ФГАОУ ВО “МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)”

На правах рукописи
УДК 519.21

Родионов Игорь Владимирович

Вероятностный и статистический анализ экстремумов дискретных стохастических систем

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва 2021

Работа выполнена на кафедре дискретной математики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования “Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет).”

Научный консультант:
ПИТЕРБАРГ Владимир Ильич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией теории вероятностей механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”
(специальность 01.01.05)

Официальные оппоненты:
КОРШУНОВ Дмитрий Алексеевич — доктор физико-математических наук, доцент, профессор департамента математики и статистики, Ланкастерский Университет, Ланкастер, Великобритания
(специальность 01.01.05)
НЕВЗОРОВ Валерий Борисович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования “Санкт-Петербургский государственный университет”
(специальность 01.01.05)
СТЕПАНОВ Алексей Васильевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор Института физико-математических наук и информационных технологий Балтийского Федерального Университета имени И. Канта
(специальность 01.01.05)

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук (ИППИ РАН)

Защита диссертации состоится 16 сентября 2021 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.01 при Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-й этаж, конференц-зал.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В.А. Стеклова РАН и на сайте http://www.mi-ras.ru/dis/ref21/rodionov/dis.pdf.

Автореферат разослан “ ” июня 2021 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 002.022.01 при МИАН
доктор физико-математических наук,
профессор В. А. Ватутин.



ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Диссертация посвящена вероятностному и статистическому анализу экстремальных значений в различных дискретных моделях теории вероятностей, также рассмотрены и некоторые соответствующие модели в непрерывном времени. Отличительной особенностью работы является внедрение в стохастическую теорию экстремумов многих ранее не использованных в ее рамках идей современной теории вероятностей и математической статистики.

Стохастическая теория экстремумов занимается изучением свойств распределений экстремальных значений различных систем случайных величин и случайных процессов. Свое начало теория берет в работе Б.В. Гнеденко[1] 1943 года, где было показано, что если у последовательности нормированных максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин есть невырожденное предельное распределение, то оно принадлежит одному из трех типов максимум-устойчивых законов (а именно, законов Фреше, Гумбеля и Вейбулла). Впервые же упомянутые законы были описаны в работе Фишера и Типпетта[2] в 1928 году. Завершающим этапом классической стохастической теории экстремумов, посвященной изучению предельных распределений экстремумов последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин, стали работы Балкема и де Хаана[3] и Пикандса[4], где ими независимо была сформулирована теорема о приближении хвоста функции распределения обобщенным распределением Парето, также известная как теорема Пикандса-Балкема-де Хаана и иногда называемая второй теоремой стохастической теории экстремумов.

На сегодняшний день стохастическая теория экстремумов является довольно разветвленной дисциплиной, объединяющей в себе как вероятностные, так и статистические результаты и методы. Современное состояние теории и ее приложения в финансах, страховании, гидрологии

[1]Gnedenko B.V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.*, **44** (1943), 423-453.

[2]Fisher R.A., Tippet L.H.C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **24** (1928), 180-190.

[3]Balkema A., de Haan L. Residual life time at great age, *Ann. Probab.*, **2** (1974), 792-804.

[4]Pickands J. Statistical inference using extreme order statistics, *Ann. Stat.*, **3** (1975), 119-131.

и прочих областях можно найти в монографиях[5] [6] [7]. Мы остановимся лишь на некоторых направлениях стохастической теории экстремумов, которые имеют отношение исследованиям в диссертации.

После завершения классического этапа развития теории у исследователей возник интерес к ее расширению на последовательности зависимых случайных величин, а также на гауссовские стационарные последовательности и процессы с непрерывным временем. Оба этих направления были объединены в классической монографии Лидбеттера, Линдгрена и Ротсена[8], до сих пор не потерявшей своей актуальности.

Расширяя и дополняя результаты работ Уотсона[9], Бермана[10] и Лойнса[11], Лидбеттер[12] показал, что при выполнении условия слабой зависимости экстремальных событий (условие D) и условия асимптотического отсутствия кластеров (условие D') предельное распределение максимума стационарной последовательности совпадает с предельным распределением максимума последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с той же маргинальной функцией распределения. Обобщения этого результата на нестационарные последовательности были получены Хюслером[13] [14], а на нестационарные случайные поля на $\mathbb{Z}^2$ – Перейрой и Феррейрой[15]. Условия, налагаемые на случайное поле в работе Перейры и Феррейры, крайне неудобно записываются для случайных полей в пространствах большей размерности, чем 2; в статье[16]

[5]Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. Modelling extremal events for insurance and finance. Springer, 2003.

[6]de Haan L., Ferreira A. Extreme value theory. An introduction. Springer, 2006.

[7]Beirlant J., Goegebeur Y., Teugels J., Segers J. Statistics of Extremes: Theory and Applications. New York: Wiley, 2004.

[8]Leadbetter M.R, Lindgren G., Rootźen H.. Extremes and related properties of random sequences and processes. *Springer Statistics Series.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer, (1983).

[9]Watson G.S. Extreme values in samples from m-dependent stationary stochastic processes. *Ann. Math. Stat.*, **25(4)** (1954), 798-800.

[10]Berman S.M. Limit theorems for the maximum term in stationary sequences. *Ann. Math. Stat.*, **35** (1964), 502-516.

[11]Loynes R.M.. Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes. *Ann. Math. Statist.*, **36** (1965), 993—999.

[12]Leadbetter M.R.. On extreme values in stationary sequences. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, **28** (1974), 289-303.

[13]Hüsler J. Asymptotic approximation of crossing probabilities of random sequences. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **63(2)** (1983), 257-270.

[14]Hüsler J. Extreme values of non-stationary random sequences. *J. Appl. Probab.*, **23(4)** (1986), 937-950.

[15]Pereira L., Ferreira H. Limiting crossing probabilities of random fields. *J. Appl. Probab.*, **3** (2006), 884-891.

[16]Isaev M.I., Rodionov I.V., Zhang R., Zhukovskii M.E. Extreme value theory for triangular arrays of dependent random variables. *Russian Mathematical Surveys*, **75(5)** (2020), 968-970.

приведены гораздо более простые и легко интерпретируемые условия, восходящие к условиям D и D' Лидбеттера.

В упомянутой работе[12] Лидбеттер рассмотрел и ситуацию, когда для стационарной последовательности выполнено лишь условие D. В этом случае при слабых предположениях у последовательности существует так называемый экстремальный индекс θ, служащий мерой локальной зависимости ее экстремумов. Попытка обобщить понятие экстремального индекса на нестационарные последовательности была предпринята Хюслером[14], однако его работа не нашла большого отклика в литературе. Заметим, что существуют процессы, не имеющие экстремального индекса, но обладающие тем не менее фантомной функцией, которая является обобщением понятия экстремального индекса[17]. Необходимые и достаточные условия существования фантомной функции у стационарной последовательности были получены сравнительно недавно Духаном, Якубовским и Лангом[18]. Если теорию фантомных функций и экстремального индекса для стационарных последовательностей по сути можно считать завершенной, то аналогичная теория для стационарных полей на $\mathbb{Z}^d$ и более сложных случайных структур еще далека от завершения. Работы по изучению (глобального) экстремального индекса для стационарных полей на целочисленных решетках начали появляться с начала 2000х годов[19] [20] [21], тогда как понятие фантомной функции для стационарного случайного поля на $\mathbb{Z}^d$ было впервые рассмотрено лишь совсем недавно[22]. Отметим также работы А.В. Лебедева и А.А. Голдаевой[23] [24], в которых рассмотрены обобщения понятия экстремального индекса для схемы серий, см. также докторскую диссертацию А.В. Лебедева[25].

Хорошо известно, что нормальное распределение принадлежит обла-

[17] O'Brien G. Extreme values for stationary and Markov sequences. *Ann. Probab.* **15** (1987), 281-291

[18] Doukhan P., Jakubowski A., Lang G. Phantom distribution functions for some stationary sequences. *Extremes*, **18** (2015), 697-725.

[19] Choi H. Central Limit Theory and Extremes of Random Fields. PhD dissertation (2002)

[20] Turkman K.F. A note on the extremal index for space-time processes. *J. Appl. Prob.*, **43** (2006), 114-126.

[21] Ferreira H., Pereira L.: How to compute the extremal index of stationary random fields. *Statist. Probab. Lett.*, **78** (2008), 1301-1304.

[22] Jakubowski A., Soja-Kukieła N. Managing local dependencies in asymptotic theory for maxima of stationary random fields. *Extremes*, **22** (2019), 293-315.

[23] Лебедев А.В. Экстремальные индексы в схеме серий и их приложения. *Информатика и ее применения*, **9(3)** (2015), 39-54.

[24] Goldaeva A.A., Lebedev A.V. On extremal indices greater than one for a scheme of series. *Lith. Math. J.* **58(4)** (2018), 384–398.

[25] Лебедев А.В. Неклассические задачи стохастической теории экстремумов. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.05. М.: МГУ, 2015.

сти максимального притяжения распределения Гумбеля, или двойного экспоненциального закона. В 1964 году Берман[10] показал, что предельное распределение нормированного максимума стационарной гауссовской последовательности с теми же нормировочными константами, что и в теореме Гнеденко, и условием на убывание корреляционной функции последовательности (названное впоследствии условием Бермана) также совпадает с распределением Гумбеля. Интересен тот факт, что условие Бермана близко к необходимому и достаточному: так, Миттал и Илвисакер[26] показали, что в случае логарифмического убывания корреляционной функции стационарной гауссовской последовательности предельное распределение нормированного максимума будет отличаться от распределения Гумбеля, а в случае более медленного убывания корреляционной функции и вовсе будет вырожденным независимо от выбора нормировочных констант. Результат Бермана впоследствии был обобщен на нестационарные гауссовские последовательности[13], а также на стационарные и нестационарные гауссовские поля на $\mathbb{Z}^d$ (см. работы [19] [22] [27]).

Теория асимптотического анализа гауссовских случайных процессов восходит к работам Х. Крамера[28] и Ю.К. Беляева[29], которые независимо друг от друга показали, что число выходов за высокий уровень гауссовского процесса на конечном интервале при некоторых условиях имеет пуассоновское распределение. Пикандсом[30] в 1969 году был предложен общий метод анализа асимптотики вероятности выхода за высокий уровень траекторией гауссовского стационарного процесса, в 1972 г. доработанный В.И. Питербаргом[31]. Этот метод оказался определяющим для асимптотической теории гауссовских случайных процессов и был обобщен В.И. Питербаргом и его соавторами на нестационарные гауссовские процессы[32], на гауссовские случайные поля и функции в банаховых про-

[26]Mittal Y., Ylvisaker D. Limit distributions for the maxima of stationary Gaussian processes. *Stoch. Proc. Appl.* **3** (1975), 1-18.

[27]Pereira L.. On the extremal behavior of a nonstationary normal random field. *J. Stat. Plan. Infer.*, **140** (2010), 3567-3576.

[28]Cramer H. On the intersections between the trajectories of a normal stationary stochastic process and a high level. *Ark. Mat.* **6** (1965), 1656-1663.

[29]Беляев Ю.К. О числе пересечений уровня гауссовским случайным процессом. *Теор. Вер. Примен.*, **12**(3) (1967), 444-457.

[30]Pickands J. III Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **145** (1969), 51-73.

[31]Питербарг В.И. О работе Пикандса "Вероятности пересечения для гауссовского стационарного процесса". *Вест. Моск. ун-та, Сер. 1 Мат. Мех.*, **5** (1972), 25-30.

[32]Piterbarg V.I., Prisyazhnyuk V.P. Asymptotics of the probability of large excursions for a nonstationary gaussian process. *Theor. Probab. Math. Statist.*, **18** (1979), 131–144.

странствах[33] [34], а также на некоторые функционалы от гауссовских процессов и полей[35] [36], см. также монографии[37] [38]. Асимптотики вероятностей больших уклонений траекторий евклидовых норм гауссовских векторных процессов в различных условиях, наложенных на дисперсию и ковариационную функцию процесса, были получены в работах[39] [40].

Началом систематического изучения статистических аспектов теории принято считать уже упомянутую работу Пикандса[4] и работу Хилла[41], в которых были предложены первые оценки индекса экстремального значения γ, параметра, который управляет предельным поведением распределения максимума случайных величин в теореме Гнеденко, хотя первые критерии проверки принадлежности распределений областям притяжения максимально-устойчивых законов Фреше, Вейбулла и Гумбеля начали появляться чуть ранее (см. например [42]). В целом, задаче оценивания индекса экстремального значения, а также оценивания параметров модели обобщенного распределения Парето, как для последовательностей независимых, так и зависимых случайных величин посвящено достаточно много работ (см. [43] [44] [45] [46] среди прочих), чего нельзя сказать о задачах проверки гипотез о хвостах распределений, см. обзор[47] методов их решения. Интересно, что в подавляющем большинстве случаев проверяемые

[33]Питербарг В.И., Фаталов В.Р. Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах. *Успехи мат. наук*, **50 (6)** (1995), 57–150.

[34]Михалева Т.Л., Питербарг В.И. О распределении максимума гауссовского поля с постоянной дисперсией на гладком многообразии. *Теор. вер. примен.*, **41(2)** (1996), 438–451.

[35]Piterbarg V.I. High excursion for non-stationary generalized chi-square processes. *Stoch. Proc. Appl.*, **53(2)** (1994), 307–337.

[36]Piterbarg V.I. High extrema of Gaussian chaos processes. *Extremes*, **19(2)** (2016), 253–272.

[37]Piterbarg V.I. Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. — American Mathematical Society [Providence, R.I., etc.], United States, 2012.

[38]Питербарг В.И. Двадцать лекций о гауссовских процессах. МЦНМО Москва, 2015.

[39]Hashorva E., Ji L. Piterbarg theorems for chi-processes with trend. *Extremes*, **18(1)** (2015), 37–64.

[40]Liu P., Ji L. Extremes of locally stationary chi-square processes with trend. *Stoch. Proc. Appl.*, **127(2)** (2017), 497–525.

[41]Hill B.M.. A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Statist.*, **3** (1975), 1163-1174.

[42]Mann N.R., Scheuer E.M., Fertig K.W. A new goodness-of-fit test for the two-parameter Weibull or extreme-value distribution with unknown parameters. *Comm. Statist.* **2**, 383–400 (1973)

[43]Hall P. On some simple estimates of an exponent of regular variation. *Journal of the Royal Statistical Society*, **B44**(1982), 37-42.

[44]Smith R. (1985). Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases. *Biometrika* **72** (1985), 67–90.

[45]Dekkers A.L.M., de Haan L. On the estimation of the extreme-value index and large quantile estimation. *Ann. Statist.*, **17** (1989), 1795-1832.

[46]Hsing T. On tail index estimation using dependent data. *Ann. Statist.*, **19** (1991), 1547-1569.

[47]Hüsler J., Peng L. Review of testing issues in extremes: in honor of Professor Laurens de Haan. *Extremes*, **11** (2008), 99-111.

гипотезы формулируются в терминах индекса экстремального значения и параметров модели обобщенного распределения Парето, тогда как задачи различения хвостов распределений внутри областей максимального притяжения или, наоборот, не принадлежащих ни одной из областей максимального притяжения, практически не рассматривались, отметим здесь работы[48] [49].

Первые работы по оцениванию экстремального индекса стационарных последовательностей начали появляться позже, в 90х годах[50] [51]. На сегодняшний день наилучшими оценками экстремального индекса признаны интервальная оценка[52] и оценка методом K-gaps[53]. Однако стоит отметить, что все предложенные на настоящий момент оценки требуют выбора одного или двух вспомогательных параметров (например, выбора высокого уровня или размера блока), и при их неаккуратном выборе точность оценивания существенно снижается. Проблеме оптимального выбора вспомогательных параметров пока что посвящено не так много работ[54] [55], но в настоящее время исследования в этом направлении ведутся достаточно активно, см. обзор[56].

Цель работы.

- Получить достаточные условия экстремальной независимости дискретных случайных систем и применить этот результат для изучения экстремумов гауссовских систем и экстремальных характеристик случайных графов.

[48] Goegebeur J., Guillou A. Goodness-of-fit testing for Weibull-type behavior. *J. Statist. Plann. Infer.*, **140(6)** (2010), 1417-1436

[49] Fraga Alves I., de Haan L., Neves C. A Test Procedure for Detecting Super-Heavy Tails. *J. Statist. Plann. Inference*, **139(2)**(2009), 213–227.

[50] Hsing T. Extremal index estimation for a weakly dependent stationary sequence. *Ann. Statist.*, **21(4)**(1993), 2043-2071.

[51] Weissman I., Novak S.Yu. On blocks and runs estimators of the extremal index. *J. Statist. Plann. Infer.*, **66** (1998), 281-288.

[52] Ferro C.A.T., Segers J. Inference for Clusters of Extreme Values. *J. R. Stat. Soc. Ser. B.*, **65** (2003), 545-556.

[53] Süveges M., Davison A.C. Model misspecification in peaks over threshold analysis. *Ann. Appl. Stat.*, **4(1)** (2010), 203-221.

[54] Fukutome S., Liniger M.A., Süveges M. Automatic threshold and run parameter selection: a climatology for extreme hourly precipitation in Switzerland. *Theor. Appl. Climatol.*, **120** (2015), 403-416.

[55] Ferreira M. Analysis of estimation methods for the extremal index. *J. Appl. Stat. Anal.*, **11(1)** (2018), 296-306.

[56] Ferreira M. Heuristic tools for the estimation of the extremal index: a comparison of methods. REVSTAT Stat. J., **16(1)** (2018), 115-136.

- Исследовать понятие и условия существования экстремального индекса для случайных полей с дискретным временем и схем серий случайных величин и исследовать автоматическую процедуру его оценивания для стационарной последовательности.

- Найти асимптотики вероятностей высоких экстремумов нестационарных гауссовских полей с непрерывным временем и евклидовых норм нестационарных гауссовских процессов с непрерывным временем в слабых предположениях на ковариационную функцию и дисперсию.

- На основе современных методов математической статистики предложить общие методы оценивания параметров и проверки гипотез о хвостах распределений по экстремальным наблюдениям выборки, не зависящие от выполнения условий теоремы Гнеденко.

Методы исследования.

В работе используются классические и современные методы теории вероятностей и математической статистики, такие как теория сходимости в пространстве Скорохода, теория контигуальных мер, метод отношения правдоподобий, неравенства Прохорова и Фука-Нагаева, а также специальные методы теории экстремумов, такие как представление Реньи и теорема Смирнова, методы асимптотического анализа гауссовских процессов, такие как метод двойных сумм и лемма сравнения, и методы теории случайных графов.

Научная новизна.

Все представленные в диссертации результаты являются новыми. Основные результаты диссертации следующие.

- Показано, что при выполнении условий типа D и D' Лидбеттера предельное распределение последовательности максимумов схемы серий зависимых случайных величин совпадает с предельным распределением последовательности максимумов схемы сопровождающих серий независимых случайных величин. Результат использован для доказательства теоремы Гнеденко для стационарных случайных полей на $\mathbb{Z}^d$, для анализа экстремумов гауссовских систем и для изучения предельных распределений экстремальных характеристик случайных графов.

- Найдены условия существования экстремального и хвостового индексов для последовательностей сумм и максимумов схемы серий зависимых случайных величин с доминирующим членом.

- Доказано отличие понятий глобального экстремального индекса и экстремального индекса вдоль направлений для стационарных случайных полей на целочисленных решетках; для этой цели исследовано предельное распределение нормированного максимума стационарного гауссовского поля на $\mathbb{Z}^d$ при нарушении условия Бермана.

- Доказана корректность автоматической процедуры оценивания экстремального индекса стационарной последовательности на основе произвольной оценки экстремального индекса, зависящей от одного гиперпараметра.

- Найдены условия выполнения теоремы Гнеденко для диагональных и внедиагональных элементов эмпирической матрицы ковариаций стационарного субэкспоненциального случайного поля; для доказательства этого результата была получена асимптотика вероятности большого уклонения последовательности частичных сумм субэкспоненциальной стационарной последовательности.

- Найдена асимптотика вероятности высокого экстремума нестационарного гауссовского поля и эвклидовой нормы гауссовского векторного процесса без предположений о степенном характере поведения ковариационной функции и дисперсии процесса.

- Предложен первый общий метод оценивания одномерного параметра хвоста распределения, не зависящий от выполнения условий теоремы Гнеденко.

- Предложены оценки параметров сдвига и масштаба хвоста распределения из областей максимального притяжения Фреше и Гумбеля.

- Предложен первый общий метод различения широких классов хвостов распределений, не зависящий от выполнения условий теоремы Гнеденко.

- Предложены первые критерии согласия для хвостов распределений и доказана их состоятельность.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Развитые в диссертации методы могут быть применены в задачах стохастической теории экстремумов, а также в теории случайных графов. Результаты работы могут быть использованы для оценивания рисков в финансовой и страховой сфере, в задачах гидрологии и метеорологии, в задачах надежности оборудования и безопасности технических систем, для анализа телекоммуникационных систем.

Разделы диссертации могут быть использованы как материал специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности "математика".

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались автором на научных семинарах:

- Большой семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика РАН, проф. А.Н. Ширяева.

- Семинар отдела теории вероятностей и математической статистики Математического института им. В.А. Стеклова под руководством академика РАН, проф. А.С. Холево и академика РАН, проф. А.Н. Ширяева.

- семинар "Гауссовские случайные процессы" под руководством д.ф.-м.н., проф. В.И. Питербарга, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

- семинар "Статистика экстремальных значений" под руководством д.ф.-м.н., гл.н.с. Н.М. Маркович, Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова.

- семинар "Управление по неполным данным" под руководством члена-корреспондента РАН, проф. А.А. Галяева, Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова.

- научно-исследовательский семинар кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ под руководством д.ф.-м.н., проф. А.М. Райгородского.

а также на международных конференциях:

- Workshop “Statistics meets Stochastics - 2”, Москва, ВШЭ, Россия (9-10 июня 2017 г.)
- International workshop on graphs, networks and their applications, Москва, МФТИ, Россия (14-16 мая 2018 г.)
- 4th Conference of the International Society for Nonparametric Statistics, Салерно, Италия (11-15 июня 2018 г.)
- International workshop “LSA winter meeting” 2018, пос. Снегири, Московская обл., Россия (3-7 декабря 2018 г.)
- 4th International Conference on Stochastic Methods, Дивноморское, Краснодарский край, Россия (3-8 июня 2019 г.)
- Extreme Value Analysis 2019, Загреб, Хорватия (30 июня-5 июля 2019 г.)
- XXII International Conference on Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN’2019), Москва, Россия (23-27 сентября 2019 г.)
- The 8th Polish Combinatorial Conference, онлайн, Польша (14-18 сентября 2020 г.)
- 5th International Conference on Stochastic Methods, онлайн, Россия (23-27 ноября 2020 г.)

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 18 печатных работах, приведенных в конце автореферата, в рецензируемых научных изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science и Scopus.

Личный вклад.

Некоторые работы, опубликованные автором диссертации, были написаны в соавторстве с другими учеными. Результаты этих работ, включенные в диссертацию, получены автором самостоятельно (кроме одного случая, когда результаты работы были получены при равноценном вкладе с соавтором).

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 4 глав, разбитых на разделы, приложения и списка литературы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится краткий обзор исследований, посвященных вопросам стохастической теории экстремумов, и результатов диссертации.

В **первой главе** диссертации проводится анализ экстремумов систем (последовательностей, полей и схем серий) зависимых случайных величин. В разделе 1.1 приводится краткий обзор основных теорем и понятий классической стохастической теории экстремумов. В разделе 1.2 формулируется и доказывается результат о асимптотической эквивалентности распределений максимумов зависимых случайных величин и максимумов независимых случайных величин с такими же маргинальными распределениями в схеме серий. А именно, рассматриваются следующие вопросы: при каких условиях для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\left| \mathsf{P}\left(\max_{i\in[d]} X_{i,n} \le x \right) - \prod_{i\in[d]} \mathsf{P}\left(X_{i,n} \le x\right) \right| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{1}$$

где $\mathbf{X}_n = (X_{1,n}, \dots, X_{d,n})$, $d = d(n)$, $n \in \mathbb{N}$ – последовательность действительнозначных случайных векторов и $[d] := \{1, \dots, d\}$, и существует ли равномерная оценка для модуля разности в (1). Если установлен результат типа (1), то предельное распределение максимума случайных величин в схеме серий найти гораздо проще; так, в случае одинаковой распределенности этих величин задача сводится к применению теоремы Гнеденко. По стандартному соглашению, из $\mathsf{P}(A) = 0$ вытекает $\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)$.

Теорема 1.5. *Пусть* $x \in \mathbb{R}$, $A_i = A_i(n) = \{X_{i,n} > x\}$. *Предположим, что множества индексов* $W_i = W_i(n) \subseteq [d] \setminus \{i\}$, $i \in [d]$, *и* $\gamma > 0$ *таковы, что*

$$\left| \mathsf{P}\Big(\bigcup_{j\in W_i\cap[i-1]} A_j \Big) - \mathsf{P}\Big(\bigcup_{j\in W_i\cap[i-1]} A_j \mid A_i \Big) \right| \leqslant \gamma \tag{2}$$

для всех $i \in [d]$. *Обозначим*

$$\Delta = \sum_{i\in[d]} \mathsf{P}\left(\cup_{j\in[i-1]\setminus W_i} A_j\right) \mathsf{P}(A_i), \quad \Delta' = \sum_{i\in[d]} \sum_{j\in[i-1]\setminus W_i} \mathsf{P}(A_i \cap A_j).$$

Тогда

$$\left|\mathsf{P}\Big(\bigcap_{i\in[d]}\overline{A_i}\Big)-\prod_{i\in[d]}\mathsf{P}\left(\overline{A_i}\right)\right|\leqslant\gamma\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i\in[d]}A_i\Big)+\max(\Delta,\Delta').$$

Тем самым, достаточным условием выполнения (1) является стремление величин γ, Δ и Δ' к 0 при $n\to\infty$. Далее, в разделе 1.3 приводится результат применения теоремы 1.5 к гауссовским системам. В разделе 1.4 теорема 1.5 используется для анализа такой максимальной характеристики случайного графа как максимальное число общих соседей k вершин в случайном графе.

В разделе 1.5 получены условия существования хвостового и экстремального индексов последовательностей взвешенных сумм и максимумов схемы серий зависимых регулярно меняющихся случайных величин в случае наличия доминирующего члена; установлено, что хвостовые и экстремальные индексы этих последовательностей совпадают и равны хвостовому и экстремальному индексу доминирующей последовательности. Итак, пусть $(Y_{n,i},\ n,i\geqslant 1)$ – схема бесконечных серий зависимых случайных величин. Будем предполагать, что для каждого $i\geqslant 1$ последовательность $(Y_{n,i},n\geqslant 1)$ является стационарной (в узком смысле) и имеет *экстремальный индекс* θ_i, то есть для любого $\tau>0$ существует такая последовательность уровней $(u_n^{(i)}(\tau),\ n\geqslant 1)$, что выполнено

$$n\mathsf{P}\big(Y_{1,i}>u_n^{(i)}(\tau)\big)\to\tau,\quad \mathsf{P}\big(M_{n,i}\leqslant u_n^{(i)}(\tau)\big)\to e^{-\theta_i\tau}$$

при $n\to\infty$, где $M_{n,i}=\max_{j=1,\dots,n}Y_{j,i}$. Пусть также для каждого $i\geqslant 1$ последовательность $(Y_{n,i},n\geqslant 1)$ имеет регулярно меняющееся маргинальное распределение

$$\mathsf{P}(Y_{n,i}>x)=x^{-k_i}\ell_i(x)$$

с хвостовым индексом $k_i>0$ и медленно меняющейся на бесконечности функцией $\ell_i(x)$, пишем $Y_{n,i}\sim \mathrm{RV}_{k_i}$. Предположим выполнение условия

$$\ell_i(x)\leqslant Ax^{\delta},\quad x>x_0(A,\delta) \tag{3}$$

для всех $i\geqslant 1$ и некоторых $A,\delta>0$. Выберем

$$l_n=[n^{\chi}],\quad \chi>0 \tag{4}$$

и определим $k := \lim_{n\to\infty} \inf_{2\leqslant i\leqslant l_n} k_i$. Рассмотрим последовательности взвешенных сумм и максимумов схемы серий $(Y_{n,i}, n, i \geqslant 1)$

$$Y_n(z, l_n) = \sum_{i=1}^{l_n} z_i Y_{n,i}, \quad Y_n^*(z, l_n) = \max_{i=1,\ldots,l_n} z_i Y_{n,i},$$

где $(z_i, i \geqslant 1)$ – ограниченная последовательность неотрицательных чисел. Следующая теорема является обобщением теоремы 1 из работы А.А. Голдаевой[57].

Теорема 1.12. *Предположим, что выполнено* $k_1 < k$, (3) *и* $\chi < \chi_0$, *где*

$$\chi_0 = \frac{k - k_1}{k_1(k+1)}. \tag{5}$$

Тогда последовательности $(Y_n(z, l_n),\ n \geqslant 1)$ *и* $(Y_n^*(z, l_n),\ n \geqslant 1)$ *имеют одинаковый хвостовой индекс* $k(z) = k_1$ *и одинаковый экстремальный индекс* $\theta(z) = \theta_1$.

Заметим, что теорема 1.12 выполнена для любой последовательности натуральных чисел $(l_n,\ n \geqslant 1)$, удовлетворяющей условию $l_n \leqslant [n^\chi]$. Далее в разделе 1.5 рассматриваются экстремальные свойства последовательностей $(Y_n(z, N_n),\ n \geqslant 1)$ и $(Y_n^*(z, N_n),\ n \geqslant 1)$, где $(N_n, n \geqslant 1)$ – последовательность случайных величин, принимающих натуральные значения. Предположим также, что все величины в этой последовательности – регулярно меняющиеся с хвостовым индексом $\alpha > 0$, а именно, для всех $n \geqslant 1$ выполнено $\mathsf{P}(N_n > x) = x^{-\alpha}\tilde{\ell}_n(x)$ для некоторой последовательности медленно меняющихся на бесконечности функций $(\tilde{\ell}_n(x),\ n \geqslant 1)$. Каких-либо условий на форму зависимости между $(N_n, n \geqslant 1)$ и $(Y_{n,i}, n, i \geqslant 1)$ не налагается. Определим для $y > 0$ последовательность уровней $u_n = u_n(y)$, $n \geqslant 1$, где $u_n(y) = yn^{k_1}\ell_1^\sharp(n)$ и $\ell_1^\sharp(n)$ – обратная по де Бруину[58] функция к $\ell_1(n)$.

Теорема 1.14. *Предположим, что множества функций* $(\ell_n(x),\ n \geqslant 1)$ *и* $(\tilde{\ell}_n(x),\ n \geqslant 1)$ *удовлетворяют условию* (3), $k_1 < k$ *и*

$$\mathsf{P}(N_n > l_n) = o\big(\mathsf{P}(Y_{n,1} > u_n)\big), \quad n \to \infty$$

[57] Голдаева А.А. Индексы многомерных рекуррентных стохастических последовательностей. *Соврем. пробл. мат. мех.*, **8(3)** (2013), 42-51.

[58] Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. *Regular variation.* Cambridge: Cambridge university press, 1987.

для последовательности $(l_n,\ n \geqslant 1)$, *удовлетворяющей* (4) *и* (5). *Тогда последовательности* $(Y_n(z, N_n),\ n \geqslant 1)$ *и* $(Y_n^*(z, N_n),\ n \geqslant 1)$ *имеют одинаковый хвостовой индекс* $k(z) = k_1$ *и одинаковый экстремальный индекс* $\theta(z) = \theta_1$.

В разделе 1.6 обсуждаются понятия глобального экстремального индекса и экстремального индекса вдоль направления для случайных полей на $\mathbb{Z}^d$, формулируются необходимые и достаточные условия их существования и приводится пример гауссовского стационарного поля на $\mathbb{Z}^2$, вдоль некоторых направлений которого существует экстремальный индекс, но которое не имеет глобального экстремального индекса, что доказывает различие этих понятий. Итак, пусть $(X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$ – стационарное (в узком смысле) случайное поле размерности d с маргинальной функцией распределения F и частичными максимумами, определяемыми для $\mathbf{j}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ формулой

$$M_{\mathbf{j},\mathbf{n}} = \max_{\mathbf{k}:\mathbf{j}\leqslant\mathbf{k}\leqslant\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}},\ \text{если } \mathbf{j} \leq \mathbf{n},$$

и $M_{\mathbf{j},\mathbf{n}} = -\infty$, если $\mathbf{j} \not\leqslant \mathbf{n}$. Здесь $\mathbf{j} \leq \mathbf{n}$ означает, что все координаты вектора $\mathbf{j}$ не больше соответствующих координат вектора $\mathbf{n}$. Для удобства будем писать $M_{\mathbf{n}} := M_{\mathbf{1},\mathbf{n}}$. Скажем, что стационарное случайное поле $(X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$ имеет *экстремальный индекс* $\theta \in [0, 1]$, если для любого $\tau > 0$ существует такая последовательность уровней $(u_n(\tau),\ n \geqslant 1)$, что выполнено

$$\mathbf{n}^*\overline{F}\big(u_{\mathbf{n}^*}(\tau)\big) \to \tau, \quad \mathsf{P}\big(M_{\mathbf{n}} \leqslant u_{\mathbf{n}^*}(\tau)\big) \to e^{-\theta\tau} \tag{6}$$

при $\mathbf{n} \to \infty$ покоординатно, где $\mathbf{n}^* = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_d$, если $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d)$. Заметим, что свойство (6) выполнено вне зависимости от направления роста $\mathbf{n}$ к бесконечности. Далее, определим *монотонную кривую* в $\mathbb{N}^d$ как отображение $\psi(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^d$ такое, что $\psi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, $\psi(n) \leq \psi(n+1)$, но $\psi(n) \neq \psi(n+1)$ для всех $n \geqslant 1$ и

$$\frac{\psi(n+1)^*}{\psi(n)^*} \to 1, \quad n \to \infty,$$

и скажем, что у стационарного случайного поля $(X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$ есть экстремальный индекс θ по направлению ψ, если последовательность $(X_{\psi(n)},\ n \geqslant 1)$ имеет экстремальный индекс θ.

Введем *строго монотонное поле уровней* $(v_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$ как отображение $v_{(\cdot)} : \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}$ такое, что $v_{\mathbf{m}} \leqslant v_{\mathbf{n}}$, если $\mathbf{m}^* \leqslant \mathbf{n}^*$. Будем говорить, что стационарное случайное поле $(X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$ обладает свойством

$\mathbf{B}_T^{\psi}((v_{\psi(n)}))$, если для некоторого $T > 0$ и некоторой монотонной кривой ψ выполнено

$$\max_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)\leqslant T\psi(n)} \left| \mathsf{P}(M_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)} \leqslant v_{\psi(n)}) - \prod_{\mathbf{i}\in\{1,2\}^d} \mathsf{P}(M_{(p_1(i_1),\ldots,p_d(i_d))} \leqslant v_{\psi(n)}) \right| \to 0$$

при $n \to \infty$, где компоненты векторов $\mathbf{p}(1)$, $\mathbf{p}(2)$ – неотрицательные целые числа. В следующей теореме установлены необходимые и достаточные условия существования двух описанных типов экстремальных индексов у стационарного случайного поля на $\mathbb{Z}^d$.

Теорема 1.15. *(A. Jakubowski, N. Soja-Kukieła[59]) Пусть $(X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$ – стационарное случайное поле.*
(i) Поле $(X_{\mathbf{n}})$ имеет глобальный экстремальный индекс $\theta \in (0,1]$ тогда и только тогда, когда существуют такие $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$ и строго монотонное поле уровней $(v_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$, что

$$\mathsf{P}(M_{\mathbf{n}} \leqslant v_{\mathbf{n}}) \to \gamma_1,\ F(v_{\mathbf{n}})^{\mathbf{n}^*} \to \gamma_2 \text{ при } \mathbf{n} \to \infty,\ \frac{\ln \gamma_1}{\ln \gamma_2} = \theta$$

и для всех монотонных кривых ψ и всех $T > 0$ выполнено свойство $\mathbf{B}_T^{\psi}((v_{\psi(n)}))$.
(ii) Поле $(X_{\mathbf{n}})$ имеет экстремальный индекс $\theta \in (0,1]$ по направлению ψ тогда и только тогда, когда существуют такие $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$ и неубывающая последовательность уровней $(v_{\psi(n)},\ n \geqslant 1)$, что

$$\mathsf{P}(M_{\psi(n)} \leqslant v_{\psi(n)}) \to \gamma_1,\ F(v_{\psi(n)})^{\psi(n)^*} \to \gamma_2 \text{ при } n \to \infty,\ \frac{\ln \gamma_1}{\ln \gamma_2} = \theta$$

и для всех $T > 0$ выполнено свойство $\mathbf{B}_T^{\psi}((v_{\psi(n)}))$.

Далее в разделе 1.6 доказывается, что стационарное гауссовское случайное поле $(X_{(i,j)},\ (i,j) \in \mathbb{Z}^2)$ с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариационной функцией $r_{i,j} = \mathsf{E}X_{(0,0)}X_{(i,j)}$, где для некоторой константы $C > 0$

$$r_{i,j} = C\frac{\ln\ln|i|}{\ln|i|}\frac{1}{\ln|j|}$$

для достаточно больших по модулю i, j, имеет экстремальный индекс, равный 1, вдоль диагонального направления $\psi(n) = (n,n)$, но не имеет

[59] Jakubowski A., Rodionov I., Soja-Kukieła N. Directional phantom distribution functions for stationary random fields. *Bernoulli*, **27(2)** (2021), 1028-1056.

экстремального индекса вдоль направления $\tilde{\psi}(n) = ([n/\ln n], [\ln n])$. Это означает, что у данного поля нет глобального экстремального индекса и что две упомянутых разновидности экстремального индекса различаются.

В разделе 1.7 изучаются предельные свойства статистики ω^2-критерия, построенной по максимальным членам вариационного ряда межкластерных расстояний, для процедуры оптимального выбора гиперпараметра оценки экстремального индекса стационарной последовательности. Итак, пусть $(X_i,\ i \geq 1)$ – стационарная (в узком смысле) последовательность с маргинальной функцией распределения F и экстремальным индексом θ. Пусть количество превышений последовательностью $(X_i)_{i=1}^n$ уровня u равно $L = L(u)$ и $S_j(u)$ – это индекс j-го превышения, то есть,

$$S_j(u) = \min\{k > S_{j-1}(u) : X_k > u\}, \quad j = 1, \ldots, L,$$

где $S_0(u) = 0$. Определим *межкластерные расстояния* как

$$Y_j(u) = (L(u)/n) \cdot (S_{j+1}(u) - S_j(u)), \quad j = 1, \ldots, L-1,$$

и предположим для удобства, что их количество также равно L. Известно, что при некоторых условиях[52] выполнено

$$\mathsf{P}(Y_1(u_n) > x) \to \theta e^{-\theta x} =: 1 - F_\theta(x)$$

для некоторой последовательности уровней $(u_n,\ n \geqslant 1)$. Далее пишем Y_i вместо $Y_i(u_n)$, $1 \leqslant i \leqslant L$. Рассмотрим модификацию статистики ω^2-критерия Крамера-фон Мизеса-Смирнова, построенную по максимальным порядковым статистикам последовательности $(Y_i,\ 1 \leqslant i \leqslant L)$,

$$\widetilde{\omega}_k^2(\theta) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{F_\theta(Y_{(L-i)}) - F_\theta(Y_{(L-k)})}{1 - F_\theta(Y_{(L-k)})} - \frac{k - i - 0.5}{k} \right)^2 + \frac{1}{12k}.$$

Тогда предлагаемый метод выбора высокого уровня u для оценивания экстремального индекса состоит в том, чтобы найти решения $u_1, \ldots, u_l$ уравнения невязки

$$\widetilde{\omega}_k^2(\hat{\theta}_n(u)) = \delta,$$

где $\hat{\theta}_n(u)$ – некоторая оценка экстремального индекса и δ – мода (или высокая квантиль) распределения A_1, предельного распределения статистики классического ω^2-критерия в случае верности нулевой гипотезы, и положить $\tilde{\theta}_n = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^l \hat{\theta}_n(u_i)$ в качестве окончательной оценки. Корректность такого выбора δ подтверждает следующая теорема.

Теорема 1.21. *Пусть выполнены условия теоремы 1 из работы*[52]. *Предположим, что оценка экстремального индекса* $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}_n(u_n)$ *такова, что*

$$\sqrt{m_n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \zeta, \quad n \to \infty,$$

где ζ *имеет невырожденное распределение. Пусть последовательность* $(m_n,\ n \geqslant 1)$ *такова, что* $k/m_n = o(1)$ *и* $(\ln L)^2/m_n = o(1)$ *при* $n \to \infty$. *Тогда*

$$\widetilde{\omega}_k^2(\widehat{\theta}_n) \xrightarrow{d} \xi \sim A_1, \quad n \to \infty.$$

Для некоторых оценок экстремального индекса, например, интервальной оценки и оценки методом K-gaps, в качестве m_n можно выбрать L. В разделе 1.8 обсуждается предельное распределение еще одной модификации ω^2-статистики в случае нарушения условия $k/L = o(1)$, а именно, показано, что случае $k/L \to c \in (0,1)$ при $n \to \infty$ это распределение будет зависеть от значения θ.

В разделе 1.9, последнем разделе главы 1, рассматривается задача поиска асимптотики распределения максимума диагональных и внедиагональных элементов эмпирической матрицы ковариаций стационарного m-зависимого случайного поля. Итак, рассмотрим случайное действительно-значное поле $(X_{it},\ i,t \in \mathbb{Z})$. Предположим, что "строки" $(X_{it},\ t \in \mathbb{Z})$, $i = 1,2,\ldots,$ являются независимыми одинаково распределенными, каждая из которых является m-зависимой стационарной последовательностью. Рассмотрим матрицу $\mathbf{X} = (X_{it},\ i = 1,\ldots,p; t = 1,\ldots,n)$. Ее эмпирическая матрица ковариаций определяется как

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^\top = \Big(\sum_{t=1}^{n} X_{it}X_{jt}\Big)_{i,j=1,\ldots,p} =: (S_{ij}^{(n)})_{i,j=1,\ldots,p}\,.$$

Предположим, что $p = p_n \to \infty$. Далее под X подразумеваем случайную величину с функцией распределения F, а также будем обозначать последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения F через (X_i).

Лемма 1.24. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) $X \in \mathrm{RV}_\alpha$ *для некоторого* $\alpha > 4$, *в частности, это означает, что существует такая последовательность* (c_n), *что* $n\,\mathsf{P}(X^2 > c_n) \to 1$ *и* $c_n^{-1}\max_{i=1,\ldots,n} X_i^2 \xrightarrow{d} Y$, *где* Y *распределено по максимально-устойчивому закону Фреше с параметром* $\alpha/2$.

(ii) Выполнены соотношения:

$$\mathsf{P}\big(S_{11}^{(n)} - n\,\mathsf{E}X^2 > c_{np}x\big) \sim n\,\mathsf{P}(X^2 > c_{np}x)\,, \quad x > 0\,,$$
$$\mathsf{P}\big(|S_{12}^{(n)} - n\,(\mathsf{E}X)^2| > c_{np}x\big) \leqslant c\,n\,\mathsf{P}(|X_1X_2| > c_{np}x) = o(p^{-2}),\ x > 0.$$

Тогда верны следующие предельные соотношения:

$$c_{np}^{-1} \max_{1\leqslant i<j\leqslant p} |S_{ij}^{(n)} - n\,(\mathsf{E}X)^2| \xrightarrow{P} 0\,,$$
$$c_{np}^{-1} \max_{i=1,\dots,p} \big(S_{ii}^{(n)} - n\,\mathsf{E}X^2\big) \xrightarrow{d} Y.$$

Раздел 1.9 также содержит результат, аналогичный лемме 1.24, в случае если X имеет субэкспоненциальное распределение, принадлежащее области максимального притяжения Гумбеля. В конце раздела 1.9 доказан результат о больших уклонениях частичных сумм m-зависимой стационарной последовательности, который дает достаточные условия выполнения предельных соотношений из пункта (ii) леммы 1.24.

Вторая глава диссертации посвящена результатам автора в теории асимптотического анализа гауссовских случайных процессов. А именно, результаты касаются асимптотик вероятностей больших уклонений нестационарных гауссовских процессов, гауссовских полей и процессов бесселевского типа.

В разделе 2.1 после краткого обзора литературы приводится результат об асимптотике вероятности высокого экстремума нестационарного гауссовского процесса на действительной прямой в так называемом "почти стационарном" случае [60]. Итак, пусть $X(t)$, $t \in [-S, S]$, – гауссовский случайный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $r(s,t)$, обозначим $\sigma^2(t) = r(t,t)$. В разделе 2.1, как и в остальных разделах этой главы, нас будет интересовать асимптотическое поведение вероятности

$$P(\mathcal{S}; u) := \mathsf{P}(\max_{t\in\mathcal{S}} X(t) > u). \tag{7}$$

при $u \to \infty$. Выберем $\mathcal{S} = [-S, S]$ для некоторого $S > 0$. Наложим следующие условия на процесс:

A1 Случайный процесс $X(t)$ непрерывен почти наверное.

[60] Кобельков С.Г., Питербарг В.И., Родионов И.В., Хашорва Э. Вероятность высокого максимума траектории нестационарного процесса. *Фундаментальная и прикладная математика*, **23(1)** (2020), 161–174.

A2 Абсолютный максимум функции $\sigma(t)$ на отрезке $[-S, S]$ достигается в единственной точке $t = 0$, причем $\sigma(0) = 1$. Кроме того, существуют пределы (конечные или бесконечные)

$$\lim_{t\downarrow 0, s\downarrow 0} \frac{1-\sigma^2(t)}{1-r(s,t)} \in [0,\infty] \quad \text{и} \quad \lim_{t\uparrow 0, s\uparrow 0} \frac{1-\sigma^2(t)}{1-r(s,t)} \in [0,\infty].$$

Если хотя бы один из этих пределов равен 0, то в этом случае предположим, что существуют такие константы $c > 0$ и $K < \infty$, что для всех $x \in [0, c]$ уравнение $1 - \sigma^2(t) = x$ имеет не более, чем K корней.

A3 Обозначим $\rho(s,t) := r(s,t)/\sigma(s)\sigma(t)$. Тогда существует такая ковариационная функция $\rho(t)$ стационарного процесса, что выполнено

$$\lim_{s,t\to 0} \frac{1-\rho(s,t)}{1-\rho(t-s)} = 1.$$

A4 Для функции ρ из предыдущего условия найдутся положительные функции $q(u)$ и $h(t)$ такие, что для всех $t \neq 0$ существует предел

$$\lim_{u\to\infty} u^2(1-\rho(q(u)t)) = h(t),$$

причем для некоторого $\varepsilon > 0$ это соотношение выполнено равномерно на отрезке $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Легко видеть, что из условий **A2** и **A4** следует, что существует предел

$$\lim_{u\to\infty} u^2(1-\sigma^2(q(u)t)) = h_1(t) \in [0,\infty].$$

Обозначим

$$\Psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx,$$

хвост функции распределения стандартной нормальной случайной величины. "Почти стационарный" случай поведения процесса $X(t)$, о котором далее пойдет речь, обобщает случай $\beta > \alpha$ в монографиях[38] [39]. Обозначим для удобства $f(t) = (1-\sigma^2(t))/2$, а также

$$L_+(\lambda) := \int_0^\delta e^{-\lambda f(t)} dt \quad \text{и} \; L_-(\lambda) := \int_{-\delta}^0 e^{-\lambda f(t)} dt, \quad \lambda > 0. \tag{8}$$

Асимптотическое поведение этих интегралов при $\lambda \to \infty$ не зависит от выбора $\delta > 0$ в силу условий на $\sigma(t)$. Следующая теорема получена в работе[60].

Теорема 2.1 (S.G. Kobelkov, V.I. Piterbarg)**.** *Пусть выполнены условия* **A1-A4**. *Если* $h_1(t) = 0$, $t \in [-S, S]$, *то*

$$P([0, S], u) = H_\alpha L_+(u^2)\ q^{-1}(u)\Psi(u)(1 + o(1))$$

и

$$P([-S, S], u) = H_\alpha \left(L_+(u^2) + L_-(u^2)\right) q^{-1}(u)\Psi(u)(1 + o(1))$$

при $u \to \infty$, *где* H_α – *константа Питербарга, см. определение в монографии*[39].

Основным результатом раздела 2.2 является обобщение результата теоремы 2.1 на нестационарные гауссовские поля, однако на случайное поле накладываются несколько другие условия. Итак, пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ есть замыкание открытого множества, содержащего точку 0, и пусть $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathcal{S}$, – почти наверное непрерывное гауссовское поле с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $R(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = EX(\mathbf{s})X(\mathbf{t})$, снова обозначим через $\Sigma^2(\mathbf{t}) = R(\mathbf{t}, \mathbf{t})$ функцию дисперсии данного процесса. Целью раздела 2.2 является изучение вероятности (7) при $u \to \infty$ для гауссовского поля $X(\mathbf{t})$ в почти стационарном случае. Наложим условия на этот процесс, большинство из которых является естественным продолжением условий **A1-A4**.

B1 Случайное поле $X(\mathbf{t})$ непрерывно почти наверное. Более того, существует $\varepsilon > 0$ такое, что интеграл Дадли[40] [61] стандартизированного поля $\tilde{X}(\mathbf{t}) = X(\mathbf{t})/\Sigma(\mathbf{t})$ по множеству $\mathbb{B}_\varepsilon = \{\mathbf{t} : \ |\mathbf{t}| \leqslant \varepsilon\}$ конечен.

B2 Абсолютный максимум функции $\Sigma(\mathbf{t})$ на множестве $\mathcal{S}$ достигается в единственной точке $\mathbf{t} = \mathbf{0}$, причем $\Sigma(\mathbf{0}) = 1$.

B3 Существует такая ковариационная функция $\Upsilon(\mathbf{t})$ однородного случайного поля, $\Upsilon(\mathbf{t}) < 1$ для $\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$, что выполнено

$$\lim_{\mathbf{s},\mathbf{t}\to\mathbf{0},\mathbf{s}\neq\mathbf{t}} \frac{1 - R(\mathbf{s}, \mathbf{t})}{1 - \Upsilon(\mathbf{t} - \mathbf{s})} = 1.$$

B4 Существует базис в $\mathbb{R}^d$, векторная функция $\mathbf{q}(u) = (q_1(u), \ldots, q_d(u))$, $u > 0$, с положительными компонентами и

[61] Dudley R.M. The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes. *J. Funct. Anal.* **1** (1967), 290–330.

положительная для всех $\mathbf{t} \neq 0$ функция $h(\mathbf{t})$ такие, что для всех $\mathbf{t}$, записанных в этих координатах, будет выполнено

$$\lim_{u\to\infty} u^2(1 - \Upsilon(\mathbf{q}(u)\mathbf{t})) = h(\mathbf{t})$$

равномерно по $\mathbf{t}$ на любом замкнутом множестве, где под $\mathbf{q}(u)\mathbf{t}$ имеется в виду вектор $(q_1(u)t_1, \ldots, q_d(u)t_d)$.

B5 Для всех $\mathbf{t}$ существует функция $h_1(\mathbf{t}) \in [0, \infty]$ такая, что выполнено предельное соотношение

$$\lim_{u\to\infty} u^2(1 - \Sigma^2(\mathbf{q}(u)\mathbf{t})) = h_1(\mathbf{t}).$$

Более того, если $h_1(\mathbf{e}) = 0$ для всех $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^{d-1}$, где $\mathbb{S}^{d-1}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^d$, то

$$\lim_{u\to\infty} u^2\big(\Sigma^2(\mathbf{s}) - \Sigma^2(\mathbf{s} + \mathbf{q}(u)\mathbf{t})\big) = 0$$

равномерно по $\mathbf{s} \in \mathbb{B}_\varepsilon$ и $\mathbf{t}$ на произвольном замкнутом множестве.

Определим

$$\hat{L}(\lambda) = \int_{|\mathbf{t}|\leqslant 1} e^{-\lambda(1-\Sigma^2(\mathbf{t}))/2} d\mathbf{t}, \quad \lambda > 0.$$

Тогда будет верен следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* **B1-B5**. *Если к тому же* $h_1(\mathbf{t}) = 0$ *для всех* $\mathbf{t}$, *то*

$$P(\mathcal{S}, u) = (1 + o(1))H_{\mathbf{q}}\hat{L}(u^2)\prod_{i=1}^{d} q_i^{-1}(u)\Psi(u)$$

при $u \to \infty$, *где* $H_{\mathbf{q}}$ – *обобщенная константа Питербарга, см. определение в работе*[62].

В разделе 2.3 получена асимптотика вероятности высокого экстремума евклидовой нормы гауссовского векторного процесса с независимыми одинаково распределенными компонентами для всех трех возможных случаев поведения функции дисперсии и ковариационной функции.

[62]Kobelkov S.G., Piterbarg V.I. On maximum of Gaussian random field having unique maximum point of its variance. *Extremes*, **22** (2019), 413-432.

Пусть $\mathbf{X}(t) := (X_1(t), \ldots, X_d(t)) \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, T]$ – гауссовский векторный процесс, компоненты которого – независимые одинаково распределенные гауссовские процессы с нулевыми средними. Модуль этого процесса $\beta(t) := |\mathbf{X}(t)|$ будем называть $\beta-$процессом. Целью раздела 2.3 является нахождение асимптотики вероятности

$$\mathsf{P}\left(\max_{t\in[0,T]} \beta(t) > u\right)$$

при $u \to \infty$. Аналогично началу раздела 2.1, обозначим $r(s,t) = \mathsf{E}X_1(t)X_1(s)$, прочие обозначения раздела 2.1 будем использовать без изменений. Предположим, как и ранее, что функция $\sigma^2(t)$ имеет единственный максимум на отрезке $[0,T]$ в точке t_0, причем $\sigma^2(t_0) = 1$. Наложим на компоненты векторного процесса $\mathbf{X}(t)$ условия **A1, A3** и **A4**, изменив точку максимума дисперсии с 0 на t_0, а вместо условия **A2** наложим следующее:

A2* Для всех t существует предел

$$h_1(t) = \lim_{u\to\infty} u^2(1 - \sigma^2(t_0 + q(u)t)) \in [0, \infty].$$

В граничных случаях: при $t_0 = 0$ и $t < 0$ или при $t_0 = T$ и $t > 0$ – считаем, что $h_1(t) = \infty$. Более того, если $h_1(t) = 0$ для некоторого t, то существуют $c > 0$ и $K < \infty$ такие, что для всех $x \in [0, c]$ количество корней уравнения $1 - \sigma^2(t) = x$ не превосходит K.

В этих условиях верен основной результат раздела 2.3:

Теорема 2.4. *Пусть выполнены вышеприведенные условия на процесс $\boldsymbol{X}(t)$. Тогда при $u \to \infty$ выполнены следующие соотношения:*

1) Если хотя бы одно из чисел $h_1(1), h_1(-1)$ равно нулю, то

$$P(\max_{[0,T]} \beta(t) > u) = \frac{\sqrt{\pi} H_\alpha}{2^{(d-3)/2}\Gamma(d/2)} u^{d-1} L(u^2) q(u)^{-1} \Psi(u)(1 + o(1)),$$

где $L(\lambda) = L_+(\lambda) + L_-(\lambda)$.
*2) Если $h_1(1) = h_1(-1) = \infty$ (здесь имеется в виду доопределение $h_1(t)$ в **A2*** для граничной t_0, то*

$$P(\max_{[0,T]} \beta(t) > u) = \frac{\pi^{d/2}}{2^{(d-3)/2}\Gamma(d/2)} u^{d-1} \Psi(u)(1 + o(1)).$$

3) Если хотя бы одно число из чисел $h_1(1)$, $h_1(-1)$ положительно и конечно, при этом другое – не нуль, то

$$P(\max_{[0,T]} \beta(t) > u) = \frac{\pi^{d/2} P_\alpha}{2^{(d-3)/2}\Gamma(d/2)} u^{d-1}\Psi(u)(1+o(1)),$$

определение константы Пикандса P_α см. в монографии[38].

Третья глава диссертации посвящена критериям проверки гипотез о хвостах распределений по выборкам из независимых одинаково распределенных случайных величин. Общим для всех предложенных критериев является то, что они построены с использованием лишь максимальных членов вариационного ряда выборки, потому что хвост распределения оказывает влияния лишь на эти наблюдения.

Первый раздел этой главы посвящен краткому обзору литературы о проверке гипотез о хвостах распределений по последовательностям независимых одинаково распределенных случайных величин. В разделе 3.2 предлагается критерий проверки простой гипотезы о хвосте распределения из области максимального притяжения Гумбеля против сложной "левосторонней" альтернативы. Критерий снова строится на основе отношения правдоподобий; существенным ограничением этого критерия является то, что хвосты распределений из нулевой и альтернативной гипотез должны убывать быстрее, чем хвост экспоненциального распределения. "Левосторонность" альтернативы в данном случае означает, что все хвосты распределений из альтернативной гипотезы тяжелее хвоста некой функции распределения F_1, который в свою очередь тяжелее хвоста функции распределения F_0 из нулевой гипотезы.

В разделе 3.3 рассматривается общий критерий различения двух разделимых классов хвостов непрерывных распределений. Большим плюсом критерия по сравнению с критериями проверки гипотез о хвостах распределений, предложенных в литературе, является тот факт, что выполнение условий теоремы Гнеденко для рассматриваемых распределений не является обязательным. На протяжении глав 3 и 4 будем считать, что $\mathbf{X}_n = (X_1, ..., X_n)$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с непрерывной функцией распределения F, вариационный ряд выборки $\mathbf{X}_n$ обозначим через $X_{(1)} \le \ldots \le X_{(n)}$. Для построения критерия будем использовать следующую статистику

$$R_{k,n} = \ln(1 - F_0(X_{(n-k)})) - \frac{1}{k}\sum_{i=n-k+1}^{n} \ln(1 - F_0(X_{(i)})), \qquad (9)$$

где F_0 – некоторая непрерывная функция распределения и $k < n$. Обозначим $x_F^* = \sup\{x : \ F(x) < 1\}$ и назовем ее *правой граничной точкой* функции распределения F. Далее, скажем, что две непрерывные функции распределения G и H с $x_G^* = x_H^*$ удовлетворяют условию $B(G, H)$ (B-условию), если для некоторых $\varepsilon \in (0, 1)$ и x_0 выполнено

$$\frac{(1 - G(x))^{1-\varepsilon}}{1 - H(x)} \text{ не возрастает при } x_0 < x < x_G^*. \tag{10}$$

Пусть классы распределений A_0 и A_1 таковы, что хвосты распределений из класса A_0 легче, чем хвосты распределений из класса A_1. Будем также предполагать, что правые граничные точки всех распределений из этих классов совпадают и равны x^*. Объединим эти два условия под названием *A-условие*. Предположим, что существует "разделяющая" функция распределения F_0, такая что для всех $G \in A_0$ выполнено

$$\overline{\lim_{x \to x^*}} \frac{1 - G(x)}{1 - F_0(x)} \leq 1$$

и для произвольной $H \in A_1$ выполнено условие $B(F_0, H)$. Назовем такие классы *B-разделимыми*. Рассмотрим основную гипотезу $\tilde{H}_0 : F \in A_0$ и альтернативу $\tilde{H}_1 : F \in A_1$. В такой постановке будет верен следующий результат.

Теорема 3.11. *Пусть последовательность $k = k(n)$ такова, что*

$$k \to \infty, \ k/n \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{11}$$

Тогда критерий

$$\text{если } R_{k,n} > 1 + \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{k}}, \text{ то отвергнуть } \tilde{H}_0, \tag{12}$$

проверки гипотезы $\tilde{H}_0$ асимптотически имеет уровень значимости α и является состоятельным на альтернативе $\tilde{H}_1$, где $u_{1-\alpha}$ – $(1-\alpha)$-квантиль стандартного нормального закона.

В разделе 3.3 также был предложен критерий согласия для хвоста непрерывного распределения на основе статистики $R_{k,n}$ (9) и доказана его состоятельность на широких альтернативах в различных условиях на близость альтернативной гипотезы. Более того, в конце раздела критерий (12) был применен к задаче различения распределений с правильно

меняющимся хвостом и распределений с хвостами логарифмического типа. Далее, в разделе 3.4 показано, что при некоторых ограничениях на хвост распределения результаты раздела 3.3 остаются верными также и для разрывных функций распределения, в том числе дискретных.

Последний раздел главы 3 посвящен задаче проверки гипотезы согласия для хвостов распределений. В разделе предложены критерии типа Колмогорова и ω^2 согласия хвоста распределения выборки с хвостом функции распределения F_0 и доказана их состоятельность на широких альтернативах. Итак, по аналогии с классической гипотезой согласия, определим $H_0^T : F(x) = F_0(x)$ *для всех достаточно больших* x. Будем называть ее гипотезой согласия с (правым) хвостом распределения. Критерии согласия для хвостов распределений, изложенные в этом разделе, проверяют более широкую гипотезу, чем H_0^T. Определим функцию распределения хвоста F как

$$F(x|q) := P(X_1 \leqslant x | X_1 > q) = \frac{F(x) - F(q)}{1 - F(q)}, \quad x > q,$$

данное понятие тесно связано с понятием условной функции распределения превышения уровня, см. [6]. Рассмотрим гипотезу $\hat{H}_0^T : \ F(x|q) = F_0(x|q), x > q$, *для некоторого (неизвестного)* q; как легко видеть, если гипотеза $\hat{H}_0^T$ выполнена для некоторого q, то найдется такая константа $C > 0$, что при всех $x > q$ верно соотношение $1 - F(x) = C(1 - F_0(x))$. Тем самым, гипотеза H_0^T есть сужение гипотезы $\hat{H}_0^T$ на случай $C = 1$.

Предложим на основе статистики классического критерия согласия Колмогорова статистику, зависящую только от максимальных членов вариационного ряда выборки $\mathbf{X}^n$, для проверки гипотезы $\hat{H}_0^T$:

$$D_{k,n}^T = \sup_{x > X_{(n-k)}} \left| \widehat{F}_n(x|X_{(n-k)}) - F_0(x|X_{(n-k)}) \right|$$

и изучим ее предельное распределение в случае верности $\hat{H}_0^T$.

Теорема 3.18. *Пусть случайная величина* K *распределена по закону Колмогорова. Предположим, что гипотеза* $\hat{H}_0^T$ *верна для непрерывной* F_0. *Тогда существует такое* q, *что*

$$\sqrt{k} D_{k,n}^T \xrightarrow{d} K, \quad n \to \infty,$$

для всех последовательностей $k = k(n)$ *таких, что* $k \to \infty$ *и* $k/n < 1 - F_0(q) - \varepsilon$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 3.18 показывает, что критерий

$$\text{если } \sqrt{k}D_{k,n}^T > K_{1-\alpha}, \text{ то отвергнуть } \hat{H}_0^T, \tag{13}$$

где $K_{1-\alpha}$ – $(1-\alpha)$-квантиль распределения Колмогорова, асимптотически имеет уровень значимости α; в следующей теореме обсуждается состоятельность предложенного критерия.

Теорема 3.19. *(i) Если для некоторого $c \in (0,1)$ выполнено $k/n > c$ при $n \to \infty$, то критерий (13) состоятелен на альтернативе $\hat{H}_1^T : \hat{H}_0^T$ неверна.*

(ii) Если $k \to \infty$ и $k/n \to 0$ при $n \to \infty$, то критерий (13) состоятелен на более узкой альтернативе $\hat{H}_2^T$: $\forall q < x_{F_1}^* \; \exists x_0 > q$: $|F(x_0|q) - F_0(x_0|q)| > d$ для некоторого $d > 0$.

Далее в разделе 3.5 обсуждались критерии согласия для хвостов распределений типа ω^2. Введем статистику

$$\omega_{k,n}^T(\psi) = \int_{X_{(n-k)}}^{\infty} \psi(F_0(x|X_{(n-k)}))(\widehat{F}_n(x|X_{(n-k)}) - F_0(x|X_{(n-k)}))^2 dF_0(x|X_{(n-k)})$$

и предложим на ее основе критерий проверки гипотезы $\hat{H}_0^T$:

$$\text{если } k\omega_{k,n}^T(\psi) > u_{1-\alpha}(\psi), \text{ то отвергнуть } \hat{H}_0^T, \tag{14}$$

где $u_{1-\alpha}(\psi)$ – $(1-\alpha)$-квантиль предельного распределения $A(\psi)$ статистики $\omega_n^2(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \psi(F_0(x))(\widehat{F}_n(x) - F_0(x))^2 dF_0(x)$ при верности гипотезы согласия, см. [63]. Частными случаями критериев типа омега-квадрат являются критерии согласия Крамера-фон Мизеса-Смирнова (для $\psi(x) = 1$) и Андерсона-Дарлинга (для $\psi(x) = (x(1-x))^{-1}$). В конце раздела 3.5 приводятся результаты, аналогичные теоремам 3.18 и 3.19, показывающие, что критерий (14) асимптотически имеет уровень значимости α и является состоятельным на широкой альтернативе.

Четвертая глава диссертации посвящена методам оценивания параметров хвоста распределения по выборке из независимых одинаково распределенных случайных величин. Как и в третьей главе, только максимальные члены вариационного ряда выборки использованы для реализации предложенных методов.

[63] Мартынов Г.В. *Критерии омега-квадрат.* М.: Наука, 1978.

В первом разделе четвертой главы предложен метод оценивания одномерного параметра хвоста непрерывного распределения. Существенным преимуществом данного метода является тот факт, что мы не требуем выполнения условий теоремы Гнеденко для функции распределения F. Итак, предположим, что функция распределения F величины X_1 является непрерывной и что $x_F^* = +\infty$. Далее, скажем, что параметрическое семейство хвостов непрерывных распределений $\mathcal{F} = \{F_\theta,\ \theta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \mathbb{R}$, является *упорядоченным по параметру* θ, если для всех $\theta_1, \theta_2 \in \Theta,\ \theta_1 < \theta_2$, выполнено условие $B(F_{\theta_1}, F_{\theta_2})$ (см. (10)) или для всех $\theta_1, \theta_2 \in \Theta,\ \theta_1 < \theta_2$, выполнено $B(F_{\theta_2}, F_{\theta_1})$. Наконец, предположим, что $F \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ упорядочено по параметру θ.

Для построения метода оценивания рассмотрим статистику

$$R_{k,n}(\theta) = \ln(1 - F_\theta(X_{(n-k)})) - \frac{1}{k}\sum_{i=n-k+1}^{n} \ln(1 - F_\theta(X_{(i)})),$$

которая является обобщением статистики $R_{k,n}$ из раздела 3.3. Следующая теорема утверждает, что оценка

$$\theta_{k,n}^* = \arg\{\theta :\ R_{k,n}(\theta) = 1\} \tag{15}$$

является состоятельной для параметра θ.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{F}$ упорядочено по параметру θ и $F_\theta(x)$ непрерывна по θ. Предположим, что последовательность $k = k(n), k \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям* (11). *Тогда*

$$\theta_{k,n}^* \xrightarrow{P_{\theta_0}} \theta_0, \quad n \to \infty.$$

Для того, чтобы установить асимптотическую нормальность оценки $\theta_{k,n}^*$, наложим дополнительные условия на семейство $\mathcal{F}$. Обозначим $S(x, \theta) = \ln(1 - F_\theta(x))$ и

$$I(q, \theta) = \frac{1}{1 - F_\theta(q)} \int_q^\infty \frac{\partial S(x,\theta)}{\partial \theta} dF_\theta(x) - \frac{\partial S(q,\theta)}{\partial \theta}.$$

Итак, рассмотрим условия

C1 Функция $\frac{\partial S(x,\theta)}{\partial \theta}$ непрерывна по паре переменных (x, θ) при $x > x_0$;

C2 Для всех $\theta_0 \in \Theta$ существует $x_1(\theta_0)$ такое, что функция $\frac{\partial S(x,\theta)}{\partial \theta}$ монотонна по θ в некоторой окрестности θ_0 при $x > x_1(\theta_0)$.

C3 Для всех $\theta_0 \in \Theta$ существует $x_2(\theta_0)$ такое, что выполнено $|I(x, \theta_0)| < \infty$ при $x > x_2(\theta_0)$.

Следующая теорема утверждает, что в наложенных условиях для оценки (15) будет выполнен аналог свойства асимптотической нормальности.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия* **C1**-**C3**. *Тогда в предположениях теоремы ,*

$$\sqrt{k} I(X_{(n-k)}, \theta^*_{k,n})(\theta^*_{k,n} - \theta_0) \xrightarrow{d_{\theta_0}} \xi \sim N(0,1)$$

для всех $\theta_0 \in \Theta$.

Во втором разделе четвертой главы рассматривается задача оценивания параметров сдвига и масштаба хвостов распределений из областей максимального притяжения Гумбеля и Фреше; данная задача не всегда может быть решена с помощью метода, предложенного в предыдущем разделе, поскольку условие упорядоченности по параметру для семейства хвостов распределений может быть не выполнено. Итак, предположим, что функция распределения F случайной величины X_1 принадлежит семейству хвостов распределений $\mathcal{F} = \{F_{a,b}(x), a \in \mathbb{R}, b > 0\}$, где a и b – параметры сдвига и масштаба соответственно. Т.е. существуют такие a_0, b_0 и x_0, что

$$F\left(\frac{x - a_0}{b_0}\right) = F_{0,1}(x) =: F_0(x)$$

для всех $x > x_0$. Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ – независимые одинаково распределенные величины с функцией распределения F_0. Определим оценку параметра сдвига хвоста распределения как

$$\hat{a} = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} X_{(n-i)} - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} Y_{(n-i)}.$$

Теорема 4.4. *Предположим, что функция распределения* F_0 *удовлетворяет условию фон Мизеса*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(1 - F_0(t))F_0''(t)}{(F_0'(t))^2} = -\gamma - 1 \tag{16}$$

при $\gamma = 0$, *а также что* $b = 1$. *Пусть последовательность* $k = k(n)$ *удовлетворяет условию* (11) *и при этом существует такое* $M > 0$,

что

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1 - F_0(M\sqrt{k})}{k/n} \leqslant 1.$$

Тогда оценка $\hat{a}$ является состоятельной оценкой параметра сдвига a.

При наложении дополнительных условий на семейство $\mathcal{F}$ введенная оценка будет асимптотически нормальной, однако, что интересно, функция $f(k)$, для которой $f(k)(\hat{a} - a)$ будет сходиться по распределению к нормальному закону, будет отличаться от $\sqrt{k}$. Далее, предположим, что $a = 0$, и рассмотрим оценку параметра масштаба

$$\hat{b} = \exp\left\{ \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} \ln X_{(n-i)} - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} \ln Y_{(n-i)}k \right\}.$$

Теорема 4.5. *Пусть функция распределения F_0 удовлетворяет условию фон Мизеса* (16) *при $\gamma \geqslant 0$, а также $a = 0$. Пусть последовательность $k = k(n)$ удовлетворяет условию* (11)*, причем существует такое $M > 1$, что*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1 - F_0(\exp\{M\sqrt{k}\})}{k/n} \leqslant 1.$$

Тогда оценка $\hat{b}$ является состоятельной оценкой параметра масштаба b.

Как и в случае оценки параметра сдвига, существует такая функция $g(k)$, что выражение $g(k)(\hat{b} - b)$ будет асимптотически распределено по нормальному закону в случае выполнения дополнительных условий, наложенных на семейство $\mathcal{F}$.

Автор считает приятным долгом выразить глубокую признательность и благодарность своему учителю доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Ильичу Питербаргу за постоянное внимание к работе и поддержку. Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук Наталье Михайловне Маркович за неоценимое содействие в научном развитии автора и плодотворные обсуждения результатов работы. Автор высоко ценит содействие, оказанное работе сотрудниками кафедры и лаборатории теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова и сотрудниками лаборатории 38 Института проблем управления имени В. А. Трапезникова.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Родионов И.В. Критерий различения хвостов распределений типа Вейбулла. *Теория вероятностей и ее применения*, **63(2)** (2018), 402–413.

[2] Родионов И.В. Различение близких гипотез о хвостах распределений по максимальным членам вариационного ряда. *Теория вероятностей и ее применения*, **63 (3)** (2018), 447–467.

[3] Родионов И.В. О различении классов хвостов распределений. *Проблемы передачи информации*, **54(2)** (2018), 29–44.

[4] Жуковский М.Е., Родионов И.В. Распределение максимальных k-степеней биномиального случайного графа. *Доклады Академии наук*, **483(5)** (2018), 485–487. (Теорема 1 и лемма 1 получены лично Родионовым И.В.)

[5] Питербарг В.И., Родионов И.В. Большие выбросы процесса Бесселя и других процессов бесселевского типа. *Доклады Академии наук*, **487(3)** (2019), 238–241. (Теорема получена лично Родионовым И.В.)

[6] Родионов И.В. О параметрическом оценивании хвоста распределения. *Доклады Академии наук*, **488(4)** (2019), 356–359.

[7] Rodionov I.V. On Estimation of Weibull-Tail and Log-Weibull-tail Distributions for Modeling End-to-end Delay. *In: Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2019. Communications in Computer and Information Science*, **1141** (2019), 302–314.

[8] Piterbarg V.I., Rodionov I.V. High excursions of Bessel and related random processes. *Stochastic Processes and their Applications*, **130** (2020), 4859-4872. (Theorem 1, Proposition 2 и Lemma 1 получены лично Родионовым И.В.)

[9] Markovich N.M., Rodionov I.V. Maxima and sums of non-stationary random length sequences. *Extremes*, **23** (2020), 451-464. (Все результаты работы – равноценный вклад с Маркович Н.М.)

[10] Жан Р., Жуковский М.Е., Исаев М.И., Родионов И.В. Стохастическая теория экстремумов для схемы серий зависимых случайных величин. *Успехи математических наук*, **75(5)** (2020), 193–194. (Теорема 1 и применение теоремы 1 для гауссовских систем получено лично

Родионовым И.В.)

[11] Ахтямов П.И., Родионов И.В. Об оценке параметров сдвига и масштаба хвостов распределений. *Фундаментальная и прикладная математика*, **23(1)** (2020), 25–49. (Теоремы 1-4 получены лично Родионовым И.В.)

[12] Rodionov I.V. On parametric estimation of distribution tails. *In: Proceedings of 4th ISNPS, Salerno, Italy, 2018. Springer International Publishing Switzerland, Michele La Rocca, Brunero Liseo, Luigi Salmaso, (Eds.) Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, **339** (2020), 445-455.

[13] Кантонистова Е.О., Родионов И.В. Об аналогах классических критериев согласия для хвостов распределений. *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, **496(1)** (2021), 44-47. (Теоремы 1-4 получены лично Родионовым И.В.)

[14] Kobelkov S.G., Piterbarg V.I., Rodionov I.V. Correction to: On maximum of Gaussian random fields having unique maximum point of its variance. *Extremes*, **24(1)** (2021), 85-90. (Proposition 3 получено лично Родионовым И.В.)

[15] Jakubowski A., Rodionov I., Soja-Kukieła N. Directional phantom distribution functions for stationary random fields. *Bernoulli*, **27(2)** (2021), 1028-1056. (Результаты раздела 1.4 получены лично Родионовым И.В.)

[16] Mikosch T., Rodionov I. Precise large deviations for dependent subexponential variables. *Bernoulli*, **27(2)** (2021), 1319-1347. (Theorem 3.1, Theorem 3.2, Lemma 5.1 и Lemma 5.3 получены лично Родионовым И.В.)

[17] Rodionov I.V. On threshold selection problem for extremal index estimation. *In: Proceedings of 5th ICSM, Moscow, Russia, 2020. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2021, in press.

[18] Когут Н.С., Родионов И.В. О критериях различения хвостов распределений. *Теория вероятностей и ее применения*, (2021), в печати. http://mi.mathnet.ru/tvp5375 (Теоремы 2-3 и следствие 1 получены лично Родионовым И.В.)