N_l} - \frac{N_l}{\pi}\right)\sum_{k=l}^{\infty}(n_k+1)\alpha_k. \end{aligned} \tag{2.120}$$

Оценим каждое из слагаемых правой части (2.120). Для оценки первого воспользуемся сначала неравенством $x - x^3/6 < \sin x < x - x^3/6 + x^5/120$, $x > 0$:

$$\begin{aligned} (n_k+1)\sin\frac{\pi}{N_l} - \sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l} &> \frac{\pi^3(n_k+1)^3}{6N_l^3} - \frac{\pi^3(n_k+1)}{6N_l^3} - \frac{\pi^5(n_k+1)^5}{120N_l^5} \\ &= \frac{\pi^3}{N_l^3}\binom{n_k+2}{3} - \frac{\pi^5(n_k+1)^5}{120N_l^5}. \end{aligned} \tag{2.121}$$

Затем, учитывая (2.107) и (2.119), получим

$$\sum_{k=1}^{l-1}\alpha_k(n_k+1)^5 < \sum_{k=1}^{l-1}\nu_k(n_k+1)^4 < (n_{l-1}+1)^4\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k < N_l^2\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k. \tag{2.122}$$

И наконец, объединяя (2.121) и (2.122), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\sin^2(\pi/(2N_l))}\sum_{k=1}^{l-1}\left((n_k+1)\sin\frac{\pi}{N_l} - \sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l}\right)\alpha_k \\ &\qquad > \frac{\pi}{3N_l}\sum_{k=1}^{l-1}\binom{n_k+1}{2}\nu_k - \frac{\pi^3}{120N_l}\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k. \end{aligned} \tag{2.123}$$

Второе слагаемое в (2.120) положительно ввиду очевидного неравенства

$$\frac{4N_l^2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{2N_l} - \sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l} > \frac{4}{\pi} - 1.$$

Наконец, для третьего слагаемого справедливо соотношение

$$\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2N_l}-\frac{N_l}{\pi}\right)\sum_{k=l}^{\infty}(n_k+1)\alpha_k>-\frac{\pi^2}{16N_l}\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k. \tag{2.124}$$

Объединив (2.120), (2.123) и (2.124), приходим к следующей оценке

$$g(\boldsymbol{b},x_l)-\frac{b_{m(x_l)}}{x_l}>\frac{\pi}{3N_l}\sum_{k=1}^{l-1}\binom{n_k+1}{2}\nu_k-\frac{\pi^3}{12N_l}\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k. \tag{2.125}$$

С другой стороны, для $\sigma_0(\boldsymbol{b},x)$ с учётом (2.111) и неравенства (2.119) справедлива оценка

$$\begin{aligned}\sigma_0(\boldsymbol{b},x_l)&=\frac{\pi}{3N_l}\sum_{k=1}^{l-1}\binom{n_k+1}{2}\nu_k+\frac{\pi}{3}\binom{N_l+1}{2}\sum_{k=l}^{\infty}\frac{\nu_k}{n_k+2}\\&<\frac{\pi}{3N_l}\sum_{k=1}^{l-1}\binom{n_k+1}{2}\nu_k+\frac{\pi N_l(N_l+1)}{6n_l}\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k\\&<\frac{\pi}{3N_l}\sum_{k=1}^{l-1}\binom{n_k+1}{2}\nu_k+\frac{\pi}{6N_l}\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k.\end{aligned} \tag{2.126}$$

Таким образом, из (2.125) и (2.126) окончательно получаем

$$\frac{g(\boldsymbol{b},x_l)-b_{m(x_l)}/x_l}{\sigma_0(\boldsymbol{b},x_l)}\geqslant 1+o(1),\quad l\to\infty.$$

В то же время, как видно из следствия 2.5, это отношение меньше единицы, то есть имеет место равенство (2.98). Теорема доказана. □

2.2.4. Оценка снизу суммы ряда по синусам

Для получения оценки снизу докажем предварительно два неравенства.

Лемма 2.18. *При любых $k\in\mathbb{N}$ и $x\in\big(0,\pi/(k+1)\big]$ выполняется неравенство*

$$(k+1)\widetilde{F}_k(x)>\frac{6(\pi-1)}{\pi^3}\binom{k+2}{3}x.$$

Доказательство. Нетрудно показать, что функция $(x-\sin x)/x^3$ убывает на промежутке $(0,\pi]$. Следовательно, для всех $x\in(0,\pi]$ выполняется неравенство $\sin x<x-x^3/\pi^2$. С его помощью, а также используя очевидное неравенство

$x - x^3/6 < \sin x < x$, $x > 0$, оценим снизу сопряжённое ядро Фейера (см. (2.102)):

$$\begin{aligned}(k+1)\widetilde{F}_k(x) &= \frac{(k+1)\sin x - \sin(k+1)x}{4\sin^2(x/2)} \\ &> \frac{(k+1)\bigl(x - x^3/6\bigr) - \bigl((k+1)x - \pi^{-2}(k+1)^3x^3\bigr)}{x^2} \\ &= (k+1)x\left(\frac{1}{\pi^2}(k+1)^2 - \frac{1}{6}\right) > \frac{6(\pi-1)}{\pi^3}\binom{k+2}{3}x.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.19. *При любом $x \in (0, \pi/2]$ выполняется неравенство*

$$\frac{m(x)}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{6(\pi-1)}{\pi^3}\binom{m(x)+1}{3}x - \frac{1}{4\sin^2(x/2)} + \frac{1}{\pi} > 0.$$

Доказательство. Докажем сначала, что при каждом $k \geqslant 2$ функция

$$f_k(x) = \frac{k}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{6(\pi-1)}{\pi^3}\binom{k+1}{3}x - \frac{1}{4\sin^2(x/2)} + \frac{1}{\pi}$$

убывает на отрезке $\bigl[\pi/(k+1), \pi/k\bigr]$. Действительно, при $k \geqslant 2$ для производной $f_k'(x)$ на указанном отрезке имеем оценку

$$\begin{aligned}f_k'(x) &= -\frac{k}{4\sin^2(x/2)} - \frac{6(\pi-1)}{\pi^3}\binom{k+1}{3} + \frac{\operatorname{ctg}(x/2)}{4\sin^2(x/2)} \\ &< \frac{1}{4\sin^2(x/2)}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - k\right) < \frac{1}{4\sin^2(x/2)}\left(\frac{2}{x} - k\right) < -\frac{(\pi-2)k-2}{4\pi\sin^2(x/2)} < 0.\end{aligned}$$

Осталось показать, что $f_k(\pi/k) > 0$ для всех $k \geqslant 2$. С учётом неравенства $x - x^3/6 < \sin x < x$, $x > 0$, получаем

$$\begin{aligned}f_k\left(\frac{\pi}{k}\right) &= \frac{k}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2k} - \frac{\pi-1}{\pi^2}(k^2-1) - \frac{1}{4\sin^2(\pi/(2k))} + \frac{1}{\pi} \\ &= \frac{k\sin(\pi/k) - 1}{4\sin^2(\pi/(2k))} - \frac{\pi-1}{\pi^2}\,k^2 + \frac{2\pi-1}{\pi^2} \\ &> \frac{k\bigl(\pi/k - \pi^3/(6k^3)\bigr) - 1}{\pi^2}\,k^2 - \frac{\pi-1}{\pi^2}\,k^2 + \frac{2\pi-1}{\pi^2} = \frac{2\pi - 1 - \pi^3/6}{\pi^2} > 0.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 2.11. Применим представление суммы ряда (1), полученное в лемме 2.14. При помощи очевидного неравенства $\sin(k+1)x \leqslant 1$

и леммы 2.18 приходим к оценке

$$g(\boldsymbol{b},x) > \frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \frac{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \frac{6(\pi-1)}{\pi^3}x\sum_{k=1}^{m(x)-1}\binom{k+2}{3}\Delta^2 b_k - \frac{\Delta^1 b_{m(x)}}{4\sin^2(x/2)}. \quad (2.127)$$

Из (2.127) и (2.115) выводим оценку

$$g(\boldsymbol{b},x) > \frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \frac{6(\pi-1)}{\pi^3}\,\sigma_0(\boldsymbol{b},x) + \Delta^1 b_{m(x)}\left(\frac{m(x)}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{6(\pi-1)}{\pi^3}\binom{m(x)+1}{3}x - \frac{1}{4\sin^2(x/2)}\right). \quad (2.128)$$

Наконец, оценим снизу последнее слагаемое в (2.128) при помощи леммы 2.19:

$$g(\boldsymbol{b},x) > \frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \frac{6(\pi-1)}{\pi^3}\,\sigma_0(\boldsymbol{b},x) - \frac{\Delta^1 b_{m(x)}}{\pi}.$$

Теорема доказана. □

Замечание. Последнее слагаемое в полученной оценке, конечно, отрицательно, но для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности $\boldsymbol{b}$ имеют место порядковые соотношения $\Delta^1 b_{m(x)} = O\big(x^2\sigma_0(\boldsymbol{b},x)\big)$, $x \to +0$, а также $\Delta^1 b_{m(x)} = O\left(xb_{m(x)}\right)$, $x \to +0$. Если же $\boldsymbol{b}$ медленно меняется, то последнее слагаемое и вовсе $o\left(xb_{m(x)}\right)$, $x \to +0$.

Следствие 2.6. *Сумма ряда* (1) *допускает оценку снизу*

$$g(\boldsymbol{b},x) > \frac{b_{m(x)}}{x} + \frac{6(\pi-1)}{\pi^3}\,\sigma_0(\boldsymbol{b},x) - \frac{\Delta^1 b_{m(x)}}{\pi} - b_{m(x)}\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right), \quad x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right],$$

какова бы ни была выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$.

Замечание. Два последних слагаемых отрицательны и суммарно не превышают $O\left(xb_{m(x)}\right) = o(x)$, $x \to +0$.

Доказательство теоремы 2.12. Вновь воспользуемся конструкцией, определённой в пункте 2.2.2. Последовательности целых неотрицательных чисел $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$, $n_0 = 0$, и $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, выберем следующим образом:

$$N_k = 2\left[\sqrt{n_{k-1}+1}\right](n_{k-1}+1), \quad n_k = \left(2\left[\sqrt{N_k}\right] + \frac{1}{2}\right)N_k, \quad k = 1,2,\ldots. \quad (2.129)$$

Тогда для всех $k \geqslant 1$ выполняются неравенства

$$n_{k-1}^{3/2} < N_k < 3n_{k-1}^{3/2}, \qquad N_k^{3/2} < n_k < 3N_k^{3/2}. \tag{2.130}$$

Неотрицательную последовательность $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ выберем так, чтобы она удовлетворяла (2.112), а также следующему условию:

$$\nu_{2k-1} > \frac{1}{\sqrt[10]{n_{2k-1}}}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.131}$$

Тогда последовательности $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют всем условиям леммы 2.15. Поэтому последовательность $\boldsymbol{b}$, которую мы определим в соответствии с (2.107) и (2.108), согласно лемме 2.15 окажется медленно меняющейся. Положим $x_k = \pi/N_k$. Покажем, что на такой последовательности точек выполняется предельное соотношение (2.100). В силу равенств (2.103), (2.109) и (2.110) имеем

$$\begin{aligned}
g(\boldsymbol{b}, x_l) - \frac{b_{m(x_l)}}{x_l} &= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2N_l}\sum_{k=1}^{\infty}(n_k+1)\alpha_k \\
&- \frac{1}{4\sin^2(\pi/(2N_l))}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l} - \frac{N_l}{\pi}\sum_{k=l}^{\infty}(n_k+1-N_l)\alpha_k \\
&= \frac{1}{4\sin^2(\pi/(2N_l))}\left[\sum_{k=1}^{l-1}\left((n_k+1)\sin\frac{\pi}{N_l} - \sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l}\right)\alpha_k\right. \\
&\left. + \left(\frac{4N_l^2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{2N_l} - \sin\frac{\pi(n_l+1)}{N_l}\right)\alpha_l + \sum_{k=l+1}^{\infty}\left(\frac{4N_l^2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{2N_l} - \sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l}\right)\alpha_k\right] \\
&+ \left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2N_l} - \frac{N_l}{\pi}\right)\sum_{k=l}^{\infty}(n_k+1)\alpha_k.
\end{aligned} \tag{2.132}$$

Оценим каждое из слагаемых правой части (2.132). Для оценки первого воспользуемся сначала неравенством $x - x^3/6 < \sin x < x$, $x > 0$:

$$(n_k+1)\sin\frac{\pi}{N_l} - \sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l} < \frac{\pi^3(n_k+1)^3}{6N_l^3}. \tag{2.133}$$

Затем, учитывая (2.107) и (2.130), получаем

$$\sum_{k=1}^{l-1}(n_k+1)^3\alpha_k < \sum_{k=1}^{l-1}(n_k+1)^2\nu_k < (n_{l-1}+1)^2\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k. \tag{2.134}$$

Принимая во внимание неравенства (2.130) и (2.131), имеем цепочку соотношений

$$\frac{\pi^3(n_{l-1}+1)^2}{6N_l^3} < \frac{2\pi^3}{3N_l^{5/3}} < \frac{2\pi^3}{\sqrt[3]{3}n_l^{10/9}} < \frac{2\pi^3}{\sqrt[3]{3}}\frac{\nu_l}{n_l}\nu_l^{1/9}. \tag{2.135}$$

Объединяя оценки (2.133)—(2.135), получаем

$$\sum_{k=1}^{l-1}\left((n_k+1)\sin\frac{\pi}{N_l}-\sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l}\right)\alpha_k<\frac{2\pi^3}{\sqrt[3]{3}}\frac{\nu_l}{n_l}\,\nu_l^{1/9}\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k. \tag{2.136}$$

Для оценки третьего слагаемого воспользуемся неравенствами $\sin x<x$, $x>0$, и $\sin x\leqslant 1$:

$$\left(\frac{4N_l^2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{2N_l}-\sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l}\right)<\pi+1. \tag{2.137}$$

Снова применяя неравенства (2.130) и (2.131), получаем

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}\alpha_k<\frac{1}{n_{l+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k\leqslant\frac{1}{n_l^{9/4}}\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k<\frac{\nu_l}{n_l}\,\nu_l^{23/2}\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k. \tag{2.138}$$

Объединяя (2.137) и (2.138), имеем

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}\left(\frac{4N_l^2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{2N_l}-\sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l}\right)\alpha_k<(\pi+1)\frac{\nu_l}{n_l}\,\nu_l^{23/2}\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k. \tag{2.139}$$

Наконец, второе слагаемое оценим, пользуясь арифметической природой номеров (см. (2.129)) и неравенствами $\cos x>1-x^2/2$, $x>0$, и $\sin x<x$, $x>0$:

$$\left(\frac{4N_l^2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{2N_l}-\sin\frac{\pi(n_l+1)}{N_l}\right)\alpha_l\leqslant\left(\pi-\cos\frac{\pi}{N_l}\right)\frac{\nu_l}{n_l}\leqslant(\pi-1)\frac{\nu_l}{n_l}+\frac{\pi^2}{2N_l^2}\frac{\nu_l}{n_l}. \tag{2.140}$$

Четвёртое слагаемое в (2.132), очевидно, отрицательно. Таким образом, учитывая неравенства (2.136), (2.139) и (2.140), выводим из (2.132) оценку:

$$g(\boldsymbol{b},x_l)-\frac{b_{m(x_l)}}{x_l}<\frac{\pi-1}{\pi^2}\frac{N_l^2\nu_l}{n_l}\big(1+o(1)\big). \tag{2.141}$$

С другой стороны, для $\sigma_0(\boldsymbol{b},x)$ с учётом равенства (2.111) верно следующее:

$$\begin{aligned}\sigma_0(\boldsymbol{b},x_l)=\frac{\pi}{3N_l}\sum_{k=1}^{l-1}\binom{n_k+1}{2}\nu_k+\frac{\pi}{3}\binom{N_l+1}{2}\frac{\nu_l}{n_l+2}\\ +\frac{\pi}{3}\binom{N_l+1}{2}\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{\nu_k}{n_k}>\frac{\pi}{3}\binom{N_l+1}{2}\frac{\nu_l}{n_l+2}>\frac{\pi}{6}\frac{N_l^2\nu_l}{n_l}.\end{aligned} \tag{2.142}$$

Таким образом, из (2.141) и (2.142) получаем

$$\frac{g(\boldsymbol{b},x_l)-b_{m(x_l)}/x_l}{\sigma_0(\boldsymbol{b},x_l)}\leqslant\frac{6(\pi-1)}{\pi^3}+o(1),\quad l\to\infty.$$

В то же время, как видно из теоремы 2.11, верно и противоположное неравенство. Иначе говоря, имеет место равенство (2.100). Теорема доказана. □

Из равенств (2.99) и (2.101) с учётом (2.97) выводим теорему 2.8.

2.3. Точная двусторонняя оценка суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами

2.3.1. Формулировка результатов

Построены примеры выпуклых, медленно меняющихся последовательностей $\boldsymbol{b}$, устанавливающие точность нижней и верхних оценок суммы ряда по синусам (1), полученных в §2.1 и §2.2 (см. теоремы 2.6 и 2.9).

Теорема 2.13. *Существует выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$, для которой найдётся последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \to +0$, такая, что*

$$g(\boldsymbol{b}, x_n) < \frac{2}{\pi^2}\, v_0(\boldsymbol{b}, x_n) + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\pi^2 b_1 x_n b_{m(x_n)}^2} + \frac{9+\pi^2}{6\pi^2}\, x_n b_{m(x_n)}.$$

Теорема 2.14. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$ и последовательность точек $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$, $x_l \to +0$, такие, что*

$$g(\boldsymbol{b}, x_l) > \frac{b_{m(x_l)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_l}{2} + 2\sin\frac{x_l}{2}\sum_{k=1}^{m(x_l)-1}\binom{k+1}{2}\Delta^1 b_k - b_1 x_l^{3-\varepsilon}.$$

2.3.2. Оценка отклонения суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами от её миноранты

Доказательство теоремы 2.13. Для построения требуемого примера последовательности $\boldsymbol{b}$ воспользуемся конструкцией доказательства теоремы 2.5 (см. пункт 2.1.4) с той лишь разницей, что условие на скорость роста последовательности номеров (2.85) дополним ограничением сверху

$$n_l < 8n_{l-1}^3 \frac{\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i}{\sum_{i=l}^{\infty}\nu_i}. \tag{2.143}$$

Из определения функций $v(\boldsymbol{b}, x)$ и $v_0(\boldsymbol{b}, x)$, а также неравенства $m(x)x \leqslant \pi$ легко выводится оценка

$$\frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x) - \frac{1}{\pi}\, b_{m(x)} \leqslant \frac{2}{\pi^2}\, v_0(\boldsymbol{b}, x). \tag{2.144}$$

Ввиду соотношений (2.41), (2.35) и (2.40) имеем

$$b_1 = A_0 n_1 + B_0 = \sum_{i=1}^{\infty} n_1\alpha_i + \sum_{i=2}^{\infty}(n_i - n_1)\alpha_i = \sum_{i=1}^{\infty} n_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{\infty}\nu_i. \tag{2.145}$$

Как и в доказательстве теоремы 2.5, выберем такой номер l, что $\nu_l = 0$, и положим $x_l = \pi/n_l$. Воспользуемся оценкой (2.93) и, принимая во внимание (2.144), (2.143), (2.92) и (2.145), выведем из неё следующее неравенство

$$g\left(\boldsymbol{b}, x_l\right) - \frac{2}{\pi^2} v_0\left(\boldsymbol{b}, x_l\right) \leqslant g\left(\boldsymbol{b}, x_l\right) - \frac{2}{\pi^2} v\left(\boldsymbol{b}, x_l\right) + \frac{1}{\pi} b_{n_l} \leqslant \frac{\pi b_{n_l}}{4 n_{l-1}} + \frac{9+\pi^2}{6\pi n_l} b_{n_l}$$
$$< \frac{\pi b_{n_l}}{2} \sqrt[3]{\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \nu_i}{n_l \sum_{i=l+1}^{\infty} \nu_i}} + \frac{9+\pi^2}{6\pi n_l} b_{n_l} \leqslant \frac{1}{2} \sqrt[3]{\pi^2 b_1 x_l b_{n_l}^2} + \frac{9+\pi^2}{6\pi^2} x_l b_{n_l}.$$

Поскольку номеров l со свойством $\nu_l = 0$ бесконечно, теорема доказана. □

2.3.3. Оценка отклонения суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами от её мажоранты

Доказательство теоремы 2.14. Без ограничения общности будем предполагать $\varepsilon < 1/2$. Воспользуемся конструкцией, изложенной в пункте 2.2.2. Неотрицательную последовательность $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ выберем так, чтобы она удовлетворяла условию (2.112). Последовательность номеров $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$, $n_0 = 0$, возьмём такой, чтобы выполнялось неравенство

$$n_{k+1} > (n_k + 1)^{16/\varepsilon^2}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.146}$$

Тогда последовательности $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют всем условиям леммы 2.15. Поэтому последовательность $\boldsymbol{b}$, которую мы определим в соответствии с (2.107) и (2.108), согласно лемме 2.15 окажется медленно меняющейся. Положим $x_k = \pi/N_k$, $N_k = (n_{k-1}+1)^{4/\varepsilon}$, $k \in \mathbb{N}$. Оценим снизу разность между значениями функций

$$g(\boldsymbol{b}, x) \qquad \text{и} \qquad \frac{b_{m(x)}}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{m(x)-1} \binom{k+1}{2} \Delta^1 b_k$$

на данной последовательности точек.

В силу равенств (2.103), (2.109) и (2.110) имеем

$$g(\boldsymbol{b}, x_l) - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x_l}{2}\, b_{m(x_l)} - 2 \sin \frac{x_l}{2} \sum_{k=1}^{m(x_l)-1} \binom{k+1}{2} \Delta^1 b_k$$
$$= \frac{1}{4 \sin^2(\pi/(2N_l))} \sum_{k=1}^{l-1} \left((n_k+1) \sin \frac{\pi}{N_l} - \sin \frac{\pi(n_k+1)}{N_l} - 8 \sin^3 \frac{\pi}{2N_l} \binom{n_k+2}{3} \right) \alpha_k$$

$$+\frac{1}{4\sin^2(\pi/(2N_l))}\sum_{k=l}^{\infty}\left((N_l+1)\sin\frac{\pi}{N_l}-\sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l}-8\sin^3\frac{\pi}{2N_l}\binom{N_l+2}{3}\right)\alpha_k. \tag{2.147}$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части (2.147). При помощи неравенств $x-x^3/6<\sin x<x-x^3/6+x^5/120$, $x>0$, а также $\sin x<x$, $x>0$, получим

$$(n_k+1)\sin\frac{\pi}{N_l}-\sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l}-8\sin^3\frac{\pi}{2N_l}\binom{n_k+2}{3}>-\frac{\pi^5(n_k+1)^5}{120N_l^5}. \tag{2.148}$$

Затем, учитывая (2.107) и (2.146), находим

$$\sum_{k=1}^{l-1}\alpha_k(n_k+1)^5<\sum_{k=1}^{l-1}\nu_k(n_k+1)^4<(n_{l-1}+1)^4\sum_{k=1}^{l-1}\nu_k<N_l^{\varepsilon}\sum_{k=1}^{l-1}\nu_k. \tag{2.149}$$

Объединив (2.148) и (2.149), придём к оценке

$$\frac{1}{4\sin^2(\pi/(2N_l))}\sum_{k=1}^{l-1}\left((n_k+1)\sin\frac{\pi}{N_l}-\sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l}-8\sin^3\frac{\pi}{2N_l}\binom{n_k+2}{3}\right)\alpha_k$$
$$>-\frac{\pi^5}{480N_l^{5-\varepsilon}\sin^2(\pi/(2N_l))}\sum_{k=1}^{l-1}\nu_k>-\frac{\pi^3}{120N_l^{3-\varepsilon}}\sum_{k=1}^{l-1}\nu_k. \tag{2.150}$$

Для того чтобы оценить второе слагаемое (2.147), воспользуемся неравенством $2x/\pi<\sin x<x$, $0<x<\pi/2$,

$$(N_l+1)\sin\frac{\pi}{N_l}-\sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l}-8\sin^3\frac{\pi}{2N_l}\binom{N_l+2}{3}>1-\frac{\pi^3}{3}. \tag{2.151}$$

Снова применяя (2.107) и (2.146), получаем

$$\sum_{k=l}^{\infty}\alpha_k<\sum_{k=l}^{\infty}\frac{\nu_k}{n_k}<\frac{1}{n_l}\sum_{k=l}^{\infty}\nu_k<\frac{1}{N_l^{4/\varepsilon}}\sum_{k=l}^{\infty}\nu_k<\frac{1}{N_l^5}\sum_{k=l}^{\infty}\nu_k. \tag{2.152}$$

Объединяя (2.151) и (2.152), имеем

$$\frac{1}{4\sin^2(\pi/(2N_l))}\sum_{k=l}^{\infty}\left((N_l+1)\sin\frac{\pi}{N_l}-\sin\frac{\pi(n_k+1)}{N_l}-8\sin^3\frac{\pi}{2N_l}\binom{N_l+2}{3}\right)\alpha_k$$
$$>-\frac{\pi^3-3}{12N_l^5\sin^2(\pi/(2N_l))}\sum_{k=l}^{\infty}\nu_k>-\frac{\pi^3-3}{3\pi^2N_l^3}\sum_{k=l}^{\infty}\nu_k>-\frac{1}{N_l^3}\sum_{k=l}^{\infty}\nu_k. \tag{2.153}$$

Наконец, объединяя (2.150), (2.153) и учитывая (2.107), (2.108), получаем

$$g(\boldsymbol{b},x_l)-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_l}{2}\,b_{m(x_l)}-2\sin\frac{x_l}{2}\sum_{k=1}^{m(x_l)-1}\binom{k+1}{2}\Delta^1b_k>-\frac{1}{N_l^{3-\varepsilon}}\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k>-b_1x_l^{3-\varepsilon}.$$

Теорема доказана. □

2.4. Уточнение асимптотики Алянчича, Боянича, Томича для суммы ряда по синусам с выпуклыми медленно меняющимися коэффициентами

2.4.1. Формулировка основных результатов

В этом параграфе будет исследован случай, когда поведение последовательности $\boldsymbol{b}$ в дополнение к выпуклости и медленному изменению более-менее регулярно. А именно, потребуем, чтобы последовательность $\{k\Delta^1 b_k\}_{k=1}^{\infty}$ медленно менялась. Данное условие предполагает медленное изменение и самой последовательности $\boldsymbol{b}$ (см. лемму 2.22). Оказывается, что при этом дополнительном требовании для суммы ряда по синусам можно выписать два первых члена асимптотического разложения.

Теорема 2.15. *Пусть $\boldsymbol{b}$ — неотрицательная, выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность. Если последовательность $\{k\Delta^1 b_k\}_{k=1}^{\infty}$ медленно меняется, то*

$$g(\boldsymbol{b},x)-\frac{b_{m(x)}}{x}\sim(\gamma+\ln\pi)\frac{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}{x},\quad x\to+0. \tag{2.154}$$

Через γ обозначена постоянная Эйлера.

Доказанную теорему можно переформулировать в терминах сравнения с функцией $\sigma_0(\boldsymbol{b},x)$ (см. (2.96)), что позволит сопоставить полученную асимптотику с результатами следствий 2.5, 2.6 и теорем 2.10, 2.12.

Следствие 2.7. *Пусть $\boldsymbol{b}$ — неотрицательная, выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность. Если последовательность $\{k\Delta^1 b_k\}_{k=1}^{\infty}$ медленно меняется, то*

$$g(\boldsymbol{b},x)-\frac{b_{m(x)}}{x}\sim\frac{4}{\pi^2}(\gamma+\ln\pi)\sigma_0(\boldsymbol{b},x),\quad x\to+0.$$

Наконец, можно переформулировать полученный результата в духе теоремы 1.B, что позволяет записать второй член асимптотического разложения суммы ряда по синусам наиболее компактно.

Следствие 2.8. *Пусть $b(t)$ — неотрицательная, выпуклая и дифференцируемая функция, стремящаяся к нулю при $t\to+\infty$. Если функция $-tb'(t)$ мед-*

ленно меняется, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} b(k)\sin kx - \frac{b\,(1/x)}{x} \sim -\gamma\,\frac{b'\,(1/x)}{x^2}.$$

Замечание. Как будет доказано в лемме 2.23, медленное изменение функции $-tb'(t)$ влечёт за собой и медленное изменение функции $b(t)$. Таким образом, следствие 2.8 представляет собой уточнение теоремы 1.B при дополнительном ограничении на последовательность коэффициентов ряда по синусам.

Пример. Условию медленного изменения функции $-tb'(t)$ удовлетворяет большинство известных рядов. В частности, имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln(k+1)} = \frac{1}{x\ln\,(1/x)} + \frac{\gamma}{x\ln^2\,(1/x)} + o\left(\frac{1}{x\ln^2\,(1/x)}\right), \quad x \to +0.$$

Следствие 2.9. *Пусть $b(t)$ — неотрицательная, выпуклая и дифференцируемая функция, стремящаяся к нулю при $t \to +\infty$. Если функция $-tb'(t)$ медленно меняется, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b(k)\sin kx = \frac{b\,(e^{-\gamma}/x)}{x} + o\left(\frac{b'\,(1/x)}{x^2}\right), \quad x \to +0.$$

Последнее утверждение показывает, что в теореме 1.B можно простой заменой аргумента функции $b(t)$ с π/x на $e^{-\gamma}/x$ добиться более точного приближения суммы ряда по синусам.

Идея такого уточнения возникла у С. В. Конягина во время обсуждения данной темы на семинаре по теории приближений под руководством С. А. Теляковского.

2.4.2. Вспомогательные утверждения

В этом пункте мы докажем необходимые вспомогательные утверждения.

Последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ назовём *правильно меняющейся с показателем p* (см. [98], [48]), если для любого $\delta > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_{[\delta k]}}{\alpha_k} = \delta^p.$$

Лемма 2.20. *Пусть* $\boldsymbol{b}$ *— положительная, убывающая, медленно меняющаяся последовательность. Если положительная последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такова, что последовательность* $\{\sum_{k=1}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ *правильно меняется с показателем* $p > 0$*, то имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{b_n \sum_{k=1}^{n} a_k} = 1.$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \left(1 - b_k/b_n\right)}{\sum_{k=1}^{n} a_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{b_n \sum_{k=1}^{n} a_k} = 0. \tag{2.155}$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\delta^p < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.156}$$

В силу правильного изменения последовательности $\{\sum_{k=1}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{[\delta n]} a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} = \delta^p. \tag{2.157}$$

Ввиду (2.156) и (2.157) найдётся N_1 такое, что для всех $n \geqslant N_1$ выполняется неравенство

$$\frac{\sum_{k=1}^{[\delta n]} a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.158}$$

Так как последовательность $\boldsymbol{b}$ медленно меняется, найдётся N_2 такое, что для всех $n > N_2$

$$1 - \frac{b_{[\delta n]}}{b_n} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.159}$$

Пользуясь монотонностью $\boldsymbol{b}$ для всех $n > \max\{N_1, N_2\}$ выводим из (2.159) и (2.158) следующую оценку:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \left(1 - b_k/b_n\right)}{\sum_{k=1}^{n} a_k} &= \frac{\sum_{k=1}^{[\delta n]} a_k \left(1 - b_k/b_n\right)}{\sum_{k=1}^{n} a_k} + \frac{\sum_{k=[\delta n]+1}^{n} a_k \left(1 - b_k/b_n\right)}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \\ &< \frac{\sum_{k=1}^{[\delta n]} a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} + \frac{\sum_{k=[\delta n]+1}^{n} a_k \left(1 - b_{[\delta n]}/b_n\right)}{\sum_{k=1}^{n} a_k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Предельное соотношение (2.155), а вместе с ним и лемма доказаны. □

Лемма 2.21. *Пусть* $b(t)$ *— положительная, убывающая, медленно меняющаяся функция. Тогда для любого положительного числа* A *верно равенство*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_t^{At} b(u)/u \, du}{b(t)} = \ln A.$$

Доказательство. В силу монотонности и положительности $b(t)$ справедлива двусторонняя оценка

$$b(At)\ln A \leqslant \int_t^{At} \frac{b(u)}{u}\,du \leqslant b(t)\ln A.$$

Из этой оценки и равенства $\lim_{t\to\infty} b(At)/b(t) = 1$ вытекает требуемое предельное соотношение. Лемма доказана. □

Лемма 2.22. *Пусть задана положительная, невозрастающая последовательность* $\boldsymbol{b}$. *Если последовательность* $\{k\Delta^1 b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *медленно меняющаяся, то последовательность* $\boldsymbol{b}$ *также медленно меняющаяся.*

Доказательство. Так как $\boldsymbol{b}$ монотонна, достаточно показать (см. [48]), что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_{2k}}{b_k} = 1. \tag{2.160}$$

В силу медленного изменения последовательности $\{k\Delta^1 b_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Delta^1 b_{2k}}{\Delta^1 b_k} = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty} \frac{2k\,\Delta^1 b_{2k}}{k\,\Delta^1 b_k} = \frac{1}{2}, \tag{2.161}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Delta^1 b_{2k+2}}{\Delta^1 b_k} = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)\,\Delta^1 b_{2k+2}}{k\,\Delta^1 b_k}\,\frac{k}{k+1} = \frac{1}{2}. \tag{2.162}$$

Из (2.161) и (2.162), а также монотонности $\boldsymbol{b}$ выводим, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Delta^1 b_{2k+1}}{\Delta^1 b_k} = \frac{1}{2}. \tag{2.163}$$

Наконец, из (2.161) и (2.163) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_{2k} - b_{2k+2}}{b_k - b_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\Delta^1 b_{2k} + \Delta^1 b_{2k+1}}{\Delta^1 b_k} = 1.$$

Из этого предельного соотношения при помощи классической теоремы Штольца получаем (2.160). Лемма доказана. □

Лемма 2.23. *Пусть* $b(t)$ *— положительная, убывающая, дифференцируемая функция. Если функция* $-tb'(t)$ *медленно меняется, то функция* $b(t)$ *также медленно меняется.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно для произвольного $A > 0$ применить правило Лопиталя:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{b(At)}{b(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{Ab'(At)}{b'(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{-At\,b'(At)}{-t\,b'(t)} = 1.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.24. *Пусть $\psi(t)$ — непрерывная на $[0,\pi]$ функция, $\{\beta_k\}_{k=0}^{\infty}$ — положительная, невозрастающая и медленно меняющаяся последовательность. Тогда*

$$\lim_{x\to+0}\frac{x}{\beta_{m(x)}}\sum_{k=0}^{m(x)-1}\psi\big((k+1/2)\,x\big)\beta_k=\int_0^{\pi}\psi(t)\,dt. \tag{2.164}$$

Доказательство. Сначала докажем предельное соотношение (2.164) в случае, когда $\psi(t)$ — кусочно-постоянная функция. Поскольку обе части соотношения (2.164) зависят от $\psi(t)$ линейно, достаточно проверить (2.164) для функций $\chi_c(t)$ вида

$$\chi_c(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,c],\\ 0, & t\in(c,\pi],\end{cases}$$

где c — некоторое фиксированное число из интервала $(0,\pi)$. Для таких функций предельное соотношение (2.164) принимает вид

$$\lim_{x\to+0}\frac{x}{\beta_{m(x)}}\sum_{k=0}^{[c/x-1/2]}\beta_k=c. \tag{2.165}$$

Так как последовательность $\{\beta_k\}_{k=0}^{\infty}$ не возрастает и медленно меняется, имеет место равенство (см. [48, гл. I, §1.8, лемма 1.15])

$$\lim_{x\to+0}\frac{\beta_{m(x)}}{\beta_{[c/x-1/2]}}=1. \tag{2.166}$$

Тогда предельное соотношение (2.165) вытекает из (2.166) и леммы 2.20, в условиях которой нужно положить $a_n=1$, $b_n=\beta_n$. Тем самым, предельное соотношение (2.164) для кусочно-постоянных функций $\psi(t)$ доказано.

Пусть теперь $\psi(t)$ непрерывная на $[0,\pi]$ функция. Для произвольного $\varepsilon>0$ найдётся кусочно-постоянная функция $\varphi(t)$ со свойством

$$\big|\psi(t)-\varphi(t)\big|\leqslant\frac{\varepsilon}{4\pi} \tag{2.167}$$

для всех $t\in[0,\pi]$. По уже доказанному существует $\delta_1>0$ такое, что для всех x, $0<x<\delta_1$, выполняется неравенство

$$\left|\frac{x}{\beta_m(x)}\sum_{k=0}^{m(x)-1}\varphi\big((k+1/2)x\big)\beta_k-\int_0^{\pi}\varphi(t)dt\right|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.168}$$

Опять же с учётом леммы 2.20, где $a_n = 1$, $b_n = \beta_n$, можно найти $\delta_2 > 0$ такое, что для всех x, $0 < x < \delta_2$, справедливо неравенство

$$\frac{x}{\beta_m(x)} \sum_{k=0}^{m(x)-1} \beta_k < 2\pi. \tag{2.169}$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Для всех x, $0 < x < \delta$, из нервенств (2.167), (2.168) и (2.169) выводим оценку

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{x}{\beta_m(x)} \sum_{k=0}^{m(x)-1} \psi\big((k+1/2)x\big)\beta_k - \int_0^\pi \psi(t)dt \right| \\
&\leqslant \left| \frac{x}{\beta_m(x)} \sum_{k=0}^{m(x)-1} \Big(\psi\big((k+1/2)x\big) - \varphi\big((k+1/2)x\big)\Big)\beta_k \right| \\
&+ \left| \frac{x}{\beta_m(x)} \sum_{k=0}^{m(x)-1} \varphi\big((k+1/2)x\big)\beta_k - \int_0^\pi \varphi(t)dt \right| + \left| \int_0^\pi \varphi(t)dt - \int_0^\pi \psi(t)dt \right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.25. *Пусть $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ — положительная, медленно меняющаяся последовательность. Кроме того, пусть последовательность $\{\beta_k/k\}_{k=1}^\infty$ не возрастает. Тогда*

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{\beta_{m(x)}} \sum_{k=m(x)}^{\infty} \beta_k \frac{\cos(k+1/2)\,x}{k} = \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt.$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем номер N так, чтобы выполнялось условие

$$N > \frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{2.170}$$

Тогда имеет место следующая оценка:

$$\left| \int_{\pi N}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \right| < \varepsilon. \tag{2.171}$$

Фиксируем выбранный номер N. Возьмём η_1 так, чтобы для всех x, $0 < x < \eta_1$, выполнялись неравенства

$$\left| \sum_{k=m(x)}^{Nm(x)-1} \frac{\cos(k+1/2)\,x}{k} - \int_\pi^{\pi N} \frac{\cos t}{t}\,dt \right| < \varepsilon, \tag{2.172}$$

$$\left| \sum_{k=m(x)}^{Nm(x)-1} \frac{\big|\cos(k+1/2)\,x\big|}{k} - \int_\pi^{\pi N} \frac{|\cos t|}{t}\,dt \right| < \varepsilon. \tag{2.173}$$

Поскольку последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ медленно меняется, предельное соотношение $\lim_{n\to\infty}\beta_{[\lambda n]}/\beta_n = 1$ выполняется равномерно по $\lambda \in [1, N]$ (см. [48, гл. I, §1.2, теорема 1.1]). Следовательно, при некотором η_2 для всех x, $0 < x < \eta_2$, выполняется неравенство

$$\max_{m(x)\leqslant k\leqslant Nm(x)} \left|\frac{\beta_k}{\beta_{m(x)}} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{\left(\int_{\pi}^{\pi N} |\cos t|/t\, dt + \varepsilon\right)}. \tag{2.174}$$

Положим $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$. Для произвольного x, $0 < x < \eta$, разобьём требуемую сумму на три:

$$\frac{1}{\beta_{m(x)}}\sum_{k=m(x)}^{\infty}\beta_k\frac{\cos(k+1/2)\,x}{k} = \sum_{k=m(x)}^{Nm(x)-1}\frac{\cos(k+1/2)\,x}{k}$$
$$+\sum_{k=m(x)}^{Nm(x)-1}\left(1-\frac{\beta_k}{\beta_{m(x)}}\right)\frac{\cos(k+1/2)\,x}{k} + \frac{1}{\beta_{m(x)}}\sum_{k=Nm(x)}^{\infty}\beta_k\frac{\cos(k+1/2)\,x}{k}. \tag{2.175}$$

Оценим в (2.175) каждое из слагаемых. Для первого слагаемого ввиду (2.171) и (2.172) имеем

$$\left|\sum_{k=m(x)}^{Nm(x)-1}\frac{\cos(k+1/2)\,x}{k} - \int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt\right| \leqslant \left|\sum_{k=m(x)}^{Nm(x)-1}\frac{\cos(k+1/2)\,x}{k} - \int_{\pi}^{\pi N}\frac{\cos t}{t}\,dt\right|$$
$$+\left|\int_{\pi N}^{\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt\right| < 2\varepsilon. \tag{2.176}$$

Второе слагаемое в правой части (2.175) оценим, применив неравенства (2.174) и (2.173),

$$\left|\sum_{k=m(x)}^{Nm(x)-1}\left(1-\frac{\beta_k}{\beta_{m(x)}}\right)\frac{\cos(k+1/2)\,x}{k}\right|$$
$$\leqslant \max_{m(x)\leqslant k\leqslant Nm(x)}\left|1-\frac{\beta_k}{\beta_{m(x)}}\right|\sum_{k=m(x)}^{Nm(x)-1}\frac{\left|\cos(k+1/2)\,x\right|}{k}$$
$$< \frac{\varepsilon}{\int_{\pi}^{\pi N}|\cos t|/t\,dt+\varepsilon}\sum_{k=n}^{N}\frac{\left|\cos(k+1/2)\,x\right|}{k}$$
$$< \frac{\varepsilon}{\int_{\pi}^{\pi N}|\cos t|/t\,dt+\varepsilon}\left(\int_{\pi}^{\pi N}\frac{|\cos t|}{t}\,dt+\varepsilon\right) = \varepsilon. \tag{2.177}$$

Наконец, для третьего слагаемого воспользуемся стандартной оценкой остатка тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами, а также неравенствами (2.174), (2.170) и неравенством $\sin x > 2x/\pi$, $x \in (0, \pi/2)$,

$$\frac{1}{\beta_{m(x)}}\left|\sum_{k=Nm(x)}^{\infty}\beta_k\frac{\cos(k+1/2)\,x}{k}\right| \leqslant \frac{\beta_{Nm(x)}}{\beta_m(x)}\cdot\frac{1}{Nm(x)\sin(x/2)}$$
$$< \frac{\beta_{Nm(x)}}{\beta_{m(x)}}\cdot\frac{2}{N} < \frac{2(1+\varepsilon)}{N} < \varepsilon. \qquad (2.178)$$

Объединяя (2.175)—(2.178), приходим к оценке

$$\left|\frac{1}{\beta_{m(x)}}\sum_{k=m(x)}^{\infty}\beta_k\frac{\cos(k+1/2)\,x}{k} - \int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt\right| < 4\varepsilon.$$

Лемма доказана. □

2.4.3. Асимптотика суммы ряда по синусам в регулярном случае

Доказательство теоремы 2.15. Применив к $g(\boldsymbol{b}, x)$ преобразование Абеля, получим для неё с учётом сопряжённого ядра Дирихле $\widetilde{D}_k(x)$ (см. (1.16)) следующее представление:

$$g(\boldsymbol{b},x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Delta^1 b_k\widetilde{D}_k(x) = \sum_{k=1}^{m(x)-1}\Delta^1 b_k\widetilde{D}_k(x) + \sum_{k=m(x)}^{\infty}\Delta^1 b_k\widetilde{D}_k(x)$$
$$= \sum_{k=1}^{m(x)-1}\Delta^1 b_k\frac{\cos(x/2)-\cos(k+1/2)\,x}{2\sin(x/2)} + \frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$$
$$- \frac{1}{2\sin(x/2)}\sum_{k=m(x)}^{\infty}\Delta^1 b_k\cos(k+1/2)\,x$$
$$= \frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{m(x)-1}\Delta^1 b_k\frac{1-\cos(k+1/2)\,x}{2\sin(x/2)}$$
$$- \frac{1}{2\sin(x/2)}\sum_{k=m(x)}^{\infty}\Delta^1 b_k\cos(k+1/2)\,x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4}(b_1 - b_{m(x)}). \qquad (2.179)$$

Применяя лемму 2.24 к функции $\psi(t) = (1-\cos t)/t$ и последовательности $\beta_k = k\Delta^1 b_k$, получаем

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}\sum_{k=1}^{m(x)-1}k\Delta^1 b_k\frac{1-\cos(k+1/2)\,x}{k+1/2} = \int_0^{\pi}\frac{1-\cos t}{t}\,dt. \qquad (2.180)$$

С другой стороны,

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}\sum_{k=1}^{m(x)-1}k\Delta^1 b_k\frac{1-\cos\left(k+1/2\right)x}{k+1/2}$$
$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}\sum_{k=1}^{m(x)-1}\Delta^1 b_k\big(1-\cos\left(k+1/2\right)x\big)$$
$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{1}{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}\sum_{k=1}^{m(x)-1}\Delta^1 b_k\frac{1-\cos\left(k+1/2\right)x}{k+1/2}. \quad (2.181)$$

Второе слагаемое в правой части (2.181) равно нулю ввиду следующих рассуждений. Поскольку $1-\cos x<x^2/2$, $x>0$, справедлива оценка

$$\frac{1}{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}\sum_{k=1}^{m(x)-1}\Delta^1 b_k\frac{1-\cos\left(k+1/2\right)x}{k+1/2}$$
$$\leqslant\frac{x^2}{2m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}\sum_{k=1}^{m(x)-1}\left(k+1/2\right)\Delta^1 b_k.$$

В тоже время, согласно лемме 2.20 имеем

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}\sum_{k=1}^{m(x)-1}\left(k+1/2\right)\Delta^1 b_k=\lim_{x\to+0}\frac{x^2\left(m^2(x)-1\right)\Delta^1 b_{m(x)}}{m^3(x)\Delta^1 b_{m(x)}}=0.$$

Из (2.180) и (2.181) следует равенство

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}\sum_{k=1}^{m(x)-1}\Delta^1 b_k\big(1-\cos\left(k+1/2\right)x\big)=\int_0^\pi\frac{1-\cos t}{t}\,dt. \quad (2.182)$$

Применим теперь лемму 2.25 к последовательности $\beta_k=k\Delta^1 b_k$. Заметим, что последовательность $\beta_k/k=\Delta^1 b_k$ не возрастает, так как последовательность $\boldsymbol{b}$ выпукла. Имеем

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}\sum_{k=m(x)}^{\infty}\Delta^1 b_k\cos\left(k+1/2\right)x=\int_\pi^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt. \quad (2.183)$$

Наконец, объединяя (2.179), (2.182) и (2.183), заключаем

$$\lim_{x\to+0}\frac{x}{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}\left(g(\boldsymbol{b},x)-\frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{x\operatorname{tg}(x/4)}{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}\left(b_1-b_{m(x)}\right)$$

$$+\lim_{x\to+0}\frac{x}{2\sin(x/2)}\,\frac{1}{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}\sum_{k=1}^{m(x)-1}\Delta^1 b_k\bigl(1-\cos\,(k+1/2)\,x\bigr)$$

$$+\lim_{x\to+0}\frac{x}{2\sin(x/2)}\,\frac{1}{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}\sum_{k=m(x)}^{\infty}\Delta^1 b_k\cos\,(k+1/2)\,x$$

$$=0+\int_0^{\pi}\frac{1-\cos t}{t}\,dt-\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt=\gamma+\ln\pi.$$

Теорема доказана. □

Доказательство следствия 2.7. Полагая $a_k=k(k+1)/2$, воспользуемся леммой 2.20. Справедливы следующие порядковые соотношения:

$$\frac{4}{\pi^2}\,\sigma_0(\boldsymbol{b},x)=\frac{4}{\pi^2}\,x\sum_{k=1}^{m(x)-1}\frac{k(k+1)}{2}\Delta^1 b_k\sim\frac{4}{\pi^2}\,xm(x)\Delta^1 b_{m(x)}\sum_{k=1}^{m(x)-1}\frac{k+1}{2}$$

$$\sim\frac{1}{\pi^2}\,xm^3(x)\Delta^1 b_{m(x)}\sim\frac{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}{x},\quad x\to+0.$$

Остаётся подставить полученную асимптотику в соотношение (2.154). Утверждение доказано. □

Доказательство следствия 2.8. Вследствие медленного изменения функции $-tb'(t)$ имеет место следующее порядковое соотношение:

$$m(x)\Delta^1 b_{m(x)}\sim m(x)b'(m(x))\sim\frac{b'\,(1/x)}{x},\quad x\to+0. \tag{2.184}$$

С другой стороны, в силу леммы 2.21 имеем

$$b\,(1/x)-b\,(\pi/x)=\int_{1/x}^{\pi/x}b'(t)\,dt=\int_{1/x}^{\pi/x}\frac{-tb'(t)}{t}\,dt\sim-\ln\pi\,\frac{b\,(1/x)}{x},\quad x\to+0. \tag{2.185}$$

Подставляя соотношения (2.184) и (2.185) в формулировку теоремы 2.15, получаем требуемую асимптотику. Утверждение доказано. □

Доказательство следствия 2.9. Рассуждения сходны с доказательством следствия 2.8 и опираются на следующие асимптотические равенства:

$$b\,(1/x)-b\,\bigl(e^{-\gamma}/x\bigr)=\int_{1/x}^{e^{-\gamma}/x}b'(t)\,dt=\int_{1/x}^{e^{-\gamma}/x}\frac{-tb'(t)}{t}\,dt\sim\gamma\,\frac{b\,(1/x)}{x},\quad x\to+0.$$

С учётом следствия 2.8 утверждение доказано. □

Глава 3. Ряды по общим ортогональным системам

3.1. Оценка операторной нормы обобщённой тёплицевой матрицы

3.1.1. Формулировка основного результата

Разработан метод построения обобщённых тёплицевых матриц, удовлетворяющих условиям теоремы Д. Е. Меньшова (теорема 3.C).

Пусть X — компактная абелева группа, μ — мера Хаара на X, при этом $\mu(X) = 1$. Группу всех характеров χ, определённых на X, будем обозначать через $\overline{X}$. Хорошо известно (см. [41, гл. VI, §31, теорема 12]), что в этом случае элементы группы $\overline{X}$ образуют полную ортонормированную в $L_2(X)$ систему.

Если пространство $L_2(X)$ сепарабельно, то $\overline{X}$ состоит из не более чем счётного числа функций. Занумеруем элементы $\overline{X}$ целыми неотрицательными числами таким образом, чтобы $\chi_0(x) \equiv 1$. Тогда группа $\overline{X}$ будет порождать на множестве всех целых неотрицательных чисел, если $\overline{X}$ состоит из бесконечного числа элементов, и на множестве $\{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$, если $\overline{X}$ состоит из N элементов, группу с операцией сложения ‘$\oplus$’, определяемой следующим образом: $m \oplus n = k$, если $\chi_m(x)\chi_n(x) = \chi_k(x)$. Будем полагать $N = \infty$ в случае, если $\overline{X}$ состоит из бесконечного числа элементов. Вычитание в этой группе будем обозначать ‘$\ominus$’.

Обобщением известного результата о нормах тёплицевых матриц (см. [28, гл. 5, §1, лемма 2, с. 170]) является следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть $\{h_k\}_{k=0}^{N-1}$ — конечный или бесконечный набор комплексных чисел такой, что*

$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 < +\infty \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=0}^{N-1} h_k \chi_k(x) \in L^\infty(X).$$

Тогда операторная норма матрицы $H = \{h_{m\ominus n}\}_{m,n=0}^{N-1}$ *конечна, причём*

$$\|H\| \leqslant \Big\| \sum_{k=0}^{N-1} h_k \chi_k(x) \Big\|_{L^\infty(X)}.$$

3.1.2. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 3.1. Рассмотрим произвольную последовательность комплексных чисел $\{b_m\}_{m=0}^{N-1}$ со свойством

$$\sum_{m=0}^{N-1} |b_m|^2 \leqslant 1. \tag{3.1}$$

В случае $N = \infty$ ряды $\sum_{k=0}^{N-1} h_k \chi_k(x)$ и $\sum_{m=0}^{N-1} b_m \chi_{\ominus m}(x)$ сходятся в $L^2(X)$. Учитывая свойства характеров, получаем

$$\int_X \Big(\sum_{k=0}^{N-1} h_k \chi_k(x) \Big) \Big(\sum_{m=0}^{N-1} b_m \chi_{\ominus m}(x) \Big) \chi_n(x)\, d\mu = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} h_k b_m \int_X \chi_{k\ominus m\oplus n} d\mu = \sum_{m=0}^{N-1} b_m h_{m\ominus n}. \tag{3.2}$$

Следовательно, величина $\sum_{m=0}^{N-1} b_m h_{m\ominus n}$ является коэффициентом Фурье функции $\big(\sum_{k=0}^{N-1} h_k \chi_k(x)\big)\big(\sum_{m=0}^{N-1} b_m \chi_{\ominus m}(x)\big)$. В силу равенства Парсеваля выводим из (3.2) следующую оценку:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Big| \sum_{m=0}^{N-1} b_m h_{m\ominus n} \Big|^2 = \int_X \Big| \sum_{k=0}^{N-1} h_k \chi_k(x) \Big|^2 \Big| \sum_{m=0}^{N-1} b_m \chi_{\ominus m}(x) \Big|^2 d\mu \leqslant \Big\| \sum_{k=0}^{N-1} h_k \chi_k(x) \Big\|_{L^\infty(X)}^2 \Big\| \sum_{m=0}^{N-1} b_m \chi_{\ominus m}(x) \Big\|_{L^2(X)}^2. \tag{3.3}$$

Наконец, учитывая (3.1) и (3.3), имеем

$$\|H\| = \sup_{\{b_m\}:\ \sum_{m=0}^{N-1} |b_m|^2 \leqslant 1} \sum_{n=0}^{N-1} \Big| \sum_{m=0}^{N-1} b_m h_{m\ominus n} \Big|^2 \leqslant \Big\| \sum_{k=0}^{N-1} h_k \chi_k(x) \Big\|_{L^\infty(X)}^2.$$

Теорема доказана. □

3.1.3. Примеры обобщений матриц Гильберта

Пусть X — тор $[0,1]$. Тогда $\overline{X} = \{e^{2\pi inx}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, '$\oplus$' — обычное сложение на множестве целых чисел. Следующий пример был предложен Б. С. Кашиным и использован П. Освальдом для исследования скорости сходимости SOR метода (см. [105]).

Теорема 3.2. *При каждом $N = 2, 3, \ldots$ матрица $S_N = \{a_{m-n}\}_{m,n=1}^{N}$, где $a_0 = 0$ и $a_k = \sin(\pi k/2)/k$ при $k \neq 0$, удовлетворяет условию*

$$\frac{\|S_N^s\|}{\|S_N\|} \geqslant C \log_2 N,$$

где C — некоторая положительная постоянная.

Доказательство. Явно вычислим сумму ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{2\pi ikx} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k/2)\cos(2\pi kx)}{k} = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } x \in [0,1/4) \cup (3/4,1], \\ -\pi/2, & \text{если } x \in (1/4,3/4), \\ 0, & \text{если } x = 1/4 \text{ или } x = 3/4. \end{cases}$$

В силу теоремы 3.1 справедлива оценка $\|S_N\| \leqslant \big\|\{a_{m-n}\}_{m,n=0}^{\infty}\big\| \leqslant \pi/2$. Полагая $x_N = N^{-1/2}(i, i^2, \ldots, i^N)$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\|S_N^s\|}{\|S_N\|} &\geqslant \left(\frac{2}{\pi N}\sum_{m=2}^{N}\Big|\sum_{n=1}^{m-1}\frac{\sin\big(\pi(m-n)/2\big)}{m-n} i^n\Big|^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{2}{\pi N}\sum_{m=2}^{N}\Big|\sum_{n=1}^{m-1}\frac{\sin^2\big(\pi n/2\big)}{n}\Big|^2\right)^{1/2} \geqslant C\log_2 N, \end{aligned}$$

где C — некоторая постоянная.

(Используется неравенство $\sum_{n=1}^{m-1}\sin^2\big(\pi n/2\big)/n > 0.5\ln m$, $m \geqslant 2$.) Теорема доказана. □

Построим теперь примеры обобщённых тёплицевых матриц с экстремально большой нормой максимального оператора. Пусть $\mathbf{P} = \{p_j : p_j \geqslant 3\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, $X(\mathbf{P})$ — $\mathbf{P}$-ичная группа (см. [9]). Элементами группы $X(\mathbf{P})$ являются всевозможные последовательности $x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ такие, что $0 \leqslant x_j < p_j$. Сложение в $X(\mathbf{P})$ задаётся следующим образом: $z = x + y$,

если $z_j \equiv x_j + y_j \pmod{p_j}$ для каждого j. В этом случае $\overline{X}(\mathbf{P}) = \{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — система функций Прайса, занумерованная таким образом, что операция '$\oplus$' соответствует покоординатному сложению $\mathbf{P}$-ичных разложений номеров, аналогичному сложению в $X(\mathbf{P})$ (см. [9]).

Положим $m_0 = 1$, $m_j = \prod_{k=1}^{j} p_k$. Для всех j и s, $0 \leqslant s < m_j$, обозначим через Δ_j^s множество таких последовательностей $x \in X(\mathbf{P})$, у которых первые j членов совпадают с $\mathbf{P}$-ичным разложением числа s.

Последовательность $\{a_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ зададим следующим образом. Для каждого $\nu = 1, 2, \ldots$ выберем целое неотрицательное j так, чтобы $\nu = lm_j + k$ для некоторых l и k, $1 \leqslant l < p_{j+1}$, $0 \leqslant k < m_j$. Положим

$$a_\nu = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu = 0, \\ 1/(lm_j), & \text{если } 1 \leqslant l \leqslant [(p_{j+1}-1)/2], \\ -1/\big((p_{j+1}-l)m_j\big), & \text{если } p_{j+1} - [(p_{j+1}-1)/2] \leqslant l \leqslant p_{j+1}-1, \\ 0, & \text{если } [(p_{j+1}-1)/2] < l < p_{j+1} - [(p_{j+1}-1)/2]. \end{cases} \tag{3.4}$$

Покажем, что матрица $H^{\mathbf{P}} = \{a_{m\ominus n}\}_{m,n=0}^{\infty}$ обладает схожими с матрицей Гильберта свойствами.

Лемма 3.1. *Функция $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \chi_\nu(x)$ ограничена на $X(\mathbf{P})$.*

Доказательство. Рассмотрим сумму внутри j-й пачки. В силу (3.4) имеем

$$\begin{aligned} S_j(x) = \sum_{\nu=m_j}^{m_{j+1}-1} a_\nu \chi_\nu(x) &= \frac{1}{m_j}\left(\sum_{l=1}^{[(p_{j+1}-1)/2]} \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{m_j-1} \chi_{lm_j+k}(x) \right. \\ &\left. - \sum_{l=p_{j+1}-[(p_{j+1}-1)/2]}^{p_{j+1}-1} \frac{1}{p_{j+1}-l} \sum_{k=0}^{m_j-1} \chi_{lm_j+k}(x) \right) \\ &= \frac{1}{m_j}\left(\sum_{l=1}^{[(p_{j+1}-1)/2]} \frac{1}{l}\big(\chi_{m_j}^{l}(x) - \chi_{m_j}^{p_{j+1}-l}(x)\big) \right) \left(\sum_{k=0}^{m_j-1} \chi_k(x) \right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Известно (см. [9]), что

$$\sum_{k=0}^{m_j-1} \chi_k(x) = \begin{cases} m_j, & \text{если } x \in \Delta_j^0, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus \Delta_j^0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Учитывая (3.5) и (3.6), получаем

$$S_j(x) = \begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{[(p_{j+1}-1)/2]} 1/l\big(\chi_{m_j}^{l}(x) - \chi_{m_j}^{p_{j+1}-l}(x)\big), & \text{если } x \in \Delta_j^0, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus \Delta_j^0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Для каждого s, $0 \leqslant s < m_{j+1}$, и $x \in \Delta_{j+1}^s$ имеем (см. [9])

$$\chi_{m_j}^{l}(x) - \chi_{m_j}^{p_{j+1}-l}(x) = 2i \sin \frac{2\pi l s}{p_{j+1}}.$$

Отсюда и из (3.7) получаем явный вид сумм внутри j-й пачки:

$$S_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \Delta_{j+1}^0 \cup \Delta_j^0, \\ 2i \sum\limits_{l=1}^{[(p_{j+1}-1)/2]} 1/l \sin(2\pi l s/p_{j+1}), & \text{если } x \in \Delta_{j+1}^s,\ 0 < s < p_{j+1}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Таким образом, при различных j носители $S_j(x)$ не пересекаются. К тому же из (3.8) вытекает оценка $|S_j(x)| \leqslant 2\pi$. Тем самым, окончательно получаем

$$|f(x)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} S_j(x) \right| \leqslant 2\pi.$$

Лемма доказана. □

Обозначим через H_{m_j} матрицу $\{a_{m \ominus n}\}_{m,n=0}^{m_j-1}$, где $a_{m \ominus n}$ — элементы матрицы $H^{\mathbf{P}}$, определённые формулой (3.4).

Лемма 3.2. *Матрица H_{m_j} удовлетворяет условию $\|H_{m_j}^s\| > 0.2 \log_2 m_j$.*

Доказательство. Докажем по индукции неравенство

$$\sum_{m=0}^{m_j-1} \sum_{n=0}^{m} a_{m \ominus n} > 0.2\, m_j \log_2 m_j.$$

Согласно (3.4) имеем

$$\sum_{m=0}^{m_j-1} \sum_{n=0}^{m} a_{m \ominus n} = p_j \sum_{m=0}^{m_{j-1}-1} \sum_{n=0}^{m} a_{m \ominus n} + m_j \left(\sum_{\nu=1}^{[(p_j-1)/2]} \frac{1}{\nu} - \frac{2}{p_j} \left[\frac{p_j}{2} \right] \right). \tag{3.9}$$

По предположению индукции

$$\sum_{m=0}^{m_{j-1}-1} \sum_{n=0}^{m} a_{m \ominus n} > 0.2\, m_{j-1} \log_2 m_{j-1}. \tag{3.10}$$

Принимая во внимание неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{[(p_j-1)/2]} \frac{1}{\nu} - \frac{2}{p_j}\left[\frac{p_j}{2}\right] > 0.2\log_2 p_j,$$

из соотношений (3.9) и (3.10) выводим оценку

$$\sum_{m=0}^{m_j-1}\sum_{n=0}^{m} a_{m\ominus n} > 0.2\, m_j \log_2 m_j. \tag{3.11}$$

В силу неравенства (3.11) норма верхней треугольной матрицы H_{m_j} допускает оценку $\|H^s_{m_j}\| > 0.2\log_2 m_j$. Лемма доказана. □

Теорема 3.3. *Существует такая положительная постоянная C, что для каждого натурального j матрица H_{m_j}, определённая выше, удовлетворяет условию*

$$\frac{\|H^s_{m_j}\|}{\|H_{m_j}\|} \geqslant C\log_2 m_j.$$

Доказательство. Неравенство $\|H_{m_j}\| \leqslant 2\pi$ вытекает из леммы 3.1 и теоремы 3.1. Оценка $\|H^s_{m_j}\| > 0.2\log_2 m_j$ доказана в лемме 3.2. Полагая $C = 1/(10\pi)$, получаем утверждение леммы. □

Пример Паскевича (см. [107]) имеет следующий вид. Для каждого $N = 3^K$ определим набор функций $\{\psi_n^N\}_{n=0}^{N-1}$ следующим образом. Для каждого $\nu = 1, 2, \ldots$ выберем целое неотрицательное j так, чтобы $\nu = l3^j + k$ для некоторых l и k, $l = 1, 2$, $0 \leqslant k < 3^j$. Положим

$$a_\nu = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu = 0, \\ 1/3^j, & \text{если } l = 1, \\ -1/3^j, & \text{если } l = 2. \end{cases}$$

Наконец, $\psi_n^N(x) = a_{k\ominus n}$, если $x \in \Delta_N^k$. В работе [107] А. Паскевич непосредственно проверяет, что

$$(\psi_n^N, \psi_m^N) = \begin{cases} 1/N, & \text{если } m = n, \\ -1/N^2, & \text{если } m \neq n, \end{cases}$$

и что на множестве положительной меры мажоранта сумм $\sum_{n=1}^{j} \psi_n^N$ растёт как $\log_2 N$. После этого ортонормированная система, удовлетворяющая условиям теоремы 3.B, получается из $\{\psi_n^N\}_{n=0}^{N-1}$ при помощи ортогонализации и нормировки. Нетрудно заметить, что построенная система тесно связана с матрицей $H^{\mathbf{P}}$ из теоремы 3.3 в случае, когда $\mathbf{P}$ — троичная группа. Другими словами, пример Паскевича может быть получен из теоремы 3.3 как частный случай.

3.2. Пример ортогональной системы с экстремально большой L_2-нормой максимального оператора

3.2.1. Формулировка результатов

Построен пример дискретной ортонормированной системы, основанной на блоках 4×4, L_2-норма мажоранты частных сумм ряда по которой растёт как $\log_2 N$. Эта ортонормированная система порождается ортогональной матрицей, имеющей улучшенные характеристики в сравнении с матрицей Гильберта.

Продолжены исследования Б. С. Кашина, построившего на основе конструкции из двоичных блоков пример ортонормированной системы с мажорантой частных сумм, растущей как $\sqrt{\log_2 N}$. А именно, построен пример ортонормированной системы на основе ортогональной матрицы из двоичных блоков, модули всех ненулевых элементов которой равны между собой.

Заметим, что ортогональная $N \times N$ матрица, у которой операторная норма верхней треугольной матрицы растёт как $\sqrt{\log_2 N}$, построена П. Л. Ульяновым [59, теорема 3] на основе перестановки системы Хаара в порядке возрастания так называемых существенных нулей. Эта матрица имеет структуру, в определённом смысле, схожую со структурой предлагаемой нами матрицы. В то же время дополнительным преимуществом предлагаемой нами матрицы является равенство абсолютных величин всех её элементов.

Ортогональная $N \times N$ матрица, все элементы которой равны по абсолютной величине, построена также С. В. Бочкарёвым (см. [7, теорема 1]) на основе переставленной системы Уолша. Норма максимального оператора этой перестановки растёт как $\sqrt{\log_2 N}$, что до сих пор является лучшей оценкой снизу на классе всех перестановок системы Уолша. В то же время, на данный момент

неизвестны примеры перестановок системы Уолша, для которых выполнялся бы аналог теоремы 3.10, то есть норма максимального оператора достигалась бы на наборе равных друг другу коэффициентов.

3.2.2. Построение ортогональных обобщённых тёплицевых матриц при помощи системы Прайса

Рассмотрим группу X, равную прямому произведению (конечному или счётному) групп $\mathbb{Z}_4$. Элементами группы X являются наборы (конечные или счётные) $x = \{x_k\}$ такие, что $x_k = 0, 1, 2$ или 3 для всех k. Для единообразия конечные наборы будем дополнять нулями. Суммой наборов $x = \{x_k\}$ и $y = \{y_k\}$ является такой набор $z = \{z_k\}$, что $z_k = x_k + y_k \pmod 4$. В этом случае мера Хаара на X задаётся произведением мер Хаара на $\mathbb{Z}_4$ (см. [1, гл. I, §3, п. 6]), а группой $\overline{X}$ характеров для группы X является система Прайса (см. [1, гл. III, §1, п. 8]).

Запишем систему Прайса в стандартной нумерации. Для $n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k\, 4^{k-1}$, где $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — финитная последовательность, $n_k = 0, 1, 2$ или 3, и $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, положим

$$\chi_n(x) = i^{\sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k}. \tag{3.12}$$

Для начала рассмотрим случай, когда группа X бесконечна.

Лемма 3.3. *Последовательность $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ построим следующим образом. Разложим номер n по степеням четвёрки: $n = \sum_{k=1}^{N+1} n_k 4^{k-1}$. Положим*

$$h_n = \begin{cases} -2^{-N-1}, & \text{если} \quad n = 4^N + \sum\limits_{k=1}^{N} n_k 4^{k-1}, \quad n_k = 1 \text{ или } 3, \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \\ 2^{-N-1}, & \text{если} \quad n = 3 \cdot 4^N + \sum\limits_{k=1}^{N} n_k 4^{k-1}, \quad n_k = 1 \text{ или } 3, \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.13}$$

Тогда сумма ряда по системе (3.12) *с коэффициентами $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ существенно ограничена, причём*

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} h_n \chi_n(x) \right\|_{L_\infty(X)} = 1.$$

Доказательство. Фиксируем $N \geqslant 1$ и вычислим сумму внутри $(N+1)$-й пачки. Случай $N = 0$ рассмотрим отдельно. Ввиду (3.12) и (3.13) имеем

$$\sum_{n=4^N}^{4^{N+1}-1} h_n\chi_n(x) = -2^{-N-1}\, i^{x_{N+1}} \sum_{\substack{n_k=1 \text{ или } 3\\ 1\leqslant k\leqslant N}} i^{\sum_{k=1}^N n_k x_k} + 2^{-N-1}\, i^{3x_{N+1}} \sum_{\substack{n_k=1 \text{ или } 3\\ 1\leqslant k\leqslant N}} i^{\sum_{k=1}^N n_k x_k}. \quad (3.14)$$

С другой стороны, легко заметить, что

$$\sum_{\substack{n_k=1 \text{ или } 3\\ 1\leqslant k\leqslant N}} i^{\sum_{k=1}^N n_k x_k} = \prod_{k=1}^N \left(i^{x_k} + i^{3x_k}\right). \quad (3.15)$$

Объединяя (3.14) и (3.15), выводим формулу для суммы внутри $(N+1)$-й пачки:

$$\sum_{n=4^N}^{4^{N+1}-1} h_n\chi_n(x) = 2^{-N-1}\, i^{\sum_{k=1}^{N+1} x_k}\big((-1)^{x_{N+1}} - 1\big) \prod_{k=1}^N \big((-1)^{x_k} + 1\big). \quad (3.16)$$

В случае $N = 0$ сумма внутри первой пачки имеет вид

$$\sum_{n=1}^{3} h_n\chi_n(x) = 2^{-1}\, i^{x_1}\big((-1)^{x_1} - 1\big). \quad (3.17)$$

Вычислим теперь значение суммы ряда $\sum_{n=0}^\infty h_n\chi_n(x)$ на наборе $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$, у которого для некоторого $N \geqslant 0$ все x_k, $1 \leqslant k \leqslant N$, чётные, а x_{N+1} — нечётное.

В силу (3.16) и (3.17) все суммы внутри пачек, за исключением пачки с номером $N+1$, равны нулю. Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n\chi_n(x) = \sum_{n=4^N}^{4^{N+1}-1} h_n\chi_n(x) = -i^{\sum_{k=1}^{N+1} x_k}. \quad (3.18)$$

Сходимость ряда в левой части (3.18) в точке $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$, где все x_k, $1 \leqslant k \leqslant N$, чётные, а x_{N+1} — нечётное, вытекает из следующего рассуждения.

Для произвольных $K \in \mathbb{N}$ и p, $0 \leqslant p < 3 \cdot 4^{K-1}$, в силу (3.13) и (3.15) выполняется оценка

$$\left|\sum_{n=4^{K+N}+p4^{N+1}}^{4^{K+N}+(p+1)4^{N+1}-1} h_n\chi_n(x)\right| \leqslant 2^{-K-N-1}\left|\sum_{\substack{n_k=1 \text{ или } 3\\ 1\leqslant k\leqslant N+1}} i^{\sum_{k=1}^{N+1} n_k x_k}\right| = 2^{-K-N-1}\left|\prod_{k=1}^{N+1}\left(i^{x_k} + i^{3x_k}\right)\right|. \quad (3.19)$$

Ввиду нечётности x_{N+1} правая часть (3.19), а значит и левая, обращается в нуль. Тем самым, ряд в левой части (3.18) сходится, поскольку его члены стремятся к нулю.

С учётом (3.18) заключаем, что для всех $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, имеющих хотя бы одну нечётную координату, верно равенство $\left|\sum_{n=0}^{\infty} h_n \chi_n(x)\right| = 1$. В то же время, мера тех $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, у которых все координаты чётные, равна нулю. Таким образом, $\left\|\sum_{n=0}^{\infty} h_n \chi_n(x)\right\|_{L_\infty(X)} = 1$. Лемма доказана. □

Группа $\overline{X}$ порождает операцию сложения. Если $n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k\, 4^{k-1}$, $m = \sum_{k=1}^{\infty} m_k\, 4^{k-1}$, где $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — финитные последовательности, причём $n_k = 0, 1, 2$ или 3, $m_k = 0, 1, 2$ или 3 для всех k, то $n \oplus m = \sum_{k=1}^{\infty} (n_k + m_k)\, 4^{k-1}$, где сумма $n_k + m_k$ понимается как сумма по модулю 4. Определим обобщённую тёплицеву матрицу A по правилу:

$$a_{nm} = h_{n \ominus m}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.20}$$

Теорема 3.4. *Матрица $A = \{a_{nm}\}_{n,m=0}^{\infty}$, определяемая равенствами* (3.13) *и* (3.20)*, ортогональна.*

Доказательство. Из леммы 3.3 и теоремы 3.1 следует, что операторная норма матрицы A не превосходит единицы. С другой стороны, l_2-норма каждого столбца матрицы A также равна единице. Действительно, из конструкции матрицы A вытекает, что элемент последовательности $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ с фиксированным номером n встречается в столбце с номером m ровно один раз на пересечении со строкой с номером $n \oplus m$. С учётом соотношений (3.13) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2 = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=4^N}^{4^{N+1}-1} h_n^2 = \sum_{N=0}^{\infty} 4^{-N-1} \sum_{\substack{n_k=1 \text{ или } 3 \\ 1 \leqslant k \leqslant N+1}} 1 = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N-1} = 1.$$

Таким образом, норма матрицы A и её столбцов равна единице. Следовательно, A — ортогональная матрица. Теорема доказана. □

Очевидно, что $N \times N$ подматрицы $\{a_{nm}\}_{n,m=0}^{N-1}$ матрицы A почти ортогональны. Однако нам будет удобнее внести небольшие изменения в их конструкцию с целью полного сохранения ортогональности.

Для каждого $N \geqslant 1$ определим набор чисел $\{d_n\}_{n=0}^{4^{N+1}-1}$ следующим образом:

$$d_n = \begin{cases} -2^{-k-1}, & \text{если } n = 4^k + \sum\limits_{m=1}^{k} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1 \text{ или } 3, \ 0 \leqslant k < N-1, \\ 2^{-k-1}, & \text{если } n = 3 \cdot 4^k + \sum\limits_{m=1}^{k} n_m 4^{m-1}, \ n_m = 1 \text{ или } 3, \ 0 \leqslant k < N-1, \\ -2^{-N-1}, & \text{если } n = 4^{N-1} + \sum\limits_{m=1}^{N-1} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1 \text{ или } 3, \\ 3 \cdot 2^{-N-1}, & \text{если } n = 3 \cdot 4^{N-1} + \sum\limits_{m=1}^{N-1} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1 \text{ или } 3, \\ -2^{-N-1}, & \text{если } n = 4^N + \sum\limits_{m=1}^{N} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1 \text{ или } 3, \\ 2^{-N-1}, & \text{если } n = p \cdot 4^N + \sum\limits_{m=1}^{N} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1 \text{ или } 3, \ p = 2 \text{ или } 3, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.21}$$

Лемма 3.4. *Пусть набор чисел* $\{d_n\}_{n=0}^{4^{N+1}-1}$ *определяется формулой* (3.21). *Тогда справедливо равенство*

$$\Big\| \sum_{n=0}^{4^{N+1}-1} d_n \chi_n(x) \Big\|_{L_\infty(X)} = 1.$$

Доказательство. Фиксируем K, $0 \leqslant K < N-1$. Ранее доказано (см. (3.16)), что для $K \geqslant 1$ сумма внутри $(K+1)$-й пачки равна

$$\sum_{n=4^K}^{4^{K+1}-1} d_n \chi_n(x) = 2^{-K-1}\, i^{\sum_{m=1}^{K+1} x_m} \big((-1)^{x_{K+1}} - 1\big) \prod_{m=1}^{K} \big((-1)^{x_m} + 1\big). \tag{3.22}$$

В случае $K = 0$ сумма внутри первой пачки имеет вид

$$\sum_{n=1}^{3} h_n \chi_n(x) = 2^{-1}\, i^{x_1} \big((-1)^{x_1} - 1\big). \tag{3.23}$$

При $N \geqslant 2$ для вычисления суммы внутри N-й пачки снова применим (3.12) и (3.21). Имеем

$$\sum_{n=4^{N-1}}^{4^N-1} d_n \chi_n(x) = -2^{-N-1}\, i^{x_N} \sum_{\substack{n_m = 1 \text{ или } 3 \\ 1 \leqslant m \leqslant N-1}} i^{\sum_{m=1}^{N-1} n_m x_m} + 3 \cdot 2^{-N-1}\, i^{3x_N} \sum_{\substack{n_m = 1 \text{ или } 3 \\ 1 \leqslant m \leqslant N-1}} i^{\sum_{m=1}^{N-1} n_m x_m}. \tag{3.24}$$

Из (3.24) и (3.15) получаем искомую формулу

$$\sum_{n=4^{N-1}}^{4^N-1} d_n\chi_n(x) = 2^{-N-1}\, i^{\sum_{m=1}^{N} x_m}\bigl(3\cdot(-1)^{x_N}-1\bigr)\prod_{m=1}^{N-1}\bigl((-1)^{x_m}+1\bigr). \qquad (3.25)$$

Если же $N=1$, то сумма внутри первой пачки равна

$$\sum_{n=1}^{3} d_n\chi_n(x) = 2^{-2}\, i^{x_1}\bigl(3\cdot(-1)^{x_1}-1\bigr).$$

Теперь вычислим сумму внутри $(N+1)$-й пачки. Опять воспользуемся (3.12) и (3.21). Имеет место равенство

$$\begin{aligned}\sum_{n=4^N}^{4^{N+1}-1} d_n\chi_n(x) &= -2^{-N-1}\, i^{x_{N+1}} \sum_{\substack{n_m=1 \text{ или } 3\\ 1\leqslant m\leqslant N}} i^{\sum_{m=1}^{N} n_m x_m} \\ &+ 2^{-N-1}\, i^{2x_{N+1}} \sum_{\substack{n_m=1 \text{ или } 3\\ 1\leqslant m\leqslant N}} i^{\sum_{m=1}^{N} n_m x_m} + 2^{-N-1}\, i^{3x_{N+1}} \sum_{\substack{n_m=1 \text{ или } 3\\ 1\leqslant m\leqslant N}} i^{\sum_{m=1}^{N} n_m x_m}. \qquad (3.26)\end{aligned}$$

Из (3.26) и (3.15) получаем формулу для суммы внутри $(N+1)$-й пачки:

$$\sum_{n=4^N}^{4^{N+1}-1} d_n\chi_n(x) = 2^{-N-1}\, i^{\sum_{m=1}^{N+1} x_m}\bigl((-1)^{x_{N+1}}+i^{x_{N+1}}-1\bigr)\prod_{m=1}^{N}\bigl((-1)^{x_m}+1\bigr). \qquad (3.27)$$

Для $N\geqslant 2$ и каждого K, $0\leqslant K<N-1$, вычислим значение суммы ряда на наборе $x=\{x_m\}_{m=1}^{N+1}$, у которого все x_m, $1\leqslant m\leqslant K$, — чётные, а x_{K+1} — нечётное. При $N\geqslant 2$ в силу (3.22), (3.23), (3.25) и (3.27) все суммы внутри пачек, за исключением пачки с номером $K+1$, равны нулю. Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{4^{N+1}-1} d_n\chi_n(x) = \sum_{n=4^K}^{4^{K+1}-1} d_n\chi_n(x) = -i^{\sum_{m=1}^{K+1} x_m}. \qquad (3.28)$$

В случае $N=1$ и нечётного x_1 выводим из (3.25) и (3.27) равенство

$$\sum_{n=0}^{15} d_n\chi_n(x) = -i^{x_1}. \qquad (3.29)$$

Вычислим теперь при $N\geqslant 2$ значение суммы ряда на наборе $x=\{x_m\}_{m=1}^{N+1}$, у которого все x_m, $1\leqslant m<N$, — чётные, а x_N — нечётное. Согласно (3.22), (3.23)

(3.25) и (3.27) все суммы внутри пачек, за исключением пачки с номером N, равны нулю. Значит,

$$\sum_{n=0}^{4^{N+1}-1} d_n\chi_n(x) = \sum_{n=4^{N-1}}^{4^N-1} d_n\chi_n(x) = -i^{\sum_{m=1}^{N} x_m}. \tag{3.30}$$

Для $N \geqslant 2$ рассмотрим набор $x = \{x_m\}_{m=1}^{N+1}$, у которого все x_m, $1 \leqslant m \leqslant N$, — чётные, а x_{N+1} — нечётное. Учитывая (3.22), (3.23) (3.25) и (3.27), все суммы внутри пачек, кроме пачек с номерами N и $N+1$, равны нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{4^{N+1}-1} d_n\chi_n(x) &= \sum_{n=4^{N-1}}^{4^N-1} d_n\chi_n(x) + \sum_{n=4^N}^{4^{N+1}-1} d_n\chi_n(x) \\ &= \frac{1}{2} i^{\sum_{m=1}^{N} x_m} + \left(\frac{1}{2} i^{x_{N+1}} - 1\right) i^{\sum_{m=1}^{N+1} x_m} = -i^{\sum_{m=1}^{N+1} x_m}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

В случае $N = 1$, чётного x_1 и нечётного x_2 выводим из (3.25) и (3.27) равенство

$$\sum_{n=0}^{15} d_n\chi_n(x) = -i^{x_1+x_2}. \tag{3.32}$$

Наконец, для $N \geqslant 2$ вычислим значение суммы ряда на наборе $x = \{x_m\}_{m=1}^{N+1}$, у которого все x_m чётные. Снова принимая во внимание (3.22), (3.23), (3.25) и (3.27), заключаем, что все суммы внутри пачек, кроме двух пачек с номерами N и $N+1$, равны нулю. Таким образом,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{4^{N+1}-1} d_n\chi_n(x) &= \sum_{n=4^{N-1}}^{4^N-1} d_n\chi_n(x) + \sum_{n=4^N}^{4^{N+1}-1} d_n\chi_n(x) \\ &= \frac{1}{2}\, i^{\sum_{m=1}^{N} x_m} + \frac{1}{2} i^{x_{N+1}}\, i^{\sum_{m=1}^{N+1} x_m} = i^{\sum_{m=1}^{N} x_m}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

В случае $N = 1$ и чётных x_1, x_2 выводим из (3.25) и (3.27) равенство

$$\sum_{n=0}^{15} d_n\chi_n(x) = i^{x_1}. \tag{3.34}$$

Из соотношений (3.28)—(3.34) выводим, что $\left\|\sum_{n=0}^{4^{N+1}-1} d_n\chi_n(x)\right\|_{L_\infty(X)} = 1$. Лемма доказана. □

Определим обобщённую тёплицеву $4^{N+1} \times 4^{N+1}$ матрицу B_N по правилу:

$$b_{nm} = d_{n\ominus m}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, 4^{N+1} - 1, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, 4^{N+1} - 1. \tag{3.35}$$

Теорема 3.5. *Матрица* $B_N = \{b_{nm}\}_{n,m=0}^{4^{N+1}-1}$, *задаваемая соотношениями* (3.21) *и* (3.35), *ортогональна.*

Доказательство. В силу леммы 3.4 и теоремы 3.1 операторная норма матрицы B_N не превосходит единицы. С другой стороны, l_2-норма каждого столбца матрицы B_N также равна единице. Действительно, из конструкции матрицы B_N вытекает, что элемент набора $\{d_n\}_{n=0}^{4^{N+1}-1}$ с фиксированным номером n встречается в столбце с номером m ровно один раз на пересечении со строкой с номером $n \oplus m$. Ввиду соотношений (3.21) имеем

$$\sum_{n=0}^{4^{N+1}-1} d_n^2 = \sum_{K=0}^{N-2} \sum_{n=4^K}^{4^{K+1}-1} d_n^2 + \sum_{n=4^{N-1}}^{4^N-1} d_n^2 + \sum_{n=4^N}^{4^{N+1}-1} d_n^2 = \sum_{K=0}^{N-2} 4^{-K-1} \sum_{\substack{n_k=1 \text{ или } 3 \\ 1\leqslant k\leqslant K+1}} 1$$

$$+10\cdot 4^{-N-1} \sum_{\substack{n_k=1 \text{ или } 3 \\ 1\leqslant k\leqslant N-1}} 1 + 3\cdot 4^{-N-1} \sum_{\substack{n_k=1 \text{ или } 3 \\ 1\leqslant k\leqslant N}} 1 = \sum_{K=0}^{N-2} 2^{-K-1} + 5\cdot 2^{-N-2} + 3\cdot 2^{-N-2} = 1.$$

Следовательно, норма матрицы B_N и её столбцов равна единице и, значит, B_N — ортогональная матрица. Теорема доказана. □

3.2.3. Примеры ортогональных блочных матриц, имеющих экстремально большую L_2-норму максимального оператора

Б. С. Кашиным в [27] рассматривалась задача об оценке отношения операторной нормы нижней (или верхней, что эквивалентно) треугольной матрицы A^s к операторной норме самой матрицы A в случае, когда матрица A состоит из двоичных блоков. А именно, им была изучена последовательность $2^{N+1} \times 2^{N+1}$ матриц A_N, определяемых следующим рекуррентным процессом. Пусть E_N — $2^N \times 2^N$ матрица, все элементы которой равны единице. Положим

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_N = \left(\begin{array}{c|c} A_{N-1} & 2^{-N}E_N \\ \hline -2^{-N}E_N & A_{N-1} \end{array}\right). \tag{3.36}$$

Теорема 3.D (Б. С. Кашин)**.** *Существуют положительные постоянные* C_1 *и* C_2 *такие, что для каждого целого неотрицательного* N *выполняется неравенство*

$$C_1\sqrt{N+1} \leqslant \frac{\|A_N^s\|}{\|A_N\|} \leqslant C_2\sqrt{N+1}, \tag{3.37}$$

где матрицы A_N *определены соотношениями* (3.36).

Неизвестно, возможно ли на основе конструкции двоичных блоков построить последовательность матриц A_N так, чтобы улучшить оценку (3.37), а тем более построить систему матриц, устанавливающих точность теоремы 3.C. В то же время конструкция из блоков 4×4 позволяет получить требуемый пример. Построим сначала последовательность матриц E_N. В отличие от конструкции Кашина, в качестве E_N мы будем брать матрицу, состоящую из единиц и нулей. Определим E_N рекуррентно следующим образом:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_N = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & E_{N-1} & 0 & E_{N-1} \\ \hline E_{N-1} & 0 & E_{N-1} & 0 \\ \hline 0 & E_{N-1} & 0 & E_{N-1} \\ \hline E_{N-1} & 0 & E_{N-1} & 0 \end{array}\right). \tag{3.38}$$

Последовательность $4^{N+1} \times 4^{N+1}$ матриц A_N зададим по правилу:

$$A_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_N = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{N-1} & 2^{-N-1}E_N & 0 & -2^{-N-1}E_N \\ \hline -2^{-N-1}E_N & A_{N-1} & 2^{-N-1}E_N & 0 \\ \hline 0 & -2^{-N-1}E_N & A_{N-1} & 2^{-N-1}E_N \\ \hline 2^{-N-1}E_N & 0 & -2^{-N-1}E_N & A_{N-1} \end{array}\right). \tag{3.39}$$

Несложно убедиться, что матрица A, получаемая при неограниченном продолжении процесса (3.39), совпадает с построенной ранее обобщённой тёплицевой матрицей (3.20).

Теорема 3.6. *Для всех целых неотрицательных N выполняется оценка*

$$\frac{\|A_N^s\|}{\|A_N\|} \geqslant \frac{N+1}{4},$$

где $4^{N+1} \times 4^{N+1}$ матрица A_N определена соотношениями (3.39).

Доказательство. Согласно теореме 3.4 матрица A ортогональна. Таким образом, операторные нормы её подматриц A_N ограничены сверху единицей.

Осталось оценить снизу операторные нормы матриц A_N^s. Покажем сначала, что сумма S_N элементов матрицы $2^{-N-1}E_N$ равна $4^N/2$. Действительно, для матрицы $E_1/4$ это очевидно (см. (3.38)). Предположим, что $S_k = 4^k/2$. Тогда из (3.38) для S_{k+1} имеем $S_{k+1} = 8S_k/2 = 4S_k = 4^{k+1}/2$.

Проверим теперь, что сумма σ_N элементов матрицы A_N^s равна $(N+1)4^N$. Действительно, равенство $\sigma_0 = 1$ очевидно (см. (3.39)). Предположим, что $\sigma_{k-1} = k4^{k-1}$. Тогда из (3.39) и того, что $S_k = 4^k/2$, выводим

$$\sigma_k = 4\sigma_{k-1} + 2S_k = 4k4^{k-1} + 4^k = (k+1)4^k. \tag{3.40}$$

Легко заметить, что операторная норма матрицы A_N^s может быть вычислена как $\sup \|xA_N^s\|$, где точная верхняя грань берётся по всем $x \in l_2^{4^{N+1}}$, $\|x\| \leqslant 1$. Оценим снизу операторную норму верхней треугольной $4^{N+1} \times 4^{N+1}$ матрицы A_N^s через l_2-норму $e_N A_N^s$, где $e_N = 2^{-N-1}\{1, 1, \ldots, 1\}$. Имеем

$$\|A_N^s\|^2 \geqslant 4^{-N-1} \sum_{n=1}^{4^{N+1}-1} \left(\sum_{m=0}^{n-1} a_{mn} \right)^2 \geqslant \left(4^{-N-1} \sum_{n=1}^{4^{N+1}-1} \sum_{m=0}^{n-1} a_{mn} \right)^2$$
$$= \left(4^{-N-1}\sigma_N\right)^2 = \frac{1}{16}(N+1)^2.$$

Теорема доказана. □

Покажем теперь, что матрицы B_N, построенные выше (см. (3.35)), также могут быть построены при помощи блоков 4×4. Конструкция матрицы B_N отличается от конструкции матрицы A_N двумя последними шагами. Построим по $4^{N-1} \times 4^{N-1}$ матрице A_{N-2} матрицу C_{N-1} размера $4^N \times 4^N$ следующим образом:

$$C_{N-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{N-2} & 3 \cdot 2^{-N-1}E_{N-1} & 0 & -2^{-N-1}E_{N-1} \\ \hline -2^{-N-1}E_{N-1} & A_{N-2} & 3 \cdot 2^{-N-1}E_{N-1} & 0 \\ \hline 0 & -2^{-N-1}E_{N-1} & A_{N-2} & 3 \cdot 2^{-N-1}E_{N-1} \\ \hline 3 \cdot 2^{-N-1}E_{N-1} & 0 & -2^{-N-1}E_{N-1} & A_{N-2} \end{array} \right). \tag{3.41}$$

Наконец, по $4^N \times 4^N$ матрице C_{N-1} определим $4^{N+1} \times 4^{N+1}$ матрицу B_N:

$$B_N = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_{N-1} & 2^{-N-1}E_N & 2^{-N-1}E_N & -2^{-N-1}E_N \\ \hline -2^{-N-1}E_N & C_{N-1} & 2^{-N-1}E_N & 2^{-N-1}E_N \\ \hline 2^{-N-1}E_N & -2^{-N-1}E_N & C_{N-1} & 2^{-N-1}E_N \\ \hline 2^{-N-1}E_N & 2^{-N-1}E_N & -2^{-N-1}E_N & C_{N-1} \end{array} \right). \tag{3.42}$$

Можно убедиться, что матрица (3.42) совпадает с построенной ранее обобщённой тёплицевой матрицей (3.35).

Теорема 3.7. *Для всех $N \geqslant 2$ выполняется оценка*

$$\frac{\|B_N^s\|}{\|B_N\|} \geqslant \frac{N+3}{4},$$

где $4^{N+1} \times 4^{N+1}$ матрица B_N определена соотношениями (3.39), (3.41) *и* (3.42).

Доказательство. В силу теоремы 3.5 матрица B_N ортогональна, поэтому её операторная норма равна единице. Осталось получить оценку снизу для операторной нормы верхней треугольной матрицы B_N^s.

Ранее было показано (см. (3.40)), что сумма σ_{N-2} элементов матрицы A_{N-2}^s равна $(N-1)4^{N-2}$ и что сумма S_N элементов матрицы $2^{-N-1}E_N$ равна $4^N/2$ (см. доказательство теоремы 3.6). Ввиду (3.41) получаем, что сумма элементов матрицы C_{N-1}^s равна $4(N-1)4^{N-2} + 4 \cdot 4^{N-1}/2 = (N+1)4^{N-1}$. Наконец, учитывая (3.42), для суммы элементов матрицы B_N^s имеем $4(N+1)4^{N-1} + 4 \cdot 4^N/2 = (N+3)4^N$.

Оценивая снизу операторную норму верхней треугольной $4^{N+1} \times 4^{N+1}$ матрицы B_N^s через l_2-норму $e_N B_N^s$, где $e_N = 2^{-N-1}\{1, 1, \ldots, 1\}$, получаем

$$\|B_N^s\|^2 \geqslant 4^{-N-1} \sum_{n=1}^{4^{N+1}-1} \left(\sum_{m=0}^{n-1} b_{mn} \right)^2 \geqslant \left(4^{-N-1} \sum_{n=1}^{4^{N+1}-1} \sum_{m=0}^{n-1} b_{mn} \right)^2 = \frac{1}{16}(N+3)^2.$$

Теорема доказана. □

Итак, мы построили систему ортогональных $M \times M$ матриц ($M = 4^{N+1}$), удовлетворяющих условиям теоремы 3.C, у которых отношение максимального по модулю элемента к минимальному по модулю ненулевому элементу равно $\sqrt{M}/2$, что несколько лучше матрицы Гильберта, где соответствующее отношение равно M. Заметим также, что как и в случае матрицы Гильберта, логарифмический рост нормы верхних треугольных матриц B_N^s достигается на векторах $2^{-N-1}\{1, 1, \ldots, 1\}$. Используя последнее соображение, можно явно предъявить ОНС $\{\psi_n\}_{n=1}^N$, удовлетворяющую теореме 3.B.

Фиксируем номер $N \geqslant 2$. Разобьём отрезок $[0, 1]$ на 4^N равных отрезков. Положим $\Delta_k = \big(k4^{-N}, (k+1)4^{-N}\big)$, $0 \leqslant k < 4^N$. Для каждого номера n, $0 \leqslant$

$n < 4^N$, зададим

$$\psi_n(x) = \begin{cases} -2^{N-m-1}, & \text{если} \quad x \in \Delta_k, \quad n \ominus k = 4^m + \sum\limits_{j=1}^{m} n_j\, 4^{j-1}, \\ & \qquad n_j = 1 \text{ или } 3, \quad m \leqslant N-3, \\ 2^{N-m-1}, & \text{если} \quad x \in \Delta_k, \quad n \ominus k = 3 \cdot 4^m + \sum\limits_{j=1}^{m} n_j\, 4^{j-1}, \\ & \qquad n_j = 1 \text{ или } 3, \quad m \leqslant N-3, \\ -1, & \text{если} \quad x \in \Delta_k, \quad n \ominus k = 4^{N-2} + \sum\limits_{j=1}^{N-2} n_j\, 4^{j-1}, \quad n_j = 1 \text{ или } 3, \\ 3, & \text{если} \quad x \in \Delta_k, \quad n \ominus k = 3 \cdot 4^{N-2} + \sum\limits_{j=1}^{N-2} n_j\, 4^{j-1}, \quad n_j = 1 \text{ или } 3, \\ -1, & \text{если} \quad x \in \Delta_k, \quad n \ominus k = 4^{N-1} + \sum\limits_{j=1}^{N-1} n_j\, 4^{j-1}, \quad n_j = 1 \text{ или } 3, \\ 1, & \text{если} \quad x \in \Delta_k, \quad n \ominus k = 2 \cdot 4^{N-1} + \sum\limits_{j=1}^{N-1} n_j\, 4^{j-1}, \quad n_j = 1 \text{ или } 3, \\ 1, & \text{если} \quad x \in \Delta_k, \quad n \ominus k = 3 \cdot 4^{N-1} + \sum\limits_{j=1}^{N-1} n_j\, 4^{j-1}, \quad n_j = 1 \text{ или } 3, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.43}$$

Теорема 3.8. *Система функций* $\{\psi_n\}_{n=0}^{4^N-1}$, $N \geqslant 2$, *определяемая соотношениями* (3.43), *является ортонормированной. При этом имеет место оценка*

$$\int_0^1 \max_{0 \leqslant k < 4^N} \left(\sum_{n=1}^{k} \psi_n(x) \right)^2 dx \geqslant (N+2)^2 4^{N-2}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы сразу следует из теорем 3.5 и 3.7, а также того факта, что

$$\int_{\Delta_k} \psi_n(x)\psi_m(x)\, dx = b_{nk}b_{mk}, \qquad 0 \leqslant k, m, n \leqslant 4^N - 1,$$

где b_{nm} — элементы матрицы B_{N-1} (см. (3.35)). Теорема доказана. □

3.2.4. Ортогональный аналог двоичной матрицы Кашина

Наконец, вернёмся к задаче построения матриц именно из двоичных блоков. Оказывается, если ограничиться ситуацией, когда L_2-норма мажоранты частных сумм по ОНС $\{\psi_n\}_{n=1}^{N}$ растёт со скоростью $\sqrt{\log_2 N}$, можно построить

пример ОНС на основе ортогональной матрицы из двоичных блоков, модули всех ненулевых элементов которой равны между собой.

Обозначим через F_N матрицу размера $2^N \times 2^N$ с единичными элементами на побочной диагонали и нулями вне диагонали. Последовательность $2^N \times 2^N$ матриц A_N зададим следующим образом:

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & F_0 \\ \hline -F_0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_N = \left(\begin{array}{c|c} A_{N-1} & F_{N-1} \\ \hline -F_{N-1} & A_{N-1} \end{array}\right). \tag{3.44}$$

Теорема 3.9. *Для каждого $N \in \mathbb{N}$ матрица $A_N/\sqrt{N}$, где A_N определена соотношениями* (3.44)*, является ортогональной. При этом для операторной нормы её верхней треугольной матрицы имеет место оценка*

$$\left\| A_N^s/\sqrt{N} \right\| \geqslant \sqrt{N}/2.$$

Доказательство. Убедимся сначала, что матрица $A_N/\sqrt{N}$ ортогональна для каждого N. Ортогональность A_1 очевидна. Предположим, что A_{k-1} ортогональна и проверим, что в этом случае A_k также ортогональна. Вычислим скалярное произведение (a_m, a_n) столбцов матрицы A_k. Рассмотрим три случая. Первый случай: $m = n$. Второй случай: $m \neq n$ и $0 \leqslant m, n < 2^{k-1}$ либо $2^{k-1} \leqslant m, n < 2^k$. Третий случай: $0 \leqslant m < 2^{k-1}$, $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$ либо $2^{k-1} \leqslant m < 2^k$, $0 \leqslant n < 2^{k-1}$.

В первом случае $(a_m, a_n) = k - 1 + 1 = k$, так как $A_{k-1}/\sqrt{k-1}$ ортогональна. Во втором случае $(a_m, a_n) = 0$, так как $A_{k-1}/\sqrt{k-1}$ и F_{k-1} ортогональны. В третьем случае с учётом (3.44) нетрудно заметить, что матрица A_{k-1} симметрична относительно побочной диагонали. Поэтому в скалярном произведении (a_m, a_n) либо все слагаемые нулевые, либо ровно два слагаемых отличны от нуля. Например, если $2^{k-1} \leqslant m < 2^k$, $0 \leqslant n < 2^{k-1}$, то $(a_m, a_n) = a_{2^k-m-1,n} - a_{2^{k-1}-n-1,m-2^{k-1}} = 0$. Тем самым, и в этом случае a_m и a_n ортогональны. Таким образом, матрица $A_N/\sqrt{N}$ ортогональна при всех N.

Оценим теперь снизу операторную норму матрицы A_N^s. Покажем, что сумма её элементов S_N равна $N\,2^{N-1}$. Для матрицы A_1^s это очевидно. Предположим, что $S_k = k\,2^{k-1}$. Тогда из (3.44) для суммы элементов матрицы A_{k+1}^s имеем $S_{k+1} = 2S_k + 2^k = (k+1)2^k$.

Наконец, оценим снизу операторную норму верхней треугольной $2^N \times 2^N$

матрицы A_N^s через l_2-норму $f_N A_N^s$, где $f_N = 2^{-N/2}\{1, 1, \ldots, 1\}$. Имеем

$$\|A_N^s\|^2 \geqslant 2^{-N} \sum_{n=1}^{2^N-1} \left(\sum_{m=0}^{n-1} a_{mn} \right)^2 \geqslant \left(2^{-N} \sum_{n=1}^{2^N-1} \sum_{m=0}^{n-1} a_{mn} \right)^2 = \left(2^{-N} S_N\right)^2 = \frac{N^2}{4}.$$

Теорема доказана. □

Построим теперь ОНС по матрице A_N. Как и в пункте 3.2.2 введём двоичное сложение на множестве целых неотрицательных чисел от нуля до $2^N - 1$. Если $n = \sum_{k=1}^N n_k\, 2^{k-1}$, $m = \sum_{k=1}^N m_k\, 2^{k-1}$, где $n_k = 0$ или 1 и $m_k = 0$ или 1 для всех k, то $n \oplus m = \sum_{k=1}^N (n_k + m_k)\, 2^{k-1}$, причём сумма $n_k + m_k$ понимается как сумма по модулю 2. Нетрудно проверить (например, по индукции), что элементы матрицы A_N имеют следующий вид:

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n \ominus k = \sum\limits_{j=0}^{m} 2^j, \quad 0 \leqslant m < N \text{ и } n < k, \\ -1, & \text{если} \quad n \ominus k = \sum\limits_{j=0}^{m} 2^j, \quad 0 \leqslant m < N \text{ и } n > k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.45}$$

Фиксируем номер $N \in \mathbb{N}$. Разобьём отрезок $[0, 1]$ на 2^N равных отрезков. Положим $\Delta_k = \left(k2^{-N}, (k+1)2^{-N}\right)$, $0 \leqslant k < 2^N$. Для каждого номера n, $0 \leqslant n < 2^N$, определим

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 2^{N/2}/\sqrt{N}, & \text{если } x \in \Delta_k,\ n \ominus k = \sum\limits_{j=0}^{m} 2^j,\ 0 \leqslant m < N, n < k, \\ -2^{N/2}/\sqrt{N}, & \text{если } x \in \Delta_k,\ n \ominus k = \sum\limits_{j=0}^{m} 2^j,\ 0 \leqslant m < N, n > k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.46}$$

Теорема 3.10. *Система функций $\{\psi_n\}_{n=0}^{2^N-1}$, определяемая с помощью соотношений* (3.46)*, является ортонормированной. При этом имеет место оценка*

$$\int_0^1 \max_{0 \leqslant k < 2^N} \left(\sum_{j=1}^{k} \psi_j(x) \right)^2 dx \geqslant N\, 2^{N-2}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы является следствием теоремы 3.9, формул (3.45) и (3.46), а также того факта, что

$$\int_{\Delta_k} \psi_n(x)\psi_m(x)\, dx = \frac{a_{nk}a_{mk}}{N}, \qquad 0 \leqslant k, m, n \leqslant 2^N - 1,$$

где a_{nm} — элементы матрицы A_N (см. (3.44)). Теорема доказана. □

Глава 4. Области однолистности на классах голоморфных отображений круга в себя

4.1. Двусторонняя оценка областей однолистности классов голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками

4.1.1. Предварительные сведения и обозначения

Пусть $\mathscr{B}$ — совокупность голоморфных функций, отображающих единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ в себя. Изучение свойств отображения $f \in \mathscr{B}$ тесно связано с анализом его неподвижных точек. Отметим, что если $f \in \mathscr{B}$ и $f(z) \not\equiv z$, то в силу леммы Шварца—Пика (см. [10, гл. VIII, §1], [63, гл. 1, §1.2]) функция f может иметь внутри круга $\mathbb{D}$ не более одной неподвижной точки.

В общем случае функция $f \in \mathscr{B}$ может не иметь в единичном круге $\mathbb{D}$ неподвижных точек. Однако, классический результат, известный как теорема Данжуа—Вольфа ([87], [121], [122], [8, гл. VI, §43]), утверждает, что если $f \in \mathscr{B}$ отлична от дробно-линейного преобразования единичного круга на себя, то существует единственная точка d, $|d| \leqslant 1$, такая, что последовательность натуральных итераций $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, функции $f = f^1$ сходится к d локально равномерно в $\mathbb{D}$. При этом, если d является граничной точкой, то есть лежит на единичной окружности $\mathbb{T} = \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\big\}$, то в этой точке существуют угловые пределы

$$\angle\lim_{z\to d} f(z) = f(d)\,, \qquad \angle\lim_{z\to d} f'(z) = \angle\lim_{z\to d} \frac{f(z) - d}{z - d} = f'(d),$$

причём $f(d) = d$ и $0 < f'(d) \leqslant 1$.

Точка d называется *точкой Данжуа—Вольфа* функции f. Если $d \in \mathbb{D}$, то в силу леммы Шварца—Пика выполняется неравенство $|f'(d)| \leqslant 1$. Таким обра-

зом, точка Данжуа—Вольфа функции f является *притягивающей* ($|f'(d)| < 1$) или *нейтральной* ($|f'(d)| = 1$) неподвижной точкой.

Если функция $f \in \mathscr{B}$ с точкой Данжуа—Вольфа d, $|d| \leqslant 1$, имеет дополнительную неподвижную точку a, то она должна располагаться на единичной окружности $\mathbb{T}$ и её неподвижность понимается в смысле углового предела

$$\angle\lim_{z\to a} f(z) = a.$$

Согласно теореме Жюлиа—Каратеодори (см. [63, гл. 1, §1.4, теорема 1.5]) в граничной неподвижной точке a всегда существует (конечный или бесконечный) угловой предел

$$\angle\lim_{z\to a} \frac{f(z)-a}{z-a} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|a-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \cdot \frac{1-|z|^2}{|a-z|^2}. \tag{4.1}$$

Более того, если этот предел конечен, то он является положительным числом и $f'(z)$ имеет тот же угловой предел при $z \to a$. В этом случае предел (4.1) называется *угловой производной* функции f в граничной неподвижной точке $z = a$ и обозначается $f'(a)$. В частности, из (4.1) немедленно вытекает неравенство

$$\frac{|a-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \cdot \frac{1-|z|^2}{|a-z|^2} \leqslant f'(a) \qquad \forall z \in \mathbb{D}. \tag{4.2}$$

Неравенство (4.2) имеет простую геометрическую интерпретацию схожую, в определённом смысле, с геометрической интерпретацией неравенства Шварца. Под *орициклом* в точке $\varkappa$, $\varkappa \in \mathbb{T}$, с параметром $k > 0$ понимается круг

$$\mathbb{O}_k(\varkappa) = \left\{ z \in \mathbb{D} \colon \frac{|\varkappa - z|^2}{1-|z|^2} < k \right\} \tag{4.3}$$

радиуса $k/(k+1)$ с центром в точке $z_0 = \varkappa/(k+1)$, который касается единичного круга $\mathbb{D}$ в точке $z = \varkappa$. Неравенство (4.2) равносильно следующему утверждению: если $f \in \mathscr{B}$ имеет неподвижную точку $z = a$ с конечной угловой производной $f'(a) = \alpha$, то для всех $k > 0$ справедливо включение $f(\mathbb{O}_k(a)) \subset \mathbb{O}_{\alpha k}(a)$.

Пусть $\mathscr{H}$ — класс голоморфных функций g, отображающих правую полуплоскость $\mathbb{H} = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}\zeta > 0\}$ в себя. К. Каратеодори [80] и независимо от него Э. Ландау и Ж. Валирон (см. [8, гл. IV, §26], [100]) установили, что для каждой функции g из этого класса существует неотрицательный (конечный) угловой предел

$$\angle\lim_{\zeta\to\infty} \frac{g(\zeta)}{\zeta}. \tag{4.4}$$

При этом $g'(\zeta)$ имеет тот же угловой предел при $\zeta \to \infty$. Предел (4.4) называется *угловой производной* функции g *на бесконечности*.

Обозначим через $\mathscr{B}[d]$, $d \in \mathbb{D}$, совокупность функций f из $\mathscr{B}$, для которых d является внутренней неподвижной точкой, а через $\mathscr{B}\{a\}$, $a \in \mathbb{T}$, — совокупность функций f из $\mathscr{B}$, оставляющих неподвижной граничную точку $z = a$:

$$\mathscr{B}[d] = \big\{f \in \mathscr{B}\colon f(d) = d\big\}, \qquad \mathscr{B}\{a\} = \Big\{f \in \mathscr{B}\colon \angle\lim_{z\to a} f(z) = a\Big\}.$$

Далее без ограничения общности будем полагать $a = 1$.

Аналогично из класса $\mathscr{H}$ выделим подкласс $\mathscr{H}[m]$, $m \in \mathbb{H}$, функций с внутренней неподвижной точкой m и подкласс $\mathscr{H}\{\infty\}$ функций с бесконечно удалённой неподвижной точкой:

$$\mathscr{H}[m] = \big\{g \in \mathscr{H}\colon g(m) = m\big\}, \qquad \mathscr{H}\{\infty\} = \Big\{g \in \mathscr{H}\colon \angle\lim_{\zeta\to\infty} g(\zeta) = \infty\Big\}.$$

Классы $\mathscr{B}$ и $\mathscr{H}$ мы будем исследовать параллельно, пользуясь взаимно однозначным соответствием, задаваемым дробно-линейным отображением

$$z = L(\zeta) = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}. \tag{4.5}$$

Тогда, если $g \in \mathscr{H}\{\infty\}$, то функция $f(z) = L \circ g \circ L^{-1}(z)$ принадлежит классу $\mathscr{B}\{1\}$, при этом угловые производные функций f и g в случае, когда $f'(1) < \infty$ и, соответственно, $g'(\infty) > 0$, связаны следующим соотношением:

$$g'(\infty)f'(1) = 1. \tag{4.6}$$

Определим также классы с двумя неподвижными точками:

$$\mathscr{B}[d, 1] = \mathscr{B}[d] \cap \mathscr{B}\{1\}, \qquad \mathscr{H}[m, \infty] = \mathscr{H}[m] \cap \mathscr{H}\{\infty\}.$$

Заметим, что наличие внутренней неподвижной точки влечёт, в силу теоремы Жюлиа—Каратеодори, уточнение оценки угловой производной: если функция f принадлежит классу $\mathscr{B}[d, 1]$, то $f'(1) \geqslant 1$, причём равенство достигается только для $f(z) \equiv z$; значения же угловой производной $g'(\infty)$, $g \in \mathscr{H}[m, \infty]$, в силу соотношения (4.6) ограничены промежутком $(0, 1]$. Ясно также, что под действием отображения (4.5) класс $\mathscr{H}[m, \infty]$ переходит в класс $\mathscr{B}[L(m), 1]$.

4.1.2. Постановка задачи

Для произвольного $N > 1$ выделим в $\mathscr{B}[d]$ подкласс $\mathscr{B}_N[d]$, состоящий из функций, у которых модуль производной в точке $z = d$ отделён от нуля числом $1/N$:

$$\mathscr{B}_N[d] = \left\{ f \in \mathscr{B}[d] \colon |f'(d)| \geqslant \frac{1}{N} \right\}.$$

Переформулируем теорему Ландау (теорема 4.A) в терминах отображений единичного круга. Запишем положительную часть этой теоремы в другой нормировке, а вместо одной функции, устанавливающей точность радиуса однолистности, укажем целое семейство функций.

Теорема 4.A′. *Пусть $N > 1$, $f \in \mathscr{B}[0]$, причём $f'(0) = 1/N$. Тогда f однолистна в круге*

$$\mathscr{L}(N) = \big\{ z \in \mathbb{D} \colon |z| < R(N) \big\}, \quad \text{где} \quad R(N) = N - \sqrt{N^2 - 1}.$$

При этом для каждого $\varkappa \in \mathbb{T}$ функция

$$f_\varkappa(z) = z\,\frac{\varkappa - Nz}{N\varkappa - z}$$

принадлежит классу $\mathscr{B}[0]$, причём $f'_\varkappa(0) = 1/N$, и имеет нулевую производную в точке $z_\varkappa = \varkappa R(N)$.

Вторая часть теоремы показывает, что в каждой точке границы круга $\mathscr{L}(N)$ находится препятствие на пути дальнейшего расширения области однолистности — нуль производной некоторой функции рассматриваемого класса. Тем самым, не только круг большего радиуса, но и никакую другую область, содержащую круг $\mathscr{L}(N)$, в качестве области однолистности класса функций из $\mathscr{B}[0]$ с условием $f'(0) = 1/N$ взять нельзя. Данный класс, очевидно, может быть расширен до класса $\mathscr{B}_N[0]$, имеющего ту же область однолистности.

Следствие 4.1. *Пусть $N > 1$, $f \in \mathscr{B}_N[0]$. Тогда f однолистна в круге*

$$\mathscr{L}(N) = \big\{ z \in \mathbb{D} \colon |z| < R(N) \big\}, \quad \text{где} \quad R(N) = N - \sqrt{N^2 - 1}.$$

При этом для каждого $\varkappa \in \mathbb{T}$ функция

$$f_\varkappa(z) = z\,\frac{\varkappa - Nz}{N\varkappa - z}$$

принадлежит классу $\mathscr{B}_N[0]$ *и в точке* $z_\varkappa = \varkappa R(N)$ *имеет нулевую производную.*

Заметим, что при $N \to 1+0$ выполняется асимптотическая оценка

$$1 - R(N) = \sqrt{2}\sqrt{N-1} + O(N-1), \tag{4.7}$$

количественно характеризующая окрестность тождественного преобразования в классе $\mathscr{B}[0]$ с точки зрения однолистности.

В то же время нет никаких сомнений, что любая функция класса $\mathscr{B}_N[0]$ имеет область однолистности значительно шире, чем $\mathscr{L}(N)$. Таким образом, интересным представляется вопрос о выделении точных областей однолистности на более узких классах, чем $\mathscr{B}_N[0]$.

Для произвольных $\alpha > 1$ и $\beta < 1$ выделим в классах $\mathscr{B}\{1\}$ и $\mathscr{H}\{\infty\}$ подклассы $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ и $\mathscr{H}_\beta\{\infty\}$ соответственно, состоящие из функций, имеющих ограничение на значение угловой производной в неподвижной точке:

$$\mathscr{B}_\alpha\{1\} = \bigl\{f \in \mathscr{B}\{1\}\colon f'(1) \leqslant \alpha\bigr\}, \qquad \mathscr{H}_\beta\{\infty\} = \bigl\{g \in \mathscr{H}\{\infty\}\colon g'(\infty) \geqslant \beta\bigr\}.$$

Как будет следовать из теорем 4.6, 4.6′, доказательство которых приведено в пункте 4.1.7, классы $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ и $\mathscr{H}_\beta\{\infty\}$ слишком обширны с точки зрения выделения областей однолистности и нуждаются в дальнейшем сужении, состоящем, например, в фиксации местоположения точки Данжуа—Вольфа. Нас будет интересовать ситуация с наличием внутренней точки Данжуа—Вольфа.

Обозначим через $\mathscr{B}_\alpha[d,1]$ подкласс $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$, состоящий из функций, сохраняющих неподвижной точку $d \in \mathbb{D}$, а через $\mathscr{H}_\beta[m,\infty]$ — подкласс $\mathscr{H}_\beta\{\infty\}$ функций с неподвижной точкой $m \in \mathbb{H}$:

$$\mathscr{B}_\alpha[d,1] = \mathscr{B}_\alpha\{1\} \cap \mathscr{B}[d], \qquad \mathscr{H}_\beta[m,\infty] = \mathscr{H}_\beta\{\infty\} \cap \mathscr{H}[m].$$

Именно эти классы и представляют то сужение классов $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ и $\mathscr{H}_\beta\{\infty\}$, для которого можно ставить вопрос о выделении областей однолистности.

Как же устроены эти классы? В граничной неподвижной точке мы имеем ограничение на значение угловой производной и дополняем его наличием и локализацией внутренней неподвижной точки. При этом для внутренней неподвижной точки формально никаких ограничений на значение производной не накладывается.

Рассматривая класс $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha > 1$, В. В. Горяйнов [15] заметил, что при $\alpha \in (1,2)$ имеет место вложение класса $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ в класс $\mathscr{B}_{\alpha/(2-\alpha)}[0]$. Отсюда и из теоремы 4.A он вывел следующий результат.

Теорема 4.D (В. В. Горяйнов)**.** *Пусть $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,2)$. Тогда f однолистна в круге*

$$\mathscr{O}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon\ |z| < \frac{1-\sqrt{\alpha-1}}{1+\sqrt{\alpha-1}} \right\}. \tag{4.8}$$

При этом функция

$$f(z) = z\,\frac{\alpha z + (2-\alpha)}{\alpha + (2-\alpha)z} \tag{4.9}$$

принадлежит классу $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ и имеет нулевую производную в точке

$$z_\alpha = -\frac{1-\sqrt{\alpha-1}}{1+\sqrt{\alpha-1}}. \tag{4.10}$$

Таким образом, при каждом $\alpha \in (1,2)$ среди кругов с центром в нуле, в которых однолистны все функции класса $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$, круг $\mathscr{O}(\alpha)$ имеет максимальный радиус. Более того, в такой постановке рассматривать значения угловой производной бóльшие двух невозможно: функция $f(z) = z^2$ принадлежит классу $\mathscr{B}_2[0,1]$, но не является однолистной ни в какой окрестности нуля. Наконец, пересечением кругов $\mathscr{O}(\alpha)$ по всем $\alpha \in (1,2)$ является одноточечное множество $\{z = 0\}$.

В то же время ясно, что класс $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ существенно ýже, чем $\mathscr{B}_{\alpha/(2-\alpha)}[0]$. Точка z_α вида (4.10) при каждом α препятствует распространению области однолистности лишь в направлении одного луча. Более того, из теоремы 4.C следует, что функция (4.9) однолистна в области $\{z \in \mathbb{D}\colon\ \operatorname{Re} z > z_\alpha\}$. В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли указать на классе $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ область однолистности, более широкую, чем круг $\mathscr{O}(\alpha)$? Какова точная область однолистности для класса $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$?

В. В. Горяйнов [15] разработал метод, при помощи которого результат теоремы 4.D улучшен: найдены области однолистности, которые при всех $\alpha \in (1,2)$ содержат не только внутреннюю неподвижную точку $z = 0$, но и примыкают к граничной неподвижной точке $z = 1$. При этом пересечением областей однолистности по всем $\alpha \in (1,2)$ является уже полуинтервал действительной оси $[0,1)$.

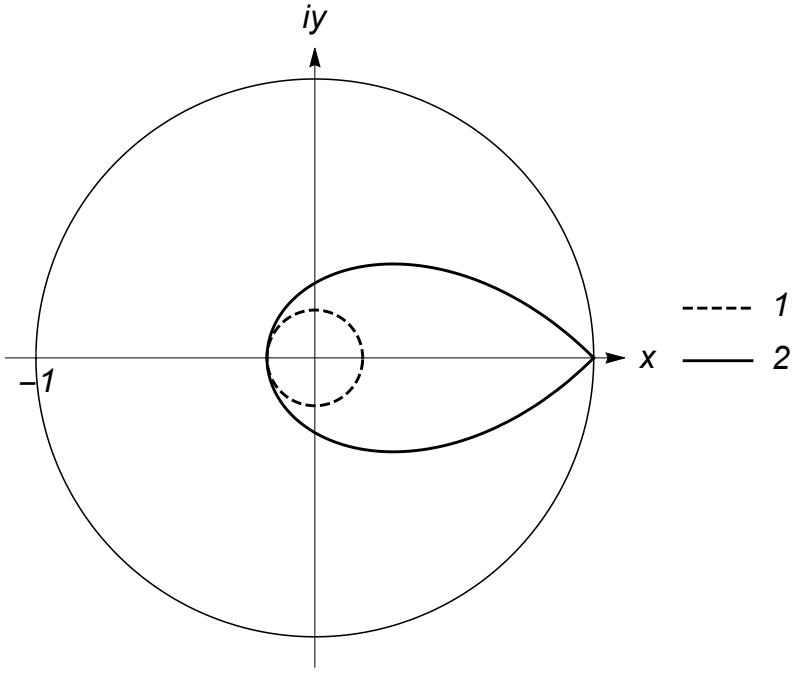


Рис. 4.1: Границы областей **1:** $\mathscr{O}(\alpha)$, **2:** $\mathscr{A}(\alpha)$; $\alpha = 1.5$

А именно, в [15] рассматривается следующий класс областей:

$$\mathscr{A}_K = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \frac{|1-z|}{1-|z|} < K \right\}, \quad K > 1.$$

Такие неравенства упоминаются, например, в монографии К. Каратеодори [81, гл. VI, §151] и задают области некасательного подхода к точке 1. На классе данных областей рассмотрены следующие экстремальные задачи:

первая — вычислить точную верхнюю грань $K(\alpha)$ тех K, для которых все функции из класса $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ однолистны в области $\mathscr{A}_K$;

вторая — найти точную верхнюю грань α^*, взятую по всем тем α, для которых $K(\alpha) > 1$ (то есть область $\mathscr{A}_{K(\alpha)}$ непуста).

В работе [15] обе экстремальные задачи решены точно. Установлено, что $K(\alpha) = 1/\sqrt{\alpha - 1}$, $\alpha^* = 2$.

Теорема 4.E (В. В. Горяйнов)**.** *Пусть $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,2)$. Тогда f однолистна в области*

$$\mathscr{A}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \frac{|1-z|}{1-|z|} < \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} \right\}. \tag{4.11}$$

При этом функция (4.9) *принадлежит классу $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ и имеет нулевую производную в точке* (4.10)*, расположенной на границе области $\mathscr{A}(\alpha)$.*

На рис. 4.1 изображены границы областей $\mathscr{O}(\alpha)$ и $\mathscr{A}(\alpha)$. Видно, что область $\mathscr{A}(\alpha)$ существенно шире круга $\mathscr{O}(\alpha)$, примыкает, в отличие от круга, к

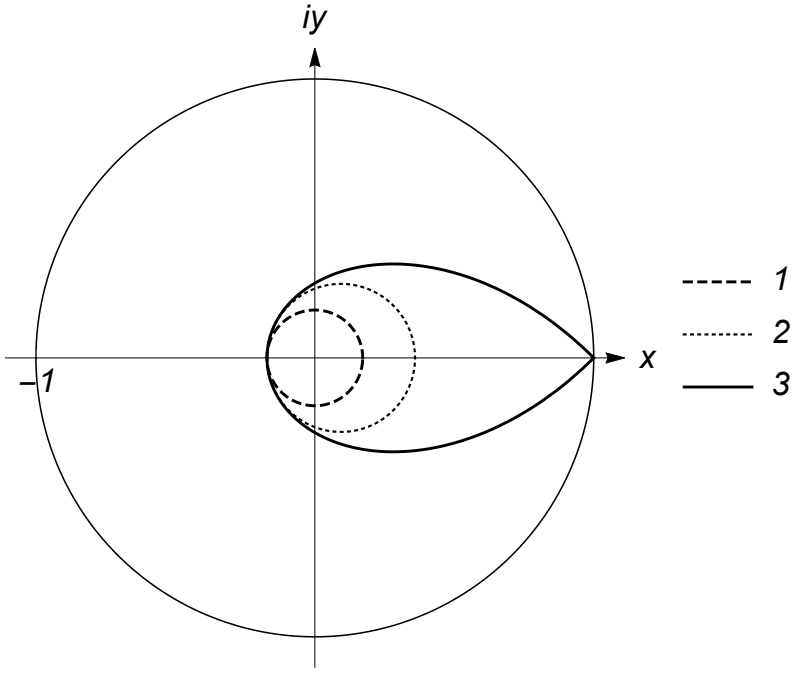


Рис. 4.2: Границы областей **1:** $\mathscr{O}(\alpha)$, **2:** $\mathscr{O}_1(\alpha)$, **3:** $\mathscr{A}(\alpha)$; $\alpha = 1.5$

граничной точке, причём $\bigcap_{1<\alpha<2} \mathscr{A}(\alpha) = [0, 1)$. На самом деле, область $\mathscr{A}(\alpha)$ шире круга $\mathscr{O}(\alpha)$ даже в окрестности их общей граничной точки z_α, определяемой формулой (4.10). Дело в том, что граница области $\mathscr{A}(\alpha)$ имеет меньшую кривизну в точке z_α. Более того, область $\mathscr{A}(\alpha)$ целиком содержит круг, на границе которого лежит точка z_α, большего по сравнению с кругом $\mathscr{O}(\alpha)$ радиуса (рис. 4.2).

Предложение 4.1. *Пусть $f \in \mathscr{B}_\alpha[0, 1]$, $\alpha \in (1, 2)$. Тогда f однолистна в круге*

$$\mathscr{O}_1(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \left| z - \frac{(2-\alpha)\sqrt{\alpha-1}}{2+(4-\alpha)\sqrt{\alpha-1}} \right| < \frac{2(2-\alpha)}{2+(4-\alpha)\sqrt{\alpha-1}} \right\}.$$

Доказательство этого утверждения будет приведено в пункте 4.1.6. Отметим, что для радиусов кругов $\mathscr{O}(\alpha)$ и $\mathscr{O}_1(\alpha)$ при $\alpha \to 1 + 0$ верна асимптотика

$$1 - r(\alpha) = 2\sqrt{\alpha - 1} + O(\alpha - 1), \tag{4.12}$$

$$1 - r_1(\alpha) = \frac{3}{2}\sqrt{\alpha - 1} + O(\alpha - 1). \tag{4.13}$$

Соотношения (4.12), (4.13), подобно (4.7), количественно характеризуют окрестность тождественного преобразования в классе $\mathscr{B}[0, 1]$ с точки зрения однолистности. Видно, что асимптотика (4.13) несколько лучше, чем (4.12). На самом деле, как будет показано далее, асимптотика (4.13) уже неулучшаема.

Для класса $\mathscr{H}_\beta[1, \infty]$ аналог теоремы 4.E формулируется следующим образом.

Теорема 4.E′. *Пусть* $g \in \mathscr{H}_\beta[1,\infty]$, $1/2 < \beta < 1$. *Тогда* g *однолистна в области*

$$\mathscr{J}(\beta) = \left\{ \zeta \in \mathbb{H} \colon \frac{\beta}{1-\beta}(\operatorname{Re}\zeta)^2 - \frac{\beta}{2\beta-1}(\operatorname{Im}\zeta)^2 > 1 \right\}. \tag{4.14}$$

При этом функция $g(\zeta) = \beta\zeta + (1-\beta)/\zeta$ *принадлежит классу* $\mathscr{H}_\beta[1,\infty]$ *и имеет нулевую производную в точке* $\zeta_\beta = \sqrt{(1-\beta)/\beta}$, *расположенную на границе области* $\mathscr{J}(\beta)$.

Другими словами, для каждого $\beta \in (1/2, 1)$ среди всех областей однолистности функций класса $\mathscr{H}_\beta[1,\infty]$, границей которых является ветвь гиперболы с фокусами в точках $\zeta = \pm 1$, область $\mathscr{J}(\beta)$ максимально возможная. Пересечением областей $\mathscr{J}(\beta)$ по всем $\beta \in (1/2, 1)$ является луч $[1,\infty)$. Граница для значений производной $\beta^* = 1/2$ также оптимальна, так как функция Жуковского $g(\zeta) = (\zeta + 1/\zeta)/2$ принадлежит классу $\mathscr{H}_{1/2}[1,\infty]$, но не однолистна ни в какой окрестности неподвижной точки $\zeta = 1$.

Подводя итог, скажем, что в отличие от теоремы 4.A, результат которой окончателен, области в теоремах 4.D, 4.E и 4.E′ точны лишь на классе областей конкретного вида. В случае теоремы 4.D это круги, а в случае теорем 4.E′ и 4.E — части полуплоскости, ограниченные ветвями гипербол с фокусами в точках $\zeta = \pm 1$ и их образами при отображении (4.5) соответственно. Причина кроется в том, что препятствие на пути распространения области однолистности как в теореме 4.D, так и в теоремах 4.E и 4.E′ расположено исключительно на одном луче. Иначе говоря, никаких препятствий на пути расширения областей в направлении остальных лучей нет.

На классах $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,2)$, и $\mathscr{H}_\beta[1,\infty]$, $\beta \in (1/2,1)$, применяя метод, разработанный в [15], мы получим области однолистности, в определённом смысле близкие к неулучшаемым, а также распространим полученные результаты на более широкие классы функций.

Рассмотрим на классах $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,2)$, и $\mathscr{H}_\beta[1,\infty]$, $\beta \in (1/2,1)$, следующие экстремальные задачи:

первая — найти объединение $\mathscr{U}(\alpha)$ всех областей $\mathscr{U}$, содержащих интервал $[0,1)$, в которых любая функция из $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,2)$, однолистна; найти

объединение $\mathscr{S}(\beta)$ всех областей $\mathscr{S}$, содержащих луч $[1,\infty)$, в которых любая функция из $\mathscr{H}_\beta[1,\infty]$, $\beta\in(1/2,1)$, однолистна;

вторая — найти пересечение $\mathscr{P}$ областей $\mathscr{U}(\alpha)$ по всем $\alpha\in(1,2)$; найти пересечение $\mathscr{Q}$ областей $\mathscr{S}(\beta)$ по всем $\beta\in(1/2,1)$.

4.1.3. Формулировка основных результатов

Точное решение сформулированных выше экстремальных задач будет приведено в §4.2. В данном параграфе получены важные промежуточные результаты. Найдены близкие к неулучшаемым двусторонние оценки для областей $\mathscr{U}(\alpha)$, $\mathscr{S}(\beta)$, $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$. А именно, при каждом $\alpha\in(1,2)$ построены области $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$ и $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$ со свойством $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)\subset\mathscr{U}(\alpha)\subset\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$, зазор между которыми достаточно мал. Найдены области $\underline{\mathscr{P}}$ и $\overline{\mathscr{P}}$ со свойством $\underline{\mathscr{P}}\subset\mathscr{P}\subset\overline{\mathscr{P}}$. Аналогичные оценки получены для $\mathscr{S}(\beta)$ и $\mathscr{Q}$.

Имеет место следующая оценка снизу области однолистности как в случае круга, так и в случае полуплоскости.

Теорема 4.1. *Пусть $f\in\mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $1<\alpha<4$. Тогда f однолистна в области*

$$\underline{\mathscr{U}}(\alpha)=\left\{z\in\mathbb{D}\colon 6\,\frac{1+|z|^2}{|1-z|^2}<\alpha-1+\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}\,\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z|^4}\right\}. \tag{4.15}$$

Теорема 4.1′. *Пусть $g\in\mathscr{H}_\beta[1,\infty]$, $1/4<\beta<1$. Тогда g однолистна в области*

$$\underline{\mathscr{S}}(\beta)=\left\{\zeta\in\mathbb{H}\colon \frac{\beta}{1-\beta}(\operatorname{Re}\zeta)^2-\frac{3\beta}{4\beta-1}(\operatorname{Im}\zeta)^2>1\right\}. \tag{4.16}$$

Заметим, что граница области $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$ так же, как и границы круга $\mathscr{O}(\alpha)$ и области $\mathscr{A}(\alpha)$ (см. (4.8) и (4.11)), содержит точку z_α, определяемую формулой (4.10). Последнее, конечно, не означает невозможность дальнейшего увеличения области однолистности. Тем не менее, имеет место следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть $\alpha>1$. Для каждой точки z_0 границы области*

$$\overline{\mathscr{U}}(\alpha)=\left\{z\in\mathbb{D}\colon \frac{|1-z|^2\,(1+|z|^2)}{(1-|z|^2)^2}<\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\right\} \tag{4.17}$$

найдётся функция $f_{z_0}\in\mathscr{B}_\alpha[0,1]$, производная которой в точке z_0 обращается в нуль.

Из теоремы 4.2 следует, что каждая точка кривой, ограничивающей область (4.17), является препятствием на пути распространения однолистности на классе $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$. Таким образом, на всём классе $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ взять более широкую область однолистности, чем $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$, невозможно.

Для класса $\mathscr{H}_\beta[1,\infty]$ справедлив аналогичный результат.

Теорема 4.2′. *Пусть $\beta \in (0,1)$. Для каждой точки ζ_0 границы области*

$$\overline{\mathscr{S}}(\beta) = \left\{ \zeta \in \mathbb{H}\colon \frac{\beta}{1-\beta}(\operatorname{Re}\zeta)^2 - (\operatorname{Im}\zeta)^2 > 1 \right\} \tag{4.18}$$

найдётся функция $g_{\zeta_0} \in \mathscr{H}_\beta[1,\infty]$, производная которой в точке ζ_0 обращается в нуль.

Найдены области $\underline{\mathscr{P}}$ и $\overline{\mathscr{P}}$ со свойством $\underline{\mathscr{P}} \subset \mathscr{P} \subset \overline{\mathscr{P}}$, где $\mathscr{P}$ — пересечение по всем $\alpha \in (1,2)$ областей однолистности классов $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$.

Теорема 4.3. *Пусть $\mathscr{P}$ — пересечение по всем $\alpha \in (1,2)$ областей однолистности классов $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$. Справедлива двусторонняя оценка $\underline{\mathscr{P}} \subset \mathscr{P} \subset \overline{\mathscr{P}}$, где*

$$\underline{\mathscr{P}} = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon 6\,\frac{1+|z|^2}{|1-z|^2} < 1 + 5\,\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z|^4} \right\},$$
$$\overline{\mathscr{P}} = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \frac{|1-z|^2\,(1+|z|^2)}{(1-|z|^2)^2} < 1 \right\}.$$

Найдены области $\underline{\mathscr{Q}}$ и $\overline{\mathscr{Q}}$ со свойством $\underline{\mathscr{Q}} \subset \mathscr{Q} \subset \overline{\mathscr{Q}}$, где $\mathscr{Q}$ — пересечение по всем $\beta \in (1/2,1)$ областей однолистности классов $\mathscr{H}_\beta[1,\infty]$.

Теорема 4.3′. *Пусть $\mathscr{Q}$ — пересечение по всем $\beta \in (1/2,1)$ областей однолистности классов $\mathscr{H}_\beta[1,\infty]$. Справедлива двусторонняя оценка $\underline{\mathscr{Q}} \subset \mathscr{Q} \subset \overline{\mathscr{Q}}$, где*

$$\underline{\mathscr{Q}} = \left\{ \zeta \in \mathbb{H}\colon (\operatorname{Re}\zeta)^2 - \frac{3}{2}(\operatorname{Im}\zeta)^2 > 1 \right\},$$
$$\overline{\mathscr{Q}} = \left\{ \zeta \in \mathbb{H}\colon (\operatorname{Re}\zeta)^2 - (\operatorname{Im}\zeta)^2 > 1 \right\}.$$

Установлена неразрешимость задачи поиска единой области однолистности на классе $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ и даже на его подклассе $\mathscr{B}'_\alpha\{1\}$, состоящем из функций, имеющих притягивающую неподвижную точку внутри круга $\mathbb{D}$.

Теорема 4.6. *Для любого $\alpha > 1$ на классе $\mathscr{B}'_\alpha\{1\}$ нет непустых областей однолистности.*

Показано, что аналогичный результат справедлив для класса $\mathscr{H}_\beta\{\infty\}$ и даже для его подкласса $\mathscr{H}'_\beta\{\infty\}$, состоящего из функций, имеющих дополнительную неподвижную точку, расположенную внутри полуплоскости $\mathbb{H}$.

Теорема 4.6′. *Для любого β, $0 < \beta < 1$, на классе $\mathscr{H}'_\beta\{\infty\}$ нет непустых областей однолистности.*

4.1.4. Вспомогательные утверждения

На протяжении данного пункта нам понадобятся свойства некоторого многочлена от двух действительных переменных десятого порядка. Этот многочлен возникнет в процессе оценок действительных частей производных функций класса $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$. По некоторым соображениям нам будет удобно сначала ввести этот многочлен, установить его свойства, а затем объяснить его происхождение и применить его свойства для доказательства основного результата.

Рассмотрим при каждом $M > 1/\sqrt{3}$ в полуплоскости $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\}$ следующий многочлен:

$$\begin{aligned}
D_M(x,y) &= M^2(M^2+1)(8M^2-1)^2x^{10} \\
&+ M^2(128M^6+48M^4-108M^2-1)x^8y^2 \\
&+ 2M^2(32M^6-24M^4-93M^2-1)x^6y^4 \\
&- 2M^2(24M^4+54M^2-1)x^4y^6 - M^2(15M^2-1)x^2y^8 - M^2y^{10} \\
&- (M^2+1)(8M^2-1)(16M^4+12M^2-1)x^8 \\
&+ 4(M^2+1)(32M^6+8M^4+19M^2+1)x^6y^2 \\
&- 6(6M^2+1)(4M^4+7M^2+1)x^4y^4 - 4(15M^4+4M^2-1)x^2y^6 \\
&- (5M^2+1)y^8 + 2(M^2+1)(32M^6+72M^4+11M^2-2)x^6 \\
&- 2(72M^6+114M^4+49M^2-2)x^4y^2 - 2(3M^2+2)(15M^2-1)x^2y^4 \\
&- 2(5M^2+2)y^6 - 6(M^2+1)(8M^4+2M^2+1)x^4 \\
&- 4(15M^4+14M^2+1)x^2y^2 - 2(5M^2+3)y^4 \\
&- (M^2+1)(15M^2+4)x^2 - (5M^2+4)y^2 - (M^2+1). \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что $D_M(1/M, 0) = 0$. Нас будет интересовать, как устроено множество решений уравнения $D_M(x, y) = 0$ при $x > 1/M$. Ввиду чётности многочлена $D_M(x, y)$ относительно переменной y достаточно рассмотреть случай $y > 0$. Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4.1. *Пусть $M > 1/\sqrt{3}$. Тогда для каждого $x > 1/M$ существует единственное $y(x) > 0$, удовлетворяющее условию $D_M(x, y(x)) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $D_M(x, y)$ как многочлен, зависящий от переменной y:

$$D_M(x, y) = a_5(x)y^{10} + a_4(x)y^8 + a_3(x)y^6 + a_2(x)y^4 + a_1(x)y^2 + a_0(x), \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
a_5(x) &= -M^2,\\
a_4(x) &= -M^2(15M^2 - 1)x^2 - 5M^2 - 1,\\
a_3(x) &= -2M^2(24M^4 + 54M^2 - 1)x^4 - 4(15M^4 + 4M^2 - 1)x^2 - 2(5M^2 + 2),\\
a_2(x) &= 2M^2(32M^6 - 24M^4 - 93M^2 - 1)x^6\\
&\quad - 6(6M^2 + 1)(4M^4 + 7M^2 + 1)x^4\\
&\quad - 2(3M^2 + 2)(15M^2 - 1)x^2 - 2(5M^2 + 3),\\
a_1(x) &= M^2(128M^6 + 48M^4 - 108M^2 - 1)x^8\\
&\quad + 4(M^2 + 1)(32M^6 + 8M^4 + 19M^2 + 1)x^6\\
&\quad - 2(72M^6 + 114M^4 + 49M^2 - 2)x^4\\
&\quad - 4(15M^4 + 14M^2 + 1)x^2 - 5M^2 - 4,\\
a_0(x) &= (1 + M^2)(M^2x^2 - 1)(-1 - 2x^2 - 8M^2x^2 - x^4 + 8M^2x^4)^2.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Здесь и далее мы опускаем подробности, связанные с перегруппировкой слагаемых, разложением на множители и прочими элементарными преобразованиями. Согласно теореме Декарта (см., например, [47, гл. 1, §4]) число положительных корней уравнения не превосходит количества перемен знака его коэффициентов и имеет с ним одну чётность. Вычислим количество перемен знака коэффициентов многочлена (4.20) при каждом $x > 1/M$. Очевидно, что при любых M и x, удовлетворяющих условиям леммы, коэффициенты $a_5(x)$, $a_4(x)$ и $a_3(x)$ отрицательны. Свободный член $a_0(x)$ неотрицателен и обращается в нуль

лишь в одной точке

$$x(M) = \sqrt{\frac{4M^2 + 1 + 4M\sqrt{M^2+1}}{8M^2 - 1}}. \tag{4.22}$$

Рассмотрим сначала случай $x \neq x(M)$. В этом случае $a_0(x) > 0$. Если $M \in (1/\sqrt{3}, 1]$, то вследствие оценки

$$32M^6 - 24M^4 - 93M^2 - 1 < 32 - \frac{24}{9} - \frac{93}{3} - 1 = -\frac{24}{9} < 0$$

коэффициент $a_2(x)$ отрицателен при всех x. Тем самым, независимо от знака $a_1(x)$ последовательность коэффициентов имеет одну перемену знака. Если же $M > 1$, при всех x выполняется неравенство

$$\begin{aligned} a_1(x) - a_2(x) &= M^2(128M^6 + 48M^4 - 108M^2 - 1)x^8 \\ &\quad + 2(32M^8 + 104M^6 + 147M^4 + 41M^2 + 2)x^6 \\ &\quad + 2(24M^4 - 10M^2 + 5)x^4 + 2(15M^4 - M^2 - 4)x^2 + 5M^2 + 2 > 0. \end{aligned}$$

Иначе говоря, при $M > 1$ для любого x верно $a_2(x) < a_1(x)$. Следовательно, снова имеем ровно одну перемену знака.

Наконец, рассмотрим случай, когда $x = x(M)$ и, значит, $a_0(x) = 0$. Подставляя (4.22) в (4.21), после преобразований получим

$$a_1(x(M)) = \frac{256M^2\sqrt{(M^2+1)^3}(M + \sqrt{M^2+1})^4(2M - \sqrt{M^2+1})^3}{(3M - \sqrt{M^2+1})^4}.$$

При $M > 1/\sqrt{3}$ данное выражение положительно. В результате независимо от знака коэффициента $a_2(x(M))$ и в этом случае последовательность коэффициентов имеет одну перемену знака.

Таким образом, в силу теоремы Декарта многочлен (4.20) имеет ровно один положительный корень. Лемма доказана. □

Лемма 4.2. *Пусть $M > 1/\sqrt{3}$. Тогда функция $D_M(x, y)$ отрицательна в каждой точке правой ветви гиперболы $M^2x^2 - y^2 = 1$ за исключением её вершины.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку правой ветви гиперболы $M^2x^2 - y^2 = 1$, не совпадающую с вершиной. Тогда $x = \sqrt{y^2+1}/M$, $y \neq 0$.

Подставим данное выражение в (4.19) и после преобразований получим

$$\begin{aligned}-M^8 D_M\big(\sqrt{y^2+1}/M, y\big) =&(27M^8+72M^6+62M^4+16M^2-1)y^{10}\\ &+(108M^8+216M^6+184M^4+56M^2-4)y^8\\ &+(162M^8+216M^6+164M^4+72M^2-6)y^6\\ &+(108M^8+72M^6+24M^4+40M^2-4)y^4\\ &+(3M^2-1)^3(M^2+1)y^2. \qquad (4.23)\end{aligned}$$

Правая часть (4.23) представляет собой многочлен относительно y^2. Ввиду того, что $y \neq 0$, достаточно показать положительность всех его коэффициентов. Рассматривая коэффициенты как многочлены относительно переменной M, убеждаемся, что эти функции возрастают на промежутке $M \geqslant 1/\sqrt{3}$ и принимают в точке $M = 1/\sqrt{3}$ неотрицательные значения. Тем самым, на интервале $M > 1/\sqrt{3}$ они положительны. Лемма доказана. □

Лемма 4.3. *Пусть $M > 1/\sqrt{3}$. Тогда функция $D_M(x, y)$ положительна в каждой точке правой ветви гиперболы*

$$M^2x^2 - \frac{3M^2y^2}{3M^2-1} = 1,$$

за исключением её вершины.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку правой ветви гиперболы $M^2x^2 - 3M^2y^2/(3M^2-1) = 1$, не совпадающую с вершиной. Тогда

$$x = \sqrt{\frac{3y^2}{3M^2-1} + \frac{1}{M^2}}, \quad y \neq 0.$$

Подставим данное выражение в (4.19) и после преобразований получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}M^4(3M^2-1)^5 D_M&\left(\sqrt{\frac{3y^2}{3M^2-1}+\frac{1}{M^2}}, y\right)\\ &= (243M^6+468M^4+300M^2+64)\,M^6y^{10}\\ &+(243M^6+339M^4+196M^2+48)(3M^2-1)\,M^4y^8\\ &+(81M^6+70M^4+17M^2+12)(3M^2-1)^2\,M^2y^6\\ &+(3M^2-1)^5(M^2+1)y^4.\end{aligned}$$

При $M > 1/\sqrt{3}$ все коэффициенты этого многочлена положительны. Лемма доказана. □

Рассмотрим теперь область

$$\mathscr{D}_M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > \frac{1}{M},\, D_M(x,y) > 0\right\} \tag{4.24}$$

и сравним её с областями

$$\begin{aligned} \mathscr{K}_M &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\, M^2x^2 - y^2 > 1\}, \\ \mathscr{C}_M &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\, M^2x^2 - \frac{3M^2y^2}{3M^2-1} > 1\right\}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Лемма 4.4. *При каждом $M > 1/\sqrt{3}$ справедлива двусторонняя оценка*

$$\mathscr{C}_M \subset \mathscr{D}_M \cup \{(x(M),0)\} \subset \mathscr{K}_M. \tag{4.26}$$

Доказательство. Ясно, что рассматриваемые области расположены правее прямой $x = 1/M$. Фиксируем произвольное $x_0 > 1/M$. Согласно лемме 4.1 на прямой $x = x_0$ найдётся ровно одна граничная точка (x_0, y_0) области $\mathscr{D}_M$ с положительной ординатой. В силу лемм 4.2 и 4.3 функция $D_M(x_0, y)$ на границе области $\mathscr{C}_M$ принимает положительные значения, а на границе области $\mathscr{K}_M$ — отрицательные. Следовательно, точка (x_0, y_0) лежит между гиперболами, ограничивающими области $\mathscr{C}_M$ и $\mathscr{K}_M$. Всё то же относится и к точкам с отрицательными ординатами ввиду симметрии рассматриваемых областей. Таким образом, имеет место включение

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_M \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \neq 0\} &\subset \mathscr{D}_M \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \neq 0\} \\ &\subset \mathscr{K}_M \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \neq 0\}. \end{aligned}$$

Разумеется, отсюда следует правая оценка в (4.26). Включение $\mathscr{C}_M \subset \mathscr{D}_M$, конечно, не выполняется, так как область $\mathscr{D}_M$ не односвязна. Как мы уже отмечали в процессе доказательства леммы 4.1 на луче действительной оси есть ровно одна граничная точка области $\mathscr{D}_M$ (см. (4.22)). После её присоединения область становится односвязной. Тем самым, левая оценка в (4.26) также справедлива. Лемма доказана. □

Лемма 4.5. *Пусть $M > 1/\sqrt{3}$. Тогда кривая $M^2(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ лежит вне области $\mathscr{D}_M$.*

Доказательство. Заметим, что лемниската $M^2(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ и гипербола $M^2x^2 - y^2 = 1$ имеют одну общую точку $(1/M, 0)$ и лежат по разные стороны от прямой $x = 1/M$. Следовательно, лемниската лежит вне области $\mathscr{K}_M$. С учётом леммы 4.4 утверждение доказано. □

Установленные в леммах 4.1—4.5 свойства функции $D_M(x,y)$ и свойства связанной с ней области $\mathscr{D}_M$ позволяют получить близкую к точной оценку сверху следующей функции:

$$\Phi(x,y,t) = \frac{(1+t^2)\left(x^2t^2 - (yt+1)^2\right)}{\left(x^2t^2 + (yt+1)^2\right)^2}. \tag{4.27}$$

Лемма 4.6. *Пусть $M > 1/\sqrt{3}$. Тогда для всех $x > 1/M$ и $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$\Phi(x,0,t) < M^2. \tag{4.28}$$

Доказательство. Неравество (4.28) равносильно следующему:

$$M^2\left(x^2t^2+1\right)^2 - (1+t^2)\left(x^2t^2-1\right) > 0.$$

Полагая $u = M^2x^2 - 1$, преобразуем многочлен в левой части этого неравенства:

$$M^2\left(x^2t^2+1\right)^2 - (1+t^2)\left(x^2t^2-1\right) = M^{-2}\left(\left(ut^2 + M^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + ut^4 + (3M^2-1)t^2 + 2M^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Последнее выражение положительно, так как по условию $u > 0$, $M^2 > 1/3$. Лемма доказана. □

Лемма 4.7. *Пусть $M > 1/\sqrt{3}$. Тогда в каждой точке (x,y) области $\mathscr{D}_M$ при любом $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$\Phi(x,y,t) < M^2. \tag{4.29}$$

Доказательство. В условиях леммы неравенство (4.29) может быть записано в следующей эквивалентной форме:

$$\left(M^2(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2\right)t^4 + 2y\left(2M^2(x^2+y^2)+1\right)t^3 + \left(2M^2(x^2+3y^2) - x^2 + y^2 + 1\right)t^2 + 2y\left(2M^2+1\right)t + M^2 + 1 > 0. \tag{4.30}$$

Согласно лемме 4.5 коэффициент перед t^4 не обращается в нуль всюду в области $\mathscr{D}_M$. Иначе говоря, выражение, стоящее в левой части неравенства (4.30), в каждой точке (x, y) области $\mathscr{D}_M$ представляет собой многочлен четвёртой степени относительно t. Поскольку свободный член этого многочлена положителен, то для доказательства неравенства (4.30) достаточно показать, что он не обращается в нуль ни при каком $t \in \mathbb{R}$. Ввиду того, что старший коэффициент многочлена не обращается в нуль, достаточно доказать отсутствие действительных корней у приведённого многочлена

$$P_{x,y}(t) = t^4 + \frac{2y\left(2M^2\left(x^2+y^2\right)+1\right)}{\left(M^2(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2\right)}\,t^3 + \frac{\left(2M^2(x^2+3y^2) - x^2 + y^2 + 1\right)}{\left(M^2(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2\right)}\,t^2 + \frac{2y\left(2M^2+1\right)}{\left(M^2(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2\right)}\,t + \frac{M^2+1}{\left(M^2(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2\right)}. \tag{4.31}$$

В силу леммы 4.6 для всех $x > 1/M$ многочлен $P_{x,0}(t)$ положителен при любом $t \in \mathbb{R}$. Другими словами, в точках области $\mathscr{D}_M$, имеющих нулевую ординату, коэффициенты многочлена (4.31) таковы, что он не имеет действительных корней. В то же время коэффициенты многочлена $P_{x,y}(t)$ непрерывны в области $\mathscr{D}_M$. Но тогда наличие в области $\mathscr{D}_M$ хотя бы одной точки, в которой многочлен (4.31) имеет действительный корень, предполагает и наличие некоторой точки $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}_M$, в которой многочлен $P_{x_0,y_0}(t)$ имеет кратный корень. Следовательно, дискриминант многочлена (4.31) должен обратиться в нуль хотя бы в одной точке области $\mathscr{D}_M$.

Как известно (см., например, [47, гл. 1, §3]), дискриминант многочлена четвёртой степени $P(t) = t^4 + c_3t^3 + c_2t^2 + c_1t + c_0$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} D(c_3, c_2, c_1, c_0) = {} & 256c_0^3 - 192c_0^2c_1c_3 - 128c_0^2c_2^2 + 144c_0^2c_2c_3^2 - 27c_0^2c_3^4 \\ & + 144c_0c_1^2c_2 - 6c_0c_1^2c_3^2 - 80c_0c_1c_2^2c_3 + 18c_0c_1c_2c_3^3 + 16c_0c_2^4 \\ & - 4c_0c_2^3c_3^2 - 27c_1^4 + 18c_1^3c_2c_3 - 4c_1^3c_3^3 - 4c_1^2c_2^3 + c_1^2c_2^2c_3^2. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Подставляя в (4.32) коэффициенты многочлена (4.31), после упрощений получим

$$D\big(c_3(x,y), c_2(x,y), c_1(x,y), c_0(x,y)\big) = \frac{16x^2D_M(x,y)}{\left(M^2(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2\right)^6},$$

где $D_M(x, y)$ задаётся равенством (4.19). С другой стороны, по определению области $\mathscr{D}_M$ (см. (4.24)) функция $D_M(x, y)$ положительна в точках этой области.

Таким образом, многочлен $P_{x,y}(t)$ не имеет действительных корней какова бы ни была точка $(x,y) \in \mathscr{D}_M$. Неравенство (4.29) доказано. □

Лемма 4.8. *Пусть $M > 1/\sqrt{3}$. Тогда в каждой точке (x,y), лежащей в области $\mathscr{D}_M \cup \{(x(M),0)\}$, выполняется неравенство* $\sup_{t\in\mathbb{R}} \Phi(x,y,t) < M^2$.

Доказательство. Справедливость неравенства $\Phi(x,y,t) < M^2$ в произвольной точке $(x,y) \in \mathscr{D}_M \cup \{(x(M),0)\}$ и для всех $t \in \mathbb{R}$ вытекает непосредственно из лемм 4.6 и 4.7. Если же $t \to \infty$, то $\Phi(x,y,t) \to 1/x^2 < M^2$, так как рассматриваемая область лежит правее прямой $x = 1/M$. Лемма доказана. □

4.1.5. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 4.1. Воспользуемся методом, который был разработан в [15]. Рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$. Тогда функция $h(z) = L^{-1} \circ f(z)$, где L задаётся формулой (4.5), голоморфна в единичном круге $\mathbb{D}$ и принимает значения в правой полуплоскости $\mathbb{H}$. Применив теорему Рисса—Герглотца (см. [109, гл. 2, §2.1, теорема 2.4]), В. В. Горяйнов получил (см. [15, предложение 2]) для функции h следующее представление:

$$h(z) = \frac{1}{\alpha}\frac{1+z}{1-z} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\int_{\mathbb{T}} \frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z}\, d\mu(\varkappa),$$

где μ — вероятностная мера на единичной окружности $\mathbb{T}$. Тогда $g(\zeta) = h \circ L(\zeta)$ отображает правую полуплоскость $\mathbb{H}$ в себя и имеет вид

$$g(\zeta) = \frac{1}{\alpha}\,\zeta + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\int_{\mathbb{T}} \frac{(1+\varkappa)\zeta + 1 - \varkappa}{(1-\varkappa)\zeta + 1 + \varkappa}\, d\mu(\varkappa).$$

При этом

$$g'(\zeta) = \frac{1}{\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\int_{\mathbb{T}} \frac{4\varkappa}{\big((1-\varkappa)\zeta + 1 + \varkappa\big)^2}\, d\mu(\varkappa).$$

Оценим снизу действительную часть производной функции g:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\big(g'(\zeta)\big) &= \frac{1}{\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\operatorname{Re}\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{4\varkappa}{\big((1-\varkappa)\zeta + 1 + \varkappa\big)^2}\, d\mu(\varkappa)\right) \\
&= \frac{1}{\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re}\left(\frac{4\varkappa}{\big((1-\varkappa)\zeta + 1 + \varkappa\big)^2}\right) d\mu(\varkappa) \\
&\geqslant \frac{1}{\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\min_{\varkappa\in\mathbb{T}} \operatorname{Re}\left(\frac{4\varkappa}{\big((1-\varkappa)\zeta + 1 + \varkappa\big)^2}\right). \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

Неравенство (4.33) в [15] получил В. В. Горяйнов. Заменив затем действительную часть модулем, он доказал теорему 4.E. Мы же воспользуемся именно оценкой (4.33). Для удобства введём следующие обозначения:

$$\operatorname{Re}\zeta = x, \quad \operatorname{Im}\zeta = y, \qquad \varkappa = \frac{1 - t^2 + 2it}{1 + t^2}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.34}$$

Подставляя (4.34) в неравенство (4.33), приходим к оценке

$$\operatorname{Re}\bigl(g'(\zeta)\bigr) \geqslant \frac{1}{\alpha} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \sup_{t \in \mathbb{R}} \Phi(x, y, t), \tag{4.35}$$

где функция $\Phi(x, y, t)$ определена формулой (4.27). Принимая во внимание лемму 4.8, для любого $M > 1/\sqrt{3}$ в каждой точке ζ, принадлежащей области $\mathscr{D}_M \cup \{(x(M), 0)\}$ (см. (4.24)), выводим из (4.35) оценку

$$\operatorname{Re}\bigl(g'(\zeta)\bigr) > \frac{1}{\alpha} - M^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Наконец, полагая $M = 1/\sqrt{\alpha - 1}$ и замечая, что при этом для $\alpha \in (1, 4)$ выполняется условие $M > 1/\sqrt{3}$, доказываем положительность действительной части производной функции g на области $\mathscr{D}_M \cup \{(x(M), 0)\}$. Согласно лемме 4.4 область $\mathscr{D}_M \cup \{(x(M), 0)\}$ содержит $\mathscr{C}_M$ (см. (4.25)). Следовательно, на области $\mathscr{C}_M$ действительная часть производной функции g также положительна. Но область $\mathscr{C}_M$, очевидно, выпукла. В этих условиях применима теорема Носиро—Варшавского (см. [89, гл. 2, §2.6, теорема 2.16]), в силу которой функция g однолистна в области $\mathscr{C}_M$, где $M = 1/\sqrt{\alpha - 1}$, то есть в области

$$\mathscr{C}_\alpha = \left\{ \zeta \in \mathbb{H} \colon \frac{(\operatorname{Re}\zeta)^2}{\alpha - 1} - \frac{3}{4 - \alpha} (\operatorname{Im}\zeta)^2 > 1 \right\}.$$

Но тогда функция $f = L \circ g \circ L^{-1}$ однолистна в области $L(\mathscr{C}_\alpha)$, которая совпадает с областью (4.15). Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 4.1′. Переносим результат теоремы 4.1 на полуплоскость с помощью отображения (4.5). □

Доказательство теоремы 4.2. Для произвольного $\theta \in (-\pi, \pi)$ рассмотрим функцию

$$f_\theta(z) = z\, \frac{1 - (\alpha - 1)e^{i\theta} + \alpha e^{i\theta} z}{\alpha - (\alpha - 1 - e^{i\theta})\, z}.$$

Легко проверить, что f_θ принадлежит при каждом $\theta \in (-\pi, \pi)$ классу $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ и имеет нулевую производную в точке

$$z_\alpha(\theta) = \frac{\alpha - 1 - e^{-i\theta}}{\alpha + 2\sqrt{\alpha - 1}\cos(\theta/2)}. \tag{4.36}$$

Нетрудно убедиться, что при $\theta \in (-\pi, \pi)$ формула (4.36) задаёт кривую, ограничивающую область (4.17). Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 4.2′. Для каждого $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ рассмотрим функцию

$$g_\theta(z) = \frac{\bigl(\beta\zeta^2 + 1 - \beta\bigr)\operatorname{tg}\theta + i\zeta}{\zeta\operatorname{tg}\theta + i}.$$

Она принадлежит классу $\mathscr{H}_\beta[1, \infty]$ и имеет нулевую производную в точке

$$\zeta_\beta(\theta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}\operatorname{cosec}\theta - i\operatorname{ctg}\theta,$$

которая пробегает гиперболу, ограничивающую область (4.18). Теорема доказана. □

4.1.6. Оценки размера областей однолистности

В этом пункте сравним полученные результаты с теоремами 4.E и 4.E′. Поскольку в работе [15] при $\alpha \in (1, 2)$ на качественном уровне задача полностью исследована, нас будут интересовать количественные вопросы. Сколь сильно отличаются новые области однолистности от построенных в [15]? Велик ли зазор между верхними и нижними оценками? Ответим на эти вопросы, сравнив области $\mathscr{A}(\alpha)$, $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$ и $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$ (см. (4.11), (4.15) и (4.17)).

Наибольший интерес представляет размер области однолистности в окрестности критической точки z_α (см. (4.10)), а также в окрестности граничной неподвижной точки. Обе эти точки принадлежат границам сравниваемых областей.

В окрестности точки z_α границы данных областей ортогональны действительной оси, но отличаются кривизной. Более того, каждая из этих областей содержит круг, касающийся границы области в точке z_α, радиус которого совпадает с радиусом кривизны границы области в этой точке. Для доказательства этих утверждений нам потребуется следующая лемма.

Лемма 4.9. *Для любых $a > 0$, $b > 0$ круг*

$$\left\{\zeta \in \mathbb{H}\colon \left|\zeta - \frac{a^2+b^2}{a}\right| < \frac{b^2}{a}\right\} \tag{4.37}$$

содержится в области

$$\left\{\zeta \in \mathbb{H}\colon \frac{(\operatorname{Re}\zeta)^2}{a^2} - \frac{(\operatorname{Im}\zeta)^2}{b^2} > 1\right\}. \tag{4.38}$$

Доказательство. Обозначим $\operatorname{Re}\zeta = x$, $\operatorname{Im}\zeta = y$. В каждой точке гиперболы, ограничивающей область (4.38), имеем $y^2 = b^2(x^2/a^2 - 1)$. Следовательно, верна оценка

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{a^2+b^2}{a}\right)^2 + y^2 - \frac{b^4}{a^2} &= \left(x - \frac{a^2+b^2}{a}\right)^2 - b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) - \frac{b^4}{a^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2}(x-a)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Таким образом, каждая точка границы области (4.38) лежит вне круга (4.37). Лемма доказана. □

Применяя лемму 4.9 для $a = \sqrt{\alpha - 1}$ и для b, равного $\sqrt{2-\alpha}$, $\sqrt{(4-\alpha)/3}$ и 1 соответственно, при помощи отображения (4.5) выводим предложения 4.1 (сформулированное в пункте 4.1.2), 4.2 и 4.3.

Предложение 4.2. *Пусть $\alpha \in (1, 4)$. Тогда круг*

$$\mathscr{O}_2(\alpha) = \left\{z \in \mathbb{D}\colon \left|z - \frac{(2+\alpha)\sqrt{\alpha-1}}{4\alpha + 2 + (8+\alpha)\sqrt{\alpha-1}}\right| < \frac{2(4-\alpha)}{4\alpha + 2 + (8+\alpha)\sqrt{\alpha-1}}\right\}$$

содержится в области $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$.

Предложение 4.3. *Пусть $\alpha > 1$. Тогда круг*

$$\mathscr{O}_3(\alpha) = \left\{z \in \mathbb{D}\colon \left|z - \frac{\alpha\sqrt{\alpha-1}}{2\alpha + (\alpha+2)\sqrt{\alpha-1}}\right| < \frac{2}{2\alpha + (\alpha+2)\sqrt{\alpha-1}}\right\}$$

содержится в области $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$.

Заметим, что при $\alpha \to 1+0$ для радиусов кругов $\mathscr{O}_1(\alpha)$, $\mathscr{O}_2(\alpha)$, $\mathscr{O}_3(\alpha)$ верна асимптотика

$$\begin{aligned}1 - r_1(\alpha) &= \frac{3}{2}\sqrt{\alpha-1} - \frac{5}{4}(\alpha-1) + \frac{11}{8}\sqrt{(\alpha-1)^3} + O\left((\alpha-1)^2\right), \\ 1 - r_2(\alpha) &= \frac{3}{2}\sqrt{\alpha-1} - \frac{5}{4}(\alpha-1) + \frac{25}{24}\sqrt{(\alpha-1)^3} + O\left((\alpha-1)^2\right), \\ 1 - r_3(\alpha) &= \frac{3}{2}\sqrt{\alpha-1} - \frac{5}{4}(\alpha-1) + \frac{7}{8}\sqrt{(\alpha-1)^3} + O\left((\alpha-1)^2\right).\end{aligned}$$

Как видим, радиусы кругов однолистности при α, близких к 1, практически неотличимы. Приведённые асимптотические равенства дают неулучшаемое количественное описание окрестности тождественного преобразования в классе $\mathscr{B}[0,1]$ с точки зрения однолистности. Эти оценки интересно сравнить с описанием окрестности тождественного преобразования класса $\mathscr{B}[0,1]$ в топологии локально равномерной сходимости.

Предложение 4.4 (В. В. Горяйнов, [14]). *Пусть $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha > 1$. Тогда для всех $z \in \mathbb{D}$ выполняется неравенство*

$$|f(z) - z| \leqslant \frac{4|z|}{1-|z|}\,(\alpha - 1).$$

Итак, при α, близких к 1, область $\mathscr{A}(\alpha)$ в окрестности точки z_α близка к неулучшаемой. Если же α приближается к другому критическому значению — к 2, ситуация противоположная. Действительно, $r_1(2) = 0$, в то время как $r_2(2) = 1/5$, а $r_3(2) = 1/4$. Тем самым, при α, близких к 2, области $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$ и $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$ значительно шире области $\mathscr{A}(\alpha)$ даже в окрестности точки z_α.

Схожая картина имеет место и в окрестности граничной неподвижной точки. В силу конформности отображения (4.5) области $\mathscr{A}(\alpha)$, $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$, $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$ образуют в окрестности 1 углы $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$ и $\varphi_3(\alpha)$, равные углам между асимптотами гипербол, ограничивающих области $\mathscr{J}(\beta)$, $\underline{\mathscr{S}}(\beta)$, $\overline{\mathscr{S}}(\beta)$ (см. (4.14), (4.16) и (4.18)). При $\alpha \to 1+0$ для углов между асимптотами гипербол справедлива асимптотика

$$\begin{aligned}
\pi - \varphi_1(\alpha) &= 2\sqrt{\alpha-1} + \frac{1}{3}\sqrt{(\alpha-1)^3} + O\left((\alpha-1)^2\right),\\
\pi - \varphi_2(\alpha) &= 2\sqrt{\alpha-1} - \frac{1}{3}\sqrt{(\alpha-1)^3} + O\left((\alpha-1)^2\right),\\
\pi - \varphi_3(\alpha) &= 2\sqrt{\alpha-1} - \frac{2}{3}\sqrt{(\alpha-1)^3} + O\left((\alpha-1)^2\right).
\end{aligned}$$

Снова видим, что при α, близких к 1, скорость приближения углов к развёрнутому практически одинакова. Если же α близко к 2, то $\varphi_1(2) = 0$, в то время как $\varphi_2(2) = 2\operatorname{arctg}\sqrt{2/3} > 3\pi/7$, а $\varphi_3(2) = \pi/2$.

Итак, можем заключить, что при приближении значения угловой производной в граничной неподвижной точке к критическому значению $\alpha = 2$ в окрестности точек z_α и 1 области $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$ и $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$ значительно шире $\mathscr{A}(\alpha)$. Более

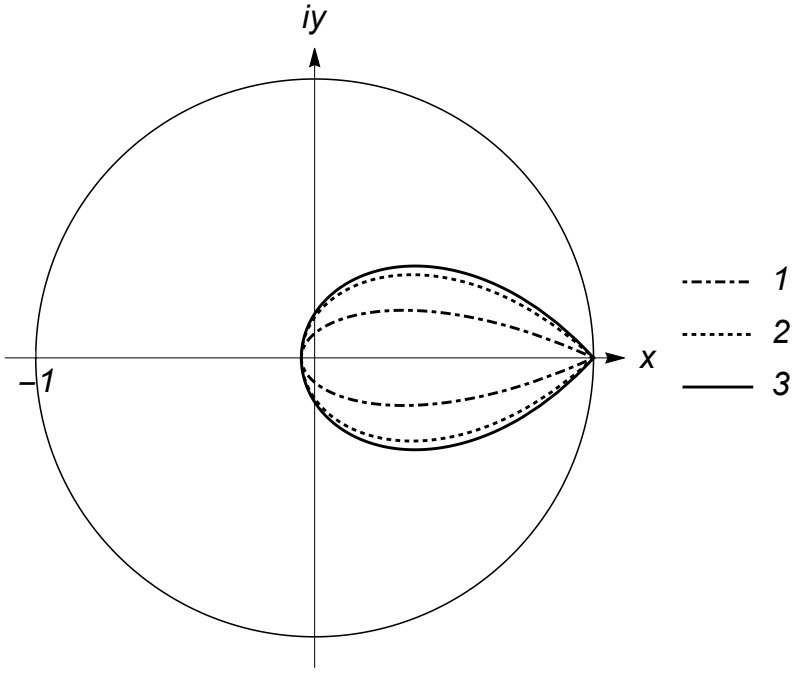


Рис. 4.3: Границы областей **1:** $\mathscr{A}(\alpha)$, **2:** $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$, **3:** $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$; $\alpha = 1.8$

того, из доказанных результатов следует, что пересечение по всем $\alpha \in (1,2)$ областей однолистности классов $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ содержит не только интервал $[0,1)$, но даже целую область. В качестве областей, дающих оценку для максимальной области, в которой однолистны все функции классов $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,2)$, можно взять области $\underline{\mathscr{U}}(2)$ и $\overline{\mathscr{U}}(2)$ (см. теоремы 4.1 и 4.2).

На самом деле, при каждом $\alpha \in (1,2)$ зазор между областями $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$ и $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$ намного меньше, чем между $\mathscr{A}(\alpha)$ и $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$, что видно из рис. 4.3.

Итак, мы обсудили количественные оценки областей однолистности классов $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ при $\alpha \in (1,2)$. Напомним, что существование некоторой единой области однолистности для всех функций класса следует из оценки модуля производной $|f'(0)| \geqslant (2-\alpha)/\alpha$ и теоремы 4.A. Все последующие результаты связаны лишь с вопросом о размере этой области. Если же $\alpha \geqslant 2$, то никакой оценки снизу на модуль производной быть не может, что не позволяет воспользоваться теоремой 4.A. Области из теоремы 4.E при $\alpha = 2$ также вырождаются. Более того, как уже упоминалось, функция $f(z) = z^2$ принадлежит классу $\mathscr{B}_2[0,1]$, но не однолистна ни в какой окрестности нуля.

Возникает вопрос: можно ли что-нибудь сказать об области однолистности классов $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ при $\alpha \geqslant 2$? Влияет ли простой факт наличия внутренней неподвижной точки без оценки значения в ней модуля производной на суще-

ствование области однолистности на классе? Теорема 4.1 показывает, что, вообще говоря, влияет. Правда в этом случае, как показывает теорема 4.2, область однолистности не будет содержать саму неподвижную точку.

Отказавшись от требования принадлежности точки $z = 0$ области однолистности, можно ставить вопрос о распространении полученных результатов на классы $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \geqslant 2$, а также следующую экстремальную задачу: найти точную верхнюю грань α^* тех значений α, при которых все функции из класса $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ однолистны в некоторой области, примыкающей к точке $z = 1$.

Из теоремы 4.1 следует, что $\alpha^* \geqslant 4$. Результаты данного исследования позволяют предположить, что $\alpha^* = +\infty$ и что при каждом α область однолистности содержит пересечение окрестности точки $z = 1$ с сектором с вершиной в этой точке, раствор которого обратно пропорционален значению угловой производной. Доказать, однако, этот факт мы пока не можем. В то же время оценка сверху (теорема 4.2) установлена при всех $\alpha > 1$.

4.1.7. Случай произвольной внутренней точки

Перенесём результаты теорем 4.1 и 4.2 на случай произвольной неподвижной точки $d \in \mathbb{D}$. Для этого рассмотрим дробно-линейное преобразование

$$w = T(z) = \frac{1-\overline{d}}{1-d}\,\frac{z-d}{1-\overline{d}z}. \tag{4.39}$$

Оно отображает единичный круг $\mathbb{D}$ на себя и удовлетворяет условиям $T(d) = 0$, $T(1) = 1$. Тогда если функция $f \in \mathscr{B}[0,1]$, то композиция $\widetilde{f}(z) = T^{-1} \circ f \circ T(z)$ принадлежит классу $\mathscr{B}[d,1]$, причём $\widetilde{f}'(1) = f'(1)$. Иначе говоря, функция T взаимно однозначно отображает класс $\mathscr{B}_\alpha[d,1]$ на класс $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$. Применяя отображение T к областям $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$ и $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$ (см. (4.15), (4.17)), получаем следующие результаты.

Теорема 4.4 (О. С. Кудрявцева)**.** *Пусть $f \in \mathscr{B}_\alpha[d,1]$, $1 < \alpha < 4$. Тогда f однолистна в области*

$$\underline{\mathscr{U}}(\alpha,d) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon 6\,\frac{|1-\overline{d}z|^2 + |z-d|^2}{|1-d|^2\,|1-z|^2} < \frac{(\alpha-1)(1-|d|^2)^2}{|1-d|^4} + \frac{2\alpha+1}{\alpha-1}\,\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z|^4} \right\}.$$

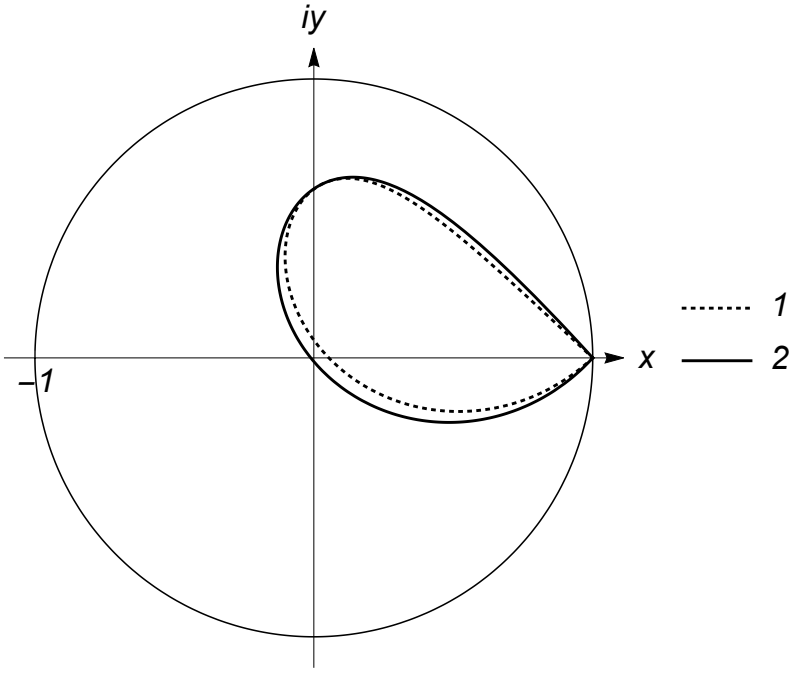


Рис. 4.4: Границы областей **1:** $\underline{\mathscr{U}}(\alpha, d)$, **2:** $\overline{\mathscr{U}}(\alpha, d)$; $\alpha = 1.8$, $d = 0.05 + 0.6i$

Теорема 4.5 (О. С. Кудрявцева)**.** *Пусть* $\alpha > 1$. *Для каждой точки* z_0 *границы области*

$$\overline{\mathscr{U}}(\alpha, d) = \left\{ z \in \mathbb{D} \colon \frac{|1-d|^2\,|1-z|^2\left(|1-\overline{d}z|^2 + |z-d|^2\right)}{\left(1-|z|^2\right)^2} < \frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \right\} \quad (4.40)$$

найдётся функция $f_{z_0} \in \mathscr{B}_\alpha[d, 1]$, *производная которой в точке* z_0 *обращается в нуль.*

Замечание. Нетрудно убедиться, что границей области (4.40) является кривая $z_d(\theta)$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, определяемая следующим равенством:

$$z_d(\theta) = \frac{(\alpha-1)\left(1-|d|^2\right)^2 - \left(2d\cos\theta - |d|^2 e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^2}{(\alpha-1)(1-|d|^2)^2 + 2\sqrt{\alpha-1}|1-d|^2(1-|d|^2)\cos\theta + |2d\cos\theta - |d|^2 e^{i\theta} - e^{-i\theta}|^2}.$$

На рис. 4.4 видно, как устроены области $\underline{\mathscr{U}}(\alpha, d)$ и $\overline{\mathscr{U}}(\alpha, d)$, а также размер зазора между ними. Точкой касания областей является $T(z_\alpha)$, где α определяется формулой (4.10). Отметим, что локализация внутренней неподвижной точки влияет на размер области однолистности, но не влияет на раствор угла в граничной неподвижной точке. Раствор угла обеих областей зависит только от значения угловой производной.

Аналогично с помощью дробно-линейного преобразования

$$S(\zeta) = \zeta\,\mathrm{Re}\,m + i\,\mathrm{Im}\,m, \quad (4.41)$$

отображающего правую полуплоскость $\mathbb{H}$ на себя и удовлетворяющего условиям $S(1) = m$, $S(\infty) = \infty$, обобщим результаты теорем 4.1′ и 4.2′ на случай произвольной внутренней неподвижной точки $m \in \mathbb{H}$.

Теорема 4.4′. *Пусть $g \in \mathscr{H}_\beta[m, \infty]$, $1/4 < \beta < 1$. Тогда g однолистна в области*

$$\underline{\mathscr{L}}(\beta, m) = \left\{ \zeta \in \mathbb{H} \colon \frac{\beta}{1-\beta} \frac{(\operatorname{Re}\zeta)^2}{(\operatorname{Re} m)^2} - \frac{3\beta}{4\beta - 1} \frac{\left(\operatorname{Im}(\zeta - m)\right)^2}{(\operatorname{Re} m)^2} > 1 \right\}.$$

Теорема 4.5′. *Пусть $\beta \in (0, 1)$. Для каждой точки ζ_0 границы области*

$$\overline{\mathscr{S}}(\beta, m) = \left\{ \zeta \in \mathbb{H} \colon \frac{\beta}{1-\beta} \frac{(\operatorname{Re}\zeta)^2}{(\operatorname{Re} m)^2} - \frac{\left(\operatorname{Im}(\zeta - m)\right)^2}{(\operatorname{Re} m)^2} > 1 \right\}$$

найдётся функция $g_{\zeta_0} \in \mathscr{H}_\beta[m, \infty]$, производная которой в точке ζ_0 обращается в нуль.

В заключение пункта при помощи полученных результатов установим, что задача нахождения единой области однолистности неразрешима не только на классе $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$, $\alpha > 1$, но даже на его подклассе $\mathscr{B}'_\alpha\{1\}$, состоящем из функций, имеющих притягивающую неподвижную точку внутри круга $\mathbb{D}$.

Доказательство теоремы 4.6. Поскольку $\mathscr{B}'_\alpha\{1\} = \bigcup_{d \in \mathbb{D}} \mathscr{B}_\alpha[d, 1]$, то область однолистности класса $\mathscr{B}'_\alpha\{1\}$ должна быть областью однолистности каждого из классов $\mathscr{B}_\alpha[d, 1]$, $d \in \mathbb{D}$. Но тогда в силу теоремы 4.5 область однолистности класса $\mathscr{B}'_\alpha\{1\}$ должна для каждого $d \in \mathbb{D}$ содержаться в области $\overline{\mathscr{U}}(\alpha, d)$.

С другой стороны, ввиду приведённого выше замечания для кривой $z_d(\theta)$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, ограничивающей область $\overline{\mathscr{U}}(\alpha, d)$, имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned}
&\left|1 - z_d(\theta)\right| = \\
&\frac{2\sqrt{\alpha-1}\cos\theta\,|1-d|^2\left|1 - |d|^2 + \sqrt{\alpha-1}\left(e^{-i\theta} + |d|^2 e^{i\theta} - 2d\cos\theta\right)\right|}{(\alpha-1)\left(1-|d|^2\right)^2 + 2\sqrt{\alpha-1}\,|1-d|^2\left(1-|d|^2\right)\cos\theta + \left|2d\cos\theta - |d|^2 e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right|^2} \\
&< 2\,\frac{|1-d|^2}{(1-|d|^2)^2}\Big(\big((\alpha-1) + \sqrt{\alpha-1}\big)\left(1-|d|^2\right) + (\alpha-1)|1-q|\Big).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\angle \lim_{d\to 1} z_d(\theta) = 1$ равномерно по $\theta \in (-\pi, \pi)$. Таким образом, $\bigcap_{d\in\mathbb{D}} \overline{\mathscr{U}}(\alpha, d) = \varnothing$. Теорема доказана. □

Аналогичный результат справедлив для класса $\mathscr{H}_\beta\{\infty\}$ и даже для его подкласса $\mathscr{H}'_\beta\{\infty\}$, состоящего из функций, имеющих дополнительную неподвижную точку, расположенную внутри полуплоскости $\mathbb{H}$.

Доказательство теоремы 4.6′. Поскольку $\mathscr{H}'_\beta\{1\} = \bigcup_{m\in\mathbb{H}} \mathscr{H}_\beta[m,1]$, то область однолистности класса $\mathscr{H}'_\beta\{1\}$ должна быть областью однолистности каждого из классов $\mathscr{H}_\beta[m,1]$, $m\in\mathbb{H}$. Ввиду теоремы 4.5′ заключаем, что область однолистности класса $\mathscr{H}'_\beta\{1\}$ для каждого $m\in\mathbb{H}$ содержится в области $\overline{\mathscr{S}}(\beta,m)$.

В то же время, граница области $\overline{\mathscr{S}}(\beta,m)$ — правая ветвь гиперболы с вершиной в точке $\sqrt{(1-\beta)/\beta}\operatorname{Re} m + i\operatorname{Im} m$. Пересечение по всем $m\in\mathbb{H}$ областей, ограниченных такими гиперболами, пусто. Теорема доказана. □

4.2. Точная область однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками

4.2.1. Формулировка основного результата

В этом параграфе результаты §4.1 усилены. При каждом $\alpha\in(1,4]$ найдена точная область однолистности на классе $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$.

Теорема 4.7. *Пусть $\alpha\in(1,4]$. Если $f\in\mathscr{B}_\alpha[0,1]$, тогда f однолистна в области*

$$\mathscr{D}(\alpha)=\left\{z\in\mathbb{D}\colon \frac{\bigl|1-2z+|z|^2\bigr|}{1-|z|^2}<\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\right\}. \tag{4.42}$$

Какова бы ни была область $\mathscr{Y}$, $\mathscr{D}(\alpha)\subsetneq\mathscr{Y}\subset\mathbb{D}$, найдётся функция f из класса $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$, не однолистная в области $\mathscr{Y}$.

Замечание. Область $\mathscr{D}(\alpha)$ совпадает с областью $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$ (см. (4.17)), при этом формула (4.42) имеет более удобный компактный вид.

Конечно, наиболее интересен случай, когда $\alpha\in(1,2)$ и класс $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ вложен в класс Ландау $\mathscr{B}_{\alpha/(2-\alpha)}[0]$. В этом случае теорема 4.7 позволяет усилить результат теоремы Ландау (теорема 4.A) и указать значительно более широкие и при этом точные области однолистности для соответствующего подкласса.

С помощью отображения (4.5) результат теоремы 4.7 можно перенести на класс $\mathscr{H}_\beta[1,\infty]$, точная область однолистности которого ограничена гиперболой.

Теорема 4.7′. *Пусть $\beta \in [1/4, 1)$. Если $g \in \mathscr{H}_\beta[1,\infty]$, то g однолистна в области*

$$\mathscr{R}(\beta) = \left\{ \zeta \in \mathbb{H}\colon \frac{\beta}{1-\beta}(\operatorname{Re}\zeta)^2 - (\operatorname{Im}\zeta)^2 > 1 \right\}.$$

Какова бы ни была область $\mathscr{Z}$, $\mathscr{R}(\beta) \subsetneq \mathscr{Z} \subset \mathbb{H}$, найдётся функция g из класса $\mathscr{H}_\beta[1,\infty]$, не однолистная в области $\mathscr{Z}$.

4.2.2. Инволюция круга и её свойства

В данном пункте рассматривается отображение λ, определяемое следующей формулой:

$$\lambda(z) = -z\,\frac{1-\overline{z}}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.43}$$

Отображение λ, очевидно, не является конформным. В то же время, оно обладает рядом замечательных свойств, которые будут нами использованы при доказательстве основного результата.

Лемма 4.10. *Для всех $z \in \mathbb{D}$ справедливо равенство $\bigl|\lambda(z)\bigr| = |z|$.*

Доказательство. При каждом $z \in \mathbb{D}$ имеет место равенство

$$\bigl|\lambda(z)\bigr| = \left|-z\,\frac{1-\overline{z}}{1-z}\right| = |z|\frac{|1-\overline{z}|}{|1-z|} = |z|.$$

Лемма доказана. □

Поскольку отображение λ сохраняет модуль, то оно отображает единичный круг $\mathbb{D}$ в себя. На самом деле, $\lambda(z)$ взаимно однозначно отображает круг $\mathbb{D}$ на себя, что вытекает из следующего утверждения.

Лемма 4.11. *Для всех $z \in \mathbb{D}$ справедливо равенство $\lambda^2(z) = \lambda \circ \lambda(z) = z$.*

Доказательство. Проверим непосредственными вычислениями справедливость утверждения. Для каждого $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$\lambda^2(z) = -\lambda(z)\frac{1-\overline{\lambda(z)}}{1-\lambda(z)} = z\frac{1-\overline{z}}{1-z}\cdot\frac{1+\overline{z}\frac{1-z}{1-\overline{z}}}{1+z\frac{1-\overline{z}}{1-z}} = z\frac{1-\overline{z}}{1-z}\cdot\frac{(1-|z|^2)(1-z)}{(1-|z|^2)(1-\overline{z})} = z.$$

Лемма доказана. □

Таким образом, отображение λ является инволюцией и, значит, обладает следующим свойством.

Лемма 4.12. *Отображение λ взаимно однозначно отображает $\mathbb{D}$ на себя, причём если $w = \lambda(z)$, то $z = \lambda^{-1}(w) = \lambda(w)$.*

Введём в рассмотрение следующие области, расположенные внутри единичного круга $\mathbb{D}$. Для каждого $k > 0$ обозначим через $\mathscr{M}_k$ часть круга $\mathbb{D}$, лежащую правее *неевклидова сегмента*, то есть дуги окружности, ортогональной единичной, с центром в точке $z_0 = (k^2+1)/(k^2-1)$ и радиусом $2k/(k^2-1)$ при $k \neq 1$ либо мнимого диаметра при $k = 1$:

$$\mathscr{M}_k = \left\{ z \in \mathbb{D} \colon \left| \frac{1+z}{1-z} \right| < k \right\}. \tag{4.44}$$

Через $\mathscr{D}_k$ обозначим область, ограниченную жордановой кривой, проходящей через точку $z = 1$, лежащей внутри круга $\overline{\mathbb{D}}$, и гладкой всюду за исключением точки $z = 1$, в которой кривая имеет излом, угол которого равен $2 \operatorname{arctg} k$:

$$\mathscr{D}_k = \left\{ z \in \mathbb{D} \colon \frac{\left|1 - 2z + |z|^2\right|}{1 - |z|^2} < k \right\}. \tag{4.45}$$

Биективность и непрерывность отображения λ вместе с леммой 4.12 позволяют заключить, что λ осуществляет гомеоморфное (конечно, не конформное) отображение областей, содержащихся в круге $\mathbb{D}$. Наиболее интересны для нас отображения областей $\mathbb{O}_k(1)$, $\mathscr{M}_k$ и $\mathscr{D}_k$ (см. (4.3), (4.44) и (4.45)).

В частности, λ отображает орицикл на внешность орицикла. Для краткости орицикл $\mathbb{O}_k(1)$ будем обозначать $\mathbb{O}_k$. Имеет место следующий факт.

Лемма 4.13. *Для произвольного $k > 0$ имеют место равенства*

$$\lambda(\partial\mathbb{O}_k) = \partial\mathbb{O}_{1/k}, \qquad \lambda(\mathbb{O}_k) = \mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{O}}_{1/k}.$$

Доказательство. Проверим сначала соответствие границ. Докажем сперва включение $\lambda(\partial\mathbb{O}_k) \subset \partial\mathbb{O}_{1/k}$. Пусть $z \in \partial\mathbb{O}_k$. Принимая во внимание лемму 4.10 и равенство

$$\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} = k,$$

верное в силу (4.3), получаем

$$\frac{\left|1-\lambda(z)\right|^2}{1-\left|\lambda(z)\right|^2}=\frac{\left|1+z\frac{1-\overline{z}}{1-z}\right|^2}{1-|z|^2}=\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z|^2(1-|z|^2)}=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}=\frac{1}{k}.$$

Ввиду (4.3) отсюда следует, что $\lambda(z)\in\partial\mathbb{O}_{1/k}$. Включение $\lambda(\partial\mathbb{O}_k)\supset\partial\mathbb{O}_{1/k}$ выполнено в силу леммы 4.12. Первая часть леммы доказана.

Проверим теперь равенство областей. Снова начнём с доказательства включения $\lambda(\mathbb{O}_k)\subset\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{O}}_{1/k}$. Пусть $z\in\mathbb{O}_k$. Тогда в силу (4.3) выполняется неравенство

$$\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}<k.$$

С учётом предыдущих выкладок имеем

$$\frac{\left|1-\lambda(z)\right|^2}{1-\left|\lambda(z)\right|^2}=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}>\frac{1}{k}.$$

Опять же вследствие (4.3) получаем $\lambda(z)\notin\overline{\mathbb{O}}_{1/k}$. Включение $\lambda(\mathbb{O}_k)\supset\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{O}}_{1/k}$ доказывается аналогично. Лемма полностью доказана. □

Покажем, что под действием отображения λ области (4.44) и (4.45) переходят друг в друга.

Лемма 4.14. *Для произвольного $k>0$ имеют место равенства*

$$\lambda(\mathscr{D}_k)=\mathscr{M}_k,\qquad\lambda(\mathscr{M}_k)=\mathscr{D}_k.$$

Доказательство. В силу леммы 4.12 достаточно проверить, что $\lambda(\mathscr{D}_k)\subset\mathscr{M}_k$ и $\lambda(\mathscr{M}_k)\subset\mathscr{D}_k$. Для доказательства первого включения рассмотрим произвольную точку $z\in\mathscr{D}_k$, для которой ввиду (4.45) выполняется неравенство

$$\frac{\left|1-2z+|z|^2\right|}{1-|z|^2}<k.$$

Поскольку имеет место оценка

$$\left|\frac{1+\lambda(z)}{1-\lambda(z)}\right|=\frac{\left|1-z\frac{1-\overline{z}}{1-z}\right|}{\left|1+z\frac{1-\overline{z}}{1-z}\right|}=\frac{\left|1-2z+|z|^2\right|}{1-|z|^2}<k,$$

в силу (4.44) получаем $\lambda(z)\in\mathscr{M}_k$. Для доказательства второго включения рассмотрим произвольную точку $z\in\mathscr{M}_k$. Ввиду (4.44) справедливо неравенство

$$\left|\frac{1+z}{1-z}\right|<k.$$

Учитывая лемму 4.10, получаем

$$\frac{\left|1-2\lambda(z)+\left|\lambda(z)\right|^2\right|}{1-\left|\lambda(z)\right|^2}=\frac{\left|1+2z\frac{1-\overline{z}}{1-z}+|z|^2\right|}{1-|z|^2}=\frac{\left(1-|z|^2\right)|1+z|}{\left(1-|z|^2\right)|1-z|}=\left|\frac{1+z}{1-z}\right|<k.$$

Значит, $\lambda(z)\in\mathscr{D}_k$ в силу (4.45). Лемма доказана. □

4.2.3. Вспомогательные утверждения

Докажем вспомогательные утверждения, на которых будет базироваться основное неравенство, необходимое для доказательства теоремы 4.7.

Лемма 4.15. *Пусть заданы действительное число α, $\alpha>1$, положительные числа p и r, удовлетворяющие условиям $p<1/\sqrt{\alpha-1}$ и $r<1/\sqrt{\alpha-1}$. Тогда выполняется неравенство*

$$\sqrt{\left(1+p^2\right)\left(1+r^2\right)}>\alpha pr. \tag{4.46}$$

Доказательство. Вследствие условий $p<1/\sqrt{\alpha-1}$ и $r<1/\sqrt{\alpha-1}$ имеют место оценки

$$1>\left(\alpha-1\right)^2p^2r^2,\qquad p^2+r^2\geqslant 2pr>2\left(\alpha-1\right)p^2r^2,$$

используя которые заключаем справедливость неравенства

$$\begin{aligned}\left(1+p^2\right)\left(1+r^2\right)&=1+p^2+r^2+p^2r^2\\&>\left(\alpha-1\right)^2p^2r^2+2\left(\alpha-1\right)p^2r^2+p^2r^2=\alpha^2p^2r^2.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 4.16. *Пусть заданы действительное число α, $1<\alpha\leqslant 4$, действительные числа p и r, удовлетворяющие условиям $1/\sqrt{3}\leqslant p<1/\sqrt{\alpha-1}$ и $0<r<1/\sqrt{\alpha-1}$, а также угол $\varphi\in(-\pi,\pi)$. Тогда выполняется неравенство*

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(1+p^2\right)\left(1+r^2\right)\left(3+p^2+2\cos\varphi\right)}-\alpha r\sqrt{1+p^4+2p^2\cos\varphi}\\>\left(1+p^2\right)\sqrt{1+r^2}-\alpha pr\sqrt{1+p^2}.\end{aligned}$$

Доказательство. Поскольку $p\geqslant 1/\sqrt{3}$, имеет место оценка

$$p\sqrt{3+p^2+2\cos\varphi}=\sqrt{3p^2+p^4+2p^2\cos\varphi}\geqslant\sqrt{1+p^4+2p^2\cos\varphi}. \tag{4.47}$$

Умножая неравенство (4.46), доказанное в лемме 4.15, на положительную величину $\sqrt{3+p^2+2\cos\varphi}-\sqrt{1+p^2}$, получаем

$$\sqrt{3+p^2+2\cos\varphi}\left(\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)}-\alpha pr\right) > \sqrt{1+p^2}\left(\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)}-\alpha pr\right). \quad (4.48)$$

Далее, из (4.47) выводим оценку

$$\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)(3+p^2+2\cos\varphi)}-\alpha r\sqrt{1+p^4+2p^2\cos\varphi} \geqslant \sqrt{3+p^2+2\cos\varphi}\left(\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)}-\alpha pr\right). \quad (4.49)$$

Требуемое неравенство следует из оценок (4.48) и (4.49). Лемма доказана. □

Непосредственно из лемм 4.15 и 4.16 выводим следующее утверждение.

Лемма 4.17. *Пусть заданы действительное число α, $1<\alpha\leqslant 4$, действительные числа p и r, удовлетворяющие условиям $1/\sqrt{3}\leqslant p<1/\sqrt{\alpha-1}$ и $0<r<1/\sqrt{\alpha-1}$, а также угол $\varphi\in(-\pi,\pi)$. Тогда выполняется неравенство*

$$\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)(3+p^2+2\cos\varphi)}>\alpha r\sqrt{1+p^4+2p^2\cos\varphi}.$$

Лемма 4.18. *Пусть заданы действительное число α, $1<\alpha\leqslant 4$, положительные числа p и r, удовлетворяющие условиям $p\leqslant 1/\sqrt{3}$ и $r<1/\sqrt{\alpha-1}$. Тогда функция*

$$\Phi(\varphi)=\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)(3+p^2+2\cos\varphi)}-\alpha r\sqrt{1+p^4+2p^2\cos\varphi}$$

убывает на отрезке $[0,\pi]$.

Доказательство. Покажем сначала, что для всех α и r, удовлетворяющих условиям $1<\alpha\leqslant 4$ и $0<r<1/\sqrt{\alpha-1}$, выполняется неравенство

$$\alpha^2r^2<4\left(1+r^2\right). \quad (4.50)$$

Ясно, что неравенство (4.50) имеет место при $\alpha\in(1,2]$, а при $\alpha\in(2,4]$ оно вытекает из следующей оценки:

$$\left(\alpha^2-4\right)r^2-4<\frac{\alpha^2-4}{\alpha-1}-4=\frac{\alpha(\alpha-4)}{\alpha-1}\leqslant 0.$$

Далее, поскольку $p \in (0, 1/\sqrt{3}]$, верны неравенства

$$4p^2 \leqslant 1 + p^2, \qquad 4p^4 \leqslant \left(1 - p^2\right)^2.$$

Умножив их на неравенство (4.50), получаем

$$\alpha^2 r^2 p^2 < \left(1 + p^2\right)\left(1 + r^2\right), \tag{4.51}$$

$$\alpha^2 r^2 p^4 < \left(1 - p^2\right)^2\left(1 + r^2\right). \tag{4.52}$$

Складывая теперь неравенства (4.51) и (4.52), умноженные на $2p^2(1 + \cos\varphi)$ и $1 + p^2$ соответственно, после преобразований получаем оценку

$$\alpha^2 r^2 p^4\left(3 + p^2 + 2\cos\varphi\right) < \left(1 + p^2\right)\left(1 + r^2\right)\left(1 + p^4 + 2p^2\cos\varphi\right), \tag{4.53}$$

справедливую при всех $\alpha \in (1, 4]$, $p \in (0, 1/\sqrt{3}]$ и $r \in (0, 1/\sqrt{\alpha - 1}]$. С другой стороны, производная функции Φ, равная

$$\Phi'(\varphi) = \frac{\sin\varphi\left(\alpha r p^2\sqrt{3 + p^2 + 2\cos\varphi} - \sqrt{\left(1 + p^2\right)\left(1 + r^2\right)\left(1 + p^4 + 2p^2\cos\varphi\right)}\right)}{\sqrt{\left(3 + p^2 + 2\cos\varphi\right)\left(1 + p^4 + 2p^2\cos\varphi\right)}},$$

вследствие (4.53) отрицательна на интервале $(0, \pi)$. Лемма доказана. □

Из леммы 4.18 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.19. *Пусть заданы действительное число α, $1 < \alpha \leqslant 4$, положительные числа p и r, удовлетворяющие условиям $p \leqslant 1/\sqrt{3}$ и $r < 1/\sqrt{\alpha - 1}$, а также угол $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Тогда выполняется неравенство*

$$\sqrt{(1 + p^2)(1 + r^2)(3 + p^2 + 2\cos\varphi)} - \alpha r\sqrt{1 + p^4 + 2p^2\cos\varphi} > (1 + p^2)\sqrt{1 + r^2} - \alpha r(1 - p^2).$$

Наконец, легко показать, что для любых действительных чисел t и s имеют место неравенства

$$\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{2t}{\sqrt{3}} + t^2} \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{t}{2}, \tag{4.54}$$

$$\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{t + s}{\sqrt{3}} + \frac{t^2 + s^2}{2}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{t + s}{4}, \tag{4.55}$$

$$\left(\frac{4}{\sqrt{3}} + t\right)\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{2t}{\sqrt{3}} + t^2} \leqslant \frac{8}{3} + \frac{4t}{\sqrt{3}} + \frac{5t^2}{4}. \tag{4.56}$$

4.2.4. Доказательство основного неравенства

Установим следующее неравенство, которое будет использовано при доказательстве теоремы 4.7.

Лемма 4.20. *Пусть заданы действительное число* α, $1 < \alpha \leqslant 4$, *положительные числа* p *и* r, *удовлетворяющие условиям* $p, r < 1/\sqrt{\alpha - 1}$, *а также угол* $\varphi \in (-\pi, \pi)$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\sqrt{1 + \frac{p^2 + r^2}{2}}\Big(2 - (\alpha - 1)\left(p^2 + r^2\right)\Big) + \sqrt{(1 + p^2)(1 + r^2)(3 + p^2 + 2\cos\varphi)} + \sqrt{(1 + p^2)(1 + r^2)(3 + r^2 + 2\cos\varphi)} > \alpha r\sqrt{1 + p^4 + 2p^2\cos\varphi} + \alpha p\sqrt{1 + r^4 + 2r^2\cos\varphi}.$$

Доказательство этого утверждения мы разобьём на три случая в зависимости от значений p и r. Первый случай — p и r расположены правее точки $1/\sqrt{3}$, второй случай — левее, и третий случай — по разные стороны от точки $1/\sqrt{3}$. Этим случаям будут посвящены леммы 4.21, 4.22 и 4.23.

Лемма 4.21. *Пусть заданы действительное число* α, $1 < \alpha \leqslant 4$, *действительные числа* p *и* r, *удовлетворяющие условиям* $1/\sqrt{3} \leqslant p < 1/\sqrt{\alpha - 1}$ *и* $1/\sqrt{3} \leqslant r < 1/\sqrt{\alpha - 1}$, *а также угол* $\varphi \in (-\pi, \pi)$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\sqrt{1 + \frac{p^2 + r^2}{2}}\Big(2 - (\alpha - 1)\left(p^2 + r^2\right)\Big) + \sqrt{(1 + p^2)(1 + r^2)(3 + p^2 + 2\cos\varphi)} + \sqrt{(1 + p^2)(1 + r^2)(3 + r^2 + 2\cos\varphi)} > \alpha r\sqrt{1 + p^4 + 2p^2\cos\varphi} + \alpha p\sqrt{1 + r^4 + 2r^2\cos\varphi}.$$

Это утверждение выводится непосредственно из леммы 4.17.

Лемма 4.22. *Пусть заданы действительное число* α, $1 < \alpha \leqslant 4$, *положительные числа* p *и* r, *удовлетворяющие условиям* $p \leqslant 1/\sqrt{3}$ *и* $r \leqslant 1/\sqrt{3}$, *а также угол* $\varphi \in (-\pi, \pi)$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\sqrt{1 + \frac{p^2 + r^2}{2}}\Big(2 - (\alpha - 1)\left(p^2 + r^2\right)\Big) + \sqrt{(1 + p^2)\,(1 + r^2)\,(3 + p^2 + 2\cos\varphi)} + \sqrt{(1 + p^2)\,(1 + r^2)\,(3 + r^2 + 2\cos\varphi)} > \alpha r\sqrt{1 + p^4 + 2p^2\cos\varphi} + \alpha p\sqrt{1 + r^4 + 2r^2\cos\varphi}.$$

Доказательство. Для произвольных чисел t и s, удовлетворяющих условиям $0 \leqslant t < 1/\sqrt{3}$, $0 \leqslant s < 1/\sqrt{3}$, справедливы оценки

$$2 - \frac{7}{2\sqrt{3}}t > 0, \qquad 2 - \frac{7}{2\sqrt{3}}s > 0. \tag{4.57}$$

В то же время имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} &t\left(2 - \frac{7}{2\sqrt{3}}t\right) + s\left(2 - \frac{7}{2\sqrt{3}}s\right) + \frac{7}{\sqrt{3}}ts + \frac{3}{4}(t+s)\left(t^2+s^2\right) \\ &\quad = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{t+s}{4}\right)\left(2\sqrt{3}(t+s) - 3\left(t^2+s^2\right)\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - t\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{s}{2}\right) \\ &\qquad + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - s\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{t}{2}\right) - \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - t - s\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + t + s\right). \end{aligned} \tag{4.58}$$

В силу неравенств (4.54) и (4.55) верна оценка

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{t+s}{\sqrt{3}} + \frac{t^2+s^2}{2}}\left(2\sqrt{3}(t+s) - 3\left(t^2+s^2\right)\right) \\ &\qquad + \left(\frac{4}{3} - \frac{2t}{\sqrt{3}} + t^2\right)\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{2s}{\sqrt{3}} + s^2} + \left(\frac{4}{3} - \frac{2s}{\sqrt{3}} + s^2\right)\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{2t}{\sqrt{3}} + t^2} \\ &\qquad\qquad - \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - t - s\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + t + s - ts\sqrt{3}\right) \\ &\quad \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{t+s}{4}\right)\left(2\sqrt{3}(t+s) - 3\left(t^2+s^2\right)\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - t\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{s}{2}\right) \\ &\qquad + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - s\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{t}{2}\right) - \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - t - s\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + t + s\right). \end{aligned} \tag{4.59}$$

Сделаем замену переменных $p = 1/\sqrt{3} - t$, $r = 1/\sqrt{3} - s$. Тогда p и r удовлетворяют условиям $0 < p \leqslant 1/\sqrt{3}$, $0 < r \leqslant 1/\sqrt{3}$ и справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{t+s}{\sqrt{3}} + \frac{t^2+s^2}{2}}\left(2\sqrt{3}(t+s) - 3\left(t^2+s^2\right)\right) \\ &\qquad + \left(\frac{4}{3} - \frac{2t}{\sqrt{3}} + t^2\right)\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{2s}{\sqrt{3}} + s^2} + \left(\frac{4}{3} - \frac{2s}{\sqrt{3}} + s^2\right)\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{2t}{\sqrt{3}} + t^2} \\ &\quad - \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - t - s\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + t + s - ts\sqrt{3}\right) = \sqrt{1 + \frac{p^2+r^2}{2}}\left(2 - 3\left(p^2+r^2\right)\right) \\ &\qquad\qquad + (1+p^2)\sqrt{1+r^2} + (1+r^2)\sqrt{1+p^2} - 4(p+r)(1-pr). \end{aligned} \tag{4.60}$$

Наконец, согласно лемме 4.19 для любых $\alpha \in (1,4]$, $p \in \left(0, 1/\sqrt{3}\right]$, $r \in \left(0, 1/\sqrt{3}\right]$ и $\varphi \in (-\pi, \pi)$ выполняется неравенство

$$\sqrt{1+\frac{p^2+r^2}{2}}\Big(2-(\alpha-1)\left(p^2+r^2\right)\Big)+\sqrt{(1+p^2)\,(1+r^2)\,(3+p^2+2\cos\varphi)}$$
$$-\alpha r\sqrt{1+p^4+2p^2\cos\varphi}+\sqrt{(1+p^2)\,(1+r^2)\,(3+r^2+2\cos\varphi)}$$
$$-\alpha p\sqrt{1+r^4+2r^2\cos\varphi}>\sqrt{1+\frac{p^2+r^2}{2}}\Big(2-3\left(p^2+r^2\right)\Big)+(1+p^2)\sqrt{1+r^2}$$
$$+(1+r^2)\sqrt{1+p^2}-4\,(p+r)\,(1-pr)\,. \quad (4.61)$$

Теперь искомая оценка вытекает из (4.57)—(4.61). Лемма доказана. □

Лемма 4.23. *Пусть заданы действительное число α, $1 < \alpha \leqslant 4$, действительные числа p и r, удовлетворяющие условиям $1/\sqrt{3} \leqslant p < 1/\sqrt{\alpha-1}$ и $0 < r \leqslant 1/\sqrt{3}$, а также угол $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Тогда выполняется неравенство*

$$\sqrt{1+\frac{p^2+r^2}{2}}\Big(2-(\alpha-1)\left(p^2+r^2\right)\Big)+\sqrt{(1+p^2)\,(1+r^2)\,(3+p^2+2\cos\varphi)}$$
$$+\sqrt{(1+p^2)\,(1+r^2)\,(3+r^2+2\cos\varphi)}>\alpha r\sqrt{1+p^4+2p^2\cos\varphi}$$
$$+\alpha p\sqrt{1+r^4+2r^2\cos\varphi}.$$

Доказательство. Для всех s, удовлетворяющих условию $0 \leqslant s < 1/\sqrt{3}$, справедлива оценка

$$2s-\frac{\sqrt{3}}{2}s^2 \geqslant 0. \quad (4.62)$$

Кроме того, верно равенство

$$\left(2\sqrt{3}s-3s^2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{s}{4}\right)+\left(\frac{4}{3}+\frac{2t}{\sqrt{3}}+t^2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{s}{2}\right)$$
$$-\left(\frac{8}{3}+\frac{4t}{\sqrt{3}}+\frac{5t^2}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-s\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{2s}{\sqrt{3}}+s^2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{t}{2}\right)$$
$$-\left(\frac{4}{\sqrt{3}}+t\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{2s}{\sqrt{3}}-s^2\right)=2s-\frac{\sqrt{3}}{2}s^2+\frac{\sqrt{3}}{4}t^2+\frac{3}{4}s\,(t+s)^2\,. \quad (4.63)$$

С учётом неравенств (4.54) и (4.56) выводим оценку

$$\left(2\sqrt{3}s-3s^2\right)\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{s}{\sqrt{3}}+\frac{s^2}{2}}+\left(\frac{4}{3}+\frac{2t}{\sqrt{3}}+t^2\right)\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{2s}{\sqrt{3}}+s^2}$$

$$- \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - s\right)\left(\frac{4}{\sqrt{3}} + t\right)\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{2t}{\sqrt{3}} + t^2} + \left(\frac{4}{3} - \frac{2s}{\sqrt{3}} + s^2\right)\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{2t}{\sqrt{3}} + t^2}$$
$$- \left(\frac{4}{\sqrt{3}} + t\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{2s}{\sqrt{3}} - s^2\right) \geqslant \left(2\sqrt{3}s - 3s^2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{s}{4}\right)$$
$$+ \left(\frac{4}{3} + \frac{2t}{\sqrt{3}} + t^2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{s}{2}\right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{4t}{\sqrt{3}} + \frac{5t^2}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - s\right)$$
$$+ \left(\frac{4}{3} - \frac{2s}{\sqrt{3}} + s^2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{t}{2}\right) - \left(\frac{4}{\sqrt{3}} + t\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{2s}{\sqrt{3}} - s^2\right). \quad (4.64)$$

Сделаем замену переменных $p = 1/\sqrt{3} + t$, $r = 1/\sqrt{3} - s$. Тогда p и r удовлетворяют условиям $p \geqslant 1/\sqrt{3}$, $0 < r \leqslant 1/\sqrt{3}$ и справедливо равенство

$$\left(2\sqrt{3}s - 3s^2\right)\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{s^2}{2}} + \left(\frac{4}{3} + \frac{2t}{\sqrt{3}} + t^2\right)\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{2s}{\sqrt{3}} + s^2}$$
$$+ \left(\frac{4}{3} - \frac{2s}{\sqrt{3}} + s^2\right)\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{2t}{\sqrt{3}} + t^2} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - s\right)\left(\frac{4}{\sqrt{3}} + t\right)\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{2t}{\sqrt{3}} + t^2}$$
$$- \left(\frac{4}{\sqrt{3}} + t\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{2s}{\sqrt{3}} - s^2\right) = \left(1 - 3r^2\right)\sqrt{\frac{7}{6} + \frac{r^2}{2}} + \left(1 + p^2\right)\sqrt{1 + r^2}$$
$$+ \left(1 + r^2\right)\sqrt{1 + p^2} - r\left(p + \sqrt{3}\right)\sqrt{1 + p^2} - \left(p + \sqrt{3}\right)\left(1 - r^2\right). \quad (4.65)$$

Поскольку для $p < 1/\sqrt{\alpha - 1}$ и $\alpha \leqslant 4$ выполняется неравенство $\alpha p < p + \sqrt{3}$, имеем оценку

$$\left(1 - (\alpha - 1)\, r^2\right)\sqrt{1 + \frac{p^2 + r^2}{2}} + \left(1 + p^2\right)\sqrt{1 + r^2} + \left(1 + r^2\right)\sqrt{1 + p^2}$$
$$- \alpha p r\sqrt{1 + p^2} - \alpha p\left(1 - r^2\right) > \left(1 - 3r^2\right)\sqrt{\frac{7}{6} + \frac{r^2}{2}} + \left(1 + p^2\right)\sqrt{1 + r^2}$$
$$+ \left(1 + r^2\right)\sqrt{1 + p^2} - r\left(p + \sqrt{3}\right)\sqrt{1 + p^2} - \left(p + \sqrt{3}\right)\left(1 - r^2\right). \quad (4.66)$$

В силу лемм 4.19 и 4.16 получаем

$$\left(2 - (\alpha - 1)\left(p^2 + r^2\right)\right)\sqrt{1 + \frac{p^2 + r^2}{2}} + \sqrt{\left(1 + p^2\right)\left(1 + r^2\right)\left(3 + p^2 + 2\cos\varphi\right)}$$
$$+ \sqrt{\left(1 + p^2\right)\left(1 + r^2\right)\left(3 + r^2 + 2\cos\varphi\right)} - \alpha r\sqrt{1 + p^4 + 2p^2\cos\varphi}$$
$$- \alpha p\sqrt{1 + r^4 + 2r^2\cos\varphi} \geqslant \left(1 - (\alpha - 1)\, r^2\right)\sqrt{1 + \frac{p^2 + r^2}{2}}$$
$$+ \left(1 + p^2\right)\sqrt{1 + r^2} + \left(1 + r^2\right)\sqrt{1 + p^2} - \alpha p r\sqrt{1 + p^2} - \alpha p\left(1 - r^2\right). \quad (4.67)$$

Теперь искомая оценка следует из (4.62)—(4.67). Лемма доказана. □

Соединяя результаты лемм 4.21, 4.22 и 4.23, приходим к утверждению леммы 4.20.

4.2.5. Доказательство основного результата

Доказательство основной теоремы о точной области однолистности класса $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ будет опираться на следующее утверждение.

Лемма 4.24. *Пусть заданы действительное число α, $1<\alpha\leqslant 4$, положительные числа p, r и q, удовлетворяющие условиям $p,r<1/\sqrt{\alpha-1}$, а также углы ψ, θ и φ, принадлежащие интервалу $(-\pi,\pi)$. Тогда выполняется неравенство*

$$\begin{aligned}&\left(p\left(1+r^2\right)\left(1+q^2\right)\cos\frac{\psi}{2}+r\left(1+q^2\right)\left(1+p^2\right)\cos\frac{\theta}{2}+q\left(1+p^2\right)\left(1+r^2\right)\cos\frac{\varphi}{2}\right.\\&\left.+4prq\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\left(pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}+rq\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+qp\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\right)\\&>\alpha\left(1+p^2r^2+r^2q^2+q^2p^2+2pr\cos\frac{\psi+\theta}{2}+2rq\cos\frac{\theta+\varphi}{2}+2qp\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\right.\\&\left.+2q^2pr\cos\frac{\psi-\theta}{2}+2p^2rq\cos\frac{\theta-\varphi}{2}+2r^2qp\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\right)prq\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}.\end{aligned}\tag{4.68}$$

Доказательство. Для доказательства леммы рассмотрим разность левой и правой частей неравенства (4.68) как многочлен относительно переменной q и проверим его положительность при всех $q>0$. Имеем

$$\begin{aligned}&\left(p\left(1+r^2\right)\left(1+q^2\right)\cos\frac{\psi}{2}+r\left(1+q^2\right)\left(1+p^2\right)\cos\frac{\theta}{2}+q\left(1+p^2\right)\left(1+r^2\right)\cos\frac{\varphi}{2}\right.\\&\left.+4prq\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\left(pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}+rq\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+qp\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\right)\\&-\alpha\left(1+p^2r^2+r^2q^2+q^2p^2+2pr\cos\frac{\psi+\theta}{2}+2rq\cos\frac{\theta+\varphi}{2}+2qp\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\right.\\&\left.+2q^2pr\cos\frac{\psi-\theta}{2}+2p^2rq\cos\frac{\theta-\varphi}{2}+2r^2qp\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\right)prq\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\\&=K_3q^3\cos\frac{\varphi}{2}+K_2q^2+K_1q\cos\frac{\varphi}{2}+K_0,\end{aligned}\tag{4.69}$$

где коэффициенты K_3, K_2, K_1 и K_0 определены следующим образом:

$$K_3 = p^2\cos^2\frac{\psi}{2} + r^2\cos^2\frac{\theta}{2} + p^2r^2\left(\cos^2\frac{\psi}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$
$$+ pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(2 - (\alpha-1)\left(p^2+r^2\right) - 2\alpha pr\cos\frac{\psi-\theta}{2}\right),$$

$$K_2 = p\left(1+p^2\right)\left(1+r^2\right)\cos\frac{\psi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(pr^2\left(1+p^2\right) + 4pr^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$+ r\left(1+p^2\right)\left(1+r^2\right)\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\psi}{2}\left(rp^2\left(1+r^2\right) + 4rp^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$- 2\alpha pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left(pr^2\cos\frac{\psi-\varphi}{2} + rp^2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right.$$
$$\left.+p\cos\frac{\psi+\varphi}{2} + r\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\right),$$

$$K_1 = p^2\cos^2\frac{\psi}{2} + r^2\cos^2\frac{\theta}{2} + p^2r^2\left(\cos^2\frac{\psi}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right) + pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$\left(3 - \alpha + 2\left(p^2+r^2\right) - (\alpha-1)\,p^2r^2 + 4pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 2\alpha pr\cos\frac{\psi+\theta}{2}\right),$$

$$K_0 = pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(p\left(1+r^2\right)\cos\frac{\psi}{2} + r\left(1+p^2\right)\cos\frac{\theta}{2}\right).$$

Оценим снизу каждый из коэффициентов многочлена (4.69). Воспользуемся неравенствами

$$p^2\cos^2\frac{\psi}{2} + r^2\cos^2\frac{\theta}{2} \geqslant 2pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}, \tag{4.70}$$

$$\cos^2\frac{\psi}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} \geqslant 2\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}, \tag{4.71}$$

для оценки коэффициента K_3:

$$K_3 \geqslant pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(4 - (\alpha-1)\left(p+r\right)^2\right)$$
$$\geqslant 2pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\Big(2 - (\alpha-1)\left(p^2+r^2\right)\Big). \tag{4.72}$$

С помощью неравенств

$$\left(1+p^2\right)\left(1+r^2\right)\cos^2\frac{\varphi}{2} + r^2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1+p^2+4\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$\geqslant 2r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)\left(1+p^2+4\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)},$$

$$\left(1+p^2\right)\left(1+r^2\right)\cos^2\frac{\varphi}{2} + p^2\cos^2\frac{\psi}{2}\left(1+r^2+4\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$\geqslant 2p\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)\left(1+r^2+4\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)},$$

а также

$$p^2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}+\cos\frac{\theta+\varphi}{2}=\left(p^2+1\right)\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\left(p^2-1\right)\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\leqslant\sqrt{1+p^4+2p^2\cos\varphi},$$

$$r^2\cos\frac{\psi-\varphi}{2}+\cos\frac{\psi+\varphi}{2}=\left(r^2+1\right)\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}+\left(r^2-1\right)\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\leqslant\sqrt{1+r^4+2r^2\cos\varphi},$$

оценим коэффициент K_2:

$$K_2\geqslant 2pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left(\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)(3+p^2+2\cos\varphi)}+\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)(3+r^2+2\cos\varphi)}-\alpha p\sqrt{1+r^4+2r^2\cos\varphi}-\alpha r\sqrt{1+p^4+2p^2\cos\varphi}\right). \quad (4.73)$$

Для оценки коэффициента K_1 снова применим (4.70) и (4.71):

$$\begin{aligned}K_1&\geqslant pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\Big(4+2\left(p^2+r^2\right)-(\alpha-1)\left(pr+1\right)^2\Big)\\&\geqslant pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(4+2\left(p^2+r^2\right)-\frac{\alpha-1}{4}\left(p^2+r^2+2\right)^2\right)\\&=\frac{1}{4}pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(2+p^2+r^2\right)\left(10-2\alpha-(\alpha-1)\left(p^2+r^2\right)\right)\\&\geqslant\frac{1}{4}pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(2+p^2+r^2\right)\left(2-(\alpha-1)\left(p^2+r^2\right)\right). \quad (4.74)\end{aligned}$$

Коэффициент K_0, очевидно, положительный. Таким образом, с учётом неравенств (4.72), (4.73) и (4.74) получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}K_3q^3\cos\frac{\varphi}{2}+K_2q^2+K_1q\cos\frac{\varphi}{2}+K_0&>2prq^3\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\Big(2-(\alpha-1)\left(p^2+r^2\right)\Big)\\&+2prq^2\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left(\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)(3+p^2+2\cos\varphi)}+\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)(3+r^2+2\cos\varphi)}-\alpha p\sqrt{1+r^4+2r^2\cos\varphi}-\alpha r\sqrt{1+p^4+2p^2\cos\varphi}\right)\\&+\frac{1}{4}prq\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left(2+p^2+r^2\right)\left(2-(\alpha-1)\left(p^2+r^2\right)\right)\\&\geqslant 2prq^2\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left(\sqrt{1+\frac{p^2+r^2}{2}}\Big(2-(\alpha-1)\left(p^2+r^2\right)\Big)\right)\end{aligned}$$

$$+\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)(3+p^2+2\cos\varphi)}+\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)(3+r^2+2\cos\varphi)}$$
$$-\alpha r\sqrt{1+p^4+2p^2\cos\varphi}-\alpha p\sqrt{1+r^4+2r^2\cos\varphi}\Bigg). \quad (4.75)$$

Учитывая (4.69) и (4.75), выводим требуемую оценку из леммы 4.20. Лемма доказана. □

Теперь мы можем приступить к доказательству основного результата, но прежде сформулируем его ещё раз.

Теорема 4.7. *Пусть $\alpha \in (1,4]$. Если $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, тогда f однолистна в области $\mathscr{D}_{1/\sqrt{\alpha-1}}$. Какова бы ни была область $\mathscr{Y}$, $\mathscr{D}_{1/\sqrt{\alpha-1}} \subsetneq \mathscr{Y} \subset \mathbb{D}$, найдётся функция $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, не однолистная в области $\mathscr{Y}$.*

Доказательство. Фиксируем $\alpha \in (1,4]$. Предположим, что некоторая функция f из класса $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ не однолистна в области $\mathscr{D}_{1/\sqrt{\alpha-1}}$, то есть найдутся точки $a, b \in \mathscr{D}_{1/\sqrt{\alpha-1}}$ со свойством $f(a) = f(b)$. Обозначим через c их общее значение. Поскольку f отображает круг в себя, $c \in \mathbb{D}$. Тогда функция

$$g(z) = \frac{1-\overline{c}}{1-c}\cdot\frac{f(z)-c}{1-\overline{c}f(z)},$$

также отображает круг $\mathbb{D}$ в себя, причём $g(a) = g(b) = 0$ и $g(1) = 1$ в смысле углового предела, то есть $g \in \mathscr{B}\{1\}$. Более того, $g(0) = \lambda(c)$ (см. (4.43)) и угловая производная в точке $z = 1$ имеет вид

$$g'(1) = \alpha\,\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2}. \quad (4.76)$$

В силу леммы Шварца—Пика функция g допускает следующее представление:

$$g(z) = \frac{1-\overline{a}}{1-a}\cdot\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\cdot\frac{1-\overline{b}}{1-b}\cdot\frac{z-b}{1-\overline{b}z}\cdot h(z), \quad (4.77)$$

где $h \in \mathscr{B}$. Кроме того, как видно из (4.77), $g(0) = \lambda(a)\lambda(b)h(0)$ и $g(1) = h(1)$ в смысле углового предела. Следовательно, $h \in \mathscr{B}\{1\}$, причём

$$h(0) = \frac{\lambda(c)}{\lambda(a)\lambda(b)}. \quad (4.78)$$

Наконец, из (4.76) и (4.77) находим значение производной функции h в точке $z = 1$:

$$h'(1) = \alpha\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2} - \frac{1-|a|^2}{|1-a|^2} - \frac{1-|b|^2}{|1-b|^2}. \quad (4.79)$$

Вспоминая, что $h \in \mathscr{B}\{1\}$, согласно теореме Жюлиа—Каратеодори (см. (4.2)) имеем оценку

$$0 < \frac{|1-h(0)|^2}{1-|h(0)|^2} \leqslant h'(1). \tag{4.80}$$

С учётом (4.78), (4.79) и (4.80) приходим к следующей оценке:

$$0 < \frac{\left|1-\frac{\lambda(c)}{\lambda(a)\lambda(b)}\right|^2}{1-\left|\frac{\lambda(c)}{\lambda(a)\lambda(b)}\right|^2} \leqslant \alpha\,\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2} - \frac{1-|a|^2}{|1-a|^2} - \frac{1-|b|^2}{|1-b|^2}. \tag{4.81}$$

В силу леммы 4.13 перепишем неравенство (4.81) в эквивалентной форме:

$$0 < \frac{\left|1-\frac{\lambda(c)}{\lambda(a)\lambda(b)}\right|^2}{1-\left|\frac{\lambda(c)}{\lambda(a)\lambda(b)}\right|^2} \leqslant \alpha\,\frac{|1-\lambda(c)|^2}{1-|\lambda(c)|^2} - \frac{|1-\lambda(a)|^2}{1-|\lambda(a)|^2} - \frac{|1-\lambda(b)|^2}{1-|\lambda(b)|^2}. \tag{4.82}$$

Введём следующие обозначения: $A = \lambda(a)$, $B = \lambda(b)$, $C = \lambda(c)/\big(\lambda(a)\lambda(b)\big)$. Ввиду леммы 4.14 точки A и B должны располагаться внутри области $\mathscr{M}_{1/\sqrt{\alpha-1}}$, а из равенства (4.78) следует, что точка C должна принадлежать кругу $\mathbb{D}$.

Таким образом, в силу неравенства (4.82) для некоторых $A, B \in \mathscr{M}_{1/\sqrt{\alpha-1}}$ и $C \in \mathbb{D}$ должна выполняться оценка

$$\frac{|1-A|^2}{1-|A|^2} + \frac{|1-B|^2}{1-|B|^2} + \frac{|1-C|^2}{1-|C|^2} \leqslant \alpha\,\frac{|1-ABC|^2}{1-|ABC|^2}. \tag{4.83}$$

Наконец, отображая единичный круг $\mathbb{D}$ на правую полуплоскость $\mathbb{H}$ при помощи функции L^{-1} (см. (4.5)) и обозначая $u = L^{-1}(A)$, $v = L^{-1}(B)$, $w = L^{-1}(C)$, получаем, что точки u и v должны находиться в полукруге с центром в нуле и радиусом, равным $1/\sqrt{\alpha-1}$, и при этом должно выполняться эквивалентное (4.83) неравенство

$$\frac{1}{|u+1|^2-|u-1|^2} + \frac{1}{|v+1|^2-|v-1|^2} + \frac{1}{|w+1|^2-|w-1|^2} \leqslant \alpha\,\frac{|1+uv+uw+vw|^2}{|w+1|^2\,|u+1|^2\,|v+1|^2 - |w-1|^2\,|u-1|^2\,|v-1|^2}. \tag{4.84}$$

Поскольку u и v принадлежат полукругу $\big\{\zeta \in \mathbb{H}\colon\ |\zeta| < 1/\sqrt{\alpha-1}\big\}$, а w лежит в $\mathbb{H}$, найдутся такие положительные числа p, r, q, удовлетворяющие условиям $p < 1/\sqrt{\alpha-1}$ и $r < 1/\sqrt{\alpha-1}$, и такие углы ψ, θ, φ из интервала $(-\pi, \pi)$, что

$u = pe^{i\psi/2}$, $v = re^{i\theta/2}$ и $w = qe^{i\varphi/2}$. С учётом (4.84) должно также выполняться неравенство

$$\begin{aligned}&\left(p\left(1+r^2\right)\left(1+q^2\right)\cos\frac{\psi}{2}+r\left(1+p^2\right)\left(1+q^2\right)\cos\frac{\theta}{2}+q\left(1+p^2\right)\left(1+r^2\right)\cos\frac{\varphi}{2}\right.\\&\left.+4prq\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\left(pr\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}+rq\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+pq\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\\&\leqslant\alpha\left(1+p^2r^2+p^2q^2+q^2r^2+2pr\cos\frac{\psi+\theta}{2}+2pq\cos\frac{\psi+\varphi}{2}+2rq\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\right.\\&\left.+2p^2rq\cos\frac{\theta-\varphi}{2}+2q^2pr\cos\frac{\psi-\theta}{2}+2r^2pq\cos\frac{\psi-\varphi}{2}\right)prq\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}.\end{aligned}\tag{4.85}$$

Однако, в лемме 4.24 установлено, что для тех же значений переменных p, r и q, а также углов ψ, θ и φ выполняется неравенство, противоположное (4.85). Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы.

Для доказательства второй части теоремы достаточно для каждой точки границы области $\mathscr{D}_{1/\sqrt{\alpha-1}}$ предъявить функцию из класса $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$, производная которой обращается в нуль в этой точке. Для каждого $\theta \in (-\pi, \pi)$ рассмотрим функцию

$$f_\theta(z) = z\,\frac{1-(\alpha-1)\,e^{i\theta}+\alpha e^{i\theta}z}{\alpha-(\alpha-1-e^{i\theta})\,z}.$$

Легко проверить, что f_θ принадлежит при каждом $\theta \in (-\pi, \pi)$ классу $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ и имеет нулевую производную в точке

$$z_\alpha(\theta) = \frac{\sqrt{\alpha-1}-e^{-i\theta/2}}{\sqrt{\alpha-1}+e^{i\theta/2}}.\tag{4.86}$$

Нетрудно убедиться, что формула (4.86) задаёт кривую, ограничивающую область $\mathscr{D}_{1/\sqrt{\alpha-1}}$. Теорема доказана. □

4.2.6. Оценки размера областей однолистности

В этом пункте мы количественно сравним полученный результат с теоремой 4.D. Нас будет интересовать вопрос, сколь сильно отличается найденная для класса $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ область однолистности от круга однолистности, существование которого вытекает из теоремы Ландау и оценки Горяйнова.

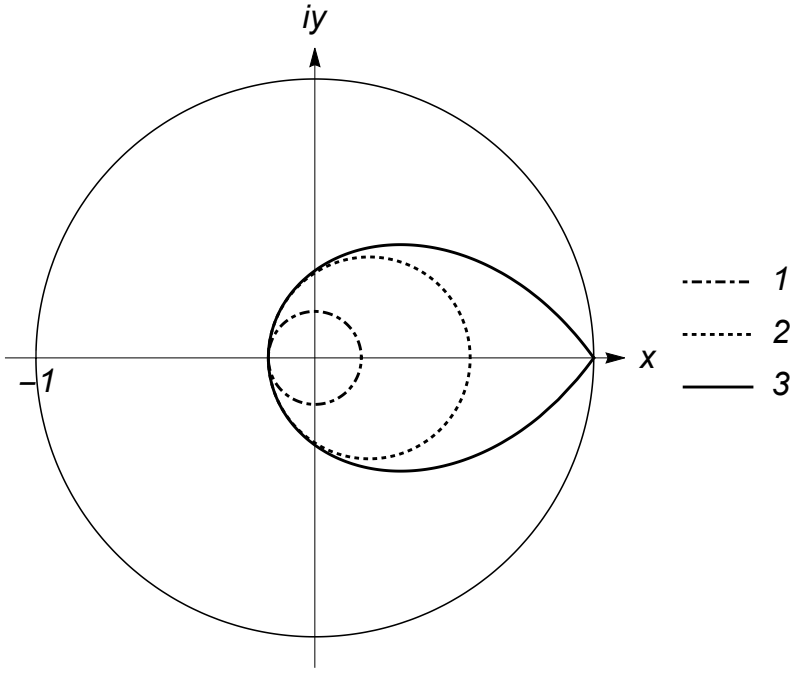


Рис. 4.5: Границы областей **1:** $\mathscr{O}(\alpha)$, **2:** $\mathscr{E}_1(\alpha)$, **3:** $\mathscr{D}(\alpha)$; $\alpha = 1.5$

В окрестности точки z_α (см. (4.10)) — общей точке границ сравниваемых областей, граница области $\mathscr{D}(\alpha)$, так же как и граница круга Ландау, ортогональна действительной оси, но отличается от него кривизной. Более того, эта область содержит круг, касающийся границы области в точке z_α, радиус которого совпадает с радиусом кривизны границы области в этой точке.

Предложение 4.5. *Пусть* $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,4]$. *Тогда* f *однолистна в круге*

$$\mathscr{E}_1(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \left| z - \frac{\alpha\sqrt{\alpha-1}}{2\alpha + (\alpha+2)\sqrt{\alpha-1}} \right| < \frac{2}{2\alpha + (\alpha+2)\sqrt{\alpha-1}} \right\}.$$

На рис. 4.5 продемонстрирована разница между кривизной круга Ландау и границы области $\mathscr{D}(\alpha)$ в точке z_α.

Заметим, что при $\alpha \to 1+0$ для радиусов $r(\alpha)$ и $r_1(\alpha)$ кругов $\mathscr{O}(\alpha)$ (см. (4.8)) и $\mathscr{E}_1(\alpha)$ верна асимптотика

$$1 - r(\alpha) = 2\sqrt{\alpha-1} + O(\alpha-1),$$
$$1 - r_1(\alpha) = \frac{3}{2}\sqrt{\alpha-1} + O(\alpha-1).$$

Как видим, даже при α, близких к 1, кривизна границы области $\mathscr{D}(\alpha)$ несколько меньше кривизны круга Ландау. Приведённое асимптотическое равенство для $r_1(\alpha)$ даёт неулучшаемое количественное описание окрестности тождественного преобразования в классе $\mathscr{B}[0,1]$ с точки зрения однолистности. Если же α

приближается к другому критическому значению — к 2, разница между сравниваемыми областями становится намного больше. Если круг $\mathscr{O}(\alpha)$ при $\alpha = 2$ вырождается в точку, то область $\mathscr{D}(2)$ содержит, в частности, круг радиуса $1/4$, граница которого проходит через нуль.

Проанализируем также размер области $\mathscr{D}(\alpha)$ в окрестности неподвижной точки. Как уже упоминалось, произвольная функция из класса $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ однолистна в секторе, раствор которого сколь угодно близок к π. Однако радиус этого сектора в этом случае будет зависеть от конкретной функции. Если же мы хотим взять единый радиус сектора для всех функций класса $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$, необходимо ограничить величину угла этого сектора. Теорема 4.7 показывает, что в качестве такой границы можно взять $2\operatorname{arcctg}\sqrt{\alpha-1}$, причём данная граница неулучшаема.

Наконец, теорема 4.7 позволяет указать круг максимального радиуса, в котором однолистны все функции класса $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$.

Предложение 4.6. *Пусть $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,4]$. Тогда f однолистна в круге*

$$\mathscr{E}_2(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \left| z - \frac{4\alpha k^2(\alpha) - 3}{2\sqrt{2}k(\alpha)\left(\sqrt{3\,(\alpha-1)} + \sqrt{2}\alpha k(\alpha)\right)}\right| < \frac{\sqrt{3\,(8k^2(\alpha)-3)}}{2\sqrt{2}k(\alpha)\left(\sqrt{3\,(\alpha-1)} + \sqrt{2}\alpha k(\alpha)\right)} \right\},$$

$$\text{где } k(\alpha) = \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3(\alpha-1)}}{2\sqrt{2}\alpha}\right).$$

Для любого круга $\mathscr{E}' \subset \mathbb{D}$, радиус которого больше радиуса круга $\mathscr{E}_2(\alpha)$, существует функция $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, не однолистная в круге $\mathscr{E}'$.

На рис. 4.6 продемонстрирован размер круга однолистности максимального радиуса.

4.2.7. Случай произвольной внутренней неподвижной точки

Перенесём результаты пункта 4.2.5 на случай произвольной неподвижной точки $d \in \mathbb{D}$. Для этого к областям $\mathscr{O}(\alpha)$ и $\mathscr{D}(\alpha)$ применим дробно-линейную

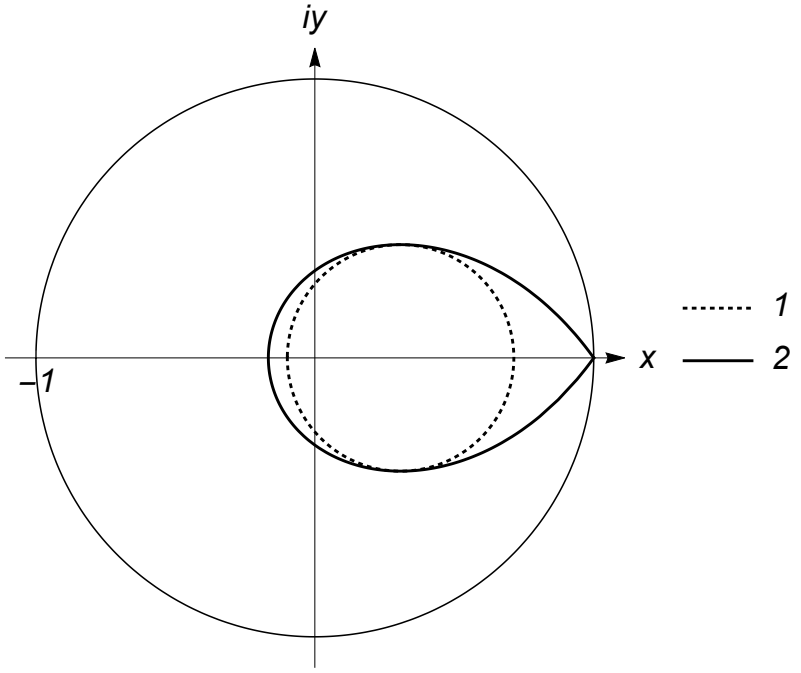


Рис. 4.6: Границы областей **1:** $\mathscr{E}_2(\alpha)$, **2:** $\mathscr{D}(\alpha)$; $\alpha = 1.5$

функцию (4.39), взаимно однозначно отображающую классы $\mathscr{B}_N[d]$ и $\mathscr{B}_\alpha[d,1]$ на классы $\mathscr{B}_N[0]$ и $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$ соответственно.

Теорема 4.F. *Пусть $N > 1$. Если $f \in \mathscr{B}_N[d]$, тогда f однолистна в круге*

$$\mathscr{L}(d,N) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \left| \frac{z-d}{1-\bar{d}z} \right| < R(N) \right\}, \text{ где } R(N) = N - \sqrt{N^2-1}.$$

Какова бы ни была область $\mathscr{Y}$, $\mathscr{L}(d,N) \subsetneq \mathscr{Y} \subset \mathbb{D}$, найдётся функция f из класса $\mathscr{B}_N[d]$, не однолистная в области $\mathscr{Y}$.

Теорема 4.8. *Пусть $\alpha \in (1,4]$. Если $f \in \mathscr{B}_\alpha[d,1]$, тогда f однолистна в области*

$$\mathscr{D}(d,\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \frac{\left| \frac{1+d}{1-d}\left(1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2\right) - 2i \operatorname{Im} z \right|}{1-|z|^2} < \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} \right\}.$$

Какова бы ни была область $\mathscr{Y}$, $\mathscr{D}(d,\alpha) \subsetneq \mathscr{Y} \subset \mathbb{D}$, найдётся функция f из класса $\mathscr{B}_\alpha[d,1]$, не однолистная в области $\mathscr{Y}$.

На рис. 4.7 показана структура и взаимное расположение круга $\mathscr{L}(d,N)$, $N = \alpha/(2-\alpha)$, и области $\mathscr{D}(d,\alpha)$. Отметим, что локализация внутренней неподвижной точки влияет на размер области однолистности, но не влияет на раствор угла в граничной неподвижной точке, который зависит исключительно от значения угловой производной.

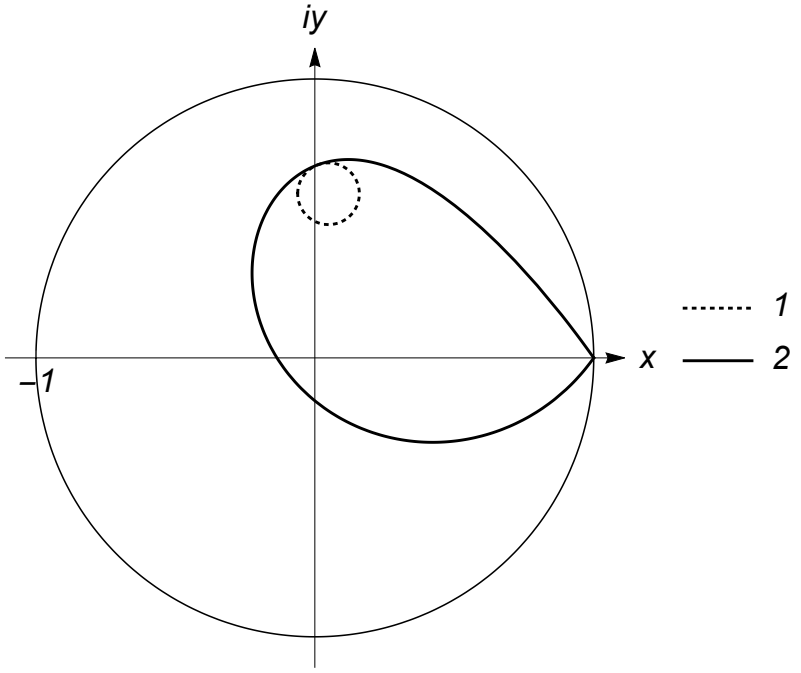


Рис. 4.7: Границы областей **1:** $\mathscr{L}(d,N)$, **2:** $\mathscr{D}(d,\alpha)$; $\alpha=1.5$, $d=0.05+0.6i$

С помощью линейного преобразования (4.41) обобщим результат теоремы 4.7′ на случай произвольной внутренней неподвижной точки $m\in\mathbb{H}$.

Теорема 4.8′. *Пусть* $\beta\in[1/4,1)$. *Если* $g\in\mathscr{H}_\beta[1,\infty]$, *то* g *однолистна в области*

$$\mathscr{R}(m,\beta)=\left\{\zeta\in\mathbb{H}\colon\ \frac{\beta}{1-\beta}\frac{(\operatorname{Re}\zeta)^2}{(\operatorname{Re}m)^2}-\frac{\left(\operatorname{Im}(\zeta-m)\right)^2}{(\operatorname{Re}m)^2}>1\right\}.$$

Какова бы ни была область $\mathscr{Z}$, $\mathscr{R}(m,\beta)\subsetneq\mathscr{Z}\subset\mathbb{H}$, *найдётся функция* g *из класса* $\mathscr{H}_\beta[0,1]$, *не однолистная в области* $\mathscr{Z}$.

4.3. Асимптотически точная двусторонняя оценка областей однолистности голоморфных отображений круга в себя с инвариантным диаметром

4.3.1. Предварительные сведения и постановка задачи

Как уже обсуждалось в §4.1, с точки зрения задачи выделения областей однолистности на классе функций условие на производную в граничной неподвижной точке оказывается слабее условия на производную во внутренней неподвижной точке, а класс $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ при $\alpha>1$ слишком обширным. Тем самым, для продвижения в вопросе выделения областей однолистности, необходимо

дальнейшее сужение класса $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ добавлением дополнительного условия на функции этого класса. В качестве такого условия естественно зафиксировать локализацию второй неподвижной точки. В этом параграфе нас будет интересовать ситуация с наличием граничной неподвижной точки. В связи с этим рассмотрим класс

$$\mathscr{B}[-1,1] = \mathscr{B}\{-1\} \cap \mathscr{B}\{1\}.$$

Наличие дополнительной граничной неподвижной точки влечёт в силу теоремы Жюлиа—Каратеодори оценку произведения угловых производных: если функция f принадлежит классу $\mathscr{B}[-1,1]$, то $f'(1)f'(-1) \geqslant 1$, причём равенство достигается для дробно-линейных преобразований.

В. В. Горяйнов [15], [16] исследовал вопрос об областях однолистности на классах $\mathscr{B}_\alpha[-1,1] = \{f \in \mathscr{B}[-1,1]\colon f'(1)f'(-1) \leqslant \alpha\}$ в случае $1 < \alpha < 9$. Он сформулировал доказанную им теорему в терминах голоморфных отображений полосы в себя.

Теорема 4.D (В. В. Горяйнов)**.** *Пусть $\alpha \in (1,9)$. Тогда любое голоморфное отображение f полосы $\{\zeta \in \mathbb{C}\colon -\pi/2 < \operatorname{Im}\zeta < \pi/2\}$ в себя, удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{\operatorname{Re}\zeta\to-\infty}(\zeta - f(\zeta)) = 0, \qquad \lim_{\operatorname{Re}\zeta\to+\infty}(\zeta - f(\zeta)) \leqslant \ln\alpha,$$

является однолистным в полосе $\{\zeta \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im}\zeta| < y^*(\alpha)\}$, где $y^*(\alpha)$ — единственный в интервале $0 < y < \pi/2$ корень уравнения

$$\cos^2 y = (\alpha-1)\cos^3\frac{\pi-2y}{3}.$$

Для дальнейших исследований нам будет удобно переформулировать теорему 4.D в терминах отображений единичного круга в себя.

Теорема 4.D′. *Пусть $f \in \mathscr{B}_\alpha[-1,1]$, $1 < \alpha < 9$. Тогда f однолистна в области*

$$\mathscr{T}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \frac{|1-z^2|}{1-|z|^2} < \sqrt{1+m(\alpha)} \right\}, \tag{4.87}$$

где

$$m(\alpha) = \frac{\alpha(9-\alpha)^2}{(\alpha-1)\big(9(K_1^2(\alpha)+K_2^2(\alpha)) + 3(\alpha-6)(K_1(\alpha)-K_2(\alpha)) + \alpha^2 + 24\alpha - 9\big)}, \tag{4.88}$$

$$K_1(\alpha) = \sqrt[3]{2(\alpha+1)\sqrt{\alpha^2-1}+2\alpha^2-14\alpha+11}, \tag{4.89}$$

$$K_2(\alpha) = \sqrt[3]{2(\alpha+1)\sqrt{\alpha^2-1}-2\alpha^2+14\alpha-11}. \tag{4.90}$$

Области $\mathscr{T}(\alpha)$ при каждом α, $1 < \alpha < 9$, содержат вещественный диаметр и ограничены двумя дугами окружностей, проходящих через неподвижные точки $z = \pm 1$. Нетрудно заметить, что условие $\alpha < 9$ точное. Действительно, функция $f(z) = z^3$ принадлежит классу $\mathscr{B}_9[-1,1]$, но не является однолистной ни в какой окрестности вещественного диаметра.

В то же время сами области однолистности $\mathscr{T}(\alpha)$, как отмечено В. В. Горяйновым, не являются неулучшаемыми. Возникает вопрос, сколь они точны?

Мы дополним теорему 4.D′ оценкой сверху: для каждого α, $1 < \alpha < 9$, будет построена область, за границу которой распространение области однолистности на всем классе $\mathscr{B}_\alpha[-1,1]$ невозможно. В то же время полученная оценка сверху не даёт ответ на поставленный выше вопрос о точности областей, построенных в теореме 4.D′. Как мы увидим впоследствии, зазор между верхней и нижней оценками достаточно велик, особенно при значениях α, близких к 9.

С другой стороны, полученная оценка сверху оказывается весьма эффективной для наиболее интересного с точки зрения приложений подкласса класса $\mathscr{B}_\alpha[-1,1]$, состоящего из функций, сохраняющих вещественный диаметр. Мы получим близкие к неулучшаемым двусторонние оценки областей однолистности на указанном классе.

4.3.2. Формулировка основных результатов

Введём следующие обозначения:

$$\mathscr{D}[-1,1] = \left\{ f \in \mathscr{B}[-1,1] \colon f\big((-1,1)\big) = (-1,1) \right\},$$
$$\mathscr{D}_\alpha[-1,1] = \left\{ f \in \mathscr{D}[-1,1] \colon f'(1)f'(-1) \leqslant \alpha \right\}, \quad \alpha > 1.$$

Теорема 4.9. *Фиксируем $\alpha \in (1,9)$. Для каждой точки z_0 границы области*

$$\overline{\mathscr{U}}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D} \colon \frac{|1-z^2|}{1-|z|^2} < \frac{2\sqrt[4]{\alpha}}{\sqrt{(3+\sqrt{\alpha})(\sqrt{\alpha}-1)}} \right\} \tag{4.91}$$

найдётся функция $f_{z_0} \in \mathscr{D}_\alpha[-1,1]$, производная которой в точке z_0 обращается в нуль.

Теорема 4.11. *Пусть $f \in \mathscr{D}_\alpha[-1,1]$, $1 < \alpha < 9$. Тогда f однолистна в области*

$$\underline{\mathscr{U}}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D} \colon \frac{|1-z^2|}{1-|z|^2} < \sqrt{1 + \left(\sqrt{k(\alpha)+1} + \operatorname{sign}(25-9\alpha)\sqrt{k(\alpha)}\right)^2} \right\}, \tag{4.92}$$

где

$$k(\alpha) = \frac{(9\alpha-25)^2\,(183-37\sqrt{\alpha})}{128(\alpha-1)(9-\alpha)(85-12\sqrt{\alpha})}. \tag{4.93}$$

4.3.3. Области однолистности для функций с двумя граничными неподвижными точками

В данном пункте мы исследуем вопрос о размере областей однолистности на классах $\mathscr{B}_\alpha[-1,1]$, $1 < \alpha < 9$. Сначала приведём несколько иное доказательство теоремы 4.D′, дающей нижнюю оценку областей однолистности. Затем будет получена верхняя оценка для рассматриваемого класса.

Доказательство теоремы 4.D′ предварим вспомогательными утверждениями. При каждом α, $1 < \alpha < 9$, рассмотрим многочлен

$$\Phi(x,y,t) = (x^2+y^2)^2t^4 + 4(x^2+y^2)yt^3 + \big((3-\alpha)x^2 + (5+\alpha)y^2\big)t^2 + 2(1+\alpha)yt + \alpha \tag{4.94}$$

и установим ряд его свойств, необходимых в дальнейшем.

Лемма 4.25. *Для произвольных $x, t \in \mathbb{R}$, $x > 0$, выполняется неравенство $\Phi(x,0,t) > 0$.*

Доказательство. Справедливость данного утверждения вытекает из следующего представления:

$$\Phi(x,0,t) = x^4t^4 + (3-\alpha)x^2t^2 + \alpha = \left(x^2t^2 + \frac{3-\alpha}{2}\right)^2 + \frac{(9-\alpha)(\alpha-1)}{4}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 4.26. *Пусть $m(\alpha)$ определяется формулами (4.88)—(4.90). Тогда при любом $t \in \mathbb{R}$ в каждой точке (x,y) области*

$$\mathscr{C}(\alpha) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| < \sqrt{m(\alpha)}x \right\} \tag{4.95}$$

выполняется неравенство $\Phi(x,y,t) > 0$.

Доказательство. Выражение (4.94) в каждой точке области $\mathscr{C}(\alpha)$ представляет собой многочлен четвёртой степени относительно t, поскольку коэффициент перед t^4 нигде не обращается в нуль. Свободный член многочлена (4.94) положителен, поэтому для доказательства неравенства $\Phi(x,y,t)>0$ достаточно показать, что он не обращается в нуль ни при каком $t\in\mathbb{R}$. Это равносильно тому, что приведённый многочлен

$$P_{x,y}(t)=t^4+\frac{4y}{x^2+y^2}\,t^3+\frac{(3-\alpha)x^2+(5+\alpha)y^2}{(x^2+y^2)^2}\,t^2+\frac{2(1+\alpha)y}{(x^2+y^2)^2}\,t+\frac{\alpha}{(x^2+y^2)^2} \tag{4.96}$$

не имеет вещественных корней.

В силу леммы 4.25 многочлен $P_{x,0}(t)$ положителен при всех $x,t\in\mathbb{R}$, $x>0$. То есть в точках области $\mathscr{D}(\alpha)$, имеющих нулевую ординату, коэффициенты многочлена (4.96) таковы, что он не имеет вещественных корней. Ввиду непрерывности коэффициентов многочлена (4.96) изменение состава его вещественных корней может произойти только при появлении кратного корня. Это означает, что возможная граница области положительности многочлена (4.94) задаётся условием равенства нулю дискриминанта многочлена (4.96).

Подставляя в формулу дискриминанта (см. (4.32)) коэффициенты многочлена (4.96), после упрощений получим:

$$D\big(c_3(x,y),c_2(x,y),c_1(x,y),c_0(x,y)\big)=\frac{16(\alpha-1)^2x^2\,D_\alpha(x,y)}{(x^2+y^2)^{10}}, \tag{4.97}$$

где

$$\begin{aligned}D_\alpha(x,y)=&\alpha(\alpha-9)^2x^6-3(\alpha-1)(\alpha^2+24\alpha-9)x^4y^2\\&+3(\alpha-6)(\alpha-1)^2x^2y^4-(\alpha-1)^3y^6.\end{aligned}$$

Поделив выражение для $D_\alpha(x,y)$ на x^6 и сделав замену $u=y^2/x^2$, запишем кубическое уравнение относительно u:

$$(\alpha-1)^3u^3-3(\alpha-6)(\alpha-1)^2x^2u^2+3(\alpha-1)(\alpha^2+24\alpha-9)u-\alpha(\alpha-9)^2=0. \tag{4.98}$$

Выполнив замену

$$u=v+\frac{\alpha-6}{\alpha-1},$$

приходим к кубическому уравнению в каноническом виде

$$v^3+\frac{27(4\alpha-5)}{(\alpha-1)^2}v+\frac{54(2\alpha^2-14\alpha+11)}{(\alpha-1)^3}=0. \tag{4.99}$$

Дискриминант уравнения (4.99), равный $54^2(\alpha+1)^3/(\alpha-1)^5$, положителен при $\alpha \in (1,9)$. Следовательно, уравнение (4.99) имеет один вещественный корень, который равен

$$v = \frac{3K_2(\alpha) - 3K_1(\alpha)}{\alpha - 1},$$

где $K_1(\alpha)$ и $K_2(\alpha)$ определяются формулами (4.89) и (4.90) соответственно. Тогда единственным корнем уравнения (4.98) будет

$$\begin{aligned} u &= \frac{3K_2(\alpha) - 3K_1(\alpha) + \alpha - 6}{\alpha - 1} \\ &= \frac{\alpha(9-\alpha)^2}{(\alpha-1)\big(9(K_1^2(\alpha) + K_2^2(\alpha)) + 3(\alpha-6)(K_1(\alpha) - K_2(\alpha)) + \alpha^2 + 24\alpha - 9\big)}, \end{aligned}$$

что совпадает с $m(\alpha)$ (см. (4.88)). Таким образом, дискриминант (4.97) многочлена (4.96) обращается в нуль на лучах $y = \pm\sqrt{m(\alpha)}x$, $x > 0$. С учётом леммы 4.25 и вышесказанного многочлен (4.94) положителен в области $\mathscr{C}(\alpha)$ (см. (4.95)). Лемма доказана. □

Для доказательства теоремы 4.D′ нам понадобится также интегральное представление класса $\mathscr{B}[-1,1]$, установленное В. В. Горяйновым [15]. А именно, связь между функциями f класса $\mathscr{B}[-1,1]$ с заданными значениями угловых производных в граничных неподвижных точках и интегральным представлением Рисса—Герглотца функций $(1+f)/(1-f)$. Приведём этот результат.

Теорема 4.E (В. В. Горяйнов)**.** *Функция $f \in \mathscr{B}$ принадлежит классу $\mathscr{B}[-1,1]$ в том и только том случае, если функция $h(z) = \big(1+f(z)\big)/\big(1-f(z)\big)$ допускает представление в виде*

$$h(z) = \rho\left(\lambda\frac{1+z}{1-z} + (1-\lambda)\frac{1+z}{2}\int_{\mathbb{T}}\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa z}\,d\mu(\varkappa)\right), \tag{4.100}$$

где $\rho > 0$, $\lambda \in (0,1)$, μ — вероятностная мера на единичной окружности $\mathbb{T}$ со свойством $\mu(\{-1\}) = 0$. При этом, $f'(-1) = \rho$, $f'(1)f'(-1) \leqslant 1/\lambda$.

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы 4.D′.

Доказательство теоремы 4.D′. Пусть $f \in \mathscr{B}_\alpha[-1,1]$, $1 < \alpha < 9$. Согласно теореме 4.E функция $h(z) = \big(1+f(z)\big)/\big(1-f(z)\big)$, голоморфная в единичном круге $\mathbb{D}$ и отображающая его в правую полуплоскость $\mathbb{H} = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}\zeta > 0\}$, допускает представление в виде (4.100).

Рассмотрим функцию $g(\zeta) = h \circ L(\zeta)$, где $L(\zeta) = (\zeta - 1)/(\zeta + 1)$. Она отображает правую полуплоскость $\mathbb{H}$ в себя и, с учётом (4.100), имеет вид

$$g(\zeta) = \rho\biggl(\frac{\zeta}{\alpha} + \biggl(1 - \frac{1}{\alpha}\biggr)\zeta \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \varkappa}{(1 - \varkappa)\zeta + 1 + \varkappa}\, d\mu(\varkappa)\biggr),$$

при этом

$$g'(\zeta) = \rho\biggl(\frac{1}{\alpha} + \biggl(1 - \frac{1}{\alpha}\biggr) \int_{\mathbb{T}} \frac{(1 + \varkappa)^2}{\bigl((1 - \varkappa)\zeta + 1 + \varkappa)\bigr)^2}\, d\mu(\varkappa)\biggr).$$

Оценим снизу действительную часть производной функции g:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\bigl(g'(\zeta)\bigr) &= \rho\biggl(\frac{1}{\alpha} + \biggl(1 - \frac{1}{\alpha}\biggr) \operatorname{Re}\biggl(\int_{\mathbb{T}} \frac{(1 + \varkappa)^2}{\bigl((1 - \varkappa)\zeta + 1 + \varkappa)\bigr)^2}\, d\mu(\varkappa)\biggr)\biggr) \\
&= \rho\biggl(\frac{1}{\alpha} + \biggl(1 - \frac{1}{\alpha}\biggr) \int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re}\biggl(\frac{(1 + \varkappa)^2}{\bigl((1 - \varkappa)\zeta + 1 + \varkappa)\bigr)^2}\biggr)\, d\mu(\varkappa)\biggr) \\
&\geqslant \rho\biggl(\frac{1}{\alpha} + \biggl(1 - \frac{1}{\alpha}\biggr) \min_{\varkappa \in \mathbb{T}} \operatorname{Re}\biggl(\frac{(1 + \varkappa)^2}{\bigl((1 - \varkappa)\zeta + 1 + \varkappa)\bigr)^2}\biggr)\biggr).
\end{aligned}$$

Выполнив замену $t = \operatorname{tg}(\theta/2)$, где $\theta = \arg \varkappa$, получим

$$\operatorname{Re}\bigl(g'(\zeta)\bigr) \geqslant \rho\left(\frac{1}{\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \inf_{t \in \mathbb{R}} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{(1 - it\zeta)^2}\right)\right).$$

Обозначим $\operatorname{Re}\zeta = x$, $\operatorname{Im}\zeta = y$; тогда

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{(1 - it\zeta)^2}\right) = \frac{-(x^2 - y^2)t^2 + 2yt + 1}{\bigl((x^2 + y^2)t^2 + 2yt + 1\bigr)^2}.$$

Таким образом, оценка действительной части производной функции g имеет вид

$$\operatorname{Re}\bigl(g'(\zeta)\bigr) \geqslant \rho\biggl(\frac{1}{\alpha} - \biggl(1 - \frac{1}{\alpha}\biggr) \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{(x^2 - y^2)t^2 - 2yt - 1}{\bigl((x^2 + y^2)t^2 + 2yt + 1\bigr)^2}\biggr).$$

Теперь найдём теперь область значений переменных (x, y), для которой выполняется условие $\operatorname{Re}\bigl(g'(\zeta)\bigr) > 0$. Это условие справедливо в случае выполнения неравенства

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{(x^2 - y^2)t^2 - 2yt - 1}{\bigl((x^2 + y^2)t^2 + 2yt + 1\bigr)^2} < \frac{1}{\alpha - 1},$$

которое, в свою очередь, равносильно положительности многочлена (4.94) в точке (x, y) при всех $t \in \mathbb{R}$. Принимая во внимание лемму 4.26, заключаем, что

$\operatorname{Re}\bigl(g'(\zeta)\bigr) > 0$ в каждой точке ζ, принадлежащей области $\mathscr{C}(\alpha)$ (см. (4.95)). Область $\mathscr{C}(\alpha)$, очевидно, выпукла. Поэтому по теореме Носиро—Варшавского [89, гл. 2, §2.6, теорема 2.16] функция g однолистна в $\mathscr{C}(\alpha)$. Но тогда функция $f = L \circ g \circ L^{-1}$ однолистна в области $L(\mathscr{C}(\alpha))$, которая совпадает с областью $\mathscr{T}(\alpha)$ (см. (4.87)). Теорема доказана. □

Возможно ли дальнейшее увеличение области однолистности, и если возможно, то до какого размера? На этот вопрос частично отвечает следующий результат.

Доказательство теоремы 4.9. При каждом $s \in (-1, 1)$ рассмотрим функцию

$$f_s(z) = \frac{a(s)z^3 + b(s)z^2 + c(s)z + d(s)}{d(s)z^3 + c(s)z^2 + b(s)z + a(s)},$$

где

$$a(s) = (1 + \sqrt{\alpha})(s^2 + 1), \qquad b(s) = -2(\sqrt{\alpha} + 3)s,$$
$$c(s) = (3 - \sqrt{\alpha})(s^2 + 1), \qquad d(s) = 2(\sqrt{\alpha} - 1)s.$$

Функция f_s представима в виде композиции $f_s(z) = T_s^{-1} \circ f_0 \circ T_s(z)$, где

$$T_s(z) = \frac{z - s}{1 - sz}, \qquad f_0(z) = z\,\frac{z^2 - \frac{\sqrt{\alpha}-3}{\sqrt{\alpha}+1}}{1 - \frac{\sqrt{\alpha}-3}{\sqrt{\alpha}+1}\,z^2}.$$

Поскольку $s \in (-1, 1)$, то T_s является дробно-линейным преобразованием единичного круга $\mathbb{D}$ на себя. А так как $\alpha \in (1, 9)$, то функция f_0 отображает $\mathbb{D}$ в себя. Таким образом, композиция f_s принадлежит классу $\mathscr{B}$.

Легко проверить, что при каждом $s \in (-1, 1)$ функция f_s сохраняет вещественный диаметр, то есть функция f_s принадлежит классу $\mathscr{D}[-1, 1]$. Поскольку $f_s'(\pm 1) = \sqrt{\alpha}$, то $f_s \in \mathscr{D}_\alpha[-1, 1]$.

С другой стороны, непосредственные вычисления показывают, что функция f_s имеет нулевую производную в точках

$$z_{1,2}(s) = \frac{-2\sqrt[4]{\alpha} + p_1(\alpha) \pm i\,p_2(\alpha)s}{(-2\sqrt[4]{\alpha} + p_1(\alpha))s \pm ip_2(\alpha)},$$

где

$$p_1(\alpha) = \sqrt{(\sqrt{\alpha} - 1)(3 + \sqrt{\alpha})}, \qquad p_2(\alpha) = \sqrt{(\sqrt{\alpha} + 1)(3 - \sqrt{\alpha})}.$$

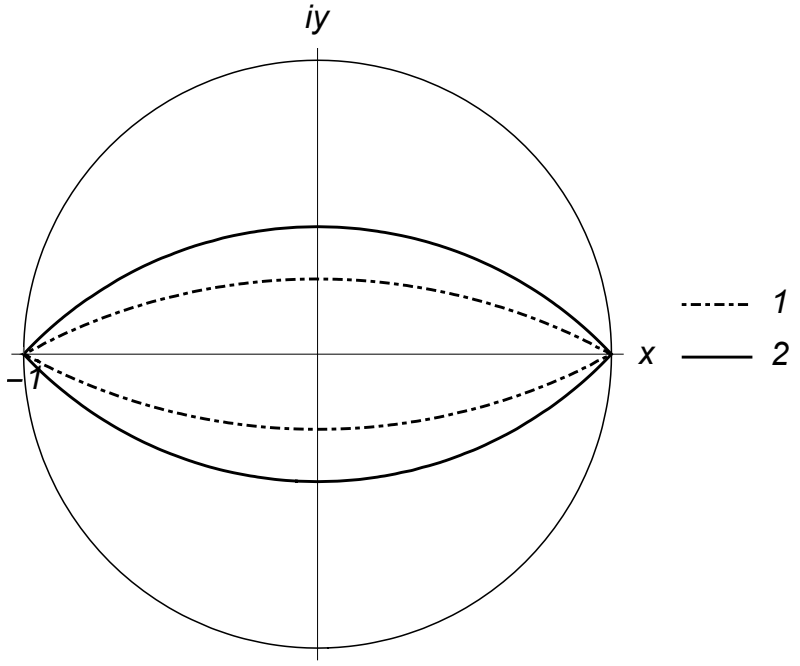


Рис. 4.8: Границы областей **1:** $\mathscr{T}(\alpha)$, **2:** $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$; $\alpha = 25/9$

Кривые $z_1(s)$ и $z_2(s)$, $s \in (-1, 1)$, представляют собой дуги окружностей — границу области $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$ (см. (4.91)). Теорема доказана. □

Ввиду того, что граничные точки области $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$ являются нулями производных функций из класса $\mathscr{D}_\alpha[-1, 1]$, каждая точка границы области $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$ является препятствием на пути распространения однолистности. Тем самым, теорема 4.9 даёт верхнюю оценку области однолистности для класса $\mathscr{D}_\alpha[-1, 1]$, и тем более — для класса $\mathscr{B}_\alpha[-1, 1]$.

Проанализируем разницу между верхней и нижней оценками в окрестности граничных значений параметра α. Поскольку границами областей $\mathscr{T}(\alpha)$ и $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$ (см. (4.87) и (4.91)) являются дуги окружностей (см. рис. 4.8), то достаточно сравнить тангенсы углов, образованных этими дугами с вещественной осью в точках $z = \pm 1$. Пусть $\varphi_1(\alpha)$ и $\varphi_2(\alpha)$ — углы, соответствующие областям $\mathscr{T}(\alpha)$ и $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$. Тогда справедливы следующие порядковые соотношения:

$$\operatorname{tg}\varphi_1(\alpha) \sim \frac{1}{\sqrt{\alpha - 1}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_2(\alpha) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha - 1}} \quad \text{при } \alpha \to 1 + 0;$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1(\alpha) \sim \frac{9 - \alpha}{16\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_2(\alpha) \sim \frac{\sqrt{9 - \alpha}}{3\sqrt{2}} \quad \text{при } \alpha \to 9 - 0.$$

При α, близких к 1, верхняя и нижняя оценки имеют один порядок, однако при α, близких к 9, зазор между верхней и нижней оценками очень большой. Пока не известно, можно ли усилить нижнюю оценку В. В. Горяйнова.

В то же время, как уже было отмечено, верхняя граница области однолистности построена при помощи функций, принадлежащих в реальности более узкому классу: все они сохраняют вещественный диаметр. В связи с этим целесообразно выяснить, нельзя ли на таких более узких классах существенно улучшить оценку снизу? Оказывается, это возможно, что и будет продемонстрировано далее.

4.3.4. Вспомогательные результаты

Установим серию вспомогательных результатов, необходимых для получения оценок областей однолистности на классах $\mathscr{D}_\alpha[-1,1]$.

Для каждого α, $1<\alpha<9$, рассмотрим многочлен

$$\Psi(x,y,t)=\left(x^2+y^2\right)^2t^4+(5-\alpha)(x^2+y^2)xt^3 + \left((7-\alpha)\,x^2+(5-3\alpha)\,y^2\right)t^2+(3+\alpha)\,xt+\alpha \quad (4.101)$$

и отметим некоторые его свойства, которые потребуются в дальнейшем.

Лемма 4.27. *Для всех $x>0$ и $t\geqslant 0$ выполняется неравенство $\Psi(x,0,t)>0$.*

Доказательство. Разложим на множители многочлен $\Psi(x,0,t)$:

$$\begin{aligned}\Psi(x,0,t)&=x^4t^4+(5-\alpha)x^3t^3+(7-\alpha)x^2t^2+(3+\alpha)xt+\alpha\\&=(xt+1)^2(x^2t^2+(3-\alpha)xt+\alpha).\end{aligned}$$

Поскольку $x>0$, $t\geqslant 0$, то первый множитель положителен. Положительность второго множителя при всех $\alpha\in(1,9)$ следует из отрицательности его дискриминанта, равного $(\alpha-1)(\alpha-9)$. Лемма доказана. □

Лемма 4.28. *Для всех $y\in\mathbb{R}$, $t\geqslant 0$ и $\alpha\in(1,25/9)$ выполняется неравенство $\Psi(0,y,t)>0$.*

Доказательство. Многочлен (4.101) при $x=0$ имеет вид

$$\Psi(0,y,t)=y^4t^4+(5-3\alpha)y^2t^2+\alpha.$$

Дискриминант соответствующего квадратного уравнения равен $(\alpha-1)(9\alpha-25)$ и отрицателен при $\alpha\in(1,25/9)$. Лемма доказана. □

Рассмотрим области

$$\mathscr{H}_1 = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re}\zeta > 0\}, \tag{4.102}$$

$$\mathscr{H}_2(\alpha) = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon\ -\operatorname{arcctg}\sqrt{k(\alpha)} < \arg\zeta < \operatorname{arcctg}\sqrt{k(\alpha)}\}, \tag{4.103}$$

$$\mathscr{H}_3(\alpha) = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon\ -\pi + \operatorname{arcctg}\sqrt{k(\alpha)} < \arg\zeta < \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{k(\alpha)}\}, \tag{4.104}$$

где $k(\alpha)$ определяется формулой (4.93), $1 < \alpha < 9$. Докажем основное свойство многочлена (4.101).

Лемма 4.29. *Для всех $t \geqslant 0$ в области $\mathscr{H}_1$ при $\alpha = 25/9$, в области $\mathscr{H}_2(\alpha)$ при $\alpha \in (25/9, 9)$ и в области $\mathscr{H}_3(\alpha)$ при $\alpha \in (1, 25/9)$ выполняется неравенство*

$$\Psi(x, y, t) > 0.$$

Доказательство. В каждой точке (x, y) плоскости $\mathbb{R}^2$ с разрезом вдоль отрицательной полуоси абсцисс многочлен $\Psi(x, y, t)$ имеет четвёртую степень относительно t, так как коэффициент перед t^4 нигде не обращается в нуль. Перейдём к рассмотрению соответствующего приведённого многочлена

$$P_{x,y}(t) = t^4 + \frac{(5-\alpha)x}{x^2+y^2}\,t^3 + \frac{(7-\alpha)x^2 + (5-3\alpha)y^2}{(x^2+y^2)^2}\,t^2 + \frac{(3+\alpha)x}{(x^2+y^2)^2}\,t + \frac{\alpha}{(x^2+y^2)^2}. \tag{4.105}$$

Свободный член многочлена (4.105) положителен, поэтому для доказательства неравенства $\Psi(x, y, t) > 0$ достаточно показать, что многочлен (4.105) не имеет положительных корней.

Коэффициенты многочлена (4.105) таковы, что согласно лемме 4.27 на положительной полуоси абсцисс у него нет положительных корней. Ввиду непрерывности коэффициентов изменение состава положительных корней многочлена (4.105) может произойти только при появлении кратного корня. Условия появления кратного корня и будут задавать предполагаемую границу области, в которой многочлен $\Psi(x, y, t)$ положителен.

С целью локализации местоположения кратных корней, вычислим дискриминант. Подставляя в формулу дискриминанта многочлена четвёртой степени (см. (4.32)) коэффициенты многочлена (4.105), после упрощений получим

$$D\big(c_3(x,y), c_2(x,y), c_1(x,y), c_0(x,y)\big) = \frac{4(\alpha-1)^2 y^2\, D_\alpha(x,y)}{(x^2+y^2)^{10}}, \tag{4.106}$$

где

$$D_\alpha(x,y) = -16(\alpha-1)^3(9-\alpha)x^6 - 12(\alpha-1)^2(\alpha+3)(23-3\alpha)x^4y^2 + 3(\alpha-1)(\alpha+15)(9\alpha^2-66\alpha+25)x^2y^4 + 4\alpha(9\alpha-25)^2y^6.$$

При $\alpha = 25/9$ выражение $D_\alpha(x,y)$ принимает вид

$$D_{25/9}(x,y) = -\frac{16384x^2\left(224x^4+1287x^2y^2+3375y^4\right)}{6561}.$$

Очевидно, дискриминант (4.106) многочлена (4.105) при $\alpha = 25/9$ в области $\mathscr{H}_1$, за исключением оси абсцисс, в нуль не обращается. Отсюда, принимая во внимание лемму 4.27 и непрерывность коэффициентов многочлена (4.105), заключаем, что неравенство $\Psi(x,y,t) > 0$ справедливо во всей области $\mathscr{H}_1$. Первое утверждение леммы доказано.

Перейдём к доказательству других утверждений леммы. Поделив выражение для $D_\alpha(x,y)$ на y^6 и сделав замену $u = x^2/y^2$, приходим к кубическому уравнению

$$16(\alpha-1)^3(9-\alpha)u^3 + 12(\alpha-1)^2(\alpha+3)(23-3\alpha)u^2 - 3(\alpha-1)(\alpha+15)\left(9\alpha^2-66\alpha+25\right)u - 4\alpha(9\alpha-25)^2 = 0. \quad (4.107)$$

Выполнив замену

$$u = v - \frac{(\alpha+3)(23-3\alpha)}{4(\alpha-1)(9-\alpha)},$$

получим соответствующее кубическое уравнение в канонической форме

$$64(\alpha-1)^3(9-\alpha)^3v^3 + 864(\alpha-1)(9-\alpha)(\alpha^3-19\alpha^2+99\alpha-113)v + 27(\alpha^6-38\alpha^5+559\alpha^4-4564\alpha^3+25039\alpha^2-79398\alpha+50209) = 0. \quad (4.108)$$

Дискриминант уравнения (4.108), равный

$$\frac{3^6(\alpha^3-19\alpha^2+99\alpha+175)^3}{2^{14}(\alpha-1)^5(\alpha-9)^4},$$

положителен при $\alpha \in (1,9)$, так как функция $f(\alpha) = \alpha^3-19\alpha^2+99\alpha+175$ на интервале $(1,9)$ имеет единственный экстремум — точку максимума при $\alpha = 11/3$, при этом значения функции на концах интервала совпадают и положительны. Положительность дискриминанта означает, что уравнение (4.108), а следовательно и уравнение (4.107), имеет единственный вещественный корень.

Локализуем расположение этого корня. Подставим $k(\alpha)$, заданное по формуле (4.93), в левую часть уравнения (4.107). Получим выражение

$$\frac{(\alpha-1)(9\alpha-25)^3 N(\alpha)}{131072\,(9-\alpha)\,(85-12\sqrt{\alpha})^3\,(3\sqrt{a}+5)\,(\sqrt{a}+1)\,(\sqrt{a}+3)}, \tag{4.109}$$

где

$$\begin{aligned} N(\alpha) = {} & 32136831\alpha^4 - 231597306\alpha^{7/2} + 42687450\alpha^3 \\ & + 2953353198\alpha^{5/2} - 4500951688\alpha^2 - 10763607790\alpha^{3/2} \\ & + 26651894150\alpha - 21970719750\alpha^{1/2} + 31360595625. \end{aligned}$$

Выражение $N(\alpha)$ при $\alpha \in (1,9)$ положительно. Действительно, сделав замену $\beta = \sqrt{\alpha}$, получим многочлен $N(\beta)$ восьмой степени, который представим в виде суммы слагаемых, положительных при $\beta \in (1,3)$:

$$\begin{aligned} N(\beta) = {} & 3^4\,\beta(\beta-3)^2\big(396751\,\beta(\beta-3)^4 + 4282292\,(\beta-2)^4\big) + \\ & + 3\,(\beta-3)^4\big(186778131\,(\beta-1)^2 + 18601876\,\beta\big) + \\ & + 4(\beta-3)^2\big(280317292\,\beta(3-\beta) + 918042635\,(\beta-1) + 437412979\big) + \\ & + 63\cdot 2^{15}(1587-4\beta). \end{aligned}$$

Отсюда следует отрицательность выражения (4.109) при $\alpha \in (1, 25/9)$ и его положительность при $\alpha \in (25/9, 9)$. Второе утверждение леммы доказано.

Рассмотрим случай $\alpha \in (25/9, 9)$. Тогда левая часть уравнения (4.107) при $u = k(\alpha)$ положительна, а при $u = 0$ отрицательна. Следовательно, корень уравнения (4.107) расположен на интервале $(0, k(\alpha))$. Из единственности корня следует его отсутствие на луче $(k(\alpha), +\infty)$. Это означает, что внутри угла $|y| < x/\sqrt{k(\alpha)}$, за исключением точек оси абсцисс, дискриминант (4.106) многочлена (4.105) в нуль не обращается. С учётом леммы 4.27 и соображений непрерывности получаем, что в области $\mathscr{H}_2(\alpha)$ при $\alpha \in (25/9, 9)$ верно неравенство $\Psi(x, y, t) > 0$.

Пусть теперь $\alpha \in (1, 25/9)$. Тогда левая часть уравнения (4.107) отрицательна при $u = k(\alpha)$, а при $u \to +\infty$ положительна. Значит, корень уравнения (4.107) расположен на луче $(k(\alpha), +\infty)$. В силу единственности корня его нет на интервале $(0, k(\alpha))$. Таким образом, в области $|y| > -x/\sqrt{k(\alpha)}$, представляющей собой угол, больший развёрнутого, дискриминант (4.106) многочлена (4.105) обращается в нуль только на оси абсцисс и на лучах $y = \pm x/\sqrt{u^*(\alpha)}$,

$x > 0$, где $u^*(\alpha)$ — корень уравнения (4.107). Эти лучи разбивают область $|y| > -x/\sqrt{k(\alpha)}$ на три сектора: сектор S_1 с границей $y = \pm x/\sqrt{u^*(\alpha)}$ при $x > 0$; сектор S_2 с границей $y = x/\sqrt{u^*(\alpha)}$, $x > 0$, и $y = -x/\sqrt{k(\alpha)}$, $x < 0$; сектор S_3 с границей $y = x/\sqrt{k(\alpha)}$, $x < 0$, и $y = -x/\sqrt{u^*(\alpha)}$, $x > 0$. Принимая во внимание лемму 4.27, получаем, что многочлен (4.105) в секторе S_1 не имеет положительных корней. Их также нет в силу леммы 4.28 и в секторах S_2, S_3. Из соображений непрерывности следует, что положительные корни отсутствуют также и на самих лучах $y = \pm x/\sqrt{u^*(\alpha)}$, $x > 0$. Тем самым, многочлен (4.105) не имеет положительных корней во всей области $|y| > -x/\sqrt{k(\alpha)}$. Другими словами, в области $\mathscr{H}_3(\alpha)$ при $\alpha \in (1, 25/9)$ выполняется неравенство $\Psi(x, y, t) > 0$. Третье утверждение, а вместе с ним и сама лемма доказаны. □

4.3.5. Область однолистности в случае граничных неподвижных точек и инвариантного диаметра

В этом пункте мы докажем основной результат данного параграфа. Сначала найдём оценку снизу точной области однолистности на классе $\mathscr{D}_\alpha[-1, 1]$. Для этого нам потребуется интегральное представление для класса $\mathscr{D}[-1, 1]$, уточняющее теорему 4.E в случае инвариантности вещественного диаметра.

Теорема 4.10 (О. С. Кудрявцева)**.** *Функция $f \in \mathscr{B}$ принадлежит $\mathscr{D}[-1, 1]$ в том и только том случае, если функция $h(z) = \big(1+f(z)\big)/\big(1-f(z)\big)$ допускает представление в виде*

$$h(z) = \rho\left(\lambda\frac{1+z}{1-z} + (1-\lambda)\frac{1-z^2}{2}\int_{\mathbb{T}}\frac{1+\operatorname{Re}\varkappa}{(1-\varkappa z)(1-\overline{\varkappa}z)}\,d\mu(\varkappa)\right), \qquad (4.110)$$

где $\rho > 0$, $\lambda \in (0, 1)$, μ — вероятностная мера на единичной окружности $\mathbb{T}$ со свойством $\mu(\{-1\}) = 0$. При этом $f'(-1) = \rho$, $f'(1)f'(-1) \leqslant 1/\lambda$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{D}[-1, 1]$. Так как $\mathscr{D}[-1, 1]$ является подклассом класса $\mathscr{B}[-1, 1]$, то в силу теоремы 4.E функция $h(z) = \big(1 + f(z)\big)/\big(1 - f(z)\big)$ представима в виде (4.100). С другой стороны, сохранение функцией f вещественного диаметра означает, что в круге $\mathbb{D}$ выполняется равенство $\overline{h(\overline{z})} = h(z)$, которое влечёт справедливость для h, наряду с (4.100), следующего представления:

$$h(z) = \rho\left(\lambda\,\frac{1+z}{1-z} + (1-\lambda)\frac{1+z}{2}\int_{\mathbb{T}}\frac{1+\overline{\varkappa}}{1-\overline{\varkappa}z}\,d\mu(\varkappa)\right), \qquad (4.111)$$

где мера $\mu(\varkappa)$ и величины ρ и λ те же, что и в (4.100). Складывая равенства (4.100) и (4.111), получаем для h интегральное представление (4.110).

Обратно, пусть функция h имеет представление (4.110) с некоторыми $\rho > 0$, $\lambda \in (0,1)$ и вероятностной мерой μ на $\mathbb{T}$. Покажем, что в этом случае функция $f(z) = \big(h(z)-1\big)/\big(h(z)+1\big)$ принадлежит классу $\mathscr{D}[-1,1]$.

Поскольку при $z \in \mathbb{D}$ и $\varkappa \in \mathbb{T}$ выполняется неравенство

$$2\operatorname{Re}\left(\frac{(1-z^2)(1+\operatorname{Re}\varkappa)}{(1-\varkappa z)(1-\overline{\varkappa}z)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(1+z)(1+\varkappa)}{1-\varkappa z}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{(1+z)(1+\overline{\varkappa})}{1-\overline{\varkappa}z}\right)$$
$$= \big(1-|z|^2\big)\,(1+\operatorname{Re}\varkappa)\left(\frac{1}{|1-\varkappa z|^2}+\frac{1}{|1-\overline{\varkappa}z|^2}\right) \geqslant 0,$$

то $\operatorname{Re}\big(h(z)\big) > 0$ при $z \in \mathbb{D}$ и функция f принадлежит классу $\mathscr{B}$.

Запишем (4.110) в следующем виде:

$$h(z) = \rho\frac{1+z}{1-z}\left(\lambda + (1-\lambda)\int_{\mathbb{T}} \frac{(1-z)^2(1+\operatorname{Re}\varkappa)}{2(1-\varkappa z)(1-\overline{\varkappa}z)}\,d\mu(\varkappa)\right). \tag{4.112}$$

Так как при всех $x \in (-1,1)$ и $\varkappa \in \mathbb{T}$ справедлива оценка

$$\left|\frac{(1-x)^2\,(1+\operatorname{Re}\varkappa)}{2(1-\varkappa x)(1-\overline{\varkappa}x)}\right| = \frac{(1-x)^2(1+\operatorname{Re}\varkappa)}{2(1-2x\operatorname{Re}\varkappa+x^2)} = 1 - \frac{(1+x)^2(1-\operatorname{Re}\varkappa)}{2(1-2x\operatorname{Re}\varkappa+x^2)} \leqslant 1,$$

то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости в (4.112) можно совершить радиальный предельный переход под знаком интеграла. С учётом предельных соотношений

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^2(1+\operatorname{Re}\varkappa)}{2(1-\varkappa x)(1-\overline{\varkappa}x)} = \begin{cases} 0 & \text{при } \varkappa \neq 1, \\ 1 & \text{при } \varkappa = 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(1-x)^2(1+\operatorname{Re}\varkappa)}{2(1-\varkappa x)(1-\overline{\varkappa}x)} = 1$$

получаем, что значение предела второго сомножителя в (4.112) при $x \to \pm 1$ принадлежит отрезку $[\lambda, 1]$. Таким образом,

$$\angle\lim_{z\to 1} h(z) = \infty, \quad \angle\lim_{z\to -1} h(z) = 0.$$

Тем самым, точки $z = \pm 1$ являются неподвижными для функции f. Наконец, опять же с использованием приведённых выше предельных соотношений и теоремы Лебега, получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1+x}h(x) = \rho\lambda + \rho(1-\lambda)\mu\{1\} \geqslant \rho\lambda, \quad \lim_{x\to -1}\frac{1-x}{1+x}h(x) = \rho\lambda + \rho(1-\lambda) = \rho.$$

Следовательно, имеют место следующие соотношения для угловых производных функции f в неподвижных точках:

$$\frac{1}{f'(1)} = \angle\lim_{z\to 1}\frac{1-z}{1-f(z)} = \angle\lim_{z\to 1}\frac{(1-z)(1+f(z))}{(1+z)(1-f(z))} = \angle\lim_{z\to 1}\frac{1-z}{1+z}h(z) \geqslant \rho\lambda,$$
$$f'(-1) = \angle\lim_{z\to -1}\frac{1+f(z)}{1+z} = \angle\lim_{z\to -1}\frac{(1-z)(1+f(z))}{(1+z)(1-f(z))} = \angle\lim_{z\to -1}\frac{1-z}{1+z}h(z) = \rho.$$

Таким образом, функция f принадлежит классу $\mathscr{B}[-1,1]$ и в неподвижных точках имеет угловые производные, удовлетворяющие требуемым условиям: $f'(-1)=\rho$, $f'(1)f'(-1)\leqslant 1/\lambda$. Осталось заметить, что равенство $h(x)=\overline{h(x)}$ при $x\in(-1,1)$ сразу вытекает из (4.110), то есть функция f сохраняет вещественный диаметр. Следовательно, $f\in\mathscr{D}[-1,1]$. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 4.11. Пусть $f\in\mathscr{D}_\alpha[-1,1]$, $1<\alpha<9$. Согласно теореме 4.10 функция $h(z)=\big(1+f(z)\big)/\big(1-f(z)\big)$ представима в виде (4.110). Тогда функция $g(\zeta)=h\circ L(\zeta)$, где $L(\zeta)=(\zeta-1)/(\zeta+1)$, отображает правую полуплоскость $\mathbb{H}$ в себя и имеет вид

$$g(\zeta)=\rho\left(\frac{\zeta}{\alpha}+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\zeta\int_{\mathbb{T}}\frac{1+\operatorname{Re}\varkappa}{1+\zeta^2+\operatorname{Re}\varkappa(1-\zeta^2)}d\mu(\varkappa)\right).$$

Следовательно, производная функции g имеет вид

$$g'(\zeta)=\rho\left(\frac{1}{\alpha}+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\int_{\mathbb{T}}\frac{(1+\operatorname{Re}\varkappa)\big(1-\zeta^2+\operatorname{Re}\varkappa(1+\zeta^2)\big)}{\big(1+\zeta^2+\operatorname{Re}\varkappa(1-\zeta^2)\big)^2}d\mu(\varkappa)\right).$$

Оценим снизу действительную часть производной функции g:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\big(g'(\zeta)\big)\\
&=\rho\left(\frac{1}{\alpha}+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\operatorname{Re}\left(\int_{\mathbb{T}}\frac{(1+\operatorname{Re}\varkappa)\big(1-\zeta^2+\operatorname{Re}\varkappa(1+\zeta^2)\big)}{\big(1+\zeta^2+\operatorname{Re}\varkappa(1-\zeta^2)\big)^2}\,d\mu(\varkappa)\right)\right)\\
&=\rho\left(\frac{1}{\alpha}+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\int_{\mathbb{T}}\operatorname{Re}\left(\frac{(1+\operatorname{Re}\varkappa)\big(1-\zeta^2+\operatorname{Re}\varkappa(1+\zeta^2)\big)}{\big(1+\zeta^2+\operatorname{Re}\varkappa(1-\zeta^2)\big)^2}\right)d\mu(\varkappa)\right)\\
&\geqslant\rho\left(\frac{1}{\alpha}+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\min_{\varkappa\in\mathbb{T}}\operatorname{Re}\left(\frac{(1+\operatorname{Re}\varkappa)\big(1-\zeta^2+\operatorname{Re}\varkappa(1+\zeta^2)\big)}{\big(1+\zeta^2+\operatorname{Re}\varkappa(1-\zeta^2)\big)^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Выполнив замену $l=\operatorname{tg}(\theta/2)$, где $\theta=\arg\varkappa$, получим

$$\operatorname{Re}\big(g'(\zeta)\big)\geqslant\rho\left(\frac{1}{\alpha}+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\inf_{l\in\mathbb{R}}\operatorname{Re}\left(\frac{1-\zeta^2l^2}{(1+\zeta^2l^2)^2}\right)\right).$$

Положим $\zeta^2 = w = x + iy$ и отделим действительную часть в правой части последнего неравенства. Имеем

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1-\zeta^2 l^2}{(1+\zeta^2 l^2)^2}\right) = \frac{-(x^3+xy^2)l^6 - (x^2+3y^2)l^4 + xl^2 + 1}{\big((x^2+y^2)l^4 + 2xl^2 + 1\big)^2}.$$

Таким образом, для действительной части производной функции g получаем следующую оценку:

$$\operatorname{Re}\big(g'(\zeta)\big) \geqslant \rho\left(\frac{1}{\alpha} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \sup_{l\in\mathbb{R}} \frac{(x^3+xy^2)l^6 + (x^2+3y^2)l^4 - xl^2 - 1}{\big((x^2+y^2)l^4 + 2xl^2 + 1\big)^2}\right).$$

Выясним, при каких ζ верно неравенство $\operatorname{Re}\big(g'(\zeta)\big) > 0$. Очевидно, что это неравенство выполняется, когда

$$\sup_{l\in\mathbb{R}} \frac{(x^3+xy^2)l^6 + (x^2+3y^2)l^4 - xl^2 - 1}{\big((x^2+y^2)l^4 + 2xl^2 + 1\big)^2} < \frac{1}{\alpha - 1},$$

что в свою очередь равносильно справедливости при всех $l \in \mathbb{R}$ неравенства

$$(x^2+y^2)^2 l^8 + (5-\alpha)(x^2+y^2)xl^6 + \big((7-\alpha)x^2 + (5-3\alpha)y^2\big)\, l^4 + (3+\alpha)xl^2 + \alpha > 0.$$

Выполнение при всех $l \in \mathbb{R}$ последнего неравенства эквивалентно положительности многочлена (4.101) при всех $t \geqslant 0$. Области положительности многочлена (4.101) определены в лемме 4.29, это области $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2(\alpha)$, $\mathscr{H}_3(\alpha)$ (см. (4.102)—(4.104)) при соответствующих значениях α.

Вспоминая, что $\operatorname{Re}\zeta^2 = x$, $\operatorname{Im}\zeta^2 = y$, отобразим плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль вещественной отрицательной полуоси посредством $\zeta = \sqrt{w}$ в правую полуплоскость. При этом образами областей $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2(\alpha)$, $\mathscr{H}_3(\alpha)$ являются соответственно секторы

$$S_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| < x\big\},$$

$$S_2(\alpha) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| < \frac{x}{\sqrt{1+k(\alpha)} + \sqrt{k(\alpha)}}\right\},$$

$$S_3(\alpha) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| < \frac{x}{\sqrt{1+k(\alpha)} - \sqrt{k(\alpha)}}\right\}.$$

С учётом леммы 4.29 в точках этих секторов значения действительной части производной функции g положительны. Кроме того, поскольку секторы S_1, $S_2(\alpha)$, $S_3(\alpha)$ являются выпуклыми областями, то согласно теореме Носиро—Варшавского функция g однолистна в каждом из них. Значит, функция

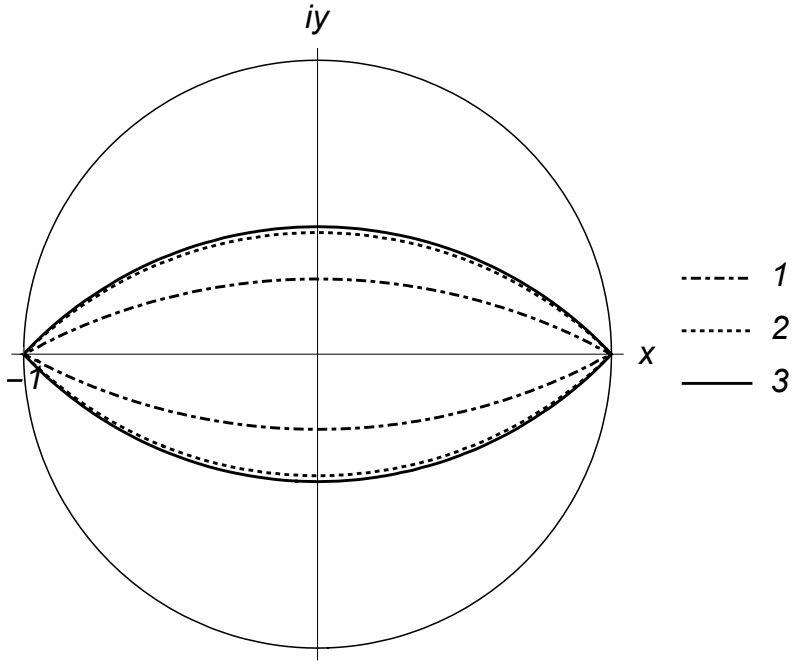


Рис. 4.9: Границы областей **1:** $\mathscr{T}(\alpha)$, **2:** $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$, **3:** $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$; $\alpha = 25/9$

$f = L \circ g \circ L^{-1}$ однолистна в образах этих секторов при отображении L, которые при соответствующих значениях α совпадают с областью $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$ (см. (4.92)). Теорема доказана. □

Проанализируем разницу между верхней и нижней оценками точной области однолистности в окрестности граничных значений параметра α. Оказывается, оценка снизу на классе $\mathscr{D}_\alpha[-1,1]$ не просто даёт бóльшую область в сравнении с классом $\mathscr{B}_\alpha[-1,1]$, что ожидаемо, но и асимптотически близка к верхней оценке как при $\alpha \to 1+0$, так и при $\alpha \to 9-0$. Поскольку границами областей $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$ и $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$ (см. (4.92) и (4.91)) являются дуги окружностей, то достаточно сравнить тангенсы углов, образованных этими дугами с вещественной осью в точках $z = \pm 1$. Обозначая через $\varphi_3(\alpha)$ угол, который образует граница области $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$ с вещественной осью в точках $z = \pm 1$, имеем

$$\operatorname{tg}\varphi_2(\alpha) \sim \operatorname{tg}\varphi_3(\alpha) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha-1}} \quad \text{при } \alpha \to 1+0,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2(\alpha) \sim \operatorname{tg}\varphi_3(\alpha) \sim \frac{\sqrt{9-\alpha}}{3\sqrt{2}} \quad \text{при } \alpha \to 9-0.$$

Напомним, что через $\varphi_2(\alpha)$ мы ранее обозначили угол между вещественной осью и границей области $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$. Данные соотношения полезно сравнить с полученными в пункте 4.3.3 (см. рис. 4.9).

Замечание. При каждом $q \in (-1, 1)$ рассмотрим функцию

$$f_q(z) = \frac{\left(1 + q^2\right) z^3 - 3qz^2 + q}{qz^3 - 3qz + 1 + q^2}.$$

Очевидно, что функция f_q принадлежит классу $\mathscr{D}_9[-1, 1]$. При этом $f_q'(q) = 0$. Последнее означает, что, какова бы ни была окрестность произвольной точки вещественного диаметра, всегда найдётся функция из класса $\mathscr{D}_9[-1, 1]$, не однолистная в этой окрестности. Таким образом, верхнюю границу для параметра α улучшить нельзя, даже если ограничиться поиском областей однолистности, содержащих какой-либо фрагмент вещественного диаметра.

Отметим, что точка $z = q$ является неподвижной точкой функции f_q. Отсюда следует, что в контексте задачи нахождения нетривиальных областей однолистности выделение из класса $\mathscr{D}_\alpha[-1, 1]$ подкласса функций с дополнительной внутренней неподвижной точкой не приведёт к дальнейшему расширению области однолистности.

Литература

[1] *Агаев, Г. Н.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах / Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн. – Баку : Изд-во Элм, 1981. – 180 с.

[2] *Авхадиев, Ф. Г.* Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций / Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев // УМН. – 1975. – Т. 30, № 4 (184). – С. 3–60.

[3] *Авхадиев, Ф. Г.* Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения / Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев, А. М. Елизаров // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. ВИНИТИ, М. – 1987. – Т. 25. – С. 3–121.

[4] *Авхадиев, Ф. Г.* Достижения и проблемы в достаточных условиях конечнолистности аналитических функций / Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев // Изв. вузов. Матем. – 1986. – № 10. – С. 3–16.

[5] *Алексич, Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов / Г. Алексич. – М. : ИИЛ, 1963. – 360 с.

[6] *Бари, Н. К.* Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М. : Физматгиз, 1961. – 936 с.

[7] *Бочкарёв, С. В.* Перестановки рядов Фурье—Уолша / С. В. Бочкарёв // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1979. – Т. 43, № 5. – С. 1025–1041.

[8] *Валирон, Ж.* Аналитические функции / Ж. Валирон. – М. : ГИТТЛ, 1957. – 236 с.

[9] *Голубов, Б. И.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения / Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов. – М. : ЛКИ, 2008. – 352 с.

[10] *Голузин, Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г. М. Голузин. – М. : Наука, 1966. – 628 с.

[11] *Горяйнов, В. В.* Дробные итерации аналитических в единичном круге функций с заданными неподвижными точками / В. В. Горяйнов // Матем. сб. – 1991. – Т. 182, № 9. – С. 1281–1299.

[12] *Горяйнов, В. В.* Функция Кёнигса и дробное итерирование вероятностных производящих функций / В. В. Горяйнов // Матем. сб. – 2002. – Т. 193, № 7. – С. 69–86.

[13] *Горяйнов, В. В.* Полугруппы аналитических функций в анализе и приложениях / В. В. Горяйнов // УМН. – 2012. – Т. 67, № 6(408). – С. 5–52.

[14] *Горяйнов, В. В.* Эволюционные семейства конформных отображений с неподвижными точками и уравнение Лёвнера—Куфарева / В. В. Горяйнов // Матем. сб. – 2015. – Т. 206, № 1. – С. 39–68.

[15] *Горяйнов, В. В.* Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками / В. В. Горяйнов // Матем. сб. – 2017. – Т. 208, № 3. – С. 54–71.

[16] *Горяйнов, В. В.* Голоморфные отображения полосы в себя с ограниченным искажением на бесконечности / В. В. Горяйнов // Тр. МИАН. – 2017. – Т. 298. – С. 101–111.

[17] *Дженкинс, Дж.* Однолистные функции и конформные отображения / Дж. Дженкинс. – М. : ИЛ, 1962. – 265 с.

[18] *Горяйнов, В. В.* Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса / В. В. Горяйнов, О. С. Кудрявцева // Матем. сб. – 2011. – Т. 202, № 7. – С. 43–74.

[19] *Дубинин, В. Н.* К неравенству Шварца на границе для регулярных в круге функций / В. Н. Дубинин // Аналитическая теория чисел и теория функций. 18, Зап. научн. сем. ПОМИ, СПб. – 2002. – Т. 286. – С. 74–84.

[20] *Дубинин, В. Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного / В. Н. Дубинин. – Владивосток : Дальнаука, 2009. – 390 с.

[21] *Дубинин, В. Н.* Производная Шварца и покрытие дуг пучка окружностей голоморфными функциями / В. Н. Дубинин // Матем. заметки. – 2015. – Т. 98, № 6. – С. 865–871.

[22] *Дюжев, Е. М.* Об оценке норм матриц с элементами постоянными в двоичных блоках / Е. М. Дюжев // Матем. заметки. – 2018. – Т. 104, № 5. – С. 771–774.

[23] *Дюжев, Е. М.* Об оценке норм матриц с произвольными элементами, постоянными в двоичных блоках / Е. М. Дюжев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. – 2020. – № 3. – С. 46–48.

[24] *Зигмунд, А.* Тригонометрические ряды, т. I, II / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – 615 с., 537 с.

[25] *Карагулян, Г. А.* О множителях Вейля переставленной тригонометрической системы / Г. А. Карагулян // Матем. сб. – 2020. – Т. 211, № 12. – С. 49–82.

[26] *Качмаж, С.* Теория ортогональных рядов / С. Качмаж, Г. Штейнгауз. – М. : ГИФМЛ, 1958. – 508 с.

[27] *Кашин, Б. С.* О двоичных аналогах матриц Гильберта / Б. С. Кашин // УМН. – 2016. – Т. 71, № 6(432). – С. 155–156.

[28] *Кашин, Б. С.* Ортогональные ряды / Б. С. Кашин, А. А. Саакян. – М. : АФЦ, 1999. – 550 с.

[29] *Кудрявцева, О. С.* Голоморфные отображения круга в себя с инвариантным диаметром и ограниченным искажением / О. С. Кудрявцева // Изв. вузов. Матем. – 2015. – № 8. – С. 51–63.

[30] *Кудрявцева, О. С.* Аналог уравнения Лёвнера—Куфарева для полугруппы конформных отображений круга в себя с неподвижными точками и инвари-

антным диаметром / О. С. Кудрявцева // Матем. заметки. – 2017. – Т. 102, № 2. – С. 316–320.

[31] *Кудрявцева, О. С.* Двусторонние оценки областей однолистности классов голоморфных отображений круга в себя с двумя неподвижными точками / О. С. Кудрявцева, А. П. Солодов // Матем. сб. – 2019. – Т. 210, № 7. – С. 120–144.

[32] *Кудрявцева, О. С.* Двусторонняя оценка областей однолистности голоморфных отображений круга в себя с инвариантным диаметром / О. С. Кудрявцева, А. П. Солодов // Изв. вузов. Матем. – 2019. – № 7. – С. 91—95.

[33] *Кудрявцева, О. С.* Асимптотически точная двусторонняя оценка областей однолистности голоморфных отображений круга в себя с инвариантным диаметром / О. С. Кудрявцева, А. П. Солодов // Матем. сб. – 2020. – Т. 211, № 11. – С. 96–117.

[34] *Кузьмина, Г. В.* Численное определение радиусов однолистности аналитических функций / Г. В. Кузьмина // Тр. МИАН СССР. – 1959. – Т. 53. – С. 192–235.

[35] *Кузьмина, Г. В.* Методы геометрической теории функций. I / Г. В. Кузьмина // Алгебра и анализ. – 1997. – Т. 9, № 3. – С. 41–103.

[36] *Кузьмина, Г. В.* Методы геометрической теории функций. II / Г. В. Кузьмина // Алгебра и анализ. – 1997. – Т. 9, № 5. – С. 1–50.

[37] *Лебедев, Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций / Н. А. Лебедев. – М. : Наука, 1975. – 336 с.

[38] *Меньшов, Д. Е.* Избранные труды: математика / Отв. ред. П. Л. Ульянов. – М. : Факториал, 1997. – 480 с.

[39] *Мацаев, В. И.* Об одном классе вполне непрерывных операторов / В. И. Мацаев // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 139, № 3. – С. 548–551.

[40] *Милин, И. М.* Однолистные функции и ортонормированные системы / И. М. Милин. – М. : Наука, 1971. – 256 с.

[41] *Наймарк, М. А.* Нормированные кольца / М. А. Наймарк. – М. : Физматлит, 2010. – 688 с.

[42] *Никольская, Л. Н.* Тёплицевы и ганкелевы матрицы как мультипликаторы Адамара—Шура / Л. Н. Никольская, Ю. Б. Фарфоровская // Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15, № 6. – С. 141–160.

[43] *Попов, А. Ю.* Оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами некоторых классов / А. Ю. Попов // Матем. заметки. – 2003. – Т. 74, № 6. – С. 877–888.

[44] *Попов, А. Ю.* Точная оценка снизу верхнего предела отношения суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами к её мажоранте / А. Ю. Попов, А. П. Солодов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Мех. – 2014. – № 4. – С. 51–55.

[45] *Попов, А. Ю.* Об отрицательной части сумм рядов по синусам с квазимонотонными коэффициентами / А. Ю. Попов, А. П. Солодов // Матем. сб. – 2017. – Т. 208, № 6. – С. 146–169.

[46] *Попов, А. Ю.* Оценки с точными константами сумм некоторых классов рядов по синусам с монотонными коэффициентами через мажоранту Салема / А. Ю. Попов, А. П. Солодов // Матем. заметки. – 2018. – Т. 104, № 5. – С. 725–736.

[47] *Прасолов, В. В.* Многочлены / В. В. Прасолов. – М. : МЦНМО, 2003. – 336 с.

[48] *Сенета, Е.* Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета. – М. : Наука, 1985. – 142 с.

[49] *Солодов, А. П.* Об одном примере Паскевича / А. П. Солодов // Матем. заметки. – 2005. – Т. 78, № 2. – С. 286–291.

[50] *Солодов, А. П.* Точная оценка снизу суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами / А. П. Солодов // Матем. сборник. – 2016. – Т. 207, № 12. – С. 124–158.

[51] *Солодов, А. П.* Точные константы в двусторонней оценке С. А. Теляковского суммы ряда по синусам с выпуклой последовательностью коэффициентов / А. П. Солодов // Матем. заметки. – 2020. – Т. 107, № 6. – С. 906–921.

[52] *Солодов, А. П.* Усиление теоремы Ландау для голоморфных отображений круга в себя с неподвижными точками / А. П. Солодов // Матем. заметки. – 2020. – Т. 108, № 4. – С. 638–640.

[53] *Солодов, А. П.* Об ортогональных системах с экстремально большой L_2-нормой максимального оператора / А. П. Солодов // Матем. заметки. – 2021. – Т. 109, № 3. – С. 436–451.

[54] *Солодов, А. П.* Точная область однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками / А. П. Солодов // Изв. РАН. Сер. матем. – 2021. – Т. 85, № 5, в печати.

[55] *Стечкин, С. Б.* Тригонометрические ряды с коэффициентами монотонного типа / С. Б. Стечкин // Теория приближений. Асимптотические разложения, Сборник статей, Тр. ИММ УрО РАН. – 2001. – Т. 7, № 1. – С. 197–207.

[56] *Теляковский, С. А.* О поведении рядов по синусам с выпуклыми коэффициентами вблизи нуля / С. А. Теляковский // Докл. РАН. – 1997. – Т. 357, № 4. – С. 462–463.

[57] *Теляковский, С. А.* К вопросу о поведении рядов по синусам вблизи нуля / С. А. Теляковский // Makedon. Akad. Nauk. Umet. Oddel. Mat.-Tehn. Nauk. Prilozi. – 2000, 2002. – Т. 21, № 1-2. – С. 47–53.

[58] *Теляковский, С. А.* О сходимости в метрике L рядов Фурье с квазимонотонными коэффициентами / С. А. Теляковский, Г. А. Фомин // Теория функций и её приложения, Сборник статей. Посвящается академику Сергею Михайловичу Никольскому к его семидесятилетию, Тр. МИАН СССР. – 1975. – Т. 134. – С. 310–313.

[59] *Ульянов, П. Л.* О множителях Вейля для безусловной сходимости / П. Л. Ульянов // Матем. сб. – 1963. – Т. 60(102), № 1. – С. 39–62.

[60] *Харди, Г. Х.* Ряды Фурье / Г. Х. Харди, В. В. Рогозинский. – М. : Физматгиз, 1959. – 156 с.

[61] *Харрис, Т.* Теория ветвящихся случайных процессов / Т. Харрис. – М. : Мир, 1966. – 356 с.

[62] *Aharonov, D.* Univalence criteria depending on parameters / D. Aharonov, U. Elias // Anal. Math. Phys. – 2014. – V. 4, № 1–2. – P. 23–34.

[63] *Ahlfors, L. V.* Conformal invariants: topics in geometric function theory / L. V. Ahlfors. – New York : McGraw-Hill Book Company, 1973. – 157 p.

[64] *Alexander, I. W.* Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions / I. W. Alexander // Ann. of Math. – 1915. – V. 17, № 1. – P. 12–22.

[65] *Aljančić, S.* Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones / S. Aljančić, R. Bojanić, M. Tomić // Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. – 1956. – V. 10. – P. 101–120.

[66] *Anderson, J. M.* Lower Schwarz-Pick estimates and angular derivatives / J. M. Anderson, A. Vasil'ev // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2008. – V. 33, № 1. – P. 101–110.

[67] *Athreya, K. B.* Branching Processes / K. B. Athreya, P. E. Ney. – Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1972. – 288 p.

[68] *Becker, J.* Löwnersche differentlialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte funktionen / J. Becker // J. Reine Angew. Math. – 1972. – V. 255. – P. 23–43.

[69] *Becker, J.* Angular derivatives for holomorphic self-maps of the disk / J. Becker, Ch. Pommerenke // Comput. Methods Funct. Theory. – 2017. – V. 17, № 3. – P. 487–497.

[70] *Bennett, G.* Unconditional convergence and almost everywhere convergence / G. Bennett // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. – 1976. – V. 34. – P. 135–155.

[71] *Bennett, G.* Schur multipliers / G. Bennett // Duke Math. J. – 1977. – V. 44, № 3. – P. 603–639.

[72] *Berkson, E.* Semigroups of analytic functions and composition operators / E. Berkson, H. Porta // Michigan Math. J. – 1978. – V. 25, № 1. – P. 101–115.

[73] *Bieberbach, L.* Über die koeffizienten derjenigen potenzreihen, welche eine schlichte abbildung des einheitskreises vermitteln / L. Bieberbach // Sitzungsber Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. – 1916. – V. 138. – P. 940–955.

[74] *Blezu, D.* Some univalence criteria / D. Blezu, N. N. Pascu // Demonstratio Mathematica. – 2002. – V. 35, № 1. – P. 31–34.

[75] *Boas, R. P.* Integrability theorems for trigonometric transforms / R. P. Boas. – New York : Springer, 1967. – 65 p.

[76] *Bolotnikov, V.* Inequalities for angular derivatives and boundary interpolation / V. Bolotnikov, M. Elin, D. Shoikhet // Anal. Math. Phys. – 2013. – V. 3, № 1. – P. 63–96.

[77] *Bracci, F.* Aleksandrov—Clark measures and semigroups of analytic functions in the unit disc / F. Bracci, M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2008. – V. 33. – P. 231–240.

[78] *Branges, L.* A proof of the Bieberbach conjecture / L. Branges. – Leningrad : Preprint / LOMI E-5-84, Leningrad Branch of the V. A. Steklov Mathematical Institute, 1984. – 21 p.

[79] *Branges, L.* A proof of the Bieberbach conjecture / L. Branges // Acta Math. – 1985. – V. 154, № 1–2. – P. 137–152.

[80] *Carathéodory, C.* Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen / C. Carathéodory // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. – 1929. – P. 39–54.

[81] *Carathéodory, C.* Conformal representation / C. Carathéodory. – Cambridge : University Press, 1969. – 115 p.

[82] *Chuaqui, M.* A unified approach to univalence criteria in the unit disc / M. Chuaqui // Proc. Amer. Math. Soc. – 1995. – V. 123, № 2. – P. 441–453.

[83] *Contreras, M. D.* Fixed points and boundary behaviour of the Koenigs function / M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, Ch. Pommerenke // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2004. – V. 29, № 2. – P. 471–488.

[84] *Contreras, M. D.* On boundary critical points for semigroups of analytic functions / M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, Ch. Pommerenke // Math. Scand. – 2006. – V. 98. – P. 125–142.

[85] *Cowen, C. C.* Iteration and the solution of functional equations for functions analytic in the unit disk / C. C. Cowen // Trans. Amer. Math. Soc. – 1981. – V. 265, № 1. – P. 69–95.

[86] *Cowen, C. C.* Inequalities for the angular derivative of an analytic function in the unit disk / C. C. Cowen, Ch. Pommerenke // J. London Math. Soc. – 1982. – V. 26, № 2. – P. 271–289.

[87] *Denjoy, A.* Sur l'iteration des fonctions analytiques / A. Denjoy // C. R. Acad. Sci. – 1926. – V. 182. – P. 255–257.

[88] *Dubinin, V. N.* Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory / V. N. Dubinin. – Basel : Springer, 2014. – xii+344 p.

[89] *Duren, P. L.* Univalent functions / P. L. Duren. – New York : Springer-Verlag, 1983. – 382 p.

[90] *Elin, M.* Fractional iteration and functional equations for functions analytic in the unit disk / M. Elin, V. Goryainov, S. Reich, D. Shoikhet // Computational Methods and Function Theory. – 2002. – V. 2, № 2. – P. 353–366.

[91] *Franz, U.* Markov structure of monotone Lévy processes / U. Franz, N. Muraki // Infinite Dimensional Harmonic Analysis III : Proccedings of the Third German-Japanese Symposium. – University of Tübingen, Germany, 2005. – P. 37–57.

[92] *Goodman, A. W.* Univalent functions, Vols. I, II / A. W. Goodman. – Washington : Polygonal Publishing Co., 1983. – Vol. I, xvii+246 p., Vol. II, xii+311 p.

[93] *Gumenyuk, P.* Value regions of univalent self-maps with two boundary fixed points / P. Gumenyuk, D. Prokhorov // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2018. – V. 43, № 1. – P. 451–462.

[94] *Hardy, G. H.* Asymptotic formulae for the sums of certain trigonometrical series / G. H. Hardy, W. W. Rogosinski // Quart. J. Math., Oxford Ser. – 1945. – V. 16. – P. 49–58.

[95] *Hartman, P.* On sine series with monotone coefficients / P. Hartman, A. Wintner // J. London Math. Soc. – 1953. – V. 28, № 1. – P. 102–104.

[96] *Izumi, S.* Some trigonometrical series, XII/ S. Izumi // Proc. Japan Acad. – 1955. – V. 31, № 4. – P. 207–209.

[97] *Kaczmarz, S.* Notes on orthogonal series, II/ S. Kaczmarz // Studia Math. – 1935. – V. 5. – P. 103–106.

[98] *Karamata, J.* Sur un mode de croissance régulière des fonctions / J. Karamata // Mathematica (Cluj). – 1930. – V. 4. – P. 38–53.

[99] *Landau, E.* Der Picard—Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante / E. Landau // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. – 1926. – V. 32. – P. 467–474.

[100] *Landau, E.* A deduction from Schwarz's lemma / E. Landau, G. Valiron // J. London Math. Soc. – 1929. – V. 4, № 3. – P. 162–163.

[101] *Löwner, K.* Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I / K. Löwner // Math. Ann. – 1923. – V. 89. – P. 103–121.

[102] *Menchoff, D.* Sur les séries de fonctions orthogonales / D. Menchoff // Fund. Math. – 1923. – V. 4. – P. 82–105.

[103] *Nehari, Z.* The Schwarzian derivative and schlicht functions / Z. Nehari // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – V. 55, № 6. – P. 545–551.

[104] *Nunokawa, M.* On some conditions for p-valency / M. Nunokawa, J. Sokól // J. Comput. Anal. Appl. – 2020. – V. 28, № 2. – P. 219–225.

[105] *Oswald, P.* On the convergence rate of SOR: A worst case estimate / P. Oswald // Computing. – 1994. – V. 52. – P. 245–255.

[106] *Ozaki, S.* The Schwarzian derivative and univalent functions / S. Ozaki, M. Nunokawa // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 33, № 2. – P. 392–394.

[107] *Paszkiewicz, A.* A new proof of the Rademacher—Menshov theorem / A. Paszkiewicz // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2005. – V. 71. – P. 631–642.

[108] *Paszkiewicz, A.* A complete characterization of coefficients of a.e. convergent orthogonal series and majorizing measures / A. Paszkiewicz // Invent. Math. – 2010. – V. 180, № 1. – P. 55–110.

[109] *Pommerenke, Ch.* Univalent functions / Ch. Pommerenke // Göttingen : Vandenhoeck and Ruprecht, 1975. – 376 p.

[110] *Pommerenke, Ch.* On the iteration of analytic functions in a halfplane. I / Ch. Pommerenke // J. London Math. Soc. Ser. 2. – 1979. – V. 19, № 3. – 439–447.

[111] *Pommerenke, Ch.* Angular derivatives of bounded univalent functions and extremal partitions of the unit disk / Ch. Pommerenke, A. Vasil'ev // Pacific. J. Math. – 2002. – V. 206, № 2. – 425–450.

[112] *Rademacher, H.* Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen / H. Rademacher // Math. Ann. – 1922. – V. 87, № 1–2. – 112–138.

[113] *Răducanu, D.* On some sufficient conditions for univalence / D. Răducanu, H. Orhan, E. Deniz // An. St. Univ. Ovidius Constanta. – 2010. – V. 18, № 2. – P. 217–222.

[114] *Salem, R.* Determination del'ordre de grandeur ál'origine de certaines séries trigonométriques / R. Salem // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1928. – V. 186. – P. 1804–1806.

[115] *Siskakis, A. G.* Semigroups of composition operators on spaces of analytic functions, a review / A. G. Siskakis // Contemporary Math. – 1998. – V. 213. – P. 229–252.

[116] *Shapiro, J. H.* Composition Operators and Classical Function Theory / J. H. Shapiro. – New York : Springer-Verlag, 1993. – 223 p.

[117] *Solodov, A. P.* Sharp two-sided estimate for the sum of a sine series with convex slowly varying sequence of coefficients / A. P. Solodov // Anal. Math. – 2020. – V. 46, № 3. – P. 579–603.

[118] *Špaček, L.* Příspěvek k teorii funkcí prostých [Contribution à la théorie des fonctions univalentes] / L. Špaček // Časopis Pěst. Mat. Fys. – 1932. – V. 62, № 2. – P. 12–19.

[119] *Study, E.* Vorlesungen über ausgewälte Gegenstände der Geometrie. Zweiter Heft. Konforme Abbildung einfachzusammenhängender Bereiche / E. Study. – Leipzig und Berlin : B. G. Teubner, 1913. – 142 p.

[120] *Telyakovskiĭ, S. A.* On the behavior near the origin of the sine series with convex coefficients / S. A. Telyakovskiĭ // Publ. Inst. Math. (Beograd). – 1995. – V. 58 (72). – P. 43–50.

[121] *Wolff, J.* Sur l'itération des fonctions holomorphes dans une région, et dont les valeurs appartiennent a cette région / J. Wolff // C. R. Acad. Sci. – 1926. – V. 182. – P. 42–43.

[122] *Wolff, J.* Sur l'itération des fonctions bornées / J. Wolff // C. R. Acad. Sci. – 1926. – V. 182. – P. 200–201.

[123] *Young, W. H.* On the integration of Fourier series / W. H. Young // Proc. London Math. Soc. – 1911. – S. 2–9, № 1. – P. 449–462.