ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Солодова Алексея Петровича "Экстремальные задачи в теории ортогональных рядов и комплексном анализе", представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертационная работа посвящена изучению ряда экстремальных задач теории тригонометрических рядов, теории общих ортогональных рядов и теории однолистных функций.

Теория тригонометрических рядов на протяжении последних двух столетий является одним из центральных разделов теории функций. Полученные в рамках этой теории и возникшие здесь методы оказали значительное влияние на многие разделы современной математики и пути развития математики в целом. Вопросам поведения тригонометрических рядов, чьи коэффициенты удовлетворяют некоторым условиям регулярности (монотонность, квазимонотонность, выпуклость и т.п.), посвящено большое число работ как классических, так и опубликованных в последнее время. Интерес к этой тематике объясняется, в частности, тем, что решения многих теоретических и прикладных задач представляются как раз в виде тригонометрических рядов с регулярными коэффициентами. Теория ортогональных рядов, зародившаяся около ста лет назад как фундаментальный раздел теории функций, в последние десятилетия переживает период бурного развития благодаря явной и опосредованной связи с такими важными прикладными задачами как сжатие больших массивов данных и распознавание образов. Однолистные функции являются самым простым, имеющим самые замечательные свойства и самым используемым в теории и приложениях объектом теории функций комплексного переменного. Поэтому исследования свойств однолистных функций, в том числе поиск точных границ областей однолистности голоморфных функций, несмотря на давнюю историю, и в настоящее время продолжают оставаться важными. Таким образом, тематика диссертации представляется, несомненно, актуальной.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы, включающего 123 наименования. Общий объем диссертации составляет 238 страниц.

Во введении приведены необходимые определения и используемые в диссертации обозначения, дан подробный исторический обзор результатов, связанных с тематикой диссертации, изложено краткое содержание диссертации по главам.

В первой главе диссертации рассматриваются тригонометрические ряды по синусам

$$g(b,x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

где последовательность коэффициентов $b=\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно или квазимонотонно стремится к нулю. Известно, что некоторые особенности поведения синус-ряда $g(b,x)$ хорошо описываются через поведение так называемой мажоранты Салема

$$v(b,x)=x\sum_{k=1}^{m(x)} kb_k,$$

где $m(x)$ — целая часть числа π/x. В частности, А.Ю.Поповым установлено, что в случае, когда последовательность b невозрастающая и стремится к нулю, функция

$v(b,x)$ ограничивает сверху функцию $g(b,x)$ всюду на $(0,\pi)$, откуда

$$\bar{l}(b) = \limsup_{x\to+0} \frac{g(b,x)}{v(b,x)} \leqslant 1.$$

При этом последнее неравенство является точным на множестве рассматриваемых последовательностей b.

В параграфе 1.1 работы получена точная оценка снизу величины $\bar{l}(b)$. Установлено, что нижняя грань $\bar{l}(b)$ по всем невозрастающим стремящимся к нулю последовательностям b равна $2\pi^{-2}$. В параграфе 1.2 автором вводится модифицированный вариант мажоранты Салема — функция $u(b,x)$ — удовлетворяющая условию $u(b,x) \leqslant v(b,x)$; доказано, что функция $u(b,x)$ также мажорирует сумму синус-ряда $g(b,x)$. Здесь же при дополнительном предположении о выпуклости последовательности b получена оценка снизу для $g(b,x)$:

$$g(b,x) \geqslant \frac{2}{\pi^2}\, u(b,x), \quad \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{20}.$$

В параграфе 1.3 рассматриваются синус-ряды с квазимонотонными коэффициентами, то есть с такими последовательностями $b = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, что последовательность $b = \{b_k/\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно стремится к нулю; здесь $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ некоторая неубывающая последовательность положительных чисел. Найдено необходимое и достаточное условие на ограниченную последовательность Λ, при котором асимптотическое соотношение для $g(b,x)$ при $x \to +0$, полученное П.Хартманом и А.Винтнером для синус-рядов с монотонными коэффициентами, остается верным для синус-рядов с квазимонотонными коэффициентами. Здесь же в терминах последовательности Λ получено необходимое и достаточное условие положительности в некоторой правой полуокрестности нуля синус-ряда с квазимонотонными коэффициентами.

В параграфе 1.4 рассматриваются два класса монотонно стремящихся к нулю последовательностей b с дополнительными условиями: один — с условием $b = \{kb_k\}_{k=1}^{\infty}$ не возрастает, а второй — $b = \{kb_k\}_{k=1}^{\infty}$ не убывает. Для таких последовательностей получены асимптотически неулучшаемые оценки сверху и снизу функции $g(b,x)$ в терминах мажоранты Салема. Эти результаты усиливают и дополняют предшествующие результаты Р.Салема, С.А.Теляковского и А.Ю.Попова.

Вторая глава посвящена изучению поведения суммы рядов по синусам $g(b,x)$, у которых последовательность коэффициентов b выпуклая.

А.Ю.Поповым для любой выпуклой стремящейся к нулю последовательности была получена оценка

$$g(b,x) \geqslant \frac{2}{\pi^2}\, v(b,x) - \alpha(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

где $\alpha(x)$ — конкретная выписанная в явном виде положительная функция, совпадающая по порядку с $b_{m(x)}$. В параграфе 2.1 показано, что отбросить слагаемое $-\alpha(x)$ нельзя. Однако, если в сумме, которой определяется мажоранта Салема $v(b,x)$, последний член $m(x)b_{m(x)}$ заменить на его половину, то полученное выражение $v_0(b,x)$ уже будет оценивать $g(b,x)$ снизу:

$$g(b,x) > \frac{2}{\pi^2}\, v_0(b,x), \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0,$$

для любой выпуклой бесконечно малой последовательности b и некоторой точки $x_0 > 0$. При этом заменить коэффициент $1/2$ перед членом $m(x)b_{m(x)}$ в сумме $v_0(b,x)$ на бóльший нельзя.

С.А.Теляковским была получена следующая оценка, показывающая уклонение суммы ряда $g(b,x)$ от первого члена ее асимптотики:

$$C_1\sigma(b,x) \leqslant g(b,x) - \frac{b_{m(x)}}{2}\ \operatorname{ctg}\frac{x}{2} \leqslant C_2\sigma(b,x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{11},$$

где b — выпуклая и стремится к нулю, C_1, C_2 — абсолютные положительные постоянные, а $\sigma(b,x) = \frac{1}{m(x)} \sum\limits_{k=1}^{m(x)-1} k^2\Delta b_k$. В параграфе 2.2 найдены неулучшаемые на классе выпуклых последовательностей значения констант C_1 и C_2: $C_1 = \frac{3(\pi-1)}{\pi^2}$, $C_2 = \frac{\pi}{2}$. При этом экстремальные значения достигаются на медленно меняющихся выпуклых последовательностях. В параграфе 2.3 получены оценки уклонения функции $g(b,x)$ от ее асимптотически точных мажоранты и миноранты на классе всех выпуклых стремящихся к нулю последовательностей.

С.Алянчич, Р.Боянич и М.Томич получили асимптотическое соотношение

$$g(b,x) \ \sim\ \frac{b_{m(x)}}{x}, \quad x \to +0,$$

справедливое для всех выпуклых бесконечно малых медленно меняющихся последовательностей. В параграфе 2.4 при более сильном предположении медленного изменения последовательности $k\Delta b_k$ найден второй член этой асимптотики:

$$g(b,x) - \frac{b_{m(x)}}{x}\ \sim\ (\gamma + \ln\pi)\ \frac{m(x)\Delta b_{m(x)}}{x}, \quad x \to +0,$$

где γ — константа Эйлера.

В третьей главе диссертации рассматриваются вопросы, связанные со знаменитой теоремой Меньшова–Радемахера о точных множителях Вейля на классе всех ортонормированных систем. Эта теорема утверждает, что для произвольной ортонормированной системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ из условия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 n < \infty$ вытекает сходимость почти всюду ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)$. При этом последовательность множителей Вейля $\{\log^2 n\}_{n=1}^{\infty}$ нельзя заменить ни на какую, растущую медленнее. Как выяснилось впоследствии, задача о точных множителях Вейля тесно связана с задачей о нахождении величины $\sup \|A^s\|/\|A\|$, где верхняя грань берется по всем квадратным матрицам A порядка N, а A^s — верхняя треугольная матрица, у которой элементы, расположенные выше главной диагонали, совпадают с соответствующими элементами матрицы A. В.И.Мацаевым было доказано, что указанная величина имеет порядок $\log N$. При этом, до начала текущего века конструкции всех известных экстремальных примеров как в матричной задаче, так и в задаче о множителях Вейля, основывались на матрице Гильберта. Первый в задаче о множителях Вейля экстремальный пример ортонормированной системы, чья конструкция не основана на матрице Гильберта, был построен А.Паскевичем.

В параграфе 3.1 диссертации предложен метод построения матриц, содержащий как частные случаи и пример с матрицей Гильберта, и пример Паскевича. В параграфе 3.2 на основе этого метода построен ряд новых экстремальных примеров. В частности, строится пример матрицы порядка M, у которой отношение максимального по модулю элемента к минимальному имеет порядок $\sqrt{M}$, в то время как у матрицы Гильберта это отношение равно M. С помощью построенной матрицы в явном виде строится ортонормированная система, экстремальная в задаче о множителях Вейля.

В четвертой главе рассматривается задача о поиске максимальных областей однолистности некоторых классов голоморфных функций.

В 1926 году Э.Ландау нашел радиус максимального круга однолистности голоморфной функции f, отображающей единичный круг в круг радиуса $M > 1$ при условии, что $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$. В параграфе 4.1 рассматривается аналогичная задача о множестве однолистности функции f, отображающей единичный круг в себя, но дополнительные условия накладываются на точку, лежащую на границе: $f(1) = 1$, $f'(1) < \alpha$, где $\alpha > 1$ и производная понимается в смысле углового предела. Показано, что при таких условиях на заданном классе функций непустых областей однолистности нет. В связи с этим естественно возникает вопрос о сужении рассматриваемого класса функций. В.В.Горяйновым рассмотрена указанная задача при наличии дополнительной неподвижной внутренней точки: $f(0) = 0$, и найдена область однолистности этого класса функций такая, что любое ε-расширение этой области уже не будет областью однолистности. В параграфе 4.1 с помощью разработанного В.В.Горяйновым метода построены более широкие области однолистности и получены оценки сверху для возможных областей однолистности рассмотренного Горяйновым класса функций.

В параграфе 4.2 с помощью разработанного нового подхода описанная выше задача Горяйнова решена полностью: найдена область однолистности рассматриваемого класса голоморфных функций такая, что любая область, ее содержащая, областью однолистностью уже не является.

В параграфе 4.3 рассмотрен класс голоморфных функций, отображающих единичный круг в себя и таких, что отрезок $[-1, 1]$ переходит в себя, при этом точки -1 и 1 остаются неподвижными, а $f'(1)f'(-1) \leq \alpha$, где $\alpha \in (1, 9)$ и производная понимается в смысле углового предела. Получены оценки снизу и сверху в задаче о нахождении максимальной области однолистности описанного класса функций.

Переходя к оценке диссертации в целом, отметим, что диссертантом проделана очень серьезная работа по исследованию поведения тригонометрических рядов по синусам с монотонными, квазимонотонными и выпуклыми коэффициентами; построению новых ортонормированных систем, являющихся экстремальными по порядку в задаче о множителях Вейля, и новых конструкций в соответствующей экстремальной задаче для матриц; нахождению точных областей однолистности классов голоморфных функций. Результаты диссертации усиливают или обобщают известные результаты других авторов. Все основные результаты диссертации являются новыми. Для их получения диссертантом существенно модернизированы имеющиеся методы доказательств или изобретены новые.

Работа написана в целом ясно и аккуратно. Утверждения четко сформулированы и строго доказаны. Имеются следующие замечания, относящиеся к оформлению работы.

1. В параграфе 1.1 вместо того, чтобы просто доказать оценку на с.45, строка 10 снизу, диссертант зачем-то отсылает к конкретному параграфу монографии Н.К.Бари, отмечая, что действовать надо “подобно рассуждениям”, приведенным там. Вместе с тем, остальные факты в этом параграфе подробно доказаны.

2. В главе 3 важным рассматриваемым понятием является норма матрицы. При этом во введении сообщается, что имеется в виду “операторная норма матрицы (как оператора в евклидовом пространстве)”. В то же время в тексте главы 3 ни аккуратного определения нормы матрицы, ни каких-либо используемых в работе формул для ее вычисления не приводится, что несколько затрудняет чтение.

3. В диссертации и автореферате имеются не совсем удачные с точки зрения русского языка предложения. Например, на с.7, строка 1 снизу – с.8, строки 1-2 сверху в диссертации и соответствующее место в автореферате; с. 19, абзац про §3.2,

в автореферате.

4. Название главы 3 — “Ряды по общим ортогональным системам” — слишком общее и поэтому малоинформативное.

5. Стоило ли включать в диссертацию ряд результатов параграфа 4.1, если далее в параграфе 4.2 получен более сильный, окончательный в рассматриваемой задаче, результат?

Отмеченные недочеты никоим образом не влияют на общее положительное впечатление от работы.

Результаты диссертации достаточно полно изложены в тринадцати работах, опубликованных в ведущих журналах, и доложены на представительных семинарах и конференциях. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Диссертация удовлетворяет п.9 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24 сентября 2013 г., поскольку является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение в теории функций.

На основании изложенного считаю, что диссертационная работа “Экстремальные задачи в теории ортогональных рядов и комплексном анализе” удовлетворяет всем необходимым требованиям, а ее автор, Солодов Алексей Петрович, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент Н. Ю. Антонов

Антонов Николай Юрьевич
Доктор физико-математических наук (специальность 01.01.01 – математический анализ), заместитель директора по научной работе ИММ УрО РАН
e-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru, тел. +73433753404

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН); г.Екатеринбург, ул.С.Ковалевской, 16
e-mail: dir-info@imm.uran.ru, тел. +73433748332

Подпись Н. Ю. Антонова заверяю:

Ученый секретарь ИММ УрО РАН
кандидат физ.-мат. наук О. Н. Ульянов

30.09.2021