ФГАОУ ВО "МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)"

На правах рукописи

УДК 519.21

Родионов Игорь Владимирович

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКСТРЕМУМОВ ДИСКРЕТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.05 – теория вероятностей
и математическая статистика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор В. И. Питербарг

Москва, 2021

Содержание

Введение 4

1 Вероятностный анализ экстремумов стохастических систем **35**

1.1 Введение: асимптотика распределения максимума случайной последовательности 35

1.2 Асимптотическое распределение максимума случайной системы 39

1.3 Приложение теоремы 1.5 к гауссовским системам 47

1.4 Приложение теоремы 1.5 к случайным графам 52

1.5 Хвостовые и экстремальные индексы последовательностей сумм и максимумов серий зависимых случайных величин . 63

1.6 Глобальный экстремальный индекс и экстремальный индекс по направлению стационарных случайных полей . . 76

1.7 Метод невязки оценивания экстремального индекса стационарной последовательности 89

1.8 Метод невязки оценивания экстремального индекса: случай $k/L \to c > 0$. 101

1.9 Предельные распределения максимальных элементов эмпирической матрицы ковариаций и большие уклонения стационарных последовательностей 110

1.9.1 Предельные распределения максимальных диагональных и внедиагональных элементов эмпирической матрицы ковариаций 110

1.9.2 Большие уклонения m-зависимой стационарной последовательности: введение и условия регулярности 114

1.9.3 Большие уклонения m-зависимой стационарной последовательности: основные результаты 122

2 Асимптотический анализ гауссовских случайных процессов и функций от них **137**

2.1 Введение 137

2.2 Вероятность больших уклонений траекторий гауссовского случайного поля 142
2.3 Вероятность больших уклонений траекторий нормы гауссовского векторного процесса 150

3 Проверка гипотез о хвостах распределений 167
3.1 Введение 167
3.2 Критерий различения хвостов распределений вейбулловского типа 169
3.3 Критерий различения классов хвостов распределений . . . 179
3.4 Обобщение результатов раздела 3.3 на разрывные распределения 188
3.5 Критерии согласия для хвостов распределений 196

4 Оценивание параметров хвостов распределений 205
4.1 Общий метод оценивания одномерного параметра хвоста распределения 205
4.2 Оценивание параметров сдвига и масштаба хвоста распределения. 212

5 Приложение: результаты численного моделирования. 229
5.1 Критерий (3.15). 229
5.1.1 Различение регулярно меняющихся хвостов и хвостов логарифмического типа. 229
5.1.2 Различение хвостов вейбулловского и логвейбулловского типов. 230
5.2 Оценка (4.4). 235

Список литературы 241

Введение

Актуальность темы.

Диссертация посвящена вероятностному и статистическому анализу экстремальных значений в различных дискретных моделях теории вероятностей, также рассмотрены и некоторые соответствующие модели в непрерывном времени. Отличительной особенностью работы является внедрение в стохастическую теорию экстремумов многих ранее не использованных в ее рамках идей современной теории вероятностей и математической статистики.

Стохастическая теория экстремумов занимается изучением свойств распределений экстремальных значений различных систем случайных величин и случайных процессов. Свое начало теория берет в работе Б.В. Гнеденко [102] 1943 года, где было показано, что если у последовательности нормированных максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин есть невырожденное предельное распределение, то оно принадлежит одному из трех типов максимум-устойчивых законов (а именно, законов Фреше, Гумбеля и Вейбулла). Впервые же упомянутые законы были описаны в работе Фишера и Типпетта [94] в 1928 году. Завершающим этапом классической стохастической теории экстремумов, посвященной изучению предельных распределений экстремумов последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин, стали работы Балкема и де Хаана [48] и Пикандса [168], где ими независимо была сформулирована теорема о приближении хвоста функции распределения обобщенным распределением Парето, также известная как теорема Пикандса-Балкема-де Хаана и иногда называемая второй теоремой стохастической теории экстремумов.

На сегодняшний день стохастическая теория экстремумов является довольно разветвленной дисциплиной, объединяющей в себе как вероятностные, так и статистические результаты и методы. Современное состояние теории и ее приложения в финансах, страховании, гидрологии

и прочих областях можно найти в монографиях [85], [89], [52]. Мы остановимся лишь на некоторых направлениях стохастической теории экстремумов, которые имеют отношение исследованиям в диссертации.

После завершения классического этапа развития теории у исследователей возник интерес к ее расширению на последовательности зависимых случайных величин, а также на гауссовские стационарные последовательности и процессы с непрерывным временем. Оба этих направления были объединены в классической монографии Лидбеттера, Линдгрена и Ротсена [137], до сих пор не потерявшей своей актуальности.

Расширяя и дополняя результаты работ Уотсона [198], Бермана [54] и Лойнса [142], Лидбеттер [136] показал, что при выполнении условия слабой зависимости экстремальных событий (условие D) и условия асимптотического отсутствия кластеров (условие D') предельное распределение максимума стационарной последовательности совпадает с предельным распределением максимума последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с той же маргинальной функцией распределения. Обобщения этого результата на нестационарные последовательности были получены Хюслером [119], [120], а на нестационарные случайные поля на $\mathbb{Z}^2$ – Перейрой и Феррейрой [164]. Условия, налагаемые на случайное поле в работе Перейры и Феррейры, крайне неудобно записываются для случайных полей в пространствах большей размерности, чем 2; в статье автора [6] приведены гораздо более простые и легко интерпретируемые условия, восходящие к условиям D и D' Лидбеттера.

В упомянутой работе [136] Лидбеттер рассмотрел и ситуацию, когда для стационарной последовательности выполнено лишь условие D. В этом случае при слабых предположениях у последовательности существует так называемый экстремальный индекс θ, служащий мерой локальной зависимости ее экстремумов. Попытка обобщить понятие экстремального индекса на нестационарные последовательности была предпринята Хюслером [120], однако его работа не нашла большого отклика в литературе. Заметим, что существуют процессы, не имеющие экстремального индекса, но обладающие тем не менее фантомной

функцией, которая является обобщением понятия экстремального индекса [160]. Необходимые и достаточные условия существования фантомной функции у стационарной последовательности были получены сравнительно недавно Духаном, Якубовским и Лангом [79]. Если теорию фантомных функций и экстремального индекса для стационарных последовательностей по сути можно считать завершенной, то аналогичная теория для стационарных полей на $\mathbb{Z}^d$ и более сложных случайных структур еще далека от завершения. Работы по изучению (глобального) экстремального индекса для стационарных полей на целочисленных решетках начали появляться с начала 2000х годов [64], [194], [90], тогда как понятие фантомной функции для стационарного случайного поля на $\mathbb{Z}^d$ было впервые рассмотрено лишь совсем недавно [123]. Отметим также работы А.В. Лебедева и А.А. Голдаевой [14], [105], в которых рассмотрены обобщения понятия экстремального индекса для схемы серий, см. также докторскую диссертацию А.В. Лебедева [13].

Хорошо известно, что нормальное распределение принадлежит области максимального притяжения распределения Гумбеля, или двойного экспоненциального закона. В 1964 году Берман [54] показал, что предельное распределение нормированного максимума стационарной гауссовской последовательности с теми же нормировочными константами, что и в теореме Гнеденко, и условием на убывание корреляционной функции последовательности (названное впоследствии условием Бермана) также совпадает с распределением Гумбеля. Интересен тот факт, что условие Бермана близко к необходимому и достаточному: так, Миттал и Илвисакер [156] показали, что в случае логарифмического убывания корреляционной функции стационарной гауссовской последовательности предельное распределение нормированного максимума будет отличаться от распределения Гумбеля, а в случае более медленного убывания корреляционной функции и вовсе будет вырожденным независимо от выбора нормировочных констант. Результат Бермана впоследствии был обобщен на нестационарные гауссовские последовательности [119], а также на стационарные и нестационарные гауссовские поля на $\mathbb{Z}^d$ (см.

работы [64], [123], [163]).

Теория асимптотического анализа гауссовских случайных процессов восходит к работам Х. Крамера [67] и Ю.К. Беляева [2], которые независимо друг от друга показали, что число выходов за высокий уровень гауссовского процесса на конечном интервале при некоторых условиях имеет пуассоновское распределение. Пикандсом [167] в 1969 году был предложен общий метод анализа асимптотики вероятности выхода за высокий уровень траекторией гауссовского стационарного процесса, в 1972 г. доработанный В.И. Питербаргом [27]. Этот метод оказался определяющим для асимптотической теории гауссовских случайных процессов и был обобщен В.И. Питербаргом и его соавторами на нестационарные гауссовские процессы [172], на гауссовские случайные поля и функции в банаховых пространствах [31], [19], а также на некоторые функционалы от гауссовских процессов и полей [169], [171], см. также монографии [170], [28]. Асимптотики вероятностей больших уклонений траекторий евклидовых норм гауссовских векторных процессов в различных условиях, наложенных на дисперсию и ковариационную функцию процесса, были получены в работах [112], [141].

Началом систематического изучения статистических аспектов теории принято считать уже упомянутую работу Пикандса [168] и работу Хилла [115], в которых были предложены первые оценки индекса экстремального значения γ, параметра, который управляет предельным поведением распределения максимума случайных величин в теореме Гнеденко, хотя первые критерии проверки принадлежности распределений областям притяжения максимально-устойчивых законов Фреше, Вейбулла и Гумбеля начали появляться чуть ранее (см. например [143]). В целом, задаче оценивания индекса экстремального значения, а также оценивания параметров модели обобщенного распределения Парето, как для последовательностей независимых, так и зависимых случайных величин посвящено достаточно много работ (см. [110], [187], [75], [116] среди прочих), чего нельзя сказать о задачах проверки гипотез о хвостах распределений, см. обзор [121] методов их решения.

Интересно, что в подавляющем большинстве случаев проверяемые гипотезы формулируются в терминах индекса экстремального значения и параметров модели обобщенного распределения Парето, тогда как задачи различения хвостов распределений внутри областей максимального притяжения или, наоборот, не принадлежащих ни одной из областей максимального притяжения, практически не рассматривались, отметим здесь работы [103], [96].

Первые работы по оцениванию экстремального индекса стационарных последовательностей начали появляться позже, в 90х годах [117], [199]. На сегодняшний день наилучшими оценками экстремального индекса признаны интервальная оценка [93] и оценка методом K-gaps [190]. Однако стоит отметить, что все предложенные на настоящий момент оценки требуют выбора одного или двух вспомогательных параметров (например, выбора высокого уровня или размера блока), и при их неаккуратном выборе точность оценивания существенно снижается. Проблеме оптимального выбора вспомогательных параметров пока что посвящено не так много работ [97], [91], но в настоящее время исследования в этом направлении ведутся достаточно активно, см. обзор [92].

Цель работы.

- Получить достаточные условия экстремальной независимости дискретных случайных систем и применить этот результат для изучения экстремумов гауссовских систем и экстремальных характеристик случайных графов.

- Исследовать понятие и условия существования экстремального индекса для случайных полей с дискретным временем и схем серий случайных величин и исследовать автоматическую процедуру его оценивания для стационарной последовательности.

- Найти асимптотики вероятностей высоких экстремумов нестационарных гауссовских полей с непрерывным временем

и евклидовых норм нестационарных гауссовских процессов с непрерывным временем в слабых предположениях на ковариационную функцию и дисперсию.

- На основе современных методов математической статистики предложить общие методы оценивания параметров и проверки гипотез о хвостах распределений по экстремальным наблюдениям выборки, не зависящие от выполнения условий теоремы Гнеденко.

Методы исследования.

В работе используются классические и современные методы теории вероятностей и математической статистики, такие как теория сходимости в пространстве Скорохода, теория контигуальных мер, метод отношения правдоподобий, неравенства Прохорова и Фука-Нагаева, а также специальные методы теории экстремумов, такие как представление Реньи и теорема Смирнова, методы асимптотического анализа гауссовских процессов, такие как метод двойных сумм и лемма сравнения, и методы теории случайных графов.

Научная новизна.

Все представленные в диссертации результаты являются новыми. Основные результаты диссертации следующие.

- Показано, что при выполнении условий типа D и D' Лидбеттера предельное распределение последовательности максимумов схемы серий зависимых случайных величин совпадает с предельным распределением последовательности максимумов схемы сопровождающих серий независимых случайных величин. Результат использован для доказательства теоремы Гнеденко для стационарных случайных полей на $\mathbb{Z}^d$, для анализа экстремумов гауссовских систем и для изучения предельных распределений экстремальных характеристик случайных графов.

- Найдены условия существования экстремального и хвостового

индексов для последовательностей сумм и максимумов схемы серий зависимых случайных величин с доминирующим членом.

- Доказано отличие понятий глобального экстремального индекса и экстремального индекса вдоль направлений для стационарных случайных полей на целочисленных решетках; для этой цели исследовано предельное распределение нормированного максимума стационарного гауссовского поля на $\mathbb{Z}^d$ при нарушении условия Бермана.

- Доказана корректность автоматической процедуры оценивания экстремального индекса стационарной последовательности на основе произвольной оценки экстремального индекса, зависящей от одного гиперпараметра.

- Найдены условия выполнения теоремы Гнеденко для диагональных и внедиагональных элементов эмпирической матрицы ковариаций стационарного субэкспоненциального случайного поля; для доказательства этого результата была получена асимптотика вероятности большого уклонения последовательности частичных сумм субэкспоненциальной стационарной последовательности.

- Найдена асимптотика вероятности высокого экстремума нестационарного гауссовского поля и эвклидовой нормы гауссовского векторного процесса без предположений о степенном характере поведения ковариационной функции и дисперсии процесса.

- Предложен первый общий метод оценивания одномерного параметра хвоста распределения, не зависящий от выполнения условий теоремы Гнеденко.

- Предложены оценки параметров сдвига и масштаба хвоста распределения из областей максимального притяжения Фреше и Гумбеля.

- Предложен первый общий метод различения широких классов хвостов распределений, не зависящий от выполнения условий теоремы Гнеденко.

- Предложены первые критерии согласия для хвостов распределений и доказана их состоятельность.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Развитые в диссертации методы могут быть применены в задачах стохастической теории экстремумов, а также в теории случайных графов. Результаты работы могут быть использованы для оценивания рисков в финансовой и страховой сфере, в задачах гидрологии и метеорологии, в задачах надежности оборудования и безопасности технических систем, для анализа телекоммуникационных систем.

Разделы диссертации могут быть использованы как материал специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности “математика”.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались автором на научных семинарах:

- Большой семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика РАН, проф. А.Н. Ширяева.

- Семинар отдела теории вероятностей и математической статистики Математического института им. В.А. Стеклова под руководством академика РАН, проф. А.С. Холево и академика РАН, проф. А.Н. Ширяева.

- семинар “Гауссовские случайные процессы” под руководством д.ф.-м.н., проф. В.И. Питербарга, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

- семинар “Статистика экстремальных значений” под руководством д.ф.-м.н., гл.н.с. Н.М. Маркович, Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова.
- семинар “Управление по неполным данным” под руководством члена-корреспондента РАН, проф. А.А. Галяева, Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова.
- научно-исследовательский семинар кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ под руководством д.ф.-м.н., проф. А.М. Райгородского.

а также на международных конференциях:

- Workshop “Statistics meets Stochastics - 2”, Москва, ВШЭ, Россия (9-10 июня 2017 г.)
- International workshop on graphs, networks and their applications, Москва, МФТИ, Россия (14-16 мая 2018 г.)
- 4th Conference of the International Society for Nonparametric Statistics, Салерно, Италия (11-15 июня 2018 г.)
- International workshop “LSA winter meeting” 2018, пос. Снегири, Московская обл., Россия (3-7 декабря 2018 г.)
- 4th International Conference on Stochastic Methods, Дивноморское, Краснодарский край, Россия (3-8 июня 2019 г.)
- Extreme Value Analysis 2019, Загреб, Хорватия (30 июня-5 июля 2019 г.)
- XXII International Conference on Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN’2019), Москва, Россия (23-27 сентября 2019 г.)
- The 8th Polish Combinatorial Conference, онлайн, Польша (14-18 сентября 2020 г.)

- 5th International Conference on Stochastic Methods, онлайн, Россия (23-27 ноября 2020 г.)

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 18 печатных работах, приведенных в списке литературы под номерами [1], [6], [8], [10], [12], [29], [33]–[36], [124], [134], [149], [152], [173], [183]–[185], в рецензируемых научных изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science и Scopus.

Личный вклад.

Некоторые работы, опубликованные автором диссертации, были написаны в соавторстве с другими учеными. Результаты этих работ, включенные в диссертацию, получены автором самостоятельно (кроме одного случая, когда результаты работы были получены при равноценном вкладе с соавтором).

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 4 глав, разбитых на разделы, приложения и списка литературы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится краткий обзор исследований, посвященных вопросам стохастической теории экстремумов, и результатов диссертации.

В **первой главе** диссертации проводится анализ экстремумов систем (последовательностей, полей и схем серий) зависимых случайных величин. В разделе 1.1 приводится краткий обзор основных теорем и понятий классической стохастической теории экстремумов. В разделе 1.2 формулируется и доказывается результат о асимптотической эквивалентности распределений максимумов зависимых случайных величин и максимумов независимых случайных величин с такими же маргинальными распределениями в схеме серий. А именно,

рассматриваются следующие вопросы: при каких условиях для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\left| \mathsf{P}\left(\max_{i\in[d]} X_{i,n} \le x \right) - \prod_{i\in[d]} \mathsf{P}\left(X_{i,n} \le x\right) \right| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{0.1}$$

где $\mathbf{X}_n = (X_{1,n}, \dots, X_{d,n})$, $d = d(n)$, $n \in \mathbb{N}$ – последовательность действительнозначных случайных векторов и $[d] := \{1, \dots, d\}$, и существует ли равномерная оценка для модуля разности в (0.1). Если установлен результат типа (0.1), то предельное распределение максимума случайных величин в схеме серий найти гораздо проще; так, в случае одинаковой распределенности этих величин задача сводится к применению теоремы Гнеденко. По стандартному соглашению, из $\mathsf{P}(A) = 0$ вытекает $\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)$.

Теорема 1.5. *Пусть $x \in \mathbb{R}$, $A_i = A_i(n) = \{X_{i,n} > x\}$. Предположим, что множества индексов $W_i = W_i(n) \subseteq [d] \setminus \{i\}$, $i \in [d]$, и $\gamma > 0$ таковы, что*

$$\left| \mathsf{P}\Big(\bigcup_{j\in W_i\cap[i-1]} A_j \Big) - \mathsf{P}\Big(\bigcup_{j\in W_i\cap[i-1]} A_j \mid A_i \Big) \right| \le \gamma \tag{0.2}$$

для всех $i \in [d]$. Обозначим

$$\Delta = \sum_{i\in[d]} \mathsf{P}\left(\cup_{j\in[i-1]\setminus W_i} A_j\right) \mathsf{P}(A_i), \quad \Delta' = \sum_{i\in[d]} \sum_{j\in[i-1]\setminus W_i} \mathsf{P}(A_i \cap A_j).$$

Тогда

$$\left| \mathsf{P}\Big(\bigcap_{i\in[d]} \overline{A_i} \Big) - \prod_{i\in[d]} \mathsf{P}\left(\overline{A_i}\right) \right| \le \gamma \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i\in[d]} A_i \Big) + \max(\Delta, \Delta').$$

Тем самым, достаточным условием выполнения (0.1) является стремление величин γ, Δ и Δ' к 0 при $n \to \infty$. Далее, в разделе 1.3 приводится результат применения теоремы 1.5 к гауссовским системам. В разделе 1.4 теорема 1.5 используется для анализа такой максимальной

характеристики случайного графа как максимальное число общих соседей k вершин в случайном графе.

В разделе 1.5 получены условия существования хвостового и экстремального индексов последовательностей взвешенных сумм и максимумов схемы серий зависимых регулярно меняющихся случайных величин в случае наличия доминирующего члена; установлено, что хвостовые и экстремальные индексы этих последовательностей совпадают и равны хвостовому и экстремальному индексу доминирующей последовательности. Итак, пусть $(Y_{n,i},\ n,i \geq 1)$ – схема бесконечных серий зависимых случайных величин. Будем предполагать, что для каждого $i \geq 1$ последовательность $(Y_{n,i}, n \geq 1)$ является стационарной (в узком смысле) и имеет *экстремальный индекс* θ_i, то есть для любого $\tau > 0$ существует такая последовательность уровней $(u_n^{(i)}(\tau),\ n \geq 1)$, что выполнено

$$n\mathsf{P}\big(Y_{1,i} > u_n^{(i)}(\tau)\big) \to \tau, \quad \mathsf{P}\big(M_{n,i} \leq u_n^{(i)}(\tau)\big) \to e^{-\theta_i \tau}$$

при $n \to \infty$, где $M_{n,i} = \max_{j=1,\ldots,n} Y_{j,i}$. Пусть также для каждого $i \geq 1$ последовательность $(Y_{n,i}, n \geq 1)$ имеет регулярно меняющееся маргинальное распределение

$$\mathsf{P}(Y_{n,i} > x) = x^{-k_i}\ell_i(x)$$

с хвостовым индексом $k_i > 0$ и медленно меняющейся на бесконечности функцией $\ell_i(x)$, пишем $Y_{n,i} \sim \mathrm{RV}_{k_i}$. Предположим выполнение условия

$$\ell_i(x) \leq Ax^{\delta}, \quad x > x_0(A,\delta) \tag{0.3}$$

для всех $i \geq 1$ и некоторых $A, \delta > 0$. Выберем

$$l_n = [n^{\chi}], \quad \chi > 0 \tag{0.4}$$

и определим $k := \lim_{n\to\infty} \inf_{2\leq i\leq l_n} k_i$. Рассмотрим последовательности взвешенных сумм и максимумов схемы серий $(Y_{n,i}, n, i \geq 1)$

$$Y_n(z,l_n) = \sum_{i=1}^{l_n} z_i Y_{n,i}, \quad Y_n^*(z,l_n) = \max_{i=1,\ldots,l_n} z_i Y_{n,i},$$

где $(z_i, i \geq 1)$ – ограниченная последовательность неотрицательных чисел. Следующая теорема является обобщением теоремы 1 из работы А.А. Голдаевой [5].

Теорема 1.12. *Предположим, что выполнено* $k_1 < k$, (0.3) *и* $\chi < \chi_0$, *где*

$$\chi_0 = \frac{k - k_1}{k_1(k+1)}. \tag{0.5}$$

Тогда последовательности $(Y_n(z, l_n),\ n \geq 1)$ *и* $(Y_n^*(z, l_n),\ n \geq 1)$ *имеют одинаковый хвостовой индекс* $k(z) = k_1$ *и одинаковый экстремальный индекс* $\theta(z) = \theta_1$.

Заметим, что теорема 1.12 выполнена для любой последовательности натуральных чисел $(l_n,\ n \geq 1)$, удовлетворяющей условию $l_n \leq [n^\chi]$. Далее в разделе 1.5 рассматриваются экстремальные свойства последовательностей $(Y_n(z, N_n),\ n \geq 1)$ и $(Y_n^*(z, N_n),\ n \geq 1)$, где $(N_n, n \geq 1)$ – последовательность случайных величин, принимающих натуральные значения. Предположим также, что все величины в этой последовательности – регулярно меняющиеся с хвостовым индексом $\alpha > 0$, а именно, для всех $n \geq 1$ выполнено $\mathsf{P}(N_n > x) = x^{-\alpha}\tilde{\ell}_n(x)$ для некоторой последовательности медленно меняющихся на бесконечности функций $(\tilde{\ell}_n(x),\ n \geq 1)$. Каких-либо условий на форму зависимости между $(N_n, n \geq 1)$ и $(Y_{n,i}, n, i \geq 1)$ не налагается. Определим для $y > 0$ последовательность уровней $u_n = u_n(y)$, $n \geq 1$, где $u_n(y) = yn^{k_1}\ell_1^\sharp(n)$ и $\ell_1^\sharp(n)$ – обратная по де Бруину [57] функция к $\ell_1(n)$.

Теорема 1.14. *Предположим, что множества функций* $(\ell_n(x),\ n \geq 1)$ *и* $(\tilde{\ell}_n(x),\ n \geq 1)$ *удовлетворяют условию* (0.3), $k_1 < k$ *и*

$$\mathsf{P}(N_n > l_n) = o\big(\mathsf{P}(Y_{n,1} > u_n)\big), \quad n \to \infty$$

для последовательности $(l_n,\ n \geq 1)$, *удовлетворяющей* (0.4) *и* (0.5). *Тогда последовательности* $(Y_n(z, N_n),\ n \geq 1)$ *и* $(Y_n^*(z, N_n),\ n \geq 1)$ *имеют одинаковый хвостовой индекс* $k(z) = k_1$ *и одинаковый экстремальный индекс* $\theta(z) = \theta_1$.

В разделе 1.6 обсуждаются понятия глобального экстремального индекса и экстремального индекса вдоль направления для случайных полей на $\mathbb{Z}^d$, формулируются необходимые и достаточные условия их существования и приводится пример гауссовского стационарного поля на $\mathbb{Z}^2$, вдоль некоторых направлений которого существует экстремальный индекс, но которое не имеет глобального экстремального индекса, что доказывает различие этих понятий. Итак, пусть $(X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$ – стационарное (в узком смысле) случайное поле размерности d с маргинальной функцией распределения F и частичными максимумами, определяемыми для $\mathbf{j}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ формулой

$$M_{\mathbf{j},\mathbf{n}} = \max_{\mathbf{k}:\mathbf{j}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}},\ \text{если } \mathbf{j} \le \mathbf{n},$$

и $M_{\mathbf{j},\mathbf{n}} = -\infty$, если $\mathbf{j} \not\le \mathbf{n}$. Здесь $\mathbf{j} \le \mathbf{n}$ означает, что все координаты вектора $\mathbf{j}$ не больше соответствующих координат вектора $\mathbf{n}$. Для удобства будем писать $M_{\mathbf{n}} := M_{\mathbf{1},\mathbf{n}}$. Скажем, что стационарное случайное поле $(X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$ имеет *экстремальный индекс* $\theta \in [0,1]$, если для любого $\tau > 0$ существует такая последовательность уровней $(u_n(\tau),\ n \ge 1)$, что выполнено

$$\mathbf{n}^*\overline{F}\big(u_{\mathbf{n}^*}(\tau)\big) \to \tau, \quad \mathsf{P}\big(M_{\mathbf{n}} \le u_{\mathbf{n}^*}(\tau)\big) \to e^{-\theta\tau} \tag{0.6}$$

при $\mathbf{n} \to \infty$ покоординатно, где $\mathbf{n}^* = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_d$, если $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d)$. Заметим, что свойство (1.68) выполнено вне зависимости от направления роста $\mathbf{n}$ к бесконечности. Далее, определим *монотонную кривую* в $\mathbb{N}^d$ как отображение $\boldsymbol{\psi}(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^d$ такое, что $\boldsymbol{\psi}(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, $\boldsymbol{\psi}(n) \le \boldsymbol{\psi}(n+1)$, но $\boldsymbol{\psi}(n) \ne \boldsymbol{\psi}(n+1)$ для всех $n \ge 1$ и

$$\frac{\boldsymbol{\psi}(n+1)^*}{\boldsymbol{\psi}(n)^*} \to 1, \quad n \to \infty,$$

и скажем, что у стационарного случайного поля $(X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$ есть экстремальный индекс θ по направлению ψ, если последовательность $(X_{\psi(n)},\ n \ge 1)$ имеет экстремальный индекс θ.

Введем *строго монотонное поле уровней* $(v_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$ как отображение $v_{(\cdot)} : \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}$ такое, что $v_{\mathbf{m}} \le v_{\mathbf{n}}$, если $\mathbf{m}^* \le \mathbf{n}^*$.

Будем говорить, что стационарное случайное поле $(X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$ обладает свойством $\mathbf{B}_T^{\psi}((v_{\boldsymbol{\psi}(n)}))$, если для некоторого $T > 0$ и некоторой монотонной кривой ψ выполнено

$$\max_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)\le T\psi(n)} \left| \mathsf{P}(M_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)} \le v_{\boldsymbol{\psi}(n)}) - \prod_{\mathbf{i}\in\{1,2\}^d} \mathsf{P}(M_{(p_1(i_1),\dots,p_d(i_d))} \le v_{\boldsymbol{\psi}(n)}) \right| \to 0$$

при $n \to \infty$, где компоненты векторов $\mathbf{p}(1)$, $\mathbf{p}(2)$ – неотрицательные целые числа. В следующей теореме установлены необходимые и достаточные условия существования двух описанных типов экстремальных индексов у стационарного случайного поля на $\mathbb{Z}^d$.

Теорема 1.15. *(A. Jakubowski, N. Soja-Kukieła,[124]) Пусть* $(X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$ *– стационарное случайное поле.*
(i) Поле $(X_{\mathbf{n}})$ *имеет глобальный экстремальный индекс* $\theta \in (0,1]$ *тогда и только тогда, когда существуют такие* $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$ *и строго монотонное поле уровней* $(v_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$, *что*

$$\mathsf{P}(M_{\mathbf{n}} \le v_{\mathbf{n}}) \to \gamma_1,\ F(v_{\mathbf{n}})^{\mathbf{n}^*} \to \gamma_2 \text{ при } \mathbf{n} \to \infty,\ \frac{\ln \gamma_1}{\ln \gamma_2} = \theta$$

и для всех монотонных кривых ψ *и всех* $T > 0$ *выполнено свойство* $\mathbf{B}_T^{\psi}((v_{\boldsymbol{\psi}(n)}))$.
(ii) Поле $(X_{\mathbf{n}})$ *имеет экстремальный индекс* $\theta \in (0,1]$ *по направлению* ψ *тогда и только тогда, когда существуют такие* $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$ *и неубывающая последовательность уровней* $(v_{\psi(n)},\ n \ge 1)$, *что*

$$\mathsf{P}(M_{\psi(n)} \le v_{\psi(n)}) \to \gamma_1,\ F(v_{\psi(n)})^{\psi(n)^*} \to \gamma_2 \text{ при } n \to \infty,\ \frac{\ln \gamma_1}{\ln \gamma_2} = \theta$$

и для всех $T > 0$ *выполнено свойство* $\mathbf{B}_T^{\psi}((v_{\boldsymbol{\psi}(n)}))$.

Далее в разделе 1.6 доказывается, что стационарное гауссовское случайное поле $(X_{(i,j)},\ (i,j) \in \mathbb{Z}^2)$ с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариационной функцией $r_{i,j} = \mathsf{E}X_{(0,0)}X_{(i,j)}$, где для некоторой константы $C > 0$

$$r_{i,j} = C\frac{\ln\ln|i|}{\ln|i|}\frac{1}{\ln|j|}$$

для достаточно больших по модулю i, j, имеет экстремальный индекс, равный 1, вдоль диагонального направления $\psi(n) = (n, n)$, но не имеет экстремального индекса вдоль направления $\tilde{\psi}(n) = ([n/\ln n], [\ln n])$. Это означает, что у данного поля нет глобального экстремального индекса и что две упомянутых разновидности экстремального индекса различаются.

В разделе 1.7 изучаются предельные свойства статистики ω^2-критерия, построенной по максимальным членам вариационного ряда межкластерных расстояний, для процедуры оптимального выбора гиперпараметра оценки экстремального индекса стационарной последовательности. Итак, пусть $(X_i,\ i \geq 1)$ – стационарная (в узком смысле) последовательность с маргинальной функцией распределения F и экстремальным индексом θ. Пусть количество превышений последовательностью $(X_i)_{i=1}^n$ уровня u равно $L = L(u)$ и $S_j(u)$ – это индекс j-го превышения, то есть,

$$S_j(u) = \min\{k > S_{j-1}(u) : X_k > u\}, \quad j = 1, \ldots, L,$$

где $S_0(u) = 0$. Определим *межкластерные расстояния* как

$$Y_j(u) = (L(u)/n) \cdot (S_{j+1}(u) - S_j(u)), \quad j = 1, \ldots, L-1,$$

и предположим для удобства, что их количество также равно L. Известно, что при некоторых условиях [93] выполнено

$$\mathsf{P}(Y_1(u_n) > x) \to \theta e^{-\theta x} =: 1 - F_\theta(x)$$

для некоторой последовательности уровней $(u_n,\ n \geq 1)$. Далее пишем Y_i вместо $Y_i(u_n)$, $1 \leq i \leq L$. Рассмотрим модификацию статистики ω^2-критерия Крамера-фон Мизеса-Смирнова, построенную по максимальным порядковым статистикам последовательности $(Y_i,\ 1 \leq i \leq L)$,

$$\widetilde{\omega}_k^2(\theta) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{F_\theta(Y_{(L-i)}) - F_\theta(Y_{(L-k)})}{1 - F_\theta(Y_{(L-k)})} - \frac{k - i - 0.5}{k} \right)^2 + \frac{1}{12k}.$$

Тогда предлагаемый метод выбора высокого уровня u для оценивания экстремального индекса состоит в том, чтобы найти решения $u_1, \ldots, u_l$ уравнения невязки

$$\widetilde{\omega}_k^2(\hat{\theta}_n(u)) = \delta,$$

где $\hat{\theta}_n(u)$ – некоторая оценка экстремального индекса и δ – мода (или высокая квантиль) распределения A_1, предельного распределения статистики классического ω^2-критерия в случае верности нулевой гипотезы, и положить $\tilde{\theta}_n = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\hat{\theta}_n(u_i)$ в качестве окончательной оценки. Корректность такого выбора δ подтверждает следующая теорема.

Теорема 1.21. *Пусть выполнены условия теоремы 1 из работы [93]. Предположим, что оценка экстремального индекса $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}_n(u_n)$ такова, что*

$$\sqrt{m_n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \zeta, \quad n \to \infty,$$

где ζ имеет невырожденное распределение. Пусть последовательность $(m_n,\ n \geq 1)$ такова, что $k/m_n = o(1)$ и $(\ln L)^2/m_n = o(1)$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\widetilde{\omega}_k^2(\widehat{\theta}_n) \xrightarrow{d} \xi \sim A_1, \quad n \to \infty.$$

Для некоторых оценок экстремального индекса, например, интервальной оценки и оценки методом K-gaps, в качестве m_n можно выбрать L. В разделе 1.8 обсуждается предельное распределение еще одной модификации ω^2-статистики в случае нарушения условия $k/L = o(1)$, а именно, показано, что случае $k/L \to c \in (0,1)$ при $n \to \infty$ это распределение будет зависеть от значения θ.

В разделе 1.9, последнем разделе главы 1, рассматривается задача поиска асимптотики распределения максимума диагональных и внедиагональных элементов эмпирической матрицы ковариаций стационарного m-зависимого случайного поля. Итак, рассмотрим случайное действительно-значное поле $(X_{it},\ i,t \in \mathbb{Z})$. Предположим, что "строки" $(X_{it},\ t \in \mathbb{Z})$, $i = 1, 2, \ldots,$ являются независимыми

одинаково распределенными, каждая из которых является m-зависимой стационарной последовательностью. Рассмотрим матрицу $\mathbf{X} = (X_{it}, \quad i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, n)$. Ее эмпирическая матрица ковариаций определяется как

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^\top = \Big(\sum_{t=1}^{n} X_{it} X_{jt} \Big)_{i,j=1,\dots,p} =: (S_{ij}^{(n)})_{i,j=1,\dots,p} \, .$$

Предположим, что $p = p_n \to \infty$. Далее под X подразумеваем случайную величину с функцией распределения F, а также будем обозначать последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения F через (X_i).

Лемма 1.24. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) $X \in \mathrm{RV}_\alpha$ *для некоторого* $\alpha > 4$, *в частности, это означает, что существует такая последовательность* (c_n), *что* $n \, \mathsf{P}(X^2 > c_n) \to 1$ *и* $c_n^{-1} \max_{i=1,\dots,n} X_i^2 \xrightarrow{d} Y$, *где* Y *распределено по максимально-устойчивому закону Фреше с параметром* $\alpha/2$.

(ii) Выполнены соотношения:

$$\mathsf{P}\big(S_{11}^{(n)} - n \, \mathsf{E}X^2 > c_{np} x\big) \sim n \, \mathsf{P}(X^2 > c_{np} x) \, , \quad x > 0 \, ,$$
$$\mathsf{P}\big(|S_{12}^{(n)} - n \, (\mathsf{E}X)^2| > c_{np} x\big) \le c \, n \, \mathsf{P}(|X_1 X_2| > c_{np} x) = o(p^{-2}), \; x > 0.$$

Тогда верны следующие предельные соотношения:

$$c_{np}^{-1} \max_{1 \le i < j \le p} |S_{ij}^{(n)} - n \, (\mathsf{E}X)^2| \xrightarrow{P} 0 \, ,$$
$$c_{np}^{-1} \max_{i=1,\dots,p} \big(S_{ii}^{(n)} - n \, \mathsf{E}X^2\big) \xrightarrow{d} Y.$$

Раздел 1.9 также содержит результат, аналогичный лемме 1.24, в случае если X имеет субэкспоненциальное распределение, принадлежащее области максимального притяжения Гумбеля. В конце раздела 1.9 доказан результат о больших уклонениях частичных сумм m-зависимой стационарной последовательности, который дает

достаточные условия выполнения предельных соотношений из пункта (ii) леммы 1.24.

Вторая глава диссертации посвящена результатам автора в теории асимптотического анализа гауссовских случайных процессов. А именно, результаты касаются асимптотик вероятностей больших уклонений нестационарных гауссовских процессов, гауссовских полей и процессов бесселевского типа.

В разделе 2.1 после краткого обзора литературы приводится результат об асимптотике вероятности высокого экстремума нестационарного гауссовского процесса на действительной прямой в так называемом "почти стационарном" случае, [11]. Итак, пусть $X(t)$, $t \in [-S, S]$, – гауссовский случайный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $r(s,t)$, обозначим $\sigma^2(t) = r(t,t)$. В разделе 2.1, как и в остальных разделах этой главы, нас будет интересовать асимптотическое поведение вероятности

$$P(\mathcal{S}; u) := \mathsf{P}(\max_{t \in \mathcal{S}} X(t) > u). \tag{0.7}$$

при $u \to \infty$. Выберем $\mathcal{S} = [-S, S]$ для некоторого $S > 0$. Наложим следующие условия на процесс:

A1 Случайный процесс $X(t)$ непрерывен почти наверное.

A2 Абсолютный максимум функции $\sigma(t)$ на отрезке $[-S, S]$ достигается в единственной точке $t = 0$, причем $\sigma(0) = 1$. Кроме того, существуют пределы (конечные или бесконечные)

$$\lim_{t \downarrow 0, s \downarrow 0} \frac{1 - \sigma^2(t)}{1 - r(s,t)} \in [0, \infty] \quad \text{и} \quad \lim_{t \uparrow 0, s \uparrow 0} \frac{1 - \sigma^2(t)}{1 - r(s,t)} \in [0, \infty].$$

Если хотя бы один из этих пределов равен 0, то в этом случае предположим, что существуют такие константы $c > 0$ и $K < \infty$, что для всех $x \in [0, c]$ уравнение $1 - \sigma^2(t) = x$ имеет не более, чем K корней.

A3 Обозначим $\rho(s,t) := r(s,t)/\sigma(s)\sigma(t)$. Тогда существует такая ковариационная функция $\rho(t)$ стационарного процесса, что

выполнено

$$\lim_{s,t\to 0}\frac{1-\rho(s,t)}{1-\rho(t-s)}=1.$$

A4 Для функции ρ из предыдущего условия найдутся положительные функции $q(u)$ и $h(t)$ такие, что для всех $t\neq 0$ существует предел

$$\lim_{u\to\infty}u^2(1-\rho(q(u)t))=h(t),$$

причем для некоторого $\varepsilon>0$ это соотношение выполнено равномерно на отрезке $t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$.

Легко видеть, что из условий **A2** и **A4** следует, что существует предел

$$\lim_{u\to\infty}u^2(1-\sigma^2(q(u)t))=h_1(t)\in[0,\infty].$$

Обозначим

$$\Psi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^\infty\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx,$$

хвост функции распределения стандартной нормальной случайной величины. "Почти стационарный" случай поведения процесса $X(t)$, о котором далее пойдет речь, обобщает случай $\beta>\alpha$ в монографиях [170, 28]. Обозначим для удобства $f(t)=(1-\sigma^2(t))/2$, а также

$$L_+(\lambda):=\int_0^\delta e^{-\lambda f(t)}dt\ \text{ и }\ L_-(\lambda):=\int_{-\delta}^0 e^{-\lambda f(t)}dt,\quad\lambda>0. \tag{0.8}$$

Асимптотическое поведение этих интегралов при $\lambda\to\infty$ не зависит от выбора $\delta>0$ в силу условий на $\sigma(t)$. Следующая теорема получена в работе [11].

Теорема 2.1 (S.G. Kobelkov, V.I. Piterbarg)**.** *Пусть выполнены условия* **A1-A4**. *Если* $h_1(t)=0$, $t\in[-S,S]$, *то*

$$P([0,S],u)=H_\alpha L_+(u^2)\ q^{-1}(u)\Psi(u)(1+o(1))$$

и

$$P([-S,S],u)=H_\alpha\left(L_+(u^2)+L_-(u^2)\right)q^{-1}(u)\Psi(u)(1+o(1))$$

при $u\to\infty$, *где* H_α – *константа Питербарга, см. определение в монографии [28].*

Основным результатом раздела 2.2 является обобщение результата теоремы на нестационарные гауссовские поля, однако на случайное поле накладываются несколько другие условия. Итак, пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ есть замыкание открытого множества, содержащего точку 0, и пусть $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathcal{S}$, – почти наверное непрерывное гауссовское поле с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $R(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = EX(\mathbf{s})X(\mathbf{t})$, снова обозначим через $\Sigma^2(\mathbf{t}) = R(\mathbf{t}, \mathbf{t})$ функцию дисперсии данного процесса. Целью раздела 2.2 является изучение вероятности (0.7) при $u \to \infty$ для гауссовского поля $X(\mathbf{t})$ в почти стационарном случае. Наложим условия на этот процесс, большинство из которых является естественным продолжением условий **A1-A4**.

B1 Случайное поле $X(\mathbf{t})$ непрерывно почти наверное. Более того, существует $\varepsilon > 0$ такое, что интеграл Дадли [28], [82] стандартизированного поля $\tilde{X}(\mathbf{t}) = X(\mathbf{t})/\Sigma(\mathbf{t})$ по множеству $\mathbb{B}_\varepsilon = \{\mathbf{t} : \ |\mathbf{t}| \leq \varepsilon\}$ конечен.

B2 Абсолютный максимум функции $\Sigma(\mathbf{t})$ на множестве $\mathcal{S}$ достигается в единственной точке $\mathbf{t} = \mathbf{0}$, причем $\Sigma(\mathbf{0}) = 1$.

B3 Существует такая ковариационная функция $\Upsilon(\mathbf{t})$ однородного случайного поля, $\Upsilon(\mathbf{t}) < 1$ для $\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$, что выполнено

$$\lim_{\mathbf{s},\mathbf{t} \to \mathbf{0}, \mathbf{s} \neq \mathbf{t}} \frac{1 - R(\mathbf{s}, \mathbf{t})}{1 - \Upsilon(\mathbf{t} - \mathbf{s})} = 1.$$

B4 Существует базис в $\mathbb{R}^d$, векторная функция $\mathbf{q}(u) = (q_1(u), \ldots, q_d(u))$, $u > 0$, с положительными компонентами и положительная для всех $\mathbf{t} \neq 0$ функция $h(\mathbf{t})$ такие, что для всех $\mathbf{t}$, записанных в этих координатах, будет выполнено

$$\lim_{u \to \infty} u^2 (1 - \Upsilon(\mathbf{q}(u)\mathbf{t})) = h(\mathbf{t})$$

равномерно по $\mathbf{t}$ на любом замкнутом множестве, где под $\mathbf{q}(u)\mathbf{t}$ имеется в виду вектор $(q_1(u)t_1, \ldots, q_d(u)t_d)$.

B5 Для всех $\mathbf{t}$ существует функция $h_1(\mathbf{t}) \in [0, \infty]$ такая, что выполнено предельное соотношение

$$\lim_{u\to\infty} u^2(1 - \Sigma^2(\mathbf{q}(u)\mathbf{t})) = h_1(\mathbf{t}).$$

Более того, если $h_1(\mathbf{e}) = 0$ для всех $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^{d-1}$, где $\mathbb{S}^{d-1}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^d$, то

$$\lim_{u\to\infty} u^2\big(\Sigma^2(\mathbf{s}) - \Sigma^2(\mathbf{s} + \mathbf{q}(u)\mathbf{t})\big) = 0$$

равномерно по $\mathbf{s} \in \mathbb{B}_\varepsilon$ и $\mathbf{t}$ на произвольном замкнутом множестве.

Определим

$$\hat{L}(\lambda) = \int_{|\mathbf{t}|\le 1} e^{-\lambda(1-\Sigma^2(\mathbf{t}))/2} d\mathbf{t}, \quad \lambda > 0.$$

Тогда будет верен следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* **B1-B5**. *Если к тому же* $h_1(\mathbf{t}) = 0$ *для всех* $\mathbf{t}$, *то*

$$P(\mathcal{S}, u) = (1 + o(1))H_{\mathbf{q}}\hat{L}(u^2)\prod_{i=1}^{d} q_i^{-1}(u)\Psi(u)$$

при $u \to \infty$, *где* $H_{\mathbf{q}}$ – *обобщенная константа Питербарга, см. определение в работе [133].*

В разделе 2.3 получена асимптотика вероятности высокого экстремума евклидовой нормы гауссовского векторного процесса с независимыми одинаково распределенными компонентами для всех трех возможных случаев поведения функции дисперсии и ковариационной функции. Пусть $\mathbf{X}(t) := (X_1(t), \dots, X_d(t)) \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0, T]$ – гауссовский векторный процесс, компоненты которого – независимые одинаково распределенные гауссовские процессы с нулевыми средними. Модуль этого процесса $\beta(t) := |\mathbf{X}(t)|$ будем называть $\beta-$процессом. Целью раздела 2.3 является нахождение асимптотики вероятности

$$\mathsf{P}\left(\max_{t\in[0,T]} \beta(t) > u\right)$$

при $u \to \infty$. Аналогично началу раздела 2.1, обозначим $r(s,t) = \mathsf{E}X_1(t)X_1(s)$, прочие обозначения раздела 2.1 будем использовать без изменений. Предположим, как и ранее, что функция $\sigma^2(t)$ имеет единственный максимум на отрезке $[0,T]$ в точке t_0, причем $\sigma^2(t_0) = 1$. Наложим на компоненты векторного процесса $\mathbf{X}(t)$ условия **A1, A3** и **A4**, изменив точку максимума дисперсии с 0 на t_0, а вместо условия **A2** наложим следующее:

A2* Для всех t существует предел

$$h_1(t) = \lim_{u\to\infty} u^2(1 - \sigma^2(t_0 + q(u)t)) \in [0,\infty].$$

В граничных случаях: при $t_0 = 0$ и $t < 0$ или при $t_0 = T$ и $t > 0$ – считаем, что $h_1(t) = \infty$. Более того, если $h_1(t) = 0$ для некоторого t, то существуют $c > 0$ и $K < \infty$ такие, что для всех $x \in [0,c]$ количество корней уравнения $1 - \sigma^2(t) = x$ не превосходит K.

В этих условиях верен основной результат раздела 2.3:

Теорема 2.4. *Пусть выполнены вышеприведенные условия на процесс $\boldsymbol{X}(t)$. Тогда при $u \to \infty$ выполнены следующие соотношения:*

1) Если хотя бы одно из чисел $h_1(1), h_1(-1)$ равно нулю, то

$$\mathsf{P}(\max_{[0,T]} \beta(t) > u) = \frac{\sqrt{\pi} H_\alpha}{2^{(d-3)/2}\Gamma(d/2)} u^{d-1} L(u^2) q(u)^{-1} \Psi(u)(1 + o(1)),$$

где $L(\lambda) = L_+(\lambda) + L_-(\lambda)$.
*2) Если $h_1(1) = h_1(-1) = \infty$ (здесь имеется в виду доопределение $h_1(t)$ в **A2*** для граничной t_0, то*

$$\mathsf{P}(\max_{[0,T]} \beta(t) > u) = \frac{\pi^{d/2}}{2^{(d-3)/2}\Gamma(d/2)} u^{d-1} \Psi(u)(1 + o(1)).$$

3) Если хотя бы одно число из чисел $h_1(1)$, $h_1(-1)$ положительно и конечно, при этом другое – не нуль, то

$$\mathsf{P}(\max_{[0,T]} \beta(t) > u) = \frac{\pi^{d/2} P_\alpha}{2^{(d-3)/2}\Gamma(d/2)} u^{d-1} \Psi(u)(1 + o(1)),$$

определение константы Пикандса P_α см. в монографии [28].

Третья глава диссертации посвящена критериям проверки гипотез о хвостах распределений по выборкам из независимых одинаково распределенных случайных величин. Общим для всех предложенных критериев является то, что они построены с использованием лишь максимальных членов вариационного ряда выборки, потому что хвост распределения оказывает влияния лишь на эти наблюдения.

Первый раздел этой главы посвящен краткому обзору литературы о проверке гипотез о хвостах распределений по последовательностям независимых одинаково распределенных случайных величин. В разделе 3.2 предлагается критерий проверки простой гипотезы о хвосте распределения из области максимального притяжения Гумбеля против сложной "левосторонней" альтернативы. Критерий снова строится на основе отношения правдоподобий; существенным ограничением этого критерия является то, что хвосты распределений из нулевой и альтернативной гипотез должны убывать быстрее, чем хвост экспоненциального распределения. "Левосторонность" альтернативы в данном случае означает, что все хвосты распределений из альтернативной гипотезы тяжелее хвоста некой функции распределения F_1, который в свою очередь тяжелее хвоста функции распределения F_0 из нулевой гипотезы.

В разделе 3.3 рассматривается общий критерий различения двух разделимых классов хвостов непрерывных распределений. Большим плюсом критерия по сравнению с критериями проверки гипотез о хвостах распределений, предложенных в литературе, является тот факт, что выполнение условий теоремы Гнеденко для рассматриваемых распределений не является обязательным. На протяжении глав 3 и 4 будем считать, что $\mathbf{X}_n = (X_1, ..., X_n)$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с непрерывной функцией распределения F, вариационный ряд выборки $\mathbf{X}_n$ обозначим через $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$. Для построения критерия будем использовать

следующую статистику

$$R_{k,n} = \ln(1 - F_0(X_{(n-k)})) - \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^{n} \ln(1 - F_0(X_{(i)})), \qquad (0.9)$$

где F_0 – некоторая непрерывная функция распределения и $k < n$. Обозначим $x_F^* = \sup\{x : \ F(x) < 1\}$ и назовем ее *правой граничной точкой* функции распределения F. Далее, скажем, что две непрерывные функции распределения G и H с $x_G^* = x_H^*$ удовлетворяют условию $B(G, H)$ (B-условию), если для некоторых $\varepsilon \in (0, 1)$ и x_0 выполнено

$$\frac{(1 - G(x))^{1-\varepsilon}}{1 - H(x)} \text{ не возрастает при } x_0 < x < x_G^*. \qquad (0.10)$$

Пусть классы распределений A_0 и A_1 таковы, что хвосты распределений из класса A_0 легче, чем хвосты распределений из класса A_1. Будем также предполагать, что правые граничные точки всех распределений из этих классов совпадают и равны x^*. Объединим эти два условия под названием *A-условие*. Предположим, что существует "разделяющая" функция распределения F_0, такая что для всех $G \in A_0$ выполнено

$$\overline{\lim_{x \to x^*}} \frac{1 - G(x)}{1 - F_0(x)} \leq 1$$

и для произвольной $H \in A_1$ выполнено условие $B(F_0, H)$. Назовем такие классы *B-разделимыми*. Рассмотрим основную гипотезу $\tilde{H}_0 : F \in A_0$ и альтернативу $\tilde{H}_1 : F \in A_1$. В такой постановке будет верен следующий результат.

Теорема 3.11. *Пусть последовательность $k = k(n)$ такова, что*

$$k \to \infty, \ k/n \to 0 \ \textit{при} \ n \to \infty. \qquad (0.11)$$

Тогда критерий

$$\textit{если } R_{k,n} > 1 + \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{k}}, \ \textit{то отвергнуть } \tilde{H}_0, \qquad (0.12)$$

проверки гипотезы $\tilde{H}_0$ асимптотически имеет уровень значимости α и является состоятельным на альтернативе $\tilde{H}_1$, где $u_{1-\alpha}$ – $(1-\alpha)$-квантиль стандартного нормального закона.

В разделе 3.3 также был предложен критерий согласия для хвоста непрерывного распределения на основе статистики $R_{k,n}$ (0.9) и доказана его состоятельность на широких альтернативах в различных условиях на близость альтернативной гипотезы. Более того, в конце раздела критерий (0.12) был применен к задаче различения распределений с правильно меняющимся хвостом и распределений с хвостами логарифмического типа. Далее, в разделе 3.4 показано, что при некоторых ограничениях на хвост распределения результаты раздела 3.3 остаются верными также и для разрывных функций распределения, в том числе дискретных.

Последний раздел главы 3 посвящен задаче проверки гипотезы согласия для хвостов распределений. В разделе предложены критерии типа Колмогорова и ω^2 согласия хвоста распределения выборки с хвостом функции распределения F_0 и доказана их состоятельность на широких альтернативах. Итак, по аналогии с классической гипотезой согласия, определим H_0^T : $F(x) = F_0(x)$ *для всех достаточно больших* x. Будем называть ее гипотезой согласия с (правым) хвостом распределения. Критерии согласия для хвостов распределений, изложенные в этом разделе, проверяют более широкую гипотезу, чем H_0^T. Определим функцию распределения хвоста F как

$$F(x|q) := \mathsf{P}(X_1 \le x | X_1 > q) = \frac{F(x) - F(q)}{1 - F(q)}, \quad x > q,$$

данное понятие тесно связано с понятием условной функции распределения превышения уровня, см. [6]. Рассмотрим гипотезу $\hat{H}_0^T$: $F(x|q) = F_0(x|q), x > q$, *для некоторого (неизвестного)* q; как легко видеть, если гипотеза $\hat{H}_0^T$ выполнена для некоторого q, то найдется такая константа $C > 0$, что при всех $x > q$ верно соотношение $1 - F(x) = C(1 - F_0(x))$. Тем самым, гипотеза H_0^T есть сужение гипотезы $\hat{H}_0^T$ на случай $C = 1$.

Предложим на основе статистики классического критерия согласия Колмогорова статистику, зависящую только от максимальных членов

вариационного ряда выборки $\mathbf{X}^n$, для проверки гипотезы $\hat{H}_0^T$:

$$D_{k,n}^T = \sup_{x > X_{(n-k)}} \left| \widehat{F}_n(x|X_{(n-k)}) - F_0(x|X_{(n-k)}) \right|$$

и изучим ее предельное распределение в случае верности $\hat{H}_0^T$.

Теорема 3.18. *Пусть случайная величина K распределена по закону Колмогорова. Предположим, что гипотеза $\hat{H}_0^T$ верна для непрерывной F_0. Тогда существует такое q, что*

$$\sqrt{k} D_{k,n}^T \xrightarrow{d} K, \quad n \to \infty,$$

для всех последовательностей $k = k(n)$ таких, что $k \to \infty$ и $k/n < 1 - F_0(q) - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 3.18 показывает, что критерий

$$\text{если } \sqrt{k} D_{k,n}^T > K_{1-\alpha}, \text{ то отвергнуть } \hat{H}_0^T, \tag{0.13}$$

где $K_{1-\alpha}$ – $(1-\alpha)$-квантиль распределения Колмогорова, асимптотически имеет уровень значимости α; в следующей теореме обсуждается состоятельность предложенного критерия.

Теорема 3.19. *(i) Если для некоторого $c \in (0,1)$ выполнено $k/n > c$ при $n \to \infty$, то критерий (0.13) состоятелен на альтернативе $\hat{H}_1^T : \hat{H}_0^T$ неверна.*

(ii) Если $k \to \infty$ и $k/n \to 0$ при $n \to \infty$, то критерий (0.13) состоятелен на более узкой альтернативе $\hat{H}_2^T$: $\forall q < x_{F_1}^* \; \exists x_0 > q$: $|F(x_0|q) - F_0(x_0|q)| > d$ для некоторого $d > 0$.

Далее в разделе 3.5 обсуждались критерии согласия для хвостов распределений типа ω^2. Введем статистику

$$\omega_{k,n}^T(\psi) = \int_{X_{(n-k)}}^{\infty} \psi(F_0(x|X_{(n-k)}))(\widehat{F}_n(x|X_{(n-k)}) - F_0(x|X_{(n-k)}))^2 dF_0(x|X_{(n-k)})$$

и предложим на ее основе критерий проверки гипотезы $\hat{H}_0^T$:

$$\text{если } k\omega_{k,n}^T(\psi) > u_{1-\alpha}(\psi), \text{ то отвергнуть } \hat{H}_0^T, \tag{0.14}$$

где $u_{1-\alpha}(\psi)$ – $(1-\alpha)$-квантиль предельного распределения $A(\psi)$ статистики $\omega_n^2(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \psi(F_0(x))(\widehat{F}_n(x) - F_0(x))^2 dF_0(x)$ при верности гипотезы согласия, см. [17]. Частными случаями критериев типа омега-квадрат являются критерии согласия Крамера-фон Мизеса-Смирнова (для $\psi(x) = 1$) и Андерсона-Дарлинга (для $\psi(x) = (x(1-x))^{-1}$). В конце раздела 3.5 приводятся результаты, аналогичные теоремам 3.18 и 3.19, показывающие, что критерий (0.14) асимптотически имеет уровень значимости α и является состоятельным на широкой альтернативе.

Четвертая глава диссертации посвящена методам оценивания параметров хвоста распределения по выборке из независимых одинаково распределенных случайных величин. Как и в третьей главе, только максимальные члены вариационного ряда выборки использованы для реализации предложенных методов.

В первом разделе четвертой главы предложен метод оценивания одномерного параметра хвоста непрерывного распределения. Существенным преимуществом данного метода является тот факт, что мы не требуем выполнения условий теоремы Гнеденко для функции распределения F. Итак, предположим, что функция распределения F величины X_1 является непрерывной и что $x_F^* = +\infty$. Далее, скажем, что параметрическое семейство хвостов непрерывных распределений $\mathcal{F} = \{F_\theta,\ \theta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \mathbb{R}$, является *упорядоченным по параметру* θ, если для всех $\theta_1, \theta_2 \in \Theta,\ \theta_1 < \theta_2$, выполнено условие $B(F_{\theta_1}, F_{\theta_2})$ (см. (0.10)) или для всех $\theta_1, \theta_2 \in \Theta,\ \theta_1 < \theta_2$, выполнено $B(F_{\theta_2}, F_{\theta_1})$. Наконец, предположим, что $F \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ упорядочено по параметру θ.

Для построения метода оценивания рассмотрим статистику

$$R_{k,n}(\theta) = \ln(1 - F_\theta(X_{(n-k)})) - \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^{n} \ln(1 - F_\theta(X_{(i)})),$$

которая является обобщением статистики $R_{k,n}$ из раздела 3.3.

Следующая теорема утверждает, что оценка

$$\theta^*_{k,n} = \arg\{\theta : \ R_{k,n}(\theta) = 1\} \tag{0.15}$$

является состоятельной для параметра θ.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{F}$ упорядочено по параметру θ и $F_\theta(x)$ непрерывна по θ. Предположим, что последовательность $k = k(n), k \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям* (0.11). *Тогда*

$$\theta^*_{k,n} \xrightarrow{P_{\theta_0}} \theta_0, \quad n \to \infty.$$

Для того, чтобы установить асимптотическую нормальность оценки $\theta^*_{k,n}$, наложим дополнительные условия на семейство $\mathcal{F}$. Обозначим $S(x,\theta) = \ln(1 - F_\theta(x))$ и

$$I(q,\theta) = \frac{1}{1 - F_\theta(q)} \int_q^\infty \frac{\partial S(x,\theta)}{\partial \theta} dF_\theta(x) - \frac{\partial S(q,\theta)}{\partial \theta}.$$

Итак, рассмотрим условия

C1 Функция $\frac{\partial S(x,\theta)}{\partial \theta}$ непрерывна по паре переменных (x,θ) при $x > x_0$;

C2 Для всех $\theta_0 \in \Theta$ существует $x_1(\theta_0)$ такое, что функция $\frac{\partial S(x,\theta)}{\partial \theta}$ монотонна по θ в некоторой окрестности θ_0 при $x > x_1(\theta_0)$.

C3 Для всех $\theta_0 \in \Theta$ существует $x_2(\theta_0)$ такое, что выполнено $|I(x,\theta_0)| < \infty$ при $x > x_2(\theta_0)$.

Следующая теорема утверждает, что в наложенных условиях для оценки (0.15) будет выполнен аналог свойства асимптотической нормальности.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия* **C1-C3**. *Тогда в предположениях теоремы ,*

$$\sqrt{k} I(X_{(n-k)}, \theta^*_{k,n})(\theta^*_{k,n} - \theta_0) \xrightarrow{d_{\theta_0}} \xi \sim N(0,1)$$

для всех $\theta_0 \in \Theta$.

Во втором разделе четвертой главы рассматривается задача оценивания параметров сдвига и масштаба хвостов распределений из областей максимального притяжения Гумбеля и Фреше; данная задача не всегда может быть решена с помощью метода, предложенного в предыдущем разделе, поскольку условие упорядоченности по параметру для семейства хвостов распределений может быть не выполнено. Итак, предположим, что функция распределения F случайной величины X_1 принадлежит семейству хвостов распределений $\mathcal{F} = \{F_{a,b}(x), a \in \mathbb{R}, b > 0\}$, где a и b – параметры сдвига и масштаба соответственно. Т.е. существуют такие a_0, b_0 и x_0, что

$$F\left(\frac{x - a_0}{b_0}\right) = F_{0,1}(x) =: F_0(x)$$

для всех $x > x_0$. Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ – независимые одинаково распределенные величины с функцией распределения F_0. Определим оценку параметра сдвига хвоста распределения как

$$\hat{a} = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} X_{(n-i)} - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} Y_{(n-i)}.$$

Теорема 4.4. *Предположим, что функция распределения F_0 удовлетворяет условию фон Мизеса*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(1 - F_0(t))F_0''(t)}{(F_0'(t))^2} = -\gamma - 1 \tag{0.16}$$

при $\gamma = 0$, а также что $b = 1$. Пусть последовательность $k = k(n)$ удовлетворяет условию (0.11) и при этом существует такое $M > 0$, что

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1 - F_0(M\sqrt{k})}{k/n} \leq 1.$$

Тогда оценка $\hat{a}$ является состоятельной оценкой параметра сдвига a.

При наложении дополнительных условий на семейство $\mathcal{F}$ введенная оценка будет асимптотически нормальной, однако, что интересно, функция $f(k)$, для которой $f(k)(\hat{a}-a)$ будет сходиться по распределению

к нормальному закону, будет отличаться от $\sqrt{k}$. Далее, предположим, что $a = 0$, и рассмотрим оценку параметра масштаба

$$\hat{b} = \exp\left\{\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\ln X_{(n-i)} - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\ln Y_{(n-i)}k\right\}.$$

Теорема 4.5. *Пусть функция распределения F_0 удовлетворяет условию фон Мизеса* (0.16) *при $\gamma \geq 0$, а также $a = 0$. Пусть последовательность $k = k(n)$ удовлетворяет условию* (0.11)*, причем существует такое $M > 1$, что*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1 - F_0(\exp\{M\sqrt{k}\})}{k/n} \leq 1.$$

Тогда оценка $\hat{b}$ является состоятельной оценкой параметра масштаба b.

Как и в случае оценки параметра сдвига, существует такая функция $g(k)$, что выражение $g(k)(\hat{b} - b)$ будет асимптотически распределено по нормальному закону в случае выполнения дополнительных условий, наложенных на семейство $\mathcal{F}$.

Автор считает приятным долгом выразить глубокую признательность и благодарность своему учителю доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Ильичу Питербаргу за постоянное внимание к работе и поддержку. Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук Наталье Михайловне Маркович за неоценимое содействие в научном развитии автора и плодотворные обсуждения результатов работы. Автор высоко ценит содействие, оказанное работе сотрудниками кафедры и лаборатории теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова и сотрудниками лаборатории 38 Института проблем управления имени В. А. Трапезникова.

1 Вероятностный анализ экстремумов стохастических систем

1.1 Введение: асимптотика распределения максимума случайной последовательности

Теорема об экстремальных типах, или теорема Фишера-Типпета-Гнеденко [94], [102], является центральным результатом стохастической теории экстремумов. Пусть $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ – последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин с функцией распределения (ф.р.) F, обозначим

$$M_n = \max(X_1, \ldots, X_n).$$

Теорема утверждает, что если для некоторых числовых последовательностей (a_n), где $a_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и (b_n) существует такая невырожденная ф.р. $G(x)$, что

$$\mathsf{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} G(x), \tag{1.1}$$

то существуют такие константы $a > 0$, b и γ, что выполнено соотношение

$$G(ax + b) = \exp(-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}), \quad 1 + \gamma x > 0,$$

и 0 иначе. В этом случае γ называется *индексом экстремального значения*, а последовательности (a_n) и (b_n) – нормировочными. Если $\gamma > 0$, то говорим, что F принадлежит *области максимального притяжения* Фреше и пишем $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_{1/\gamma})$. Если $\gamma = 0$, то F принадлежит области максимального притяжения Гумбеля, пишем $F \in \mathrm{MDA}(\Lambda)$. Если $\gamma < 0$, то F принадлежит области максимального притяжения Вейбулла. Подробная характеризация двух первых областей максимального притяжения дана далее в тексте диссертации.

Но верен ли подобный результат для зависимых и/или неодинаково распределенных случайных величин? Пусть теперь $(X_n, n \in \mathbb{N})$ –

произвольная последовательность случайных величин, а (a_n) и (b_n) – некоторые числовые последовательности. Ясно, что если для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\left| \mathsf{P}\left(M_n \le a_n x + b_n\right) - \prod_{i \in [d]} \mathsf{P}\left(X_i \le a_n x + b_n\right) \right| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{1.2}$$

и известно асимптотическое распределение максимума *независимых* копий X_i, то известно и асимптотическое распределение M_n. В монографии [137] приведены простые условия, при которых (1.2) выполнено для стационарной последовательности; тем самым показывается, что при некоторых условиях на "слабую зависимость" членов последовательности для нее остается верен результат теоремы Фишера-Типпета-Гнеденко.

Итак, пусть $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ – стационарная в узком смысле последовательность с маргинальной ф.р. F. Обозначим

$$F_{i_1,\ldots,i_k}(x_1,\ldots,x_k) = \mathsf{P}(X_{i_1} \le x_1, \ldots, X_{i_k} \le x_k)$$

для любого набора индексов $i_1,\ldots,i_k$. Для удобства будем писать $F_{i_1,\ldots,i_k}(u) = F_{i_1,\ldots,i_k}(u,\ldots,u)$.

Определение 1.1. Пусть $(u_n,\ n \in \mathbb{N})$ – некая числовая последовательность. Скажем, что последовательность (X_n) удовлетворяет условию $D(u_n)$, если найдётся такая числовая последовательность $(\alpha_{n,l},\ n,l \in \mathbb{N})$ и последовательность натуральных чисел $(l_n,\ n \in \mathbb{N})$, где $l_n = o(n)$ при $n \to \infty$, что для любого набора индексов $i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q$ такого, что $1 \le i_1 < \ldots < i_p < j_1 < \ldots < j_q \le n$ и $j_1 - i_p \ge l_n$, выполнено

$$\left| F_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q}(u_n) - F_{i_1,\ldots,i_p}(u_n) F_{j_1,\ldots,j_q}(u_n) \right| \le \alpha_{n,l_n}, \tag{1.3}$$

где $\alpha_{n,l_n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Для доказательства (1.2) для стационарной последовательности в [137] также было использовано условие $D'(u_n)$, гарантирующее отсутствие предельной кластеризации высоких экстремумов.

Определение 1.2. Будем говорить, что последовательность (X_n) удовлетворяет условию $D'(u_n)$ для некоторой числовой последовательности (u_n), если

$$\limsup_{n\to\infty} n \sum_{i=2}^{[n/k]} \mathsf{P}(X_1 > u_n, X_i > u_n) \to 0 \ \text{ при } k \to \infty, \tag{1.4}$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа.

Условия (1.3) и (1.4) также известны как условия D и D' Лидбеттера соответственно. При выполнении этих двух условий максимум стационарной в узком смысле последовательности с маргинальной ф.р. F ведет себя так же, как максимум последовательности н.о.р. случайных величин с той же функцией распределения.

Теорема 1.3. *Пусть для стационарной последовательности (X_n) выполнены условия $D(u_n)$ и $D'(u_n)$ для некоторой последовательности (u_n). Пусть также $(F(u_n))^n \to \tau$ при $n \to \infty$. Тогда будет выполнено* (1.2)*, то есть*

$$\mathsf{P}(M_n \le u_n) \to \tau$$

при $n \to \infty$.

Впоследствии результат теоремы 1.3 был обобщен Хюслером [119], [120] на случай нестационарных последовательностей, а именно, он показал, что если нестационарная последовательность будет удовлетворять условиям типа D и D', то будет выполнено (1.2). В свою очередь, результаты Хюслера были обобщены Феррейрой и Перейрой [164] на случай нестационарных случайных полей на $\mathbb{Z}^2$.

Однако если наложить на стационарную последовательность лишь условие D Лидбеттера, то получается гораздо более богатая теория, которая тесно связана с понятием *экстремального индекса*. В теореме 3.3.3 монографии [137] показано, что в случае выполнения условия D предельное распределение нормированного максимума стационарной последовательности может принадлежать лишь одному из трех типов распределений (Фреше, Гумбеля или Вейбулла) из теоремы

Фишера-Типпета-Гнеденко. Более того, верен следующий результат, принадлежащий Чернику [62].

Теорема 1.4. *Предположим, что для всех* $\tau > 0$ *определена такая последовательность* $(u_n(\tau))$, *что* $n\big(1 - F(u_n(\tau)\big) \to \tau$ *при* $n \to \infty$ *и выполнено условие* $D(u_n(\tau))$. *Если* $\mathsf{P}(M_n \le u_n(\tau))$ *сходится хотя бы для одного* $\tau > 0$ *при* $n \to \infty$, *то существует такая константа* $\theta \in [0, 1]$, *что* $P(M_n \le u_n(\tau)) \to e^{-\theta\tau}$ *при* $n \to \infty$ *для всех* $\tau > 0$.

Параметр θ называется *экстремальным индексом* и отражает структуру кластеров и степень локальной зависимости случайной последовательности. Так, для последовательности н.о.р. случайных величин (которая, разумеется, является стационарной) и стационарной последовательности, для которой выполнены условия D и D' Лидбеттера, экстремальный индекс равен 1. Еще одним примером, в котором экстремальный индекс равен 1, является гауссовская стационарная последовательность, на которую наложено условие Бермана.

Итак, предположим, что (X_n) – гауссовская стационарная последовательность с нулевым средним и единичной дисперсией. Хорошо известно, что нормальное распределение принадлежит области максимального притяжения Гумбеля, то есть если последовательность (X_n) состоит из независимых случайных величин, то будет верен следующий результат

$$\mathsf{P}(M_n \le a_n x + b_n) \to e^{-e^{-x}}, \quad n \to \infty, \tag{1.5}$$

явный вид нормировочных последовательностей (a_n) и (b_n) можно найти в [137], пример 1.7.1. Берманом [54] был предложено достаточно простое условие, при котором соотношение (1.5) остается верным для гауссовской стационарной последовательности при тех же нормировочных последовательностях (a_n) и (b_n) :

$$r(n) \ln n \to 0, \quad n \to \infty, \tag{1.6}$$

где $r(n)$ – ковариационная функция последовательности (X_n). Интересно, что условие Бермана является в некотором смысле необходимым для выполнения (1.5) для гауссовской стационарной последовательности: Миттал и Илвисакер [156] показали, что в случае верности условия $r(n)\ln n \to \gamma > 0$ при $n \to \infty$ будет выполнено следующее предельное соотношение

$$\mathsf{P}(M_n \le a_n x + b_n) \to \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-e^{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}z}\big)\varphi(z)dz$$

при тех же нормировочных последовательностях (a_n) и (b_n), что и в (1.5), здесь $\varphi(z)$ – плотность стандартной нормальной случайной величины.

1.2 Асимптотическое распределение максимума случайной системы

Пусть $(\mathbf{X}_n) = \big((X_{1,n},\dots,X_{d(n),n})^T,\ n \in \mathbb{N}\big)$ – это произвольная последовательность действительнозначных случайных векторов, назовем этот объект *случайной системой*. Легко видеть, что случайная система является обобщением понятия схемы серий, поскольку длина "серии" $d(n)$ не обязана стремиться к бесконечности. Удобство рассмотрения случайной системы состоит в том, что результаты, доказанные для нее, легко свести к результатам для случайных последовательностей, случайных полей на целочисленной решетки и так далее. В текущем разделе нас будет интересовать вопрос, при каких условиях будет верен следующий аналог (1.2)

$$\left|\mathsf{P}\left(\max_{i\in[d(n)]} X_{i,n} \le x\right) - \prod_{i\in[d(n)]} \mathsf{P}\left(X_{i,n} \le x\right)\right| \to 0, \quad n\to\infty, \tag{1.7}$$

где $[m]$ обозначает совокупность $\{1,\dots,m\}$; то есть, какие условия мы должны наложить на случайную систему, чтобы асимптотическое распределение последовательности максимумов ее "серий" совпадало бы с асимптотическим распределением последовательности максимумов

случайной системы с независимыми компонентами, но с теми же маргинальными распределениями.

Почему такая задача интересна для изучения? Дело в том, что в большом количестве моделей, в частности, возникающих в задачах, связанных со случайными сетями, телекоммуникациями и, с другой стороны, задачах теории графов, наблюдения не могут быть естественным образом упорядоченными по времени, поэтому блочный метод, являвшийся основным до текущего момента методом доказательства результатов типа (1.2) и (1.7) и сильно использующий предположение об упорядоченности по времени наблюдений, не может быть применен. В теории случайных графов важные экстремальные характеристики (например, максимальная степень вершины) определяются как максимумы некоторых зависимых случайных величин, зависимость которых не может быть описана в терминах расстояний (или каких-либо других соотношений) между индексами этих величин. В недавней работе [197] методы статистики экстремумов были применены для оценивания хвостовых индексов входящих и исходящих степеней узлов социальных сетей, однако авторы не доказывали корректность применяемой методологии, поскольку общие методы стохастической теория экстремумов, применимые для анализа подобных моделей, еще не разработаны. Та же проблема присутствует в некоторых работах, посвященных изучению величины PageRank [126], [196].

Насколько нам известно, единственная попытка изучения асимптотического распределения максимума в рассматриваемой постановке была предпринята Галамбошем [98], [99]. Однако результаты Галамбоша доказаны в достаточно ограничительных условиях: так, одним из наиболее важных условий в его работах является выполнение условия (1.7) для большинства подвекторов внутри вектора. Более того, суммарная разность вероятностей $\mathsf{P}(\max_{j\in[\ell]} X_{i_j} \le x)$ и $\prod_{j\in[\ell]} \mathsf{P}(X_{i_j} \le x)$ при суммировании по всем субвекторам $(X_{i_1}, \dots, X_{i_\ell})$ должна стремиться к 0 при $n \to \infty$.

Сформулируем основной результат текущего раздела.

Теорема 1.5. *Пусть* $x \in \mathbb{R}$, $A_i = A_i(n) = \{X_{i,n} > x\}$. *Предположим, что множества индексов* $W_i = W_i(n) \subseteq [d] \setminus \{i\}$, $i \in [d]$, *и* $\gamma > 0$ *таковы, что*

$$\left| \mathsf{P}\Big(\bigcup_{j \in W_i \cap [i-1]} A_j \Big) - \mathsf{P}\Big(\bigcup_{j \in W_i \cap [i-1]} A_j \mid A_i \Big) \right| \leq \gamma \tag{1.8}$$

для всех $i \in [d]$. *Обозначим*

$$\Delta = \sum_{i \in [d]} \mathsf{P}\left(\cup_{j \in [i-1] \setminus W_i} A_j \right) \mathsf{P}(A_i), \quad \Delta' = \sum_{i \in [d]} \sum_{j \in [i-1] \setminus W_i} \mathsf{P}(A_i \cap A_j).$$

Тогда

$$\left| \mathsf{P}\Big(\bigcap_{i \in [d]} \overline{A_i} \Big) - \prod_{i \in [d]} \mathsf{P}\left(\overline{A_i} \right) \right| \leq \gamma \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i \in [d]} A_i \Big) + \max(\Delta, \Delta').$$

Тем самым, достаточным условием выполнения (1.7) является стремление величин γ, Δ и Δ' к 0 при $n \to \infty$. Заметим, что аналогичный результат будет верен и для последовательности произвольных событий $(A_i(n),\ i \in [d])$ без их привязки к случайным векторам.

Сравнение условий теоремы 1.5 в применении к случайным последовательностям и наиболее общего результата о случайных последовательностях, полученных на настоящее время, а именно теоремы 1.1 [120], представляет достаточный интерес. Прежде всего заметим, что в работе Хюслера не было получено равномерной оценки на разность между функциями распределения нормированных максимумов зависимой и независимой последовательностей, поэтому в данном контексте результат теоремы 1.5 является более общим. Если же сравнивать условия стремления величин γ, Δ и Δ' к 0 при $n \to \infty$ и условий теоремы 1.1 [120], то кажется, что первое и третье условия выглядят проще, чем условия D и D' из работы Хюслера, однако ни одно из них не следует из другого. Но если выполнено $|[d] \setminus W_i| = o(d)$ для всех $i \in [d]$, что является довольно естественным условием, то из условия A Хюслера следует стремление D к 0. Те же рассуждения верны и в случае сравнения результата теоремы 1.5 примененного к случайным

полям на $\mathbb{Z}_+^2$ с утверждением 3.2 [164], где авторы также утверждают, что их результаты могут быть расширены на случайные поля на $\mathbb{Z}_+^k$, $k > 2$. Для таких k, наши условия записываются гораздо короче и являются гораздо более гибкими, поскольку мы не требуем, чтобы W_i были прямоугольниками.

Поскольку общих результатов, касающихся условий выполнения (1.7) для случайных полей на целочисленных решетках, до сих пор получено не было, покажем, как применить теорему 1.5 для таких случайных полей. Пусть $\mathbf{d} = \mathbf{d}(n) \in \mathbb{Z}_+^k$, $[\mathbf{d}] := \{\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{Z}_+^k,\ i_\ell \le d_\ell, \ell \in [k]\}$. Следуя [164], рассмотрим $\mathbf{X}_n = \{X_\mathbf{i},\ \mathbf{i} \in [\mathbf{d}]\}$. Как упоминалось ранее, форма $W_\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \in [\mathbf{d}]$, может быть произвольной. Например, $W_\mathbf{i}$ можно определить с помощью каких-либо условий на расстояния между индексами (в некоторой метрике на $\mathbb{R}^k$). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим покоординатный порядок $\le$ на $[\mathbf{d}]$ (см. аналогичный порядок в разделе 1.6).

Положим также $A_\mathbf{i} = \{X_\mathbf{i} > u_\mathbf{i}(n)\}$ для некоторой последовательности уровней $u_\mathbf{i}(n) \in \mathbb{R}$. Предположим, что множества $(A_\mathbf{i})$ и множества индексов $(W_\mathbf{i})$ удовлетворяют условиям теоремы 1.5. Тогда из нее вытекает, что

$$\left| \mathsf{P}\left(\bigcap_{\mathbf{i} \in [\mathbf{d}]} \{X_\mathbf{i} \le u_\mathbf{i}(n)\} \right) - \prod_{\mathbf{i} \in [\mathbf{d}]} \mathsf{P}\big(X_\mathbf{i} \le u_\mathbf{i}(n)\big) \right| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.9}$$

Для доказательства теоремы 1.5 нам понадобятся 2 утверждения, в которых приводятся практически симметричные нижняя и верхняя оценки вероятности $\mathsf{P}(M_n \le x)$ соответственно. Данные неравенства являются развитием известного неравенства Янсона (точнее, его расширения для произвольных событий [189]) и локальной леммы Ловаса (см. [191]). Сначала приведем верхнюю оценку.

Предложение 1.6. *Пусть $\varphi \ge 0$. Предположим, что множества $(B_i,\ i \in [d])$ и множества индексов $(W_i,\ i \in [d])$, где $W_i \subset [d] \setminus \{i\}$,*

таковы, что

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i\cap[i-1]} B_j \mid B_i\right) - \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i\cap[i-1]} B_j\right) \le \varphi \tag{1.10}$$

для всех $i \in [d]$. *Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d]} \overline{B}_i\right) \le \prod_{i\in[d]} \mathsf{P}\big(\overline{B}_i\big) + \varphi\left(1 - \prod_{i\in[d]} \mathsf{P}\big(\overline{B}_i\big)\right) + \sum_{i\in[d]} \sum_{j\in[i-1]\setminus W_i} \mathsf{P}\big(B_i\cap B_j\big) \prod_{k=i+1}^{d} \mathsf{P}\big(\overline{B}_k\big).$$

Доказательство. Доказательство будет проводить по индукции. Тогда достаточно показать, что

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d]} \overline{B}_i\right) \le (1-\mathsf{P}(B_d))\mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]} \overline{B}_i\right) + \varphi\mathsf{P}(B_d) + \sum_{j\in[d-1]\setminus W_d} \mathsf{P}\big(B_j\cap B_d\big).$$

Для всех $i \in [d]$ определим

$$U_i = \bigcap_{j\in[i-1]\cap W_i} \overline{B}_j, \quad V_i = \bigcap_{j\in[i-1]\setminus W_i} \overline{B}_j.$$

Если какое-либо из этих пересечений берется по пустому множеству, мы полагаем соответствующее множество равным Ω, единице заданной на вероятностном пространстве сигма-алгебры; в дальнейшем то же самое будем полагать во всех аналогичных случаях. Имеем,

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d]} \overline{B}_i\right) = \mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]} \overline{B}_i\right) - \mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]} \overline{B}_i \cap B_d\right),$$

где

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]} \overline{B}_i \cap B_d\right) = \mathsf{P}\left(B_d \cap U_d \cap V_d\right) = \mathsf{P}(B_d)\mathsf{P}(U_d|B_d)\mathsf{P}\big(V_d|B_d\cap U_d\big). \tag{1.11}$$

Оценим снизу вторую и третью вероятности в правой части последнего неравенства. Во-первых, из (1.13) следует, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(U_d \mid B_d) &= 1 - \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in[d-1]\cap W_d} B_j \mid B_d\right)\\ &\geq 1 - \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in[d-1]\cap W_d} B_j\right) - \varphi = \mathsf{P}(U_d) - \varphi. \qquad (1.12)\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\big(V_d|B_d\cap U_d\big) &= 1 - \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in[d-1]\setminus W_d} B_j \mid B_d\cap U_d\right)\\ &\geq 1 - \sum_{j\in[d-1]\setminus W_d} \mathsf{P}\big(B_j \mid B_d\cap U_d\big)\\ &\geq 1 - \sum_{j\in[d-1]\setminus W_d} \frac{\mathsf{P}(B_d\cap B_j)}{\mathsf{P}(B_d\cap U_d)}.\end{aligned}$$

Из (1.12) вытекает, что

$$\frac{\mathsf{P}(B_d\cap B_j)}{\mathsf{P}(B_d\cap U_d)} \leq \frac{\mathsf{P}(B_d\cap B_j)}{\mathsf{P}(B_d)(\mathsf{P}(U_d)-\varphi)}$$

для всех $j \in [d-1]$, отсюда для третьей вероятности в (1.11) окончательно получаем

$$\mathsf{P}\big(V_d|B_d\cap U_d\big) \geq 1 - \sum_{j\in[d-1]\setminus W_d} \frac{\mathsf{P}\big(B_d\cap B_j\big)}{\mathsf{P}(B_d)(\mathsf{P}(U_d)-\varphi)}.$$

Учитывая все полученные выше неравенства, имеем

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d]}\overline{B}_i\right) &\le \mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]}\overline{B}_i\right) \\
&\quad - \mathsf{P}(B_d)(\mathsf{P}(U_d)-\varphi)\left(1-\sum_{j\in[d-1]\setminus W_d}\frac{\mathsf{P}(B_d\cap B_j)}{\mathsf{P}(B_d)(\mathsf{P}(U_d)-\varphi)}\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]}\overline{B}_i\right) - \mathsf{P}(B_d)\mathsf{P}(U_d) + \varphi\mathsf{P}(B_d) + \sum_{j\in[d-1]\setminus W_d}\mathsf{P}(B_j\cap B_d) \\
&\le (1-\mathsf{P}(B_d))\mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]}\overline{B}_i\right) + \varphi\mathsf{P}(B_d) + \sum_{j\in[d-1]\setminus W_d}\mathsf{P}(B_j\cap B_d),
\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Второе неравенство является обобщением неравенства Дубицкаса [81] на случай $\varphi > 0$.

Предложение 1.7. *Пусть $\varphi \ge 0$. Предположим, что множества $(B_i,\ i\in[d])$ и множества индексов $(W_i,\ i\in[d])$, где $W_i \subset [d]\setminus\{i\}$, таковы, что*

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i\cap[i-1]}B_j\right) - \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i\cap[i-1]}B_j \mid B_i\right) \le \varphi \tag{1.13}$$

для всех $i\in[d]$. Тогда выполнено следующее неравенство

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d]}\overline{B}_i\right) &\ge \prod_{i\in[d]}\mathsf{P}\big(\overline{B}_i\big) - \varphi\left(1-\prod_{i\in[d]}\mathsf{P}\big(\overline{B}_i\big)\right) \\
&\quad - \sum_{i\in[d]}\mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in[i-1]\setminus W_i}B_j\right)\mathsf{P}(B_i)\prod_{k=i+1}^{d}\mathsf{P}\big(\overline{B}_k\big).
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Доказательство. Прежде всего оговоримся, что множества U_i и V_i имеют такой же смысл, как и в доказательстве предложения 1.6.

Итак, из условий предложения имеем

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d]}\overline{B}_i\right) &= \mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]}\overline{B}_i\right) - \mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]}\overline{B}_i \cap B_d\right)\\
&\geq \mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]}\overline{B}_i\right) - \mathsf{P}\left(U_d \cap B_d\right)\\
&= \mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]}\overline{B}_i\right) - \mathsf{P}(B_d)\mathsf{P}(U_d \mid B_d)\\
&\geq \mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]}\overline{B}_i\right) - \mathsf{P}(B_d)(\mathsf{P}(U_d)+\varphi).
\end{aligned}$$

Оценивая сверху вероятность события U_d как

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(U_d) = \mathsf{P}\big(U_d \cap V_d\big) + \mathsf{P}\big(U_d \cap \overline{V}_d\big) &\leq \mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]}\overline{B}_i\right) + \mathsf{P}\big(\overline{V}_d\big)\\
&\leq \mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]}\overline{B}_i\right) + \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in[d-1]\setminus W_i} B_j\right),
\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d]}\overline{B}_i\right) &\geq \mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]}\overline{B}_i\right) - \mathsf{P}(B_d)\left(\mathsf{P}\Big(\bigcap_{i\in[d-1]}\overline{B}_i\Big) + \mathsf{P}\Big(\bigcup_{j\in[d-1]\setminus W_i} B_j\Big) + \varphi\right)\\
&= \mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d-1]}\overline{B}_i\right)(1-\mathsf{P}(B_d)) - \left(\mathsf{P}\Big(\bigcup_{j\in[d-1]\setminus W_i} B_j\Big) + \varphi\right)\mathsf{P}(B_d).
\end{aligned}$$

Повторяя те же рассуждения $d-1$ раз, мы получаем

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in[d]}\overline{B}_i\right) \geq \prod_{i\in[d]}\mathsf{P}\big(\overline{B}_i\big) - \sum_{i\in[d]}\left(\mathsf{P}\Big(\bigcup_{j\in[i-1]\setminus W_i} B_j\Big) + \varphi\right)\mathsf{P}(B_i)\prod_{k=i+1}^{d}\mathsf{P}\big(\overline{B_k}\big).$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{i\in[d]}\mathsf{P}(B_i)\prod_{k=i+1}^{d}\mathsf{P}\big(\overline{B}_k\big) = \sum_{i\in[d]}\left(\prod_{k=i+1}^{d}\mathsf{P}\big(\overline{B}_k\big) - \prod_{k=i}^{d}\mathsf{P}\big(\overline{B}_k\big)\right) = 1 - \prod_{k\in[d]}\mathsf{P}\big(\overline{B}_k\big),$$

что и требовалось. □

Как легко видеть, теорема 1.5 элементарно следует из предложений 1.6 и 1.7. Действительно, в предложениях достаточно просто положить $B_i = \{X_{i,n} > x\}$, чтобы получить верхнюю и нижнюю оценки в теореме.

1.3 Приложение теоремы 1.5 к гауссовским системам

В этом разделе мы полагаем, что $\mathbf{X}_n$ – это гауссовский вектор для всех $n \in \mathbb{N}$. Цель текущего раздела – установить условия, при которых гауссовская система $(\mathbf{X}_n)$ удовлетворяет предположениям теоремы 1.5.

В разделе 1.1 уже были упомянуты результаты Бермана [54] и Миттала и Илвисакера [156] об асимптотике распределения максимума гауссовской стационарной последовательности. Хюслер [119] нашел условия, при которых соотношение (1.2) будет выполнено для нестационарной гауссовской последовательности (X_n). Одно из условий, наложенных Хюслером, – это модификация условия Бермана

$$\sup_{|i-j|>n} \rho(i,j) \ln n \to 0, \ n \to \infty,$$

где $\rho(i,j)$ – это корреляционная функция последовательности (X_n). Условия выполнения соотношения (1.9) для нестационарных гауссовских случайных полей на $\mathbb{Z}_+^2$ с нулевым средним и единичной дисперсией были исследованы в работах [64] и [163]. В [123] свойство (1.9) было доказано для стационарного гауссовского поля на $\mathbb{Z}^k$ при наложении многомерного аналога первоначального условия Бермана (1.6). Интересно, что нарушение (1.6) хотя бы по одному направлению в $\mathbb{Z}^k$ для стационарного гауссовского случайного поля влечет за собой нарушение (1.9), см. [124] и раздел 1.6 этой диссертации.

Перейдем к формулировке основного результата данного раздела. Предположим, что $\prod_{i=1}^d \mathsf{P}(X_i \le a_n + b_n x) \to F(x) > 0$ для некоторых нормировочных последовательностей (a_n) и (b_n). Для всех $n \in \mathbb{N}$ и

$i, j \in [d(n)]$ положим $r_{ij} = r_{ij}(n) = \frac{\operatorname{cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\operatorname{Var} X_i \operatorname{Var} X_j}}$. Обозначим также $u_i = u_i(n) = \frac{a_n + b_n x - \mathsf{E} X_i}{\sqrt{\operatorname{Var} X_i}}$ и $u_{\min} = u_{\min}(n) = \min_{i \in [d]} u_i$.

Теорема 1.8. *Пусть для каждого $i \in [d]$ существует множество индексов W_i такое, что гауссовская система $(\mathbf{X}_n)$ удовлетворяет следующим условиям:*

(G1) $u_{\min} > 1 + \varepsilon$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$ *и всех* $n \in \mathbb{N}$;

(G2) $\max_{i \in [d]} \max_{j \in W_i} |r_{ij}| \ln d \to 0$;

(G3) $\sum_{i \in [d]} \sum_{j \in [i-1] \setminus W_i} \exp\Big(- \frac{u_i^2 + u_j^2}{2(1 + |r_{ij}|)} \Big) \to 0$;

(G4) для некоторого $\rho \in (0, 1)$ *выполнено* $\max_{i \neq j} |r_{ij}| \leq \rho$.

Тогда $\mathsf{P}(M_n \leq a_n + b_n x) \to F(x)$ *при* $n \to \infty$.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1.8, сравним условия (G1)–(G4) с условиями уже упомянутого результата из работы Хюслера [119]. В отличие от Хюслера, мы не предполагаем, что $u_{\min} := \min_i u_i$ стремится к правой граничной точке предельной функции распределения F (которая равна бесконечности для распределения Гумбеля), но налагаем более слабое условие (G1). Далее, (G2) – условие типа Бермана, аналог которого также использован Хюслером. Легко видеть, что условие (G3) следует из более удобного предположения

$$\exp\Big(- \frac{u_{\min}^2}{1 + \rho} \Big) \sum_{i \in [d]} |[i-1] \setminus W_i| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Это условие (совмещенное с (G2)) является более гибким, чем условия, налагаемые в литературе на гауссовские последовательности и поля. Множества индексов $\{W_i\}$ не обязаны быть интервалами в одномерном случае, в отличие от работ [54], [119], и не обязаны быть параллелепипедами или шарами, в отличие от выбора соответствующих множеств в [163] и [123] соответственно. Более того, форма множества $|W_i|$ может сильно меняться приизменении i. Наконец, условие (G4) также было использовано Хюслером.

Доказательство теоремы 1.8. Положим $\tilde{X}_i = \frac{X_i - \mathsf{E}X_i}{\sqrt{\mathrm{Var}X_i}}$ и проверим, что условия теоремы 1.5 (а точнее, стремление к 0 величин γ, Δ и Δ') выполнены для событий $A_i = \{\tilde{X}_i > u_i\}$, $i \in [d]$. Это немедленно даст нам утверждение теоремы 1.8.

Прежде всего, напомним хорошо известное соотношение, верное для стандартной нормальной случайной величины η (см. к примеру [28, предложение 2.4.1]),

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-x^2/2}(1-x^{-2}) \le \mathsf{P}(\eta > x) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-x^2/2}, \quad x > 0. \tag{1.15}$$

Здесь и далее C обозначает любую положительную константу, чье значение нам не важно. Используя верхнюю оценку из (1.15), мы находим, что

$$\mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(A_j) \le C\frac{1}{u_i u_j}\exp\left(-\frac{u_i^2+u_j^2}{2}\right) \le C\exp\left(-\frac{u_i^2+u_j^2}{2(1+|r_{ij}|)}\right). \tag{1.16}$$

Следовательно, условие (G3) гарантирует выполнение условия $\Delta \to 0$ при $n \to \infty$.

Далее, для суммы из выражения для величины Δ' имеем

$$\sum_{i\in[d]}\sum_{j\in[i-1]\setminus W_i}\mathsf{P}\big(A_i \cap A_j\big) \le \sum_{i\in[d]}\sum_{j\in[i-1]\setminus W_i}\Big(\mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(A_j) + d(i,j)\Big),$$

где

$$d(i,j) = \Big|\mathsf{P}\big(\tilde{X}_j \le u_j, \tilde{X}_i \le u_i\big) - \mathsf{P}\big(\tilde{X}_j \le u_j\big)\mathsf{P}\big(\tilde{X}_i \le u_i\big)\Big|.$$

Чтобы получить последнее соотношение, мы использовали следующий простой факт $|\mathsf{P}(A\cap B) - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)| = |\mathsf{P}\big(\overline{A}\cap\overline{B}\big) - \mathsf{P}\big(\overline{A}\big)\mathsf{P}\big(\overline{B}\big)|$. Прямое применение знаменитого неравенства Бермана (см. теорему 4.2.1 [137]) дает

$$d(i,j) \le C\frac{|r_{ij}|}{1-r_{ij}^2}\exp\left(-\frac{u_i^2+u_j^2}{2(1+|r_{ij}|)}\right). \tag{1.17}$$

Тем самым, мы легко получаем из (G4), (1.16) и (1.17), что

$$\sum_{i\in[d]}\sum_{j\in[i-1]\setminus W_i}\Big(\mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(A_j)+d(i,j)\Big)\ \le\ C\sum_{i\in[d]}\sum_{j\in[i-1]\setminus W_i}\exp\left(-\frac{u_i^2+u_j^2}{2(1+|r_{ij}|)}\right),$$

где правая часть стремится к 0 по условию (G3). Тем самым, мы установили, что $\Delta'\to 0$ при $n\to\infty$, и нам осталось лишь показать стремление к 0 величины γ.

Еще раз используя равенство $|\mathsf{P}(A\cap B)-\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)|=|\mathsf{P}\big(\overline{A}\cap\overline{B}\big)-\mathsf{P}\big(\overline{A}\big)\mathsf{P}\big(\overline{B}\big)|$, имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathsf{P}(A_i)}\Big|\mathsf{P}\big(\cup_{j\in W_i}A_j\cap A_i\big)-\mathsf{P}\big(\cup_{j\in W_i}A_j\big)\mathsf{P}(A_i)\Big|\\ =\ &\frac{1}{\mathsf{P}(A_i)}\Big|\mathsf{P}\big(\cap_{j\in W_i}\overline{A_j}\cap\overline{A_i}\big)-\mathsf{P}\big(\cap_{j\in W_i}\overline{A_j}\big)\mathsf{P}\big(\overline{A_i}\big)\Big|\end{aligned}$$

Еще одно применение неравенства Бермана дает нам

$$\Big|\mathsf{P}\big(\cap_{j\in W_i}\overline{A_j}\cap\overline{A_i}\big)-\mathsf{P}\big(\cap_{j\in W_i}\overline{A_j}\big)\mathsf{P}\big(\overline{A_i}\big)\Big|\le C\sum_{j\in W_i}\frac{|r_{ij}|}{1-r_{ij}^2}\exp\left(-\frac{u_i^2+u_j^2}{2(1+|r_{ij}|)}\right).$$

Отсюда, из (G1), (G2), (G4) и (1.15) мы получаем

$$\begin{aligned}&\Big|\mathsf{P}\big(\cup_{j\in W_i}A_j\mid A_i\big)-\mathsf{P}\big(\cup_{j\in W_i}A_j\big)\Big|\\ &\le C\frac{u_i^3}{u_i^2-1}e^{u_i^2/2}\sum_{j\in W_i}\frac{|r_{ij}|}{1-r_{ij}^2}\exp\left(-\frac{u_i^2+u_j^2}{2(1+|r_{ij}|)}\right)\\ &\le Cu_ie^{u_i^2/2}\sum_{j\in W_i}|r_{ij}|\exp\left(-(1-|r_{ij}|)\frac{u_i^2+u_j^2}{2}\right).\\ &=Cu_i\sum_{j\in W_i}|r_{ij}|\exp\left(-\frac{u_j^2}{2}+|r_{ij}|\frac{u_i^2+u_j^2}{2}\right).\end{aligned}\tag{1.18}$$

Предположим, что $u_i/\sqrt{\ln d}>2\sqrt{2}+\delta$ для некоторого $\delta>0$, тогда $\exp(-u_i^2/4)=o(n^{-2})$. Следовательно,

$$\sum_{i\in[d]}\sum_{j\in[i-1]}\exp\Big(-\frac{u_i^2+u_j^2}{2(1+|r_{ij}|)}\Big)\le\sum_{i\in[d]}\sum_{j\in[i-1]}\exp\Big(-\frac{u_i^2}{4}\Big)\to 0.$$

В этом случае мы можем положить $W_i = \varnothing$ и тогда условие $\gamma \to 0$ при $n \to \infty$ немедленно следует из (1.18).

Наконец, пусть $u_i/\sqrt{\ln d} \le 2\sqrt{2} + o(1)$. Если для $j \in W_i$ выполнено $u_j/\sqrt{\ln d} \ge \frac{3(1+4\rho)}{1-\rho}$, то

$$\exp\left(-\frac{u_j^2}{2} + |r_{ij}|\frac{u_i^2+u_j^2}{2}\right) = o\left(\frac{1}{d\ln d}\right).$$

Поэтому мы можем предположить, что

$$\max_{j\in W_i} u_j \le \frac{3(1+4\rho)}{1-\rho}\sqrt{\ln d}. \tag{1.19}$$

Отсюда, по (G2),

$$|r_{ij}|\frac{u_i^2+u_j^2}{2} = o(1)$$

равномерно по $i \in [d]$, $j \in W_i$. Используя последнее соотношение, (G2), (1.15) и (1.19), мы получаем для правой части (1.18)

$$\begin{aligned}\sum_{j\in W_i} u_i|r_{ij}|\exp\Big(-\frac{u_j^2}{2} + |r_{ij}|\frac{u_i^2+u_j^2}{2}\Big) &= \sum_{j\in W_i} u_i|r_{ij}|\exp\Big(-\frac{u_j^2}{2} + o(1)\Big)\\ &\le C\sum_{j\in W_i} u_iu_j|r_{ij}|\mathsf{P}(A_j)\\ &\le C\max_{j\in W_i}|r_{ij}|\ln d\sum_{j\in W_i}\mathsf{P}(A_j) \to 0,\end{aligned}$$

где последнее стремление верно, поскольку

$$\sum_{j\in[d]}\mathsf{P}(A_j) \le -\sum_{j\in[d]}\ln(1-\mathsf{P}(A_j)) \to -\ln F(x) < \infty.$$

Доказательство завершено. □

Заметим, что из теоремы 1.8 вытекают результаты работ [54], [123] и [163], упомянутые ранее в разделе 1.1 и этом разделе. Действительно, условие типа Бермана (G2) более общее, чем соответствующие условия в этих работах. Условие (G4) выполнено для стационарных последовательностей в [54], стационарных полей [123] и предполагается в

[163]. Наконец, специальный выбор множеств индексов ($[d]\backslash W_i$) (все они должны иметь одинаковую форму и размер) с применением условия типа Бермана гарантирует выполнение (G3). Также может быть показано, что результат теоремы 4.1 [119] следует из теоремы 1.8, если $u_{\min} = \Omega(\sqrt{\ln d})$, где $f(n) = \Omega(g(n))$ означает, что $g(n) = O(f(n))$.

1.4 Приложение теоремы 1.5 к случайным графам

Напомним, что случайный граф (Эрдеша-Реньи) $\mathcal{G}_{n,p}$ – это граф на множестве вершин $[n] = \{1, \dots, n\}$, где каждое ребро проводится с вероятностью p независимо от остальных ребер. В работе [59] Боллобаш установил, что для $p = \mathrm{const}$ максимальная степень D случайного графа $\mathcal{G}_{n,p}$ после определенной нормировки сходится по распределению к случайной величине, имеющей стандартное распределение Гумбеля. Более точно, если положить для $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$a_n = pn + \sqrt{2p(1-p)n \ln n}\left(1 - \frac{\ln \ln n}{4 \ln n} - \frac{\ln(2\sqrt{\pi})}{2 \ln n}\right),$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{p(1-p)n}{2 \ln n}},$$

то

$$\mathsf{P}\left(\frac{\mathsf{D} - a_n}{\sigma_n} \leq x\right) \to \exp\big(-e^{-x}\big), \quad n \to \infty.$$

Этот же результат будет выполнен для p таких, что $p(1-p) \gg \frac{\ln n}{n}$, см. [9]. Этот результат типа Фишера-Типпета-Гнеденко не удивителен, потому что зависимость степеней двух вершин в случайном графе "сосредоточена" только в ребре, соединяющем эти две вершины. Это наблюдение свидетельствует о возможной связи между задачами такого рода и теоремой 1.5, и далее в этом разделе мы покажем, что это действительно так.

Заметим, что степени (ξ_i) вершин случайного графа $\mathcal{G}_{n,p}$ имеют биномиальное распределение с параметрами $n-1$ и p. Для независимых биномиальных случайных величин распределение максимума было изучено Митовым и Надарая [157]. А именно, ими было доказано,

что если случайные величины $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ независимы и биномиально распределены с параметрами $N(n) = \omega([\ln n]^3)$ и $p = \text{const}$ (здесь $f(n) = \omega(g(n))$ означает, что $g(n) = o(f(n))$), то их максимум D_n подчиняется следующему предельному закону: для всех $y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(D_n \le pN + \sqrt{2p(1-p)N\ln n}\left[1 - \frac{\ln\ln n}{4\ln n} - \frac{\ln(2\sqrt{\pi})}{2\ln n} + \frac{y}{2\ln n}\right]\right) \to e^{-e^{-y}}. \tag{1.20}$$

при $n \to \infty$. Заметим, что при $N = n - 1$ приведенные здесь нормировочные последовательности (a_n) и (σ_n) совпадают с соответствующими нормировочными последовательностями в результате Боллобаша (простая подстановка дает несколько другой вид последовательностей, но сходимость сохранится и для "оригинальных" последовательностей из случая независимых величин).

Перейдем к формулировке основного результата данного раздела. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $\Delta_{k,n}$ – максимальное количество общих соседей k вершин в $\mathcal{G}_{n,p}$ (как мы заметили выше, случай $k = 1$ уже изучен Боллобашем, так как $\Delta_{1,n} = \Delta_n$). Оказывается, что при $k \ge 2$ метод моментов, использованный Боллобашем, не работает, так как дисперсия вспомогательной случайной величины стремится к бесконечности уже при $k = 2$ и $p > 1/2$.

Введем исследуемые объекты более формально. Пусть $v_1, \ldots, v_k \in \{1, \ldots, n\} =: [n]$ — различные вершины $\mathcal{G}_{n,p}$, а $N_n(v_1, \ldots, v_k)$ — множество их общих соседей. Тогда обозначим $\Delta_{k,n} = \max_{v_1,\ldots,v_k\in[n]} N_n(v_1, \ldots, v_k)$, где максимум берется по всем наборам $(v_1, \ldots, v_k)$ несовпадающих вершин случайного графа.

Теорема 1.9. *Пусть $y \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что $p = p(n) \in (0, 1)$ такое, что выполнено*

$$p^k \gg \frac{\ln^3 n}{n}, \quad 1 - p \gg \sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}. \tag{1.21}$$

Положим

$$a_{k,n} = np^k + \sqrt{2kp^k(1-p^k)n\ln n}\left(1 - \frac{\ln[k!]}{2k\ln n} - \frac{\ln[4\pi k\ln n]}{4k\ln n}\right),$$

$$\sigma_{k,n} = \sqrt{\frac{p^k(1-p^k)n}{2k\ln n}}.$$

Тогда

$$\mathsf{P}\left(\frac{\Delta_{k,n} - a_{k,n}}{\sigma_{k,n}} \le y\right) \to e^{-e^{-y}} \quad \textit{при } n \to \infty.$$

Для доказательства этого результата нам потребуется следующая техническая лемма. Она показывает, что условие стремления величины Δ к 0 выполнено в случае, если для всех $i \in [d]$ и $j \in W_i$ случайная величина X_j может быть аппроксимирована случайной величиной $X_j^{(i)}$, которая не зависит от X_i.

Лемма 1.10. *Пусть* $(\mathbf{X}_n) = \big((X_1, \dots, X_d),\ d = d(n) \in \mathbb{N}\big)$ *– последовательность случайных векторов. Пусть* $F(x)$ *– непрерывная функция распределения. Предположим, что существуют такие последовательности числовые* (a_n) *and* (b_n) *такие, что*

(i) для всех $x \in \mathbb{R}$ *выполнено* $\prod_{i=1}^d \mathsf{P}\big(X_i \le a_n + b_n x\big) \to F(x)$.

Пусть $x \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию* $0 < F(x) < 1$. *Предположим, что множества индексов* $(W_i,\ i \in [d])$, *где* $W_i \subseteq [d] \setminus \{i\}$ *и случайные величины* $\big(X_j^{(i)}\big)$ *таковы, что для всех* $j \in W_i$ *выполнено*

(ii) $X_j^{(i)}$ *и* X_i *независимы, и при этом для любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\Big(\max_{j\in W_i}\Big|X_j - X_j^{(i)}\Big| > \varepsilon b_n\Big) = o(1)\mathsf{P}(X_i > a_n + b_n x) \tag{1.22}$$

равномерно по $i \in [d]$.

Тогда условие стремления γ *к 0 в теореме 1.5 выполнено для событий* $A_i := \{X_i > a_n + b_n x\}$ *и множеств* W_i, *где* $i \in [d]$.

Доказательство. Мы можем предположить, что $\mathsf{P}(A_i) \in (0,1)$ для каждого $i \in [d]$, поскольку иначе множество A_i не будет влиять на величину γ. Для $i \in [d]$ и $j \in W_i$ рассмотрим события A_j^ε и U_{ji}^ε, определенные следующим образом

$$A_j^\varepsilon := \{X_j > a_n + b_n(x+2\varepsilon)\}, \qquad U_{ji}^\varepsilon := \{X_j^{(i)} > a_n + b_n(x+\varepsilon)\}.$$

Тогда из (1.22) мы получаем, что равномерно по $i \in [d]$

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} \left(U_{ji}^\varepsilon \setminus A_j\right)\right) = o(1)\mathsf{P}(A_i), \quad \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} \left(A_j^\varepsilon \setminus U_{ji}^\varepsilon\right)\right) = o(1)\mathsf{P}(A_i).$$

События U_{ji}^ε и A_i независимы для всех $i \in [d]$ и $j \in W_i$, так как $X_j^{(i)}$ и X_i независимы. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} A_j \mid A_i\right) &\geq \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} U_{ji}^\varepsilon \mid A_i\right) - o(1) \\ &= \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} U_{ji}^\varepsilon\right) - o(1) \geq \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} A_j^\varepsilon\right) - o(1).\end{aligned}$$

С помощью оценки вероятности объединения событий суммой вероятностей этих событий имеем

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} A_j\right) - \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} A_j \mid A_i\right) \leq \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} A_j\right) - \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} A_j^\varepsilon\right) + o(1) \\ &\leq \sum_{j\in W_i} \mathsf{P}\left(A_j \setminus \bigcup_{s\in W_i} A_s^\varepsilon\right) + o(1) \leq \sum_{j\in W_i} \mathsf{P}(A_j \setminus A_j^\varepsilon) + o(1).\end{aligned}$$

Используя неравенство $\sum_{i\in[d]} t_i \leq -1 + \prod_{i\in[d]}(1+t_i)$, где $t_i := \frac{\mathsf{P}(A_i)-\mathsf{P}(A_i^\varepsilon)}{1-\mathsf{P}(A_i)} \geq 0$, и напоминая, что $F(x) > 0$, находим

$$\sum_{i\in[d]} \mathsf{P}(A_i \setminus A_i^\varepsilon) \leq \sum_{i\in[d]} \frac{\mathsf{P}(A_i) - \mathsf{P}(A_i^\varepsilon)}{1-\mathsf{P}(A_i)} \leq -1 + \prod_{i\in[d]} \frac{1-\mathsf{P}(A_i^\varepsilon)}{1-\mathsf{P}(A_i)} \to 1 - \frac{F(x+2\varepsilon)}{F(x)}.$$

Напоминая, что F непрерывна x и что предыдущее соотношение верно для всех $\varepsilon > 0$, мы заключаем, что

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} A_j\right) - \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} A_j \mid A_i\right) \le o(1).$$

Нижняя оценка

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} A_j\right) - \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} A_j \mid A_i\right) \ge o(1)$$

получается аналогично при использовании событий $A_j^{-\varepsilon} = \{X_j > a_n + b_n(x - 2\varepsilon)\}$, $U_{ji}^{-\varepsilon} = \{X_j^{(i)} > a_n + b_n(x - \varepsilon)\}$ и соотношений

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} \left(A_j \setminus U_{ji}^{-\varepsilon}\right)\right) = o(1)\mathsf{P}(A_i) \quad \text{и} \quad \mathsf{P}\left(\bigcup_{j\in W_i} \left(U_{ji}^{-\varepsilon} \setminus A_j^{-\varepsilon}\right)\right) = o(1)\mathsf{P}(A_i),$$

которые выполнены равномерно по $i \in [d]$. Это наблюдение завершает доказательство леммы 1.10. □

Доказательство теоремы 1.9. Покажем, что результат теоремы есть более или менее прямое следствие теоремы 1.5. Прежде всего, из доказательства теоремы 1.5 следует, что если $\prod_{i\in[d]} \mathsf{P}\left(X_i \le x\right) \to F(x)$ и $0 < F(x) < 1$, то условие стремления величины Δ к 0 может быть заменено условием

$$\mathsf{P}\big(\max_{i\in[d]} X_i \le x\big) \ge F(x) - o(1). \tag{1.23}$$

Действительно, условие (1.23) – это нижняя оценка для вероятности $\mathsf{P}\big(\max_{i\in[d]} X_i \le x\big)$ в теореме 1.5; чтобы доказать верхнюю оценку в виде

$$\mathsf{P}\big(\max_{i\in[d]} X_i \le x\big) \le F(x) + o(1),$$

достаточно потребовать лишь стремление к нулю величин γ и Δ'.

Для любого набора вершин $(v_1,\dots,v_k)\in\binom{[n]}{k}$ величина $N(v_1,\dots,v_k)$ распределена по закону $\mathrm{Bin}\left(n-k,p^k\right)$. Тогда из (1.20) и FKG-неравенства ([42], глава 6, предложение 6.3.1), также известного как лемма Харриса [111] и лемма Клейтмана [132], следует условие (1.23) для нашего случая:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\Delta_{k,n}\le a_{k,n}+\sigma_{k,n}y\right) &= \mathsf{P}\left(\max_{(v_1,\dots,v_k)\in\binom{[n]}{k}} N(v_1,\dots,v_k)\le a_{k,n}+\sigma_{k,n}y\right)\\ &\ge \prod_{(v_1,\dots,v_k)\in\binom{[n]}{k}} \mathsf{P}\left(N(v_1,\dots,v_k)\le a_{k,n}+\sigma_{k,n}y\right)\\ &\to e^{-e^{-y}}\end{aligned}$$

при $n\to\infty$.

Для $\mathbf{v}=(v_1,\dots,v_k)\in\binom{[n]}{k}$ положим $W_{\mathbf{v}}=\binom{[n]\setminus\mathbf{v}}{k}$. Проверим теперь условие стремления величины γ к 0. Обозначим через $H_{\mathbf{v}}$ множество ребер $\mathcal{G}_{n,p}$, не содержащих вершин из вектора $\mathbf{v}$. Для любого $\mathbf{w}\in W_{\mathbf{v}}$ определим $X_{\mathbf{w},\mathbf{v}}$ как число вершин среди $\mathbf{v}$, являющихся общими соседями вектора вершин $\mathbf{w}$. Поскольку $X_{\mathbf{w},\mathbf{v}}$ не зависит от $H_{\mathbf{v}}$, мы получаем $N(\mathbf{w})-\mathsf{E}\big(N(\mathbf{w})\mid H_{\mathbf{v}}\big)=X_{\mathbf{w},\mathbf{v}}-\mathsf{E}X_{\mathbf{w},\mathbf{v}}$.

Положим $\tilde N(\mathbf{v})=\frac{N(\mathbf{v})-a_{k,n}}{\sigma_{k,n}}$, $\tilde X_{\mathbf{w}}^{(\mathbf{v})}=\mathsf{E}\big(\tilde N_{\mathbf{w}}\mid H_{\mathbf{v}}\big)$. Так как $X_{\mathbf{w},\mathbf{v}}\sim\mathrm{Bin}\left(k,p^k\right)$, мы получаем по (1.21) и неравенству Чернова (см., например, [125, Теорема 2.1]), что для произвольного $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big(\left|\tilde N(\mathbf{w})-\tilde X_{\mathbf{w}}^{(\mathbf{v})}\right|>\varepsilon\Big)&=\mathsf{P}\Big(\left|X_{\mathbf{w},\mathbf{v}}-kp^k\right|>\varepsilon\sigma_{k,n}\Big)\\ \le 2\exp\left[-\frac{(\varepsilon\sigma_{k,n})^2}{2(kp^k+\varepsilon\sigma_{k,n}/3)}\right]&=\exp\left[-\frac{3\varepsilon\sigma_{k,n}}{2}(1+o(1))\right]\\ \le\exp\left[-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{np^k(1-p)}{2k\ln n}}(1+o(1))\right]&=o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Поскольку $\mathsf{P}\big(\tilde N(\mathbf{v})>x\big)=\frac{1}{n}e^{-x}(1+o(1))$, то для произвольного $\mathbf{w}_0\in W_{\mathbf{v}}$ выполнено

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\max_{\mathbf{w}\in W_{\mathbf{v}}}\left|\tilde N(\mathbf{w})-\tilde X_{\mathbf{w}}^{(\mathbf{v})}\right|>\varepsilon\right) &\le n\mathsf{P}\left(\left|\tilde N(\mathbf{w}_0)-\tilde X_{\mathbf{w}_0}^{(\mathbf{v})}\right|>\varepsilon\right)\\ &= o(1)\mathsf{P}\big(\tilde N(\mathbf{v})>x\big).\end{aligned}$$

Тем самым, из леммы 1.10 вытекает стремление величины γ к 0. Тем самым, осталось лишь проверить условие стремления величины Δ' к 0. Прежде всего, заметим, что условие стремления к 0 величины Δ' можно заменить на следующее условие:

(A) существует событие $E = E(x,n)$ такое, что $\mathsf{P}(E) = 1 - o(1)$,

$$\sum_{i\in[d]}\sum_{j\in[i-1]\setminus W_i} \mathsf{P}\big(A_i \cap A_j \cap E\big) = o(1),$$

и $\mathsf{P}(A_i \cap E) = (1-o(1))\mathsf{P}(A_i)$ равномерно по $i \in [d]$.

Действительно, легко видеть, что в доказательстве теоремы 1.5 можно заменить события $(A_i,\ i \in [d])$ на $(B_i,\ i \in [d])$, где $B_i = A_i \cap E$. Определим

$$E = \bigcap_{\ell=1}^{k-1}\bigcap_{\mathbf{v}\in\binom{[n]}{\ell}} \left\{N(\mathbf{v}) \le np^\ell + \sqrt{2\ell np^\ell(1-p^\ell)\ln n}\right\}$$

и покажем, что

(A1) $\mathsf{P}(E) = 1 - o(1)$,

(A2) для всех $x \in \mathbb{R}$, $\mathsf{P}\big(\{\tilde N(\mathbf{v}) > x\} \cap E\big) = (1-o(1))\mathsf{P}\big(\tilde N(\mathbf{v}) > x\big)$ равномерно по $\mathbf{v} \in \binom{[n]}{k}$,

(A3) $\sum_{\mathbf{v}\in\binom{[n]}{k}}\sum_{\mathbf{w}\in\binom{[n]\setminus\mathbf{v}}{k}} \mathsf{P}\big(\{\tilde N(\mathbf{v}) > x\} \cap \{\tilde N(\mathbf{w}) > x\} \cap E\big) = o(1)$,

то есть выполнение условия (A) для множества событий $\big(\{\tilde N(\mathbf{v}) > x\},\ \mathbf{v} \in \binom{[n]}{k}\big)$. Проверка этих условий завершит доказательство теоремы 1.9.

Проверим сначала условие (A1). В условиях теоремы имеем

$$\mathsf{P}\left(\xi_{n,p^\ell} > np^\ell + \sqrt{2\ell n\ln np^\ell(1-p^\ell)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\ell\pi\ln n}} n^{-\ell}(1+o(1)) \quad (1.24)$$

для $\ell \in [k-1]$, где случайная величина ξ_{n,p^ℓ} распределена биномиально с параметрами (n,p^ℓ), пишем $\xi_{n,p^\ell} \sim Bin(n,p^\ell)$. Поскольку для всех $\mathbf{v} \in$

$\binom{[n]}{\ell}$ выполнено $N(\mathbf{v}) \sim Bin(n, p^\ell)$, то с учетом (1.24) получаем

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\big(\overline{E}\big) &\le \sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{\mathbf{v}\in\binom{[n]}{\ell}} \mathsf{P}\left(N(\mathbf{v}) > np^\ell + \sqrt{2\ell np^\ell(1-p^\ell)\ln n}\right) \\ &\le \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{n^\ell}{\ell!} \frac{1}{2\sqrt{\ell\pi \ln n}} n^{-\ell}(1+o(1)) = o(1),\end{aligned}$$

что и дает (A1). Обозначим

$$\Gamma_\ell = np^\ell + \sqrt{2\ell np^\ell(1-p^\ell)\ln n}$$

и $b = \sigma_{k,n}x + a_{k,n}$. Для проверки условия (A2) рассмотрим вероятность

$$\mathsf{P}\big(\tilde{N}(\mathbf{v}) > x, N(\mathbf{w}) > \Gamma_\ell\big)$$

для $\mathbf{w} \in \binom{[\mathbf{v}]}{\ell}$ и найдем ее асимптотику. Имеем,

$$\mathsf{P}\big(\tilde{N}(\mathbf{v}) > x, N(\mathbf{w}) > \Gamma_\ell\big) \le \sum_{i>\Gamma_\ell} \mathsf{P}(\xi_{n,p^\ell} = i)\mathsf{P}(\xi_{i,p^{k-\ell}} > b - (k-\ell))$$

$$\le \sum_{\Gamma_\ell < i \le np^\ell + \sqrt{2kn\ln np^\ell(1-p^\ell)}} \mathsf{P}(\xi_{n,p^\ell} = i)\mathsf{P}(\xi_{i,p^{k-\ell}} > b - (k-\ell))$$

$$+\mathsf{P}\left(\xi_{n,p^\ell} > np^\ell + \sqrt{2kn\ln np^\ell(1-p^\ell)}\right).$$

Из локальной предельной теоремы Муавра и интегральной предельной теоремы Муавра-Лапласа имеем

$$\mathsf{P}(\xi_{n,p^\ell} = i) = \frac{\exp\left[-\frac{(np^\ell - i)^2}{2np^\ell(1-p^\ell)}\right]}{\sqrt{2\pi np^\ell(1-p^\ell)}}(1+o(1)) \tag{1.25}$$

равномерно по $i \in \left(\Gamma_\ell, np^\ell + \sqrt{2kn\ln np^\ell(1-p^\ell)}\right]$ и

$$\mathsf{P}\left(\xi_{n,p^\ell} > np^\ell + \sqrt{2kn\ln np^\ell(1-p^\ell)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi\ln n}} n^{-k}(1+o(1)). \tag{1.26}$$

Нам осталось оценить вероятность $\mathsf{P}(\xi_{i,p^{k-\ell}} > b-(k-\ell))$ для $i \in \left(\Gamma_\ell, np^\ell + \sqrt{2kn\ln np^\ell(1-p^\ell)}\right]$. Имеем,

$$\mathsf{P}(\xi_{i,p^{k-\ell}} > b-(k-\ell)) = \frac{\sqrt{ip^{k-\ell}(1-p^{k-\ell})}}{\sqrt{2\pi}(b-ip^{k-\ell})}\exp\left(-\frac{(b-ip^{k-\ell})^2}{2ip^{k-\ell}(1-p^{k-\ell})}\right)(1+o(1)) \tag{1.27}$$

$$\leq \frac{\sqrt{1-p^{k-\ell}}}{2\sqrt{\pi k\ln n}\left(\sqrt{1-p^k}-\sqrt{p^{k-\ell}-p^k}\right)}\exp\left(-\frac{(b-ip^{k-\ell})^2}{2ip^{k-\ell}(1-p^{k-\ell})}\right)(1+o(1)).$$

Используя предыдущие оценки, получаем

$$\mathsf{P}(N(\mathbf{v}) > b,\, N(\mathbf{w}) > \Gamma_\ell) \leq$$

$$\left(\frac{\sqrt{1-p^{k-\ell}}/\sqrt{2knp^\ell(1-p^\ell)\ln n}}{2\pi\left(\sqrt{1-p^k}-\sqrt{p^{k-\ell}-p^k}\right)}\sum e^{-f(i)} + \frac{1}{2\sqrt{k\pi\ln n}}n^{-k}\right)(1+o(1)), \tag{1.28}$$

где сумма в последнем выражении берется по $i \in \left(\Gamma_\ell, np^\ell + \sqrt{2kn\ln np^\ell(1-p^\ell)}\right]$ и

$$f(i) = \frac{\left(np^\ell - i\right)^2}{2np^\ell\left(1-p^\ell\right)} + \frac{\left(ip^{k-\ell}-b\right)^2}{2ip^{k-\ell}\left(1-p^{k-\ell}\right)}.$$

Найдем асимптотику величины $f(i)$. Пусть $i > \Gamma_\ell$. Обозначим $i = np^\ell + z\sqrt{np^\ell(1-p^\ell)\ln n}$. Из определения Γ_ℓ следует, что $z > \sqrt{2\ell}$. Тогда

$$f(i) = \frac{z^2(1-p^k) - 2\sqrt{2k}z\sqrt{(p^{k-\ell}-p^k)(1-p^k)} + 2k(1-p^k)}{2(1-p^{k-\ell})}\ln n$$

$$+ \frac{z\sqrt{(p^{k-l}-p^k)(1-p^k)} - \sqrt{2k}(1-p^k)}{2\sqrt{2k}(1-p^{k-l})}\ln\ln n(1+o(1)), \tag{1.29}$$

Функция от z в числителе первого члена правой части (1.29) достигает своего минимума в точке $\sqrt{\frac{2k(p^{k-\ell}-p^k)}{1-p^k}} < \sqrt{2\ell}$. Действительно, последнее неравенство верно, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\ell(1-p^k) - k(p^{k-\ell}-p^k)\right] = k(\ell-k)p^{k-\ell-1}(1-p^\ell) < 0$$

для $p \in (0,1)$, и $\ell(1-p^k) - k(p^{k-\ell} - p^k)\big|_{p=1} = 0$.

Поэтому, после подстановки в числитель первого члена правой части (1.29) его минимального значения, мы получаем, что $f(i) > k\ln n + \omega\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)$ для $1-p \gg \sqrt{\frac{\ln\ln n}{\ln n}}$, поскольку коэффициент при втором слагаемом (который стоит перед $\ln\ln n$) ограничен. Отсюда,

$$\sum_{i \in \left(\Gamma_\ell, np^\ell + \sqrt{2kn\ln np^\ell(1-p^\ell)}\right]} e^{-f(i)} = o\Big(\sqrt{2kn\ln np^\ell(1-p^\ell)}n^{-k}\Big). \tag{1.30}$$

Тем самым, из (1.28) мы получаем, что

$$\mathsf{P}(N(\mathbf{v}) > b,\, N(\mathbf{w}) > \Gamma_\ell) = o(n^{-k}). \tag{1.31}$$

Возвратимся к проверке условия (A2). Для этого покажем, что для всех $x \in \mathbb{R}$ $\mathsf{P}\big(\{\tilde{N}(\mathbf{v}) > x\} \cap \overline{E}\big) = o(n^{-k})$ равномерно по $\mathbf{v} \in \binom{[n]}{k}$. Этого будет достаточно для проверки условия (A2), поскольку

$$\binom{n}{k}\mathsf{P}\big(\tilde{N}(\mathbf{v}) > x\big) \to e^{-x}, \quad n \to \infty \tag{1.32}$$

по (1.20). Имеем,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\big(\{\tilde{N}(\mathbf{v}) > x\} \cap \overline{E}\big) &\le \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{\mathbf{w} \in \binom{[n]}{\ell}} \mathsf{P}\big(N(\mathbf{v}) > b, N(\mathbf{w}) > \Gamma_\ell\big) \\
&\le \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{\mathbf{w} \in \binom{[n]\setminus[v]}{\ell}} \mathsf{P}\big(N(\mathbf{v}) > b)\mathsf{P}(N(\mathbf{w}) > \Gamma_\ell - k\big) \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{\mathbf{w} \in \binom{[n]}{\ell},\ \mathbf{w}\cap\mathbf{v}\neq\varnothing} \mathsf{P}\big(N(\mathbf{v}) > b, N(\mathbf{w}) > \Gamma_\ell\big).
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Оценим сначала первую сумму в правой части (1.33). Легко видеть, что из (1.24) и (1.32) следует

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{\mathbf{w} \in \binom{[n]\setminus[v]}{\ell}} \mathsf{P}\big(N(\mathbf{v}) > b)\mathsf{P}(N(\mathbf{w}) > \Gamma_\ell - k\big) \\
&\qquad = \sum_{\ell=1}^{k} \binom{n-k}{\ell} o\left(n^{-(k+\ell)}\right) = o(n^{-k}).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Далее, для второй суммы из правой части (1.33) имеем

$$\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{\mathbf{w}\in\binom{[n]}{\ell},\ \mathbf{w}\cap\mathbf{v}\neq\varnothing} \mathsf{P}\big(N(\mathbf{v})>b, N(\mathbf{w})>\Gamma_\ell\big)$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell}\binom{n-k}{\ell-j}\left(\sum_{\Gamma_\ell<i<np^\ell+\sqrt{2(k+\ell-j)n\ln np^\ell(1-p^\ell)}} \mathsf{P}(\xi_{n,p^\ell}=i)\mathsf{P}(\xi_{i,p^{k-j}}>b-k)\right.$$

$$\left.+\mathsf{P}\left(\xi_{n,p^\ell}>np^\ell+\sqrt{2(k+\ell-j)n\ln np^\ell(1-p^\ell)}\right)\right). \tag{1.35}$$

Аналогично (1.26), получаем, что второе слагаемое в правой части последнего выражения есть $o\big(n^{-(k+\ell-j)}\big)$. Заменяя b в первом слагаемом в правой части (1.35) на $\tilde{b}=\sigma_{k+\ell-j,n}x+a_{k+\ell-j,n}$ и повторяя вычисления, которые мы привели выше для обоснования (1.31), мы получаем, что и первое слагаемое в правой части (1.35) есть $o\big(n^{-(k+\ell-j)}\big)$. Получаем, что

$$\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{\mathbf{w}\in\binom{[n]}{\ell},\ \mathbf{w}\cap\mathbf{v}\neq\varnothing} \mathsf{P}\big(N(\mathbf{v})>b, N(\mathbf{w})>\Gamma_\ell\big) = o\big(n^{-k}\big),$$

что вкупе с (1.34) дает выполнение условия (A2).

Нам осталось проверить лишь условие (A3) для завершения доказательства теоремы. Без ограничения общности предположим, что k – нечетное число, и положим $m=(k-1)/2$. Имеем,

$$\sum_{\mathbf{v}\in\binom{[n]}{k}}\sum_{\mathbf{w}\in\binom{[n]\setminus[\mathbf{v}]}{k}} \mathsf{P}\big(\{\tilde{N}(\mathbf{v})>x\}\cap\{\tilde{N}(\mathbf{w})>x\}\cap E\big)$$

$$\leq \sum_{\mathbf{v}\in\binom{[n]}{k}}\sum_{\mathbf{w}\in\binom{[n]\setminus[\mathbf{v}]}{k}} \mathsf{P}\big(\{\tilde{N}(\mathbf{v})>x\}\cap\{\tilde{N}(\mathbf{w})>x\}\cap\{\tilde{N}(\mathbf{u})<\Gamma_{k-1}\}\big) =: A,$$

где для всех $\mathbf{v},\mathbf{w}$ множество вершин $\mathbf{u}$ таково, что $|\mathbf{u}\cap\mathbf{v}|=|\mathbf{u}\cap\mathbf{w}|=m$. Обозначим

$$A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}\{\tilde{N}(\mathbf{v})>x\}\cap\{\tilde{N}(\mathbf{w})>x\}\cap\{\tilde{N}(\mathbf{u})<\Gamma_{k-1}\}$$

и заметим, что у всех событий $A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ одинаковые вероятности. Итак,

$$A = \binom{n-m}{k-m}\binom{n-k-m}{k-m}\mathsf{P}(A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}) = O\left(n^{k+1}\mathsf{P}(A_{\mathbf{v},\mathbf{w}})\right). \tag{1.36}$$

Таким образом, нам достаточно показать, что $\mathsf{P}(A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}) = o(n^{-(k+1)})$. Легко видеть, что

$$\mathsf{P}(A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}) \le \sum_{i\le\Gamma_{k-1}} \mathsf{P}(\xi_{n,p^{k-1}} = i)[\mathsf{P}(\xi_{i,p^{m+1}} > b-(m+1))]^2$$

$$\le \sum_{np^{k-1}-2\sqrt{(k+1)n\ln np^{k-1}(1-p^{k-1})}<i\le\Gamma_{k-1}} \mathsf{P}(\xi_{n,p^{k-1}} = i)[\mathsf{P}(\xi_{i,p^{m+1}} > b-(m+1))]^2 \tag{1.37}$$

$$+\mathsf{P}\left(\xi_{n,p^{k-1}} \le np^{k-1} - 2\sqrt{(k+1)n\ln np^{k-1}(1-p^{k-1})}\right).$$

Аналогично (1.26), имеем

$$\mathsf{P}\left(\xi_{n,p^{k-1}} \le np^{k-1} - 2\sqrt{(k+1)n\ln np^{k-1}(1-p^{k-1})}\right) = o\big(n^{-(k+1)}\big).$$

Анализ асимптотики первого члена в правой части (1.37) аналогичен анализу, проведенному для нахождения асимптотики выражения (1.35), однако является более громоздким, поэтому мы его здесь не приводим; в результате этого анализа получаем

$$\sum_{np^{k-1}-2\sqrt{(k+1)n\ln np^{k-1}(1-p^{k-1})}<i\le\Gamma_{k-1}} \mathsf{P}(\xi_{n,p^{k-1}} = i)[\mathsf{P}(\xi_{i,p^{m+1}} > b-(m+1))]^2 = o\big(n^{-(k+1)}\big),$$

что завершает доказательство теоремы 1.9. □

1.5 Хвостовые и экстремальные индексы последовательностей сумм и максимумов серий зависимых случайных величин

В этом разделе мы изучаем нестационарные последовательности (серии) регулярно меняющихся случайных величин случайной длины.

В предположении, что в каждой серии существует доминирующий член, найдены условия, при которых хвостовые и экстремальные индексы последовательностей взвешенных сумм и максимумов этих серий совпадают.

Пусть $X(N) = (X_1, ..., X_N)$ – это (нестационарная) последовательность неотрицательных случайных величин, где N – неотрицательная случайная величина, принимающая целые значения. Вероятностные и статистические методы анализа таких последовательностей, а также распределений хвостов их сумм и максимумов в зависимости от распределений хвостов X_i и N активно изучались в литературе в связи с их многочисленными приложениями в финансах, страховании, гидрологии и информационных сетях.

Чаще всего рассматриваются последовательности $X(N)$ независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин, которые не зависят от случайной величины N. Обзор методов анализа распределений хвостов сумм и максимумов таких последовательностей с регулярно меняющимся маргинальным распределением приведен в работе [128]. В статье [180] была найдена асимптотика хвоста распределения суммы $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ н.о.р. случайных величин (X_i) для произвольной зависимости между N и (X_i) в случае, когда хвост распределения S_N тяжелее хвоста распределения N. В работе [161] была найдена зависимость хвостов распределений взвешенных сумм $S_N = \sum_{i=1}^{N} C_i X_i$ и максимумов $M_N = \max_{1 \le k < N+1} \sum_{i=1}^{k} C_i X_i$ н.о.р. последовательности (X_i) с неотрицательными весами от распределения случайной величины $\sum_{i=1}^{N} C_i$.

В [193] изучаются последовательности одинаково распределеннных, но не обязательно независимых случайных величин $X(N)$, а также предложено обобщение леммы Бреймана [60] к последовательностям вида $C(N) = A(N)X(N)$, где $A(N)$ – случайная матрица случайного размера $(N \times N)$, независимая с $X(N)$. В работах [61], [126], [127], [14], [15], [138], [161], [196] рассматривались взвешенные суммы со случайными весами членов н.о.р. случайных последовательностей с регулярно меняющимися хвостами случайной длины с применением к

случайным сетям. Результаты работ [126], [196] были обобщены в работе [45] с связи с применением в теории очередей и теории ветвящихся процессов.

Меньше внимания в литературе уделено изучению экстремального индекса частичных сумм и максимумов последовательностей случайной длины, не обязательно состоящих из одинаково распределенных случайных величин, и его возможной связи с хвостовым индексом [5], [14]. Экстремальный индекс $\theta \in [0,1]$ играет важную роль в стохастической теории экстремумов и имеет множество интерпретаций. В частности, предельное поведение межкластерных расстояний и асимптотическое распределение кластеров превышения высокого уровня стационарной последовательностью зависит от θ [43], [93], [145], [147], [148], [182].

Итак, в данном разделе мы будем рассматривать двумерный массив случайных величин $(Y_{n,i},\ n,i \geq 1)$, в котором "индекс строки" n отвечает за время, а "индекс столбца" i отвечает за номер последовательности. Пусть $(N_n,\ n \geq 1)$ – последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин. Для всех $i \geq 1$ последовательности $(Y_{n,i}, n \geq 1)$ предполагаются стационарными по n с экстремальным индексом $\theta_i \in [0,1]$, а их маргинальные функции распределения F_i – регулярно меняющимися на бесконечности,

$$\mathsf{P}(Y_{n,i} > x) = x^{-k_i}\ell_i(x), \tag{1.38}$$

где $\ell_i(x)$ медленно меняется на бесконечности, то есть выполнено $\lim_{x\to\infty} \ell_i(tx)/\ell_i(x) = 1$ для всех $t > 0$, однако между этими последовательностями допускается произвольная зависимость. Также мы будем предполагать, что случайные величины в последовательности $(Y_{n,1}, n \geq 1)$ имеют наиболее тяжелый хвост среди всех последовательностей $(Y_{n,i}, n \geq 1)$, $i \geq 1$, а именно, $k_1 < \min_{i\geq 2} k_i$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} Y_n^*(z, N_n) &= \max(z_1 Y_{n,1}, ..., z_{N_n} Y_{n,N_n}),\ n \geq 1, \\ Y_n(z, N_n) &= z_1 Y_{n,1} + ... + z_{N_n} Y_{n,N_n},\ n \geq 1, \end{aligned}$$

где $z_1, z_2, ...$ – положительные константы, и найдем хвостовые и экстремальные индексы этих последовательностей.

В работе Голдаевой [5] был рассмотрен частный случай данной постановки, а именно предполагалось, что $\ell_i(x) \equiv 1$ для всех $i \geq 1$ и $N_n \equiv l$ для всех $n \geq 1$. В этом случае был доказан следующий результат.

Теорема 1.11 ([5]). *Пусть* $k_1 < k_i$, $i \in \{2, ..., l\}$. *Тогда последовательность* $(Y_n(z, l), n \geq 1)$ *имеет хвостовой индекс* $k(z) = k_1$ *и экстремальный индекс* $\theta(z) = \theta_1$.

Теорема 1.12 является обобщением теоремы 1.11. Будем пока считать, что последовательность $(N_n, n \geq 1)$ является неслучайной. Предположим, что для всех $A, \delta > 0$ существует $x_0(A, \delta)$ такое, что для всех $i \geq 1$

$$\ell_i(x) \leq Ax^{\delta}, \quad x > x_0(A, \delta). \tag{1.39}$$

Хотя условие (1.39) всегда выполнено для конечного набора медленно меняющихся функций, для счетного набора медленно меняющихся функций это не всегда так. Примером может служить множество функций $\ell_i(x) = \min(x, i)$, $i \geq 1$.

Обозначим $k := \lim_{n\to\infty} \inf_{2\leq i\leq l_n} k_i$ и положим

$$l_n = [n^{\chi}], \qquad \chi > 0. \tag{1.40}$$

Следующие теорема и лемма остаются верными и при $l_n \leq n^{\chi}$. Для краткости обозначим $Y_n(z) = Y_n(z, l_n)$, $Y_n^*(z) = Y_n^*(z, l_n)$. Мы также предположим, что последовательность положительных весов $(z_i,\ i \geq 1)$ ограничена.

Теорема 1.12. *Пусть выполнено* $k_1 < k$, *(1.39) и условие*

$$\chi < \chi_0, \qquad \chi_0 = \frac{k - k_1}{k_1(k + 1)}. \tag{1.41}$$

Тогда последовательности $(Y_n^*(z),\ n \geq 1)$ *и* $(Y_n(z),\ n \geq 1)$ *имеют одинаковый хвостовой индекс* $k(z) = k_1$ *и одинаковый экстремальный индекс* $\theta(z) = \theta_1$.

Доказательство. Пусть функция $\ell(x)$ такова, что $\ell_1(x) = \ell^{-k_1}(x)$, а $\ell^\sharp(x)$ – обратная по де Бруину функция к $\ell(x)$. Тогда $g(x) \sim x^{1/k_1}\ell^\sharp(x^{1/k_1})$ – асимптотически обратная функция к $f(x) = x^{k_1}\ell^{k_1}(x)$ по предложению 1.5.15 [57]. Отсюда следует, что $f(g(x)) = x(1 + o(1))$ при $x \to \infty$. Обозначим $\ell_1^\sharp(x) = \ell^\sharp(x^{1/k_1})$ и введем последовательность уровней $(u_n,\ n \geq 1)$, где $u_n = yn^{1/k_1}\ell_1^\sharp(n)$, $y > 0$. Тем самым, мы получаем

$$\mathsf{P}(z_1 Y_{n,1} > u_n) = 1/f(u_n/z_1) = (z_1/y)^{k_1} n^{-1}(1 + o(1)) \tag{1.42}$$

при $n \to \infty$.

Прежде всего, мы покажем, что

$$\mathsf{P}(Y_n^*(z) > u_n) = \mathsf{P}(Y_{n,1} > u_n/z_1)(1 + o(1)), \qquad n \to \infty. \tag{1.43}$$

Поскольку выполнено

$$\mathsf{P}(z_i Y_{n,i} > u_n) \ = \ \ell_i(u_n) z_i^{k_i} u_n^{-k_i}(1 + o(1)), \ \ n \to \infty,$$

и

$$\mathsf{P}(z_1 Y_{n,1} > u_n) \leq \mathsf{P}(Y_n^*(z) > u_n) \leq \mathsf{P}(Y_n(z) > u_n) \tag{1.44}$$

то (1.43) следует из

$$\mathsf{P}(Y_n(z) > u_n) \ = \ (z_1/y)^{k_1} n^{-1}(1 + o(1)), \qquad n \to \infty, \tag{1.45}$$

в том же ключе, что и в доказательстве теоремы 1.11. Аналогично этому доказательству, имеем

$$\mathsf{P}(Y_n(z) > u_n) \ \leq \ \sum_{i=1}^{l_n} \mathsf{P}(z_i Y_{n,i} > u_n \varepsilon_i), \tag{1.46}$$

где $\sum_{i=1}^{l_n} \varepsilon_i = 1$ и $(\varepsilon_i, \quad i \in [l_n])$ – положительные числа. Обозначим $\varepsilon = \sum_{i=2}^{l_n} \varepsilon_i$, тогда, очевидно, $\varepsilon_1 = 1 - \varepsilon$. Можно выбрать ε_i, $i \in \{2, ..., l_n\}$, таким образом, чтобы были верны соотношения $\varepsilon_i \to 0$ и $\varepsilon \to 0$ при $n \to \infty$. Имеем,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(z_1 Y_{n,1} > u_n) \ &\leq \ \mathsf{P}(Y_n(z) > u_n) \qquad (1.47) \\ &\leq \ \mathsf{P}(z_1 Y_{n,1} > u_n(1 - \varepsilon)) + \sum_{i=2}^{l_n} \mathsf{P}(z_i Y_{n,i} > u_n \varepsilon_i). \end{aligned}$$

По лемме 1.13 можно выбрать ε_i, $i \in \{2, ..., l_n\}$, такими, что

$$\sum_{i=2}^{l_n} \mathsf{P}(z_i Y_{n,i} > u_n \varepsilon_i) = o(1/n), \tag{1.48}$$

то есть первый член в правой части (1.47) асимптотически мажорирует второй, и при этом $\varepsilon = o(1)$ при $n \to \infty$. Следовательно, поскольку k_1 – минимальный хвостовой индекс и $\varepsilon \to 0$ при $n \to \infty$, мы получаем из (1.42), (1.47) и (1.48)

$$\begin{aligned} & (z_1/y)^{k_1} n^{-1}(1+o(1)) = \mathsf{P}(z_1 Y_{n,1} > u_n) \le \mathsf{P}(Y_n(z) > u_n) \qquad (1.49) \\ \le \; & \left(\frac{z_1}{y(1-\varepsilon)}\right)^{k_1} n^{-1}(1+o(1)) + o(1/n) = (z_1/y)^{k_1} n^{-1}(1+o(1)). \end{aligned}$$

Значит, из (1.44) следует соотношение (1.43).

Аналогично, можно показать, что хвостовые индексы случайных величин $Y_m^*(z)$ и $Y_m(z)$ для всех $m \ge 2$ равны k_1. Действительно, для произвольного фиксированного m соотношение

$$\mathsf{P}(Y_m(z) > x) = \mathsf{P}(Y_m^*(z) > x)(1+o(1)) = \mathsf{P}(Y_{m,1} > x/z_1)(1+o(1)) \tag{1.50}$$

выполнено при $x \to \infty$, где

$$\mathsf{P}(Y_{m,1} > x/z_1) = (z_1/x)^{k_1} \ell_1(x)(1+o(1))$$

при $x \to \infty$. В данном случае мы полагаем $\varepsilon_i = \varepsilon/l_m$, $i \in \{2, \dots, l_m\}$, для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$. Далее, имеем для x такого, что $x^{(k-k_1)/(k+1)-\delta} > l_m$ для некоторого $\delta \in (0, (k-k_1)/(k+1))$,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^{l_m} \mathsf{P}(z_i Y_{m,i} > x\varepsilon_i) = \sum_{i=2}^{l_m} \left(\frac{x\varepsilon}{z_i l_m}\right)^{-k_i} \ell_i\left(\frac{x\varepsilon}{z_i l_m}\right) \qquad (1.51) \\ = \; & \sum_{i=2}^{l_m} \frac{x^{-k_i(1-\delta)} l_m^{k_i} z_i^{k_i}}{\varepsilon^{k_i} x^{k_i\delta}} \ell_i\left(\frac{x\varepsilon}{z_i l_m}\right) < \sum_{i=2}^{l_m} \frac{x^{-k_i(k_1+1)/(k+1)} z_i^{k_i}}{\varepsilon^{k_i} x^{k_i\delta}} \ell_i\left(\frac{x\varepsilon}{z_i l_m}\right) \\ \le \; & O\left(x^{-k_1(1+\delta)}\right) \end{aligned}$$

при $x \to \infty$, поскольку $(z_i/(\varepsilon x^{\delta}))^{k_i}\ell_i(x\varepsilon/(z_i l_m)) = O\left(x^{-\delta(k_1-1)}\right)$ равномерно по $i \geq 2$ при $x \to \infty$ согласно (1.39). Заметим, что элементарные соотношения (1.44), (1.46) и (1.47) остаются верными при замене u_n на произвольное $x > 0$. Из (1.47) имеем

$$\begin{aligned}(z_1/x)^{k_1}\ell_1(x)(1+o(1)) &= \mathsf{P}(Y_{m,1} > x/z_1) \leq \mathsf{P}(Y_m(z) > x) \qquad (1.52)\\ &\leq \mathsf{P}(z_1 Y_{m,1} > x(1-\varepsilon)) + \sum_{i=2}^{l_m} \mathsf{P}(z_i Y_{m,i} > x\varepsilon_i)\\ &= (1-\varepsilon)^{-k_1}(z_1/x)^{k_1}\ell_1(x)(1+o(1)) + O\left(x^{-k_1(1+\delta)}\right).\end{aligned}$$

Поскольку ε произволен, мы получаем (1.50).

Теперь покажем, что последовательности $(Y_n^*(z),\ n \geq 1)$ и $(Y_n(z),\ n \geq 1)$ имеют одинаковый экстремальный индекс $\theta(z) = \theta_1$. Используя те же обозначения, что и в [5], имеем

$$\begin{aligned}M_n^{(i)} &= \max\{Y_{1,i}, Y_{2,i}, ..., Y_{n,i}\},\ i \in \{1, .., l_n\}; \qquad (1.53)\\ M_n(z) &= \max\{Y_1(z), Y_2(z), ..., Y_n(z)\},\\ M_n^*(z) &= \max\{Y_1^*(z), Y_2^*(z), ..., Y_n^*(z)\},\ n \geq 1.\end{aligned}$$

Здесь мы предполагали, что $Y_{j,i} = 0$ if $i > l_j$. Из (1.53) следует, что

$$\begin{aligned}M_n^*(z) &= \max\{z_1 Y_{1,1}, ..., z_1 Y_{n,1}, ..., z_{l_n} Y_{1,l_n}, ..., z_{l_n} Y_{n,l_n}\}\\ &= \max\{z_1 M_n^{(1)}, ..., z_{l_n} M_n^{(l_n)}\}.\end{aligned}$$

Применяя неравенство типа Бонферрони, имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(z_1 M_n^{(1)} \leq u_n) &- \sum_{i=2}^{l_n} \mathsf{P}(z_i M_n^{(i)} > u_n) \leq \mathsf{P}(z_1 M_n^{(1)} \leq u_n, ..., z_{l_n} M_n^{(l_n)} \leq u_n)\\ &= \mathsf{P}(M_n^*(z) \leq u_n) \leq \mathsf{P}(z_1 M_n^{(1)} \leq u_n). \qquad (1.54)\end{aligned}$$

Поскольку экстремальный индекс последовательности $(Y_{n,1},\ n \geq 1)$ равен θ_1, из определения экстремального индекса и (1.42) мы получаем

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(z_1 M_n^{(1)} \leq u_n) = \exp(-\theta_1(z_1/y)^{k_1}). \qquad (1.55)$$

Найдем асимптотику суммы в (1.54). Согласно (1.38), для каждого $i,\ 2 \le i \le l_n$, выполнено

$$\mathsf{P}(z_i M_n^{(i)} > u_n) \le \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(z_i Y_{j,i} > u_n) = n(u_n/z_i)^{-k_i} \ell_i(u_n)(1+o(1)).$$

Более того, полагая $\xi = \chi_0 k/(2(k+1))$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{l_n} \mathsf{P}(z_i M_n^{(i)} > u_n\} &\le n \sum_{i=2}^{l_n} (u_n/z_i)^{-k_i} \ell_i(u_n)(1+o(1)) \qquad (1.56) \\ = \ & n \sum_{i=2}^{l_n} n^{\xi(k_i+1)-k_i/k_1} (\ell_1^\sharp(n))^{-k_i} (y/z_i)^{-k_i} n^{-\xi k_i} \ell_i(u_n) n^{-\xi}(1+o(1)) \\ \le \ & O\left(n^{1+\chi+\xi(k+1)-k/k_1}\right) = o(1), \end{aligned}$$

так как $\xi < 1/k_1$ и $(\ell_1^\sharp(n) n^\xi y/z_1)^{-k_i} \ell_i(u_n) n^{-\xi} \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $i,\ 2 \le i \le l_n$ согласно (1.39) (заметим, что $\ell_1^\sharp(n)$ также удовлетворяет (1.39) как медленно меняющаяся функция). Из (1.41) следует, что

$$\begin{aligned} 1+\chi+\xi(k+1)-k/k_1 &< 1+\chi_0+\xi(k+1)-k/k_1 \\ &= \xi(k+1)-k\chi_0 < 0. \end{aligned}$$

Из (1.54)-(1.56) следует, что

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(M_n^*(z) \le u_n) &= \mathsf{P}(z_1 M_n^{(1)} \le u_n)(1+o(1)) \qquad (1.57) \\ &= \exp(-\theta_1 (z_1/y)^{k_1})(1+o(1)) \end{aligned}$$

при $n \to \infty$. Поскольку согласно (1.42) и (1.43) выполнено $nP\{Y_n^*(z) > u_n\} = (z_1/y)^{k_1}(1+o(1))$, то экстремальный индекс последовательности $(Y_n^*(z),\ n \ge 1)$ равен θ_1.

Теперь покажем, что

$$\mathsf{P}(M_n^*(z) \le u_n) = \mathsf{P}(M_n(z) \le u_n)(1+o(1)). \qquad (1.58)$$

Заметим, что событие $\{M_n^*(z) \le u_n\}$ вложено в событие $\{M_n(z) \le u_n\}$.

Отсюда,

$$\begin{aligned}
& 0 \le \mathsf{P}(M_n^*(z) \le u_n) - \mathsf{P}(M_n(z) \le u_n) \\
= \;& \mathsf{P}(M_n^*(z) \le u_n) - \mathsf{P}(M_n^*(z) \le u_n, M_n(z) \le u_n) \\
= \;& \mathsf{P}(M_n^*(z) \le u_n, M_n(z) > u_n) \\
= \;& \sum_{j=1}^{n-1} \mathsf{P}(M_n^*(z) \le u_n, Y_j(z) > u_n, Y_{j+1}(z) \le u_n, ..., Y_n(z) \le u_n) \\
+ \;& \mathsf{P}(M_n^*(z) \le u_n, Y_n(z) > u_n) \\
= \;& \sum_{j=1}^{n-1} \mathsf{P}(Y_1^*(z) \le u_n, ..., Y_{j-1}^*(z) \le u_n, Y_j^*(z) \le u_n, Y_j(z) > u_n, \\
& Y_{j+1}(z) \le u_n, ..., Y_n(z) \le u_n) + \mathsf{P}(Y_1^*(z) \le u_n, ..., Y_n^*(z) \le u_n, Y_n(z) > u_n) \\
\le \;& \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(Y_j^*(z) \le u_n, Y_j(z) > u_n). \qquad (1.59)
\end{aligned}$$

Заметим, что $\mathsf{P}(Y_j(z) > u_n)$ и $\mathsf{P}(Y_j^*(z) > u_n)$ равны $O(1/n)$ для каждого $j \le n$. Действительно, из (1.49) и стационарности последовательностей $(Y_{n,1})$, $(Y_{n,2})$, ... мы имеем

$$\begin{aligned}
& (z_1/y)^{k_1} n^{-1}(1 + o(1)) = \mathsf{P}(z_1 Y_{n,1} > u_n) = \mathsf{P}(z_1 Y_{j,1} > u_n) \\
\le \;& \mathsf{P}(Y_j(z) > u_n) \le \mathsf{P}(Y_n(z) > u_n) = (z_1/y)^{k_1} n^{-1}(1 + o(1)),
\end{aligned}$$

так как $l_j \le l_n$ верно при $j \le n$. Значит,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(Y_j(z) > u_n) &= \mathsf{P}(Y_j^*(z) > u_n)(1 + o(1)) \\
&= \mathsf{P}(z_1 Y_{j,1} > u_n)(1 + o(1)) = (z_1/y)^{k_1} n^{-1}(1 + o(1)).
\end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (1.58) следует из (1.59) и

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(Y_j^*(z) \le u_n, Y_j(z) > u_n) &= \mathsf{P}(Y_j(z) > u_n) - \mathsf{P}(Y_j^*(z) > u_n) \\
&\le \mathsf{P}(Y_n(z) > u_n) - \mathsf{P}(z_1 Y_{n,1} > u_n) = o(1/n)
\end{aligned}$$

при $n \to \infty$. Из (1.45) и (1.58) вытекает, что экстремальный индекс последовательности $(Y_n(z))$ равен θ_1. Доказательство теоремы 1.12 завершено. □

В доказательстве теоремы 1.12 мы использовали следующее техническое утверждение, для упрощения изложения вынесенное в отдельную лемму.

Лемма 1.13. *Пусть выполнены условия теоремы 1.12. Тогда последовательность* $\{\varepsilon_i\}_{i=2}^{l_n}$ *может быть выбрана так, что соотношение (1.48) будет выполнено.*

Доказательство. Положим $\varepsilon_i = 1/l_n^{\eta+1}$, $i = 2, ..., l_n$, $\eta > 0$. Заметим, что $(u_n\varepsilon_i)^{-k_i} = (yn^{1/k_1-\chi(\eta+1)}\ell_1^\sharp(n))^{-k_i}$ убывает по n для каждого $i \geq 2$, если выполнено $1/k_1 > \chi(\eta+1)$ и, следовательно, $\eta < 1/(k_1\chi) - 1$. Заметим, что из (1.41) следует $1/(k_1\chi) - 1 > 0$. Установим

$$\eta = \frac{k-k_1}{3kk_1\chi} - \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Тогда

$$\eta = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k_1\chi} - 1\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k\chi} + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k_1\chi} - 1.$$

С другой стороны, по (1.41) выполнено

$$\eta > \frac{k-k_1}{3kk_1}\cdot\frac{k_1(k+1)}{k-k_1} - \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{k}\right) = 0.$$

Отсюда, для достаточно большого n мы имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{l_n}\mathsf{P}(z_iY_{n,i} > u_n\varepsilon_i) = \sum_{i=2}^{l_n}(u_n\varepsilon_i/z_i)^{-k_i}\ell_i(u_n\varepsilon_i/z_i)\\
=\ &\sum_{i=2}^{l_n} n^{-k_i(1/k_1-\chi(2\eta+1))}(yn^{\chi\eta}\ell_1^\sharp(n)/z_i)^{-k_i}\ell_i(u_n\varepsilon_i/z_i)\\
\leq\ &O\left(l_nn^{-k(1/k_1-\chi(2\eta+1))}\right) = O\left(n^{\chi-k(1/k_1-\chi(2\eta+1))}\right) = o(1/n)
\end{aligned}$$

при $n \to \infty$, поскольку предельное соотношение $(yn^{\chi\eta}\ell_1^\sharp(n)/z_i)^{-k_i}\ell_i(u_n\varepsilon_i/z_i) \to 0$ выполнено равномерно по $i \geq 2$ при $n \to \infty$ согласно (1.39) и

$$\begin{aligned}
&\chi - k\left(\frac{1}{k_1} - \chi(2\eta+1)\right) = \chi - k\left(\frac{1}{k_1} - \frac{2(k-k_1)}{3kk_1} + \frac{2\chi}{3k} - \frac{\chi}{3}\right)\\
=\ &\frac{\chi}{3}(k+1) - \frac{k}{3k_1} - \frac{2}{3} < \frac{k-k_1}{3k_1} - \frac{k}{3k_1} - \frac{2}{3} = -1.
\end{aligned}$$

□

Теорема 1.14 является обобщением теоремы 1.12 на случай последовательностей случайной длины, то есть вместо последовательностей взвешенных сумм $(Y_n(z, l_n))$ и максимумов $(Y_n^*(z, l_n))$ будем изучать последовательности $(Y_n(z, N_n))$ и $(Y_n^*(z, N_n))$ для случайной последовательности (N_n) с целочисленными неотрицательными значениями. Предположим, что N_n имеет регулярно меняющееся распределение с хвостовым индексом $\alpha > 0$, то есть $\mathsf{P}(N_n > x) = x^{-\alpha}\tilde{\ell}_n(x)$, $n \geq 1$. Допускается произвольная зависимость между (N_n) и $(Y_{n,i})$.

Теорема 1.14. *Пусть множества медленно меняющихся функций* $\{\tilde{\ell}_n(x)\}_{n\geq 1}$ *и* $\{\ell_i(x)\}_{i\geq 1}$ *в (1.38) удовлетворяют условию (1.39),* $k_1 < k$ *и*

$$\mathsf{P}(N_n > l_n) \;=\; o\left(\mathsf{P}(Y_{n,1} > u_n)\right),\; n \to \infty, \tag{1.60}$$

для некоторой последовательности (l_n)*, удовлетворяющей (1.40) и (1.41). Тогда последовательности* $(Y_n^*(z, N_n))$ *и* $(Y_n(z, N_n))$ *имеют одинаковый хвостовой индекс* $k(z) = k_1$ *и одинаковый экстремальный индекс* $\theta(z) = \theta_1$*.*

Доказательство. Сначала проверим, что выполнено

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(Y_n^*(z, N_n) > u_n) &= \mathsf{P}(Y_n(z, N_n) > u_n)(1 + o(1)) \\ &= (z_1/y)^{k_1} n^{-1}(1 + o(1)) \end{aligned} \tag{1.61}$$

при $n \to \infty$. Используя (1.42), (1.43) и условия теоремы, получаем для того же u_n, что и в доказательстве теоремы 1.12

$$\begin{aligned} & \mathsf{P}(Y_n^*(z, N_n) > u_n) \\ = \;& \mathsf{P}(Y_n^*(z, N_n) > u_n, N_n \leq l_n) + \mathsf{P}(Y_n^*(z, N_n) > u_n, N_n > l_n) \\ \leq \;& \mathsf{P}(Y_n^*(z, l_n) > u_n) + \mathsf{P}(N_n > l_n) = (z_1/y)^{k_1} n^{-1}(1 + o(1)),\; n \to \infty. \end{aligned} \tag{1.62}$$

С другой стороны,

$$\mathsf{P}(Y_n^*(z, N_n) > u_n) \geq \mathsf{P}(Y_{n,1} > u_n/z_1) = (z_1/y)^{k_1} n^{-1}(1 + o(1)). \tag{1.63}$$

выполнено при $n \to \infty$ согласно (1.42). То же можно показать для $(Y_n(z, N_n))$, заменяя максимумы суммами в (1.62) и (1.63) и используя (1.49). Отсюда следует (1.61).

С помощью похожих рассуждений мы можем показать, что для каждого $m \geq 1$ из (1.50) следует

$$\mathsf{P}(Y_m^*(z, N_m) > x) = \mathsf{P}(Y_m(z, N_m) > x)(1 + o(1)) = \ell_1(x)(z_1/x)^{k_1}(1 + o(1))$$

при $x \to \infty$. Действительно, из условия (1.60) вытекает $\alpha\chi \geq 1$. Значит, из (1.41) следует, что

$$\alpha\chi_0 > 1. \tag{1.64}$$

Отметим также, что (1.51) остается верным после замены l_m на произвольное натуральное число l, удовлетворяющее тому же условию $l = l(x) < x^{(k-k_1)/(k+1)-\delta}$, что и l_m, с тем же δ. Для всех достаточно больших x положим $l(x) = [x^{k_1/\alpha+\delta_1}]$ для некоторого $\delta_1 > 0$. Тогда можно выбрать положительные δ и δ_1 такие, что последнее неравенство выполняется. Действительно, для $x > 1$ имеем

$$x^{k_1/\alpha+\delta_1} < x^{(k-k_1)/(k+1)-\delta} \Longleftrightarrow \alpha\chi_0 - \frac{\alpha}{k_1}(\delta + \delta_1) > 1,$$

где δ и δ_1 могут быть выбраны с учетом (1.64). Отсюда, аналогично (1.52), получаем

$$\mathsf{P}(Y_m(z, l(x)) > x) = (z_1/x)^{k_1}\ell_1(x)(1 + o(1))$$

при $x \to \infty$. Действия таким же образом, как и при доказательстве (1.62), с учетом (1.39) мы получаем

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(Y_m^*(z, N_m) > x) &\leq \mathsf{P}(Y_m(z, N_m) > x) \\
&\leq \mathsf{P}(Y_m(z, l(x)) > x) + \mathsf{P}(N_m > l(x)) \\
&= (z_1/x)^{k_1}\ell_1(x)(1 + o(1)) + x^{-k_1-\alpha\delta_1}\tilde{\ell}_m(x^{k_1/\alpha+\delta_1}) \\
&= (z_1/x)^{k_1}\ell_1(x)(1 + o(1))
\end{aligned}$$

при $x \to \infty$. Нижняя граница для $\mathsf{P}(Y_m^*(z, N_m) > x)$ и $\mathsf{P}(Y_m(z, N_m) > x)$ может быть получена аналогично (1.63). Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Теперь покажем, что последовательности $(Y_n^*(z,N_n))$ и $(Y_n(z,N_n))$ имеют одинаковый экстремальный индекс θ_1. Обозначим

$$\begin{aligned} & M_n^*(z,N_n)=\max\{Y_1^*(z,N_1),Y_2^*(z,N_2),...,Y_n^*(z,N_n)\} \quad (1.65)\\ = \;& \max\{z_1Y_{1,1},...,z_{N_1}Y_{1,N_1},...,z_1Y_{n,1},...,z_{N_n}Y_{n,N_n}\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & M_n(z,N_n)=\max\{Y_1(z,N_1),Y_2(z,N_2),...,Y_n(z,N_n)\}\\ = \;& \max\{z_1Y_{1,1}+...+z_{N_1}Y_{1,N_1},...,z_1Y_{n,1}+...+z_{N_n}Y_{n,N_n}\}. \end{aligned}$$

Мы можем дополнить вектора $(z_1Y_{i,1},...,z_{N_i}Y_{i,N_i})$, $i\in\{1,2,...,n\}$ нулями до размера $N=\max_{1\le i\le n}N_i$. Используя обозначения (1.53), перепишем (1.65) как

$$\begin{aligned} & M_n^*(z,N_n)=\max\{z_1Y_{1,1},...,z_{N_1}Y_{1,N_1},...,z_N\cdot 0,...,z_{N_n}Y_{n,N_n},...,z_N\cdot 0\}\\ = \;& \max(z_1M_n^{(1)},z_2M_n^{(2)},...,z_NM_n^{(N)}). \end{aligned}$$

Помня об условии (1.60), обозначим

$$\delta=(\chi_0-\chi)/3 \quad \text{и} \quad \tilde{l}_n=n^{\chi+2\delta}.$$

Из (1.41) следует, что $\tilde{l}_n > l_n$. Отсюда утверждение теоремы 1.12 выполнено для $\tilde{l}_n$, так как $\chi+2\delta<\chi_0$. Заменяя $Y_n^*(z,N_n)$ в (1.62) и (1.63) на $M_n^*(z,N_n)$, находим

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(z_1M_n^{(1)}>u_n) &\le \mathsf{P}(M_n^*(z,N_n)>u_n)\\ &\le \mathsf{P}(M_n^*(z,\tilde{l}_n)>u_n)+\mathsf{P}(N>\tilde{l}_n)\\ &\le \mathsf{P}(M_n^*(z,\tilde{l}_n)>u_n)+\sum_{i=1}^n\mathsf{P}(N_i>\tilde{l}_n). \quad (1.66) \end{aligned}$$

Тем самым, мы получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n\mathsf{P}(N_i>\tilde{l}_n) &= \sum_{i=1}^n n^{-\alpha\cdot(\chi+\delta)}n^{-\alpha\delta}\tilde{\ell}_i(n^{\chi+2\delta})\\ &\le O(n^{1-\alpha\cdot(\chi+\delta)})=o(1), \quad (1.67) \end{aligned}$$

при $n \to \infty$, так как предельное соотношение $n^{-\alpha\delta}\tilde{\ell}_i(n^{\chi+2\delta}) \to 0$ выполнено равномерно по $i \in \{1, ..., n\}$ при $n \to \infty$ по условиям теоремы и так как $\alpha\chi \geq 1$. Отсюда, из (1.55), (1.57), (1.65), (1.66) и (1.67) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(M_n^*(z, N_n) \leq u_n) \;=\; \exp\big(-\theta_1(z_1/y)^{k_1}\big).$$

Из последнего асимптотического равенства, (1.62) и (1.63) следует, что экстремальный индекс $(Y_n^*(z, N_n))$ равен θ_1. Осталось показать, что последовательности $(Y_n^*(z, N_n))$ и $(Y_n(z, N_n))$ имеют одинаковый экстремальный индекс. Легко показать аналогично (1.66), используя (1.58) и (1.67), что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(M_n(z, N_n) \leq u_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(M_n^*(z, N_n) \leq u_n),$$

что и завершает доказательство теоремы. □

1.6 Глобальный экстремальный индекс и экстремальный индекс по направлению стационарных случайных полей

В этом разделе мы обсудим понятия глобального экстремального индекса и экстремального индекса вдоль направления для случайных полей на $\mathbb{Z}^d$, сформулируем необходимые и достаточные условия их существования и приведем пример гауссовского стационарного поля на $\mathbb{Z}^2$, вдоль некоторых направлений которого существует экстремальный индекс, но которое не имеет глобального экстремального индекса, что доказывает различие этих понятий.

Итак, пусть $(X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$ – стационарное (в узком смысле) случайное поле размерности d с маргинальной функцией распределения F и частичными максимумами, определяемыми для $\mathbf{j}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ формулой

$$M_{\mathbf{j},\mathbf{n}} = \max_{\mathbf{k}:\mathbf{j}\leq\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}, \text{ если } \mathbf{j} \leq \mathbf{n},$$

и $M_{\mathbf{j},\mathbf{n}} = -\infty$, если $\mathbf{j} \not\leq \mathbf{n}$. Здесь $\mathbf{j} \leq \mathbf{n}$ означает, что все координаты вектора $\mathbf{j}$ не больше соответствующих координат вектора $\mathbf{n}$. Для

удобства будем писать $M_{\mathbf{n}} := M_{\mathbf{1},\mathbf{n}}$. Скажем, что стационарное случайное поле $(X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$ имеет *глобальный экстремальный индекс* $\theta \in [0,1]$, если для любого $\tau > 0$ существует такая последовательность уровней $(u_n(\tau),\ n \geq 1)$, что выполнено

$$\mathbf{n}^* \overline{F}\big(u_{\mathbf{n}^*}(\tau)\big) \to \tau, \quad \mathsf{P}\big(M_{\mathbf{n}} \leq u_{\mathbf{n}^*}(\tau)\big) \to e^{-\theta\tau} \tag{1.68}$$

при $\mathbf{n} \to \infty$ покоординатно, где $\mathbf{n}^* = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_d$, если $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d)$. Заметим, что свойство (1.68) выполнено вне зависимости от направления роста $\mathbf{n}$ к бесконечности. Далее, определим *монотонную кривую* в $\mathbb{N}^d$ как отображение $\boldsymbol{\psi}(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^d$ такое, что $\boldsymbol{\psi}(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, $\boldsymbol{\psi}(n) \leq \boldsymbol{\psi}(n+1)$, но $\boldsymbol{\psi}(n) \neq \boldsymbol{\psi}(n+1)$ для всех $n \geq 1$ и

$$\frac{\boldsymbol{\psi}(n+1)^*}{\boldsymbol{\psi}(n)^*} \to 1, \quad n \to \infty,$$

и скажем, что у стационарного случайного поля $(X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$ есть экстремальный индекс θ по направлению ψ, если последовательность $(X_{\psi(n)},\ n \geq 1)$ имеет экстремальный индекс θ.

Определение глобального экстремального индекса, приведенное нами, впервые сформулировано в [123]. Заметим, что более "классическое" определение глобального экстремального индекса для случайных полей на целочисленных решетках, являющееся прямым обобщением понятия экстремального индекса стационарной последовательности, было предложено в [64], см. также [90] и [194]. Эти работы, однако, не содержат каких-либо результатов об условиях существования экстремального индекса. Более того, формула для вычисления экстремального индекса, предложенная в [90], не работает даже для простого 1-зависимого стационарного случайного поля, приведенного в [123, пример 5.5]. Примеры вычисления глобального экстремального индекса для различных случайных полей на целочисленных решетках можно найти в [50] (процессы скользящего среднего и скользящего максимума), [123] (модели с локальной зависимостью) и [201] (регулярно меняющиеся случайные поля).

Введем *строго монотонное поле уровней* $(v_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$ как отображение $v_{(\cdot)} : \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}$ такое, что $v_{\mathbf{m}} \leq v_{\mathbf{n}}$, если $\mathbf{m}^* \leq \mathbf{n}^*$.

Будем говорить, что стационарное случайное поле $(X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$ обладает свойством $\mathbf{B}_T^{\psi}((v_{\boldsymbol{\psi}(n)}))$, если для некоторого $T > 0$ и некоторой монотонной кривой ψ выполнено

$$\max_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)\le T\psi(n)} \left| \mathsf{P}(M_{\mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(2)} \le v_{\boldsymbol{\psi}(n)}) - \prod_{\mathbf{i}\in\{1,2\}^d} \mathsf{P}(M_{(p_1(i_1),\dots,p_d(i_d))} \le v_{\boldsymbol{\psi}(n)}) \right| \to 0$$

при $n \to \infty$, где компоненты векторов $\mathbf{p}(1)$, $\mathbf{p}(2)$ – неотрицательные целые числа. В следующей теореме, полученной А. Якубовским и Н. Соей-Кукиелой в [124], установлены необходимые и достаточные условия существования двух описанных типов экстремальных индексов у стационарного случайного поля на $\mathbb{Z}^d$.

Теорема 1.15. *Пусть $(X_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$ – стационарное случайное поле.*
(i) Поле $(X_{\mathbf{n}})$ имеет глобальный экстремальный индекс $\theta \in (0,1]$ тогда и только тогда, когда существуют такие $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$ и строго монотонное поле уровней $(v_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d)$, что

$$\mathsf{P}(M_{\mathbf{n}} \le v_{\mathbf{n}}) \to \gamma_1,\ F(v_{\mathbf{n}})^{\mathbf{n}^*} \to \gamma_2 \text{ при } \mathbf{n} \to \infty,\ \frac{\ln \gamma_1}{\ln \gamma_2} = \theta$$

и для всех монотонных кривых ψ и всех $T > 0$ выполнено свойство $\mathbf{B}_T^{\psi}((v_{\boldsymbol{\psi}(n)}))$.
(ii) Поле $(X_{\mathbf{n}})$ имеет экстремальный индекс $\theta \in (0,1]$ по направлению ψ тогда и только тогда, когда существуют такие $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$ и неубывающая последовательность уровней $(v_{\psi(n)},\ n \ge 1)$, что

$$\mathsf{P}(M_{\psi(n)} \le v_{\psi(n)}) \to \gamma_1,\ F(v_{\psi(n)})^{\psi(n)^*} \to \gamma_2 \text{ при } n \to \infty,\ \frac{\ln \gamma_1}{\ln \gamma_2} = \theta$$

и для всех $T > 0$ выполнено свойство $\mathbf{B}_T^{\psi}((v_{\boldsymbol{\psi}(n)}))$.

Приведем теперь пример стационарного случайного поля, для которого экстремальный индекс по некоторым направлениям существует, однако глобального экстремального индекса нет. Методы работы с гауссовскими последовательностями, которые мы будем использовать для построения примера, были разработаны в 60х и

70х годах прошлого столетия и исчерпывающим образом изложены в главах 2, 4 и 6 монографии [137], см. также раздел 1.1 этой диссертации. Центральное место в этой теории занимает нормальная лемма сравнения [137, теорема 4.2.1], которую мы будем использовать в форме неравенства Бермана, сформулированного ниже.

Итак, пусть $(W_1, W_2, \dots, W_n)$ и $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ – два стандартизированных гауссовских случайных вектора, то есть $\mathsf{E}W_j = \mathsf{E}Z_j = 0$ и $\mathsf{E}W_j^2 = \mathsf{E}Z_j^2 = 1$ для всех $j \in [n]$. Пусть $\Lambda_{i,j}^W$ ($\Lambda_{i,j}^Z$) – ковариация W_i и W_j (Z_i и Z_j соответственно), $i, j \in [n]$. Наконец, положим $\omega_{i,j} = \max\{\Lambda_{i,j}^W, \Lambda_{i,j}^Z\}$, $i, j \in [n]$, и предположим, что

$$\max_{i \neq j} \omega_{i,j} = \delta < 1.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} &\Big|\mathsf{P}\big(\max_{j\in[n]} W_j \le u\big) - \mathsf{P}\big(\max_{j\in[n]} Z_j \le u\big)\Big| \\ &\le L(\delta) \sum_{1\le i<j\le n} \big|\Lambda_{i,j}^W - \Lambda_{i,j}^Z\big| \exp\Big(-\frac{u^2}{1+\omega_{i,j}}\Big), \end{aligned} \tag{1.69}$$

где $L(\delta) = 1/\big(2\pi\sqrt{1-\delta^2}\big)$. В частности, если $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ независимы, то

$$\Big|\mathsf{P}\big(\max_{j\in[n]} W_j \le u\big) - (\Phi(u))^n\Big| \le L(\delta) \sum_{1\le i<j\le n} |r_{i,j}| \exp\Big(-\frac{u^2}{1+r_{i,j}}\Big), \tag{1.70}$$

где $r_{i,j} = \Lambda_{i,j}^W$ и $\Phi(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона.

Используя данные неравенства, можно найти все возможные варианты предельного распределения максимума стационарной стандартизированной гауссовской последовательности (X_j) с ковариационной функцией $r_n = \mathsf{E}X_nX_0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. В частности,

- если $r_n \ln n \to 0$, то $(M_n - b_n)/a_n$, где $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ и $(a_n), (b_n)$ – некоторые нормировочные последовательности, сходится по распределению к распределению Гумбеля (дополнительно, это

означает, что экстремальный индекс данной последовательности равен 1), см. [137, теорема 4.3.3];

- если $r_n \ln n \to c \in (0, \infty)$, то $(M_n - b_n)/a_n$ для тех же нормировочных последовательностей $(a_n), (b_n)$ сходится по распределению к свертке распределения Гумбеля и нормального закона (при этом у последовательности нет экстремального индекса), см. [137, следствие 6.5.2];

- если $r_n \to 0$ и $r_n \ln n \to \infty$ монотонно, то при некоторой (другой) нормализации M_n сходится по распределению к нормальному закону (и экстремального индекса снова нет), см. [137, теорема 6.6.4].

В [123, раздел 3.2] было показано, что стационарное гауссовское поле $(X_{(i,j)},\ (i,j) \in \mathbb{Z}^2)$ с ковариациями

$$r_{i,j} = \mathsf{E} X_{(0,0)} X_{(i,j)}, (i,j) \in \mathbb{Z}_+^2,$$

удовлетворяющими двумерному условию Бермана

$$r_{i,j} \ln(i \cdot j) \to 0 \ \text{ при } (i,j) \to (\infty, \infty),$$

имеет экстремальный индекс, равный 1. Мы же предложим пример стационарного гауссовского поля с ковариациями, удовлетворяющими условию

$$r_{i,j} = C \frac{\ln \ln |i|}{\ln |i|} \frac{1}{\ln |j|} \tag{1.71}$$

для достаточно больших по модулю i, j и некоторой константы $C > 0$, для которого выполняется условие Бермана $r_{n,n} \ln n^2 \to 0$ по диагональному направлению, но при этом

$$r_{[n/\ln n],[\ln n]} \ln n \to C,\ n \to \infty,$$

и

$$r_{[n/\ln \ln n],[\ln \ln n]} \ln n \to +\infty,\ n \to \infty,$$

то есть условие Бермана нарушается вдоль некоторых других направлений. Впоследствии мы убедимся, что это приводит к отсутствию глобального экстремального индекса для введенного гауссовского поля.

Итак, определим $r_{i,j}$ по следующему правилу

$$r_{i,j} = \eta_1(i)\eta_2(j),$$

где η_1 и η_2 – неотрицательно определенные и симметричные функции. В этом случае, как известно, функция $R(i,j) = r_{i,j}$ также будет неотрицательно определена и симметрична, то есть будет являться ковариационной функцией для какого-то стационарного гауссовского поля на $\mathbb{Z}^2$, которое, так образом, будет нами предъявлено. Функции η_1 и η_2 будут выбраны с помощью теоремы Пойа для характеристических функций, см. [88, с. 509].

Для некоторого $\gamma_1 > 0$, значение которого мы выберем позже, зададим график η_1 на положительной полуоси точками

$$\big(0,1\big), \big(1, \gamma_1\big(27\frac{\ln\big(\ln 27\big)}{\ln 27} - 26\frac{\ln\big(\ln 28\big)}{\ln 28}\big)\big), \big(28, \gamma_1\frac{\ln\big(\ln 28\big)}{\ln 28}\big), \big(29, \gamma_1\frac{\ln\big(\ln 29\big)}{\ln 29}\big), \ldots,$$

причем значения в точках $2, 3, \ldots, 27$ выберем так, чтобы функция η_1 оставалась выпуклой вниз и монотонной, то есть удовлетворяла условиям теоремы Пойа. Далее, график η_2 на положительной полуоси зададим точками

$$\big(0,1\big), \big(1, \gamma_2\big(\frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}\big)\big), \big(3, \gamma_2\frac{1}{\ln 3}\big), \big(4, \gamma_2\frac{1}{\ln 4}\big), \ldots,$$

причем значение в точке 2 выбирается снова в согласии с теоремой Пойа. Значения функций η_1 и η_2 в отрицательных целых точках определяются по симметрии. Предположим также, что числа γ_1 и γ_2 удовлетворяют условиям

$$\gamma_1 > 1/4, \quad \gamma_1\big(27\frac{\ln\big(\ln 27\big)}{\ln 27} - 26\frac{\ln\big(\ln 28\big)}{\ln 28}\big) < \gamma_2\big(\frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}\big) < \frac{1-2\gamma_1}{1+2\gamma_1}. \tag{1.72}$$

В частности, выбор $(\gamma_1, \gamma_2) = (0.3, 0.1)$ удовлетворяет всем вышеприведенным условиям. Тем самым, мы доказали, что $r_{i,j} = \eta_1(i)\eta_2(j)$ существует и является ковариационной функцией некого гауссовского стационарного поля на $\mathbb{Z}^2$, удовлетворяющая

условиям (1.71) и

$$\delta := \sup_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} r_{i,j} < \frac{1-2\gamma_1}{1+2\gamma_1} < \frac{1}{3}. \tag{1.73}$$

Итак, пусть $\mathbf{X} = \{X_{(i,j)}, (i,j) \in \mathbb{Z}^2\}$ – гауссовское стационарное случайное поле с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариационной функцией $\mathsf{E}X_{(i,j)}X_{(0,0)} = r_{i,j}$. Сперва покажем, что экстремальный индекс вдоль диагонали этого случайного поля равен 1. Исходя из определения экстремального индекса по направлению, нам достаточно будет показать, что для всех $c > 0$ выполнено

$$\mathsf{P}\big(M_{\mathbf{n}} \le u_{\mathbf{n}}(c)\big) = \Phi\big(u_{\mathbf{n}}(c)\big)^{n^2} + o(1), \tag{1.74}$$

где $\mathbf{n} = (n,n)$, $M_{\mathbf{n}} = \max_{(i,j)\in[1,n]\times[1,n]} X_{(i,j)}$ и последовательность уровней $\{u_{\mathbf{n}}(c)\}$ такова, что $n^2(1-\Phi(u_{\mathbf{n}}(c))) \to c$. Заметим, что для всех достаточно больших n

$$\exp\left(-\frac{(u_{\mathbf{n}}(c))^2}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}cu_{\mathbf{n}}(c)}{n^2}(1+o(1)) \le \frac{2\sqrt{\pi}cu_{\mathbf{n}}(c)}{n^2} = K(c)\frac{u_{\mathbf{n}}(c)}{n^2} \tag{1.75}$$

и

$$u_{\mathbf{n}}(c) \sim \sqrt{4\ln n} \quad \text{при } n\to\infty. \tag{1.76}$$

По (1.70) имеем

$$\begin{aligned}
&\big|\mathsf{P}\big(M_{\mathbf{n}} \le u_{\mathbf{n}}(c)\big) - \Phi(u_{\mathbf{n}}(c))^{n^2}\big| \\
&\qquad \le L(\delta) \sum_{\substack{(i,j),(k,l)\in\{1,2,\dots,n\}^2 \\ (i,j)\ne(k,l)}} \operatorname{cov}\big(X_{(i,j)}, X_{(k,l)}\big) \exp\big(-\frac{(u_{\mathbf{n}}(c))^2}{1+r_{i-k,j-l}}\big) \\
&\qquad \le 4L(\delta)n^2 \sum_{\substack{0\le i,j\le n \\ (i,j)\ne(0,0)}} r_{i,j} \exp\left(-\frac{(u_{\mathbf{n}}(c))^2}{1+r_{i,j}}\right),
\end{aligned} \tag{1.77}$$

здесь мы использовали стационарность и тот факт, что $r_{i,j} > 0$, $i,j \in \mathbb{Z}_+$. Повторяя шаги доказательства леммы 4.3.2 [137], выберем α, $0 < \alpha <$

$\frac{1-3\delta}{1+\delta}$ (см. (1.73)), и разобьем сумму в последней строке соотношения (1.77) на две части: $\Sigma_1(n) = \sum_{(i,j)\in A_n}$ и $\Sigma_2(n) = \sum_{(i,j)\in B_n}$, где

$$A_n = \{\lceil n^\alpha\rceil, \dots, n\} \times \{\lceil n^\alpha\rceil, \dots, n\} \text{ и } B_n = \{0, 1, \dots, n\}^2 \setminus (A \cup \{\mathbf{0}\}).$$

Здесь и далее $\lceil\cdot\rceil$ обозначает округление вверх. Сначала найдем асимптотику части, включающей сумму $\Sigma_2(n)$. Для достаточно больших значений n имеем

$$\begin{aligned}
4L(\delta)n^2\Sigma_2(n) &\le 4L(\delta)n^2\big(2n^{1+\alpha} - \big(\lceil n^\alpha\rceil - 1\big)^2\big)\exp\left(-\frac{(u_{\mathbf{n}}(c))^2}{1+\delta}\right)\\
&\le 8L(\delta)K(c)^{\frac{2}{1+\delta}}n^{3+\alpha}\left(\frac{u_{\mathbf{n}}(c)}{n^2}\right)^{\frac{2}{1+\delta}} \qquad \text{по (1.75)}\\
&\sim 8L(\delta)K(c)^{\frac{2}{1+\delta}}(4\ln n)^{\frac{1}{1+\delta}}n^{\alpha+3-\frac{4}{1+\delta}} \to 0,\\
&\qquad\qquad \text{по (1.76) и выбору } \alpha.
\end{aligned}$$

Далее, заметим, что для $i, j \ge \lceil n^\alpha\rceil$ и достаточно больших значений n

$$r_{i,j} \le \frac{\ln(\ln n^\alpha)}{\big(\ln n^\alpha\big)^2} \le \big(2/\alpha^2\big)\frac{\ln\ln n}{(\ln n)^2}.$$

Отсюда, полагая $\delta'_n = \sup_{i,j\in A_n} r_{i,j}$ и используя (1.76), мы получаем, что $\delta'_n(u_{\mathbf{n}}(c))^2 \to 0$ при $n \to \infty$. С учетом этого соотношения, окончательно получаем

$$\begin{aligned}
4L(\delta)n^2\Sigma_1(n) &= 4L(\delta)n^2\sum_{(i,j)\in A_n} r_{i,j}\exp\left(-\frac{(u_{\mathbf{n}}(c))^2}{1+r_{i,j}}\right)\\
&= 4L(\delta)n^2\exp(-(u_{\mathbf{n}}(c))^2)\sum_{(i,j)\in A_n} r_{i,j}\exp\left(\frac{(u_{\mathbf{n}}(c))^2 r_{i,j}}{1+r_{i,j}}\right)\\
&\le 4L(\delta)(K(c))^2n^2\Big(\frac{u_{\mathbf{n}}(c)}{n^2}\Big)^2 n^2\delta'_n\exp\big(\delta'_n(u_{\mathbf{n}}(c))^2\big) \quad \text{по (1.75)}\\
&= 4L(\delta)(K(c))^2\delta'_n(u_{\mathbf{n}}(c))^2\exp(\delta'_n(u_{\mathbf{n}}(c))^2) \to 0, \quad \text{при } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, (1.74) доказано.

Теперь покажем, что экстремальный индекс вдоль монотонной кривой

$$\boldsymbol{\psi}(n) = \big(\lfloor n/\ln n\rfloor, \lfloor\ln n\rfloor\big), n \in \mathbb{N}$$

для рассматриваемого гауссовского стационарного поля не определен, что будет означать отсутствие глобального экстремального индекса для этого случайного поля. Заметим, что требуемое утверждение находится в прямом соответствии с результатом работы [156], см. также теорему 6.5.1 [137], так как

$$\boldsymbol{\psi}(n)^* \sim n \quad \text{и} \quad r_{\boldsymbol{\psi}(n)} \ln n \to \gamma_1\gamma_2 > 0.$$

Однако, поведение последовательности случайных величин $(M_{\boldsymbol{\psi}(n)})$ более сложное, чем поведение частичных максимумов стационарной гауссовской последовательности при росте n, поэтому мы должны аккуратно провести все шаги доказательства.

Как и при доказательстве (1.74), мы хотим показать, что

$$\mathsf{P}\big(M_{\boldsymbol{\psi}(n)} \le w_n(c)\big) = \mathsf{P}\big(\widetilde{M}_n \le w_n(c)\big) + o(1), \tag{1.78}$$

где для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\widetilde{M}_n$ – это максимум $\boldsymbol{\psi}(n)^*$ стандартных нормальных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\boldsymbol{\psi}(n)^*}$ с попарными ковариациями $\rho_n = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \frac{\gamma_1\gamma_2}{\ln n}$, $i \ne j$, а последовательность уровней $(w_n(c))$ такова, что $P\big(\widetilde{M}_n \le w_n(c)\big) \to c \in (0,1)$. Далее мы покажем, что для $(w_n(c))$ выполнены следующие соотношения

$$\exp\Big(-\frac{w_n(c)^2}{2}\Big) \le K'(c)\frac{w_n(c)}{n} \quad \text{и} \quad w_n(c) \sim \sqrt{2\ln n}. \tag{1.79}$$

Используя нормальную лемму сравнения (1.77), имеем

$$\begin{aligned}\Big|\mathsf{P}\big(M_{\psi(n)} \le & w_n(c)\big) - \mathsf{P}\big(\widetilde{M}_n \le w_n(c)\big)\Big| \\ &\le 4L(\delta)n \sum_{(i,j)\in D_n} |r_{i,j} - \rho_n| \exp\left(-\frac{(w_n(c))^2}{1+\omega_{i,j}}\right),\end{aligned} \tag{1.80}$$

где $D_n = \{(i,j) : 0 \le i \le \frac{n}{\ln n}, 0 \le j \le \ln n\} \setminus \{(0,0)\}$ и $\omega_{i,j} = \max\{r_{i,j}, \rho_n\} = r_{i,j}$ на D_n. Разобьем множество индексов D_n на три меньших части $D_n = D_n^{(1)} \sqcup D_n^{(2)} \sqcup D_n^{(3)}$, где $D_n^{(1)} = \{(i,j) : 0 \le i \le n^\alpha, 0 \le j \le \ln n\} \setminus \{(0,0)\}$, $D_n^{(2)} = \{(i,j) : n^\alpha < i \le \frac{n}{\ln n}, 0 \le j \le (\ln n)^\beta\}$ и $D_n^{(3)} = \{(i,j) : n^\alpha < i \le \frac{n}{\ln n}, (\ln n)^\beta < j \le \ln n\}$, где параметры α и β будут выбраны позднее.

Из (1.73) мы получаем, что $\delta < (1-2\gamma_1)/(1+2\gamma_1)$, или, что эквивалентно, $2\gamma_1 < (1-\delta)/(1+\delta)$. Это означает, что можно найти α, удовлетворяющее соотношению

$$2\gamma_1 < \alpha < \frac{1-\delta}{1+\delta}.$$

Из (1.79) мы получаем, что при $n \to \infty$ выполнено

$$\begin{aligned} n \sum_{(i,j)\in D_n^{(1)}} |r_{i,j}-\rho_n| \exp\Big(-\frac{(w_n(c))^2}{1+r_{i,j}}\Big) &\le n\, n^{\alpha} \ln n \exp\left(-\frac{(w_n(c))^2}{1+\delta}\right) \\ &\le (K'(c))^{\frac{2}{1+\delta}} n^{\alpha+1} \ln n \left(\frac{w_n(c)}{n}\right)^{\frac{2}{1+\delta}} \\ &\sim (\sqrt{2}K'(c))^{\frac{2}{1+\delta}} n^{\alpha-\frac{1-\delta}{1+\delta}} (\ln n)^{\frac{2+\delta}{1+\delta}} \to 0. \end{aligned}$$

Оценивание суммы по $(i,j) \in D_n^{(2)}$ является чуть более сложной задачей. Для пар индексов $(i,j) \in D_n^{(2)}$ имеем $|r_{i,j}-\rho_n| \le r_{i,j} \le \frac{\gamma_1}{\alpha}\frac{\ln\ln n}{\ln n} =: \delta_n$. Отсюда мы получаем

$$\begin{aligned} n \sum_{(i,j)\in D_n^{(2)}} |r_{i,j}-\rho_n| \exp\Big(-\frac{u_n^2}{1+r_{i,j}}\Big) &\le \frac{\gamma_1}{\alpha} n \frac{n}{\ln n} (\ln n)^{\beta} \frac{\ln\ln n}{\ln n} \exp\left(-\frac{u_n^2}{1+\delta_n}\right) \\ &\le \frac{\gamma_1}{\alpha}(K'(c))^2 n^2 (\ln n)^{\beta-2} \ln\ln n \left(\frac{\sqrt{2\ln n}}{n}\right)^2 n^{2\delta_n} \\ &= \frac{\gamma_1}{\alpha}(K'(c))^2 (\ln n)^{\beta-1} \ln\ln n \exp\left(2\frac{\gamma_1}{\alpha}\frac{\ln\ln n}{\ln n}\ln n\right) \\ &= \frac{\gamma_1}{\alpha}(K'(c))^2 (\ln n)^{\beta+2\gamma_1/\alpha-1} \ln\ln n. \end{aligned} \tag{1.81}$$

Поскольку $\gamma_1 < \alpha/2$, можно найти такое положительное β, что оно удовлетворяет неравенству $\beta + 2\gamma_1/\alpha - 1 < 0$. Для такого β выражение в (1.81) стремится к 0.

Осталось показать, что сумма по $(i,j) \in D_n^{(3)}$ стремится к 0 при $n \to \infty$. Обозначим $\delta_n' = \max_{(i,j)\in D_n^{(3)}} r_{i,j}$ и заметим, что $\delta_n' \le \frac{\gamma_1\gamma_2}{\alpha\beta}/\ln n$.

Разобьем сумму на два множителя и оценим каждый по отдельности.

$$n \sum_{(i,j)\in D_n^{(3)}} |r_{i,j}-\rho_n| \exp\left(-\frac{(w_n(c))^2}{1+r_{i,j}}\right) \le n \exp\left(-\frac{(w_n(c))^2}{1+\delta_n'}\right) \sum_{(i,j)\in D_n^{(3)}} \big(r_{i,j}-\rho_n\big)$$
$$= \Big\{\frac{n^2}{\ln n}\exp\left(-\frac{(w_n(c))^2}{1+\delta_n'}\right)\Big\}\cdot\Big\{\frac{\ln n}{n}\sum_{(i,j)\in D_n^{(3)}} r_{i,j}-\rho_n\Big\} = I_1(n)\cdot I_2(n).$$

Используя (1.79), мы получаем ограниченность $\{I_1(n)\}$. Действительно,

$$I_1(n) = \frac{n^2}{\ln n}\exp\Big(-\frac{(w_n(c))^2}{1+\delta_n'}\Big) \le (K'(c))^2\frac{n^2}{\ln n}\left(\frac{w_n(c)}{n}\right)^2\left(\frac{n}{w_n(c)}\right)^{2\frac{\gamma_1\gamma_2}{\alpha\beta}/\ln n}$$
$$\sim (K'(c))^2\frac{n^2}{\ln n}\frac{2(\ln n)^2}{n^2}e^{2\frac{\gamma_1\gamma_2}{\alpha\beta}}(1+o(1)) = O(1).$$

Для завершения доказательства (1.78) осталось показать, что $I_2(n)\to 0$ при $n\to\infty$. Имеем,

$$\frac{\ln n}{n}\sum_{(i,j)\in D_n^{(3)}}\big(r_{i,j}-\rho_n\big) = \frac{\ln n}{n}\sum_{(i,j)\in D_n^{(3)}} r_{i,j} - \frac{\ln n}{n}\Big(\frac{n}{\ln n}-n^\alpha\Big)\big(\ln n-(\ln n)^\beta\big)\rho_n$$
$$= \gamma_1\gamma_2\frac{\ln n}{n}\Big(\sum_{i=n^\alpha}^{n/\ln n}\frac{\ln\ln i}{\ln i}\Big)\Big(\sum_{j=(\ln n)^\beta}^{\ln n}\frac{1}{\ln j}\Big) - \gamma_1\gamma_2(1+O((\ln n)^{\beta-1})).$$

Оценим две полученные суммы. Интегрируя по частям, имеем для $1<a<b$

$$\int_a^b \ln t\frac{e^t}{t}\,dt \le \frac{a}{a-1}\ln b\frac{e^b}{b}, \quad \text{and} \quad \int_a^b \frac{e^t}{t}\,dt \le \frac{a}{a-1}\frac{e^b}{b}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=n^\alpha}^{n/\ln n}\frac{\ln\ln i}{\ln i} \le \int_{n^{\alpha/2}}^{n/\ln n}\frac{\ln\ln y}{\ln y}dy = \int_{\alpha\ln n/2}^{\ln n-\ln\ln n}\ln t\frac{e^t}{t}\,dt$$
$$\le \frac{\alpha\ln n/2}{\alpha\ln n/2-1}\ln(\ln n-\ln\ln n)\frac{e^{\ln n-\ln\ln n}}{\ln n-\ln\ln n}$$
$$= \frac{n\ln\ln n}{(\ln n)^2}\left(1+O(\frac{\ln\ln n}{\ln n})\right).$$

Аналогично,

$$\sum_{j=(\ln n)^{\beta}}^{\ln n} \frac{1}{\ln j} \le \int_{(\ln n)^{\beta/2}}^{\ln n} \frac{1}{\ln y} dy = \int_{\beta \ln\ln n/2}^{\ln\ln n} \frac{e^t}{t} dt$$
$$\le \frac{\beta \ln\ln n/2}{\beta \ln\ln n/2 - 1} \frac{e^{\ln\ln n}}{\ln\ln n} = \frac{\ln n}{\ln\ln n} \left(1 + O\big(\frac{1}{\ln\ln n}\big)\right).$$

Окончательно, имеем

$$I_2(n) \le \gamma_1\gamma_2 \Big\{ \Big(1+O\big(\frac{1}{\ln\ln n}\big)\Big) \left(1 + O\big(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\big)\right) - (1+O((\ln n)^{\beta-1})) \Big\} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Чтобы завершить доказательство (1.78), мы должны проверить (1.79). Следующее утверждение является аналогом теоремы 6.5.1 [137] для двумерного случая.

Предложение 1.16. *Существует непрерывная строго возрастающая функция распределения H такая, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\mathsf{P}\big(a_n\big(\widetilde{M}_n - b_n\big) \le x\big) \to H(x),$$

где

$$a_n = \sqrt{2\ln n}, \quad b_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln\ln n + \ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для каждого $c \in (0,1)$ определим $x = x(c)$ таким образом, что $H(x) = c$, и обозначим $y_n(c) = x(c)/a_n + b_n$.

Если $\mathsf{P}\big(\widetilde{M}_n \le w_n(c)\big) \to c \in (0,1)$, то $|w_n(c) - y_n(c)| = o(1/\sqrt{\ln n})$ и, тем самым, $(w_n(c))$ удовлетворяет соотношению (1.79).

Доказательство. Доказательство первой части предложения фактически совпадает с соответствующей частью доказательства теоремы 6.5.1 [137] (см. также [156]). Но в последней теореме идет речь о частичных максимумах стационарной последовательности, то есть результат теоремы не сформулирован в терминах схемы серий, как это требуется в нашей постановке. Поэтому мы приведем здесь полное доказательство.

Предположим для удобства, что $\boldsymbol{\psi}(n)^* = n$. По определению, $\widetilde{M}_n$ равен по распределению случайной величине $\sqrt{1-\rho_n}\,\widehat{M}_n + \sqrt{\rho_n}\,\zeta$, где $\widehat{M}_n$ – максимум последовательности из n независимых стандартных нормальных случайных величин и ζ – это стандартная нормальная случайная величина, независимая с $\widehat{M}_n$. Отсюда мы получаем

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\big(a_n\big(\widetilde{M}_n - b_n\big) \le x\big) &= \mathsf{P}\Big(\sqrt{1-\rho_n}\,\widehat{M}_n + \sqrt{\rho_n}\,\zeta \le x/a_n + b_n\Big) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{P}\Big(\widehat{M}_n \le (1-\rho_n)^{-1/2}\big(x/a_n + b_n - \sqrt{\rho_n}z\big)\Big)\,\varphi(z)\,dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\Phi\big((1-\rho_n)^{-1/2}\big(x/a_n + b_n - \sqrt{\rho_n}z\big)\big)\Big)^n\,\varphi(z)\,dz \\
&\to \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\exp(-x - \gamma_1\gamma_2 + \sqrt{2\gamma_1\gamma_2}z))\varphi(z)\,dz \\
&=: H(x),
\end{aligned}$$

поскольку (подробнее см. в доказательстве теоремы 6.5.1 [137])

$$(1-\frac{\gamma_1\gamma_2}{\ln n})^{-1/2}(x/a_n+b_n-\sqrt{\frac{\gamma_1\gamma_2}{\ln n}}z) = \frac{x+\gamma_1\gamma_2-\sqrt{2\gamma_1\gamma_2}z}{a_n}+b_n+o((a_n)^{-1}).$$

Предположим, что $\mathsf{P}\big(\widetilde{M}_n \le w_n(c)\big) \to c \in (0,1)$. Рассмотрим уровни $y_n(c) = x(c)/a_n + b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $x' < x(c) < x''$. Окончательно, получаем

$$\frac{x'-x(c)}{a_n} = x'/a_n+b_n-y_n(c) \le w_n(c)-y_n(c) \le x''/a_n+b_n-y_n(c) = \frac{x''-x(c)}{a_n}.$$

Поскольку x' и x'' могут быть выбраны сколь угодно близкими,

$$|w_n(c) - y_n(c)| = o((a_n)^{-1}).$$

Отсюда легко следует (1.79). □

Тем самым, мы доказали следующую теорему, являющуюся основным результатом раздела 1.6.

Теорема 1.17. *Существует стационарное случайное поле на $\mathbb{Z}^d$ такое, что у него существует экстремальный индекс по некоторым направлениям, но не существует глобального экстремального индекса.*

1.7 Метод невязки оценивания экстремального индекса стационарной последовательности

В этом разделе мы предложим метод выбора гиперпараметра для оценок экстремального индекса θ стационарной последовательности, основанный на методе невязки. В случае, если оценка экстремального индекса зависит только от одного гиперпараметра (например, от параметра уровня, как интервальная оценка и оценка K-Gaps), то метод дает автоматическую процедуру оценивания экстремального индекса.

Непараметрические оценки θ требуют дополнительного выбора параметра уровня и/или декластеризующего параметра (например, размер блока или цикла). Классические оценки блоков и пробегов зависят от уровня u и размера блока b или количества подряд идущих непревышений r уровня u [52], то же относится к оценкам непересекающихся блоков и скользящих блоков [181]. Интервальная оценка [93], оценка K-Gaps [190] и оценки, введенные в работе [179] требуют выбора лишь параметра u. Не так давно начали появляться оценки, зависящие только от размера блока [159], [53].

Меньше внимания в литературе посвящено методам выбора этих дополнительных параметров. Как правило, в качестве значения параметра u предлагается взять выборочную квантиль высокого уровня или же u выбирается визуально как точка стабильности графика значений используемой оценки экстремального индекса. В работе [97] для выбора оптимальной пары (u, K) при оценивании с помощью оценки K-Gaps был предложен IMT-критерий (критерий на основе матрицы информации), на сегодняшний день считающийся лучшим методом оценивания экстремального индекса. Несколько способов выбора u при использовании интервальной оценки было предложено в работе [92]. Идея применения метода невязки для выбора параметра u впервые была использована в работе [146].

Итак, пусть $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ – стационарная случайная последовательность, имеющая экстремальный индекс $\theta \in [0, 1]$. Обсудим некоторые свойства таких последовательностей. Обозначим

через $L = L(n)$ количество превышений уровня u последовательностью $(X_i)_{i=1}^n$ и через $S_j(u)$ – индекс j-го превышения, то есть

$$S_j(u) = \min\{k > S_{j-1}(u) : X_k > u\}, \quad j = 1, \ldots, L,$$

где $S_0 = 0$. Определим *интеркластерные расстояния* как

$$T_j(u) = S_{j+1}(u) - S_j(u), \quad j = 1, \ldots, L-1$$

и предположим, что их число равно L для удобства.

Введем следующее условие φ-перемешивания типа Лидбеттера.

Определение 1.18. [93] Для действительного u и натуральных $1 \le k \le l$ обозначим через $\mathcal{F}_{k,l}(u)$ σ-алгебру, порожденную событиями $\{X_i > u\}$, $k \le i \le l$. Определим коэффициенты перемешивания $\alpha_{n,q}(u)$:

$$\alpha_{n,q}(u) \;=\; \max_{1 \le k \le n-q} \sup |P(B|A) - P(B)|,$$

где супремум берется по всем множествам $A \in \mathcal{F}_{1,k}(u)$ с $P(A) > 0$ и $B \in \mathcal{F}_{k+l,n}(u)$.

Следующая теорема утверждает, что для некоторой последовательности уровней (u_n) выполнено

$$\overline{F}(u_n) T_1(u_n) \xrightarrow{d} T_\theta = \begin{cases} \eta, & \text{с вероятностью } \theta, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1-\theta, \end{cases}$$

где случайная величина η экспоненциально распределена с параметром θ.

Теорема 1.19. *[93] Пусть последовательность натуральных чисел (r_n) и последовательность уровней (u_n), $n \ge 1$, таковы, что при $r_n \to \infty$ выполнено $r_n \overline{F}(u_n) \to \tau$ и $P\{M_{r_n} \le u_n\} \to exp(-\theta\tau)$ при $n \to \infty$ для некоторого $\tau \in (0, \infty)$ и $\theta \in (0, 1]$. Если существуют такая последовательность натуральных чисел $q_n = o(r_n)$, $n \ge 1$, такая что $\alpha_{cr_n, q_n}(u_n) = o(1)$ для всех $c > 0$, то для $t > 0$ выполнено*

$$P\{\overline{F}(u_n) T_1(u_n) > t\} \to \theta \exp(-\theta t) =: 1 - F_\theta(t), \qquad n \to \infty. \qquad (1.82)$$

Более того, Теорема 2.4 [178] утверждает, что асимптотически ненулевые элементы последовательности

$$Z_i = \overline{F}(u_n)T_i(u_n), \quad i = 1, \ldots, L, \tag{1.83}$$

являются асимптотически независимыми в условиях теоремы 1.19 и некоторых других условиях, наложенных на структуру кластеров исходной стационарной последовательности (X_n).

Чтобы использовать эти свойства в дальнейшем, наложим следующее условие: предположим, что существует последовательность $(E_i)_{i=1}^{l}$, $l = [\theta L]$, независимых экспоненциально распределенных случайных величин с параметром θ таких, что

$$Z_{(L-k)} - E_{(l-k)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \tag{1.84}$$

равномерно по $k \to \infty$ таким, что $k/L \to 0$ при $L \to \infty$. Это предположение имеет следующее основание. Из теоремы 3.2 [178] следует, что предельное распределение статистики

$$\sqrt{L}\left(\sum_{i=1}^{L} f(Z_i) - Ef(Z_1)\right)$$

для некоторого класса непрерывных функций f не зависит от подстановки н.о.р. случайных величин $(Z_i^*)_{i=1}^{L}$ с функцией распределения F_θ вместо $(Z_i)_{i=1}^{L}$ в некоторых условиях регулярности. Кроме того, теорема 2.2.1 и лемма 2.2.3 [89] позволяют утверждать, что если $k \to \infty$ и $k/L \to c,\ c \in [0, \theta)$ при $L \to \infty$, то

$$\sqrt{k}(E_{(l-k)} - \ln(l/k)/\theta) = O_P(1).$$

Метод выбора параметра для оценивания экстремального индекса, о котором будет идти речь в данном разделе, основан на так называемом методе невязки, первоначально предложенном в работах [16] и [3], см. также монографию [144], для оптимального выбора окна пропускания в задаче оценивания плотности и впервые использованном для оценивания

экстремального индекса в работе [146]. Пусть $\rho(\cdot,\cdot)$ – это некоторая метрика на пространстве вероятностных мер, $\hat{F}_n$ – эмпирическая функция распределения последовательности случайных величин $(X_i)_{i=1}^n$, а $(F_u, u \in U)$ – семейство функций распределения, параметризованное одномерным параметром u. Тогда оптимальное значение параметра u выбирается как решение уравнения невязки

$$\rho(\hat{F}_n, F_u) = \delta, \tag{1.85}$$

где δ, так называемая величина невязки, определяется выбором ρ. В качестве ρ мы выберем статистику критерия согласия Крамера-фон Мизеса-Смирнова (ω^2-статистику)

$$\omega_n^2 = n \int_{\mathbb{R}} (\hat{F}_n(x) - F_0(x))^2 dF(x),$$

хотя статистики других критериев согласия, безусловно, также могут быть использованы в обсуждаемой задаче. В нашем случае в качестве δ в методе невязки могут быть выбраны квантили предельного распределения ω^2-статистики (в случае верности нулевой гипотезы). Стоит также отметить, что выбирать u как $\hat{u} = \operatorname{argmin}_u \rho(\hat{F}_n, F_u)$ не всегда оптимален, потому что такой выбор может привести к увеличению дисперсии оценки.

Обсудим теперь, как именно мы будем применять метод невязки для выбора высокого уровня (или размера блока) в задаче оценивания экстремального индекса стационарной последовательности. Для простоты предположим, что мы выбираем параметр уровня u. Казалось бы, для этой цели в методе невязки можно положить $F_u = T_{\hat{\theta}(u)}$, в качестве $\hat{F}_n$ взять эмпирическую функцию распределения набора случайных величин $(Z_i)_{i=1}^L$ и в качестве ρ – ω^2-статистику (1.85). Однако мы не можем напрямую применить метод невязки на основе ω^2-статистики для нашей задачи, поскольку распределение T_θ не является непрерывным (оно имеет атом в 0) и поэтому предельное распределение ω^2-статистики будет зависеть от θ. Для преодоления этого затруднения мы предложим модификацию ω^2-статистики,

построенную только на максимальных членах вариационного ряда последовательности $(Z_i)_{i=1}^L$, поскольку, как было отмечено выше, максимальные порядковые статистики этой последовательности имеют асимптотически непрерывное распределение и асимптотически независимы (конечно, как набор случайных величин, а не как их вариационный ряд). Тем самым, мы сталкиваемся с проблемой проверки гипотезы согласия для цензурированных наблюдений, которая подробно рассмотрена нами в разделе 3.6 этой диссертации.

Пусть $(Y_i)_{i=1}^n$ – н.о.р. случайные величины с функцией распределения F_Y. Напомним, что если гипотеза $H_0 : F_Y = F_0$, где F_0 – непрерывная функция распределения, верна, то ω^2-статистика может быть записана в следующей форме

$$\omega_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(F_0(Y_{(i)}) - \frac{i - 0.5}{n} \right)^2 + \frac{1}{12n},$$

где $Y_{(1)} \leq \ldots \leq Y_{(n)}$ – порядковые статистики выборки $(Y_i)_{i=1}^n$. Хорошо известно, что предельное распределение статистики ω_n^2 (обозначим его как A_1) в случае верности H_0 не зависит от F_0.

Критерии согласия для разных типов цензурирования данных широко обсуждались в литературе, см. классическую монографию [68] и недавнюю монографию [195], обзор литературы по этой тематике см. в разделе 3.6 этой диссертации. Введем модификацию ω^2-статистики, построенной по максимальным членам вариационного ряда выборки $(Z_i^*)_{i=1}^n$, определенной выше.

$$\hat{\omega}_k^2 = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{F_0(Z^*_{(n-i)}) - F_0(Z^*_{(n-k)})}{1 - F_0(Z^*_{(n-k)})} - \frac{k - i - 0.5}{k} \right)^2 + \frac{1}{12k}. \qquad (1.86)$$

Следующая теорема фактически является частным случаем теоремы 3.20 из раздела 3.6, поэтому ее доказательство мы здесь не приводим.

Теорема 1.20. *Пусть последовательность $k = k(L)$ такова, что $k \to \infty$ и $\limsup_{n\to\infty} k/L < \theta$ при $n \to \infty$. Тогда*

$$\hat{\omega}_k^2(\theta) \xrightarrow{d} \xi \sim A_1.$$

Но более интересен следующий вопрос: при каких условиях предельное поведение ω^2-статистики $\hat{\omega}_k^2(\theta)$ не изменится, если подставить вместо θ ее оценку $\widehat{\theta}$ и вместо выборки $(Z_i^*)_{i=1}^L$ нормированные интеркластерные расстояния $(Z_i)_{i=1}^L$? Заметим, что количество интеркластерных расстояний $L = L(u_{r_n})$ фактически является последовательностью случайных величин, стремящихся к бесконечности [178]. Как следует из теоремы 1.20, предельное распределение статистики $\omega_k^2(\theta)$ не зависит от $L(u_{r_n})$. В дальнейшем мы будем писать L вместо $L(u_{r_n})$.

Итак, в следующей теореме показано, что при некоторых условиях предельное распределение статистики

$$\widetilde{\omega}_L^2(\theta) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{F_\theta(Z_{(L-i)}) - F_\theta(Z_{(L-k)})}{1 - F_\theta(Z_{(L-k)})} - \frac{k-i-0.5}{k} \right)^2 + \frac{1}{12k}, \qquad (1.87)$$

куда вместо θ подставлено значение некоторой его оценки $\widehat{\theta}_n$, будет совпадать с предельным распределением A_1 классической ω^2-статистики.

Теорема 1.21. *Пусть выполнены условия теоремы 1.19 и условие (1.84). Предположим, что оценка экстремального индекса $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}_n$ такова, что*

$$\sqrt{m_n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \zeta, \quad n \to \infty,$$

где ζ имеет невырожденную функцию распределения H. Предположим также, что последовательность натуральных чисел (m_n) такова, что

$$\frac{k}{m_n} = o(1) \quad и \quad \frac{(\ln L)^2}{m_n} = o(1)$$

при $n \to \infty$. Тогда

$$\widetilde{\omega}_L^2(\widehat{\theta}_n) \xrightarrow{d} \xi \sim A_1.$$

Доказательство. Пусть последовательность случайных величин $\{E_i^{(L)}\}_{i=1}^{\lfloor \theta L \rfloor}$ удовлетворяет условию (1.84). Обозначим

$$t_i = 1 - \theta e^{-\theta E_{(l-i)}^{(L)}}, \quad \widehat{t}_i = 1 - \widehat{\theta}_n e^{-\widehat{\theta}_n E_{(l-i)}^{(L)}},$$

$$a_i = ((L-i)-(L-k)-0.5)/k, \quad 0 \le i < k.$$

Возвращаясь к (1.86) и (1.87), рассмотрим следующую разность

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_L^2(\widehat{\theta}_n) - \hat{\omega}_k^2(\theta) &= \left(\widetilde{\omega}_L^2(\widehat{\theta}_n) - \hat{\omega}_k^2(\widehat{\theta}_n)\right) + \left(\hat{\omega}_k^2(\widehat{\theta}_n) - \hat{\omega}_k^2(\theta)\right) \\
&= \left(\widetilde{\omega}_L^2(\widehat{\theta}_n) - \hat{\omega}_k^2(\widehat{\theta}_n)\right) + \left(\hat{\omega}_k^2(\widehat{\theta}_n) - \frac{1}{12k}\right)\left(1 - \frac{(1-\widehat{t}_k)^2}{(1-t_k)^2}\right) \\
&+ \left(\left(\hat{\omega}_k^2(\widehat{\theta}_n) - \frac{1}{12k}\right)\frac{(1-\widehat{t}_k)^2}{(1-t_k)^2} - \left(\hat{\omega}_k^2(\theta) - \frac{1}{12k}\right)\right). \qquad (1.88)
\end{aligned}$$

Третий член в правой части (1.88) равен

$$\frac{1}{(1-t_k)^2}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\left(\widehat{t}_i - \widehat{t}_k - a_i(1-\widehat{t}_k)\right)^2 - \sum_{i=0}^{k-1}\left(t_i - t_k - a_i(1-t_k)\right)^2\right).$$

Используя соотношение $x^2 - y^2 = (y-x)^2 - 2y(y-x)$, имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1-t_k)^2}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\left(\widehat{t}_i - \widehat{t}_k - a_i(1-\widehat{t}_k)\right)^2 - \sum_{i=0}^{k-1}\left(t_i - t_k - a_i(1-t_k)\right)^2\right) \\
= &\frac{1}{(1-t_k)^2}\sum_{i=0}^{k-1}\left(t_i - \widehat{t}_i - (t_k - \widehat{t}_k)(1-a_i)\right)^2 \\
- &\frac{2}{(1-t_k)^2}\sum_{i=0}^{k-1}\left(t_i - \widehat{t}_i - (t_k - \widehat{t}_k)(1-a_i)\right)\left(t_i - t_k - a_i(1-t_k)\right).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы можем переписать первоначальную разность

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}_k^2(\widehat{\theta}_n) - \hat{\omega}_k^2(\theta) &= \left(\hat{\omega}_k^2(\widehat{\theta}_n) - \frac{1}{12k}\right)\left(1 - \frac{(1-\widehat{t}_k)^2}{(1-t_k)^2}\right) \\
&+ \frac{1}{(1-t_k)^2}\sum_{i=0}^{k-1}\left(t_i - \widehat{t}_i - (t_k - \widehat{t}_k)(1-a_i)\right)^2 \\
&- \frac{2}{(1-t_k)^2}\sum_{i=0}^{k-1}\left(t_i - \widehat{t}_i - (t_k - \widehat{t}_k)(1-a_i)\right)\left(t_i - t_k - a_i(1-t_k)\right). \qquad (1.89)
\end{aligned}$$

Найдем асимптотику разности $t_i - \widehat{t}_i = \theta e^{-\theta E^{(L)}_{(l-i)}} - \widehat{\theta}_n e^{-\widehat{\theta}_n E^{(L)}_{(l-i)}}$, $0 \le i \le k$. Имеем,

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_n e^{-\widehat{\theta}_n E^{(L)}_{(l-i)}} - \theta e^{-\theta E^{(L)}_{(l-i)}} &= (\widehat{\theta}_n - \theta) e^{-\widehat{\theta}_n E^{(L)}_{(l-i)}} \\ &+ \theta e^{-\theta E^{(L)}_{(l-i)}} (e^{-E^{(L)}_{(l-i)}(\widehat{\theta}_n - \theta)} - 1). \end{aligned} \tag{1.90}$$

По (1.88) получаем

$$\widehat{\theta}_n - \theta = O_P\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right). \tag{1.91}$$

Имеем, $U_{(i+1)} \stackrel{d}{=} e^{-E^{(L)}_{(l-i)}\theta} \le e^{-E^{(L)}_{(l-k)}\theta} \stackrel{d}{=} U_{(k+1)}$, $0 \le i < k < l$, где $\{U_{(i)}\}$ – порядковые статистики выборки из равномерного закона размера l. По лемме Смирнова о порядковой статистике (см. теорему 2.2.3 [89]) получаем

$$\frac{U_{(k)} - \frac{k-1}{l-1}}{\sqrt{\frac{(k-1)(l-k)}{(l-1)^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

при $k \to \infty$, $L \to \infty$, $L - k \to \infty$. Поскольку оба выражения

$$\frac{k-1}{l-1} - \frac{k}{l} = -\frac{l-k}{l(l-1)} \qquad \text{и} \quad \frac{l-k}{l(l-1)}\sqrt{\frac{(l-1)^3}{(l-k)(k-1)}} = \sqrt{\frac{(l-1)(l-k)}{(k-1)l^2}}$$

есть $o(1)$, то в тех же условиях, что и в лемме Смирнова, используя лемму Слуцкого, получаем

$$\frac{U_{(k)} - \frac{k}{l}}{\sqrt{\frac{k(l-k)}{l^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Отсюда следует, что

$$1 - t_k = \theta e^{-E^{(L)}_{(l-k)}\theta} = \frac{k}{L}(1 + o_P(1)), \tag{1.92}$$

и $E^{(L)}_{(l-i)} = \ln(l/i)/\theta(1 + o_P(1))$ при $i \le k$, $i \to \infty$. Используя условие $(\ln L)^2 = o(m_n)$, мы получаем, что $E^{(L)}_{(l-i)}(\widehat{\theta}_n - \theta) = o_P(1)$ и

$$e^{-E^{(L)}_{(l-i)}(\widehat{\theta}_n - \theta)} - 1 = -E^{(L)}_{(l-i)}(\widehat{\theta}_n - \theta)(1 + o_P(1)). \tag{1.93}$$

Тем самым, первый член в правой части (1.90) асимптотически меньше второго. Значит, из (1.90), (1.92) и (1.93) следует

$$\hat{t}_i - t_i = -\frac{i}{L} E^{(L)}_{(l-i)}(\widehat{\theta}_n - \theta)(1 + o(1)) = O_P\left(\frac{i \ln(i/L)}{L\sqrt{m_n}}\right).$$

Отсюда, асимптотика выражения $t_i - \widehat{t}_i - (t_k - \widehat{t}_k)\,(1 - a_i)$ следующая

$$\begin{aligned} & \frac{i}{L} E^{(L)}_{(l-i)}(\widehat{\theta}_n - \theta)(1 + o_P(1)) - \frac{i + 0.5}{k}\frac{k}{L} E^{(L)}_{(l-k)}(\widehat{\theta}_n - \theta)(1 + o_P(1)) \\ = \; & -\frac{i}{L}(E^{(L)}_{(l-k)} - E^{(L)}_{(l-i)})(\widehat{\theta}_n - \theta)(1 + o_P(1)) = O_P\left(\frac{i \ln(k/i)}{L\sqrt{m_n}}\right), \quad (1.94) \end{aligned}$$

здесь мы также использовали формулы (1.91) и

$$E^{(L)}_{(l-i)} - E^{(L)}_{(l-k)} \stackrel{d}{=} \frac{\ln(k/i)}{\theta}(1 + o_P(1)). \quad (1.95)$$

Заметим, что максимум функции $f(x) = \ln(a/x)x$, где a – положительная константа, достигается в точке $x_0 = a/e$, поэтому $i \ln(k/i) \le k/e$, $1 \le i \le k$. Отсюда, из (1.92), (1.94) мы получаем асимптотику второго члена в правой части соотношения (1.89)

$$\frac{1}{(1 - t_k)^2} \sum_{i=0}^{k-1} \left(t_i - \widehat{t}_i - (t_k - \widehat{t}_k)\,(1 - a_i)\right)^2 = O_P\left(\frac{k}{m_n}\right) = o_P(1),$$

где последнее равенство вытекает из (1.21). Оценим теперь асимптотику третьего слагаемого в правой части (1.89). Обращение к (1.94) и

неравенству Коши-Буняковского дает нам следующее

$$
\begin{aligned}
& \frac{2}{(1-t_k)^2}\left|\sum_{i=0}^{k-1}\left(t_i-\widehat{t}_i-(t_k-\widehat{t}_k)\,(1-a_i)\right)(t_i-t_k-a_i(1-t_k))\right| \\
\leq\ & \max_i\left(\frac{i}{L}(E^{(L)}_{(l-i)}-E^{(L)}_{(l-k)})|\widehat{\theta}_n-\theta|\right)\cdot\frac{2}{(1-t_k)^2} \\
\cdot\ & \sum_{i=0}^{k-1}\left|1-\theta\exp(-E^{(L)}_{(l-i)}\theta)-t_k-\frac{k-i-0.5}{k}(1-t_k)\right|(1+o_P(1)) \\
\leq\ & O_P\left(\frac{k}{L\sqrt{m_n}}\right)\frac{2\sqrt{k}}{(1-t_k)^2}\cdot \\
\cdot\ & \sqrt{\sum_{i=0}^{k-1}\left(1-\theta\exp(-E^{(L)}_{(l-i)}\theta)-t_k-\frac{k-i-0.5}{k}(1-t_k)\right)^2} \\
=\ & O_P\left(\frac{k^{3/2}}{L\sqrt{m_n}}\right)\frac{2}{(1-t_k)}\sqrt{\hat{\omega}^2_k(\theta)-\frac{1}{12k}}=O_P\left(\frac{k^{3/2}}{L\sqrt{m_n}}\cdot\frac{L}{k}\right) \\
=\ & O_P\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m_n}}\right)=o_P(1),
\end{aligned}
$$

где последние две строки следуют из (1.21), (1.92) и соотношения $\hat{\omega}^2_k(\theta)-\frac{1}{12k}=O_P(1)$, которое верно по теореме 1.20.
Отсюда, по (1.88) сумма второго и третьего членов правой части (1.89) равна

$$\left(\hat{\omega}^2_k(\widehat{\theta}_n)-\frac{1}{12k}\right)\frac{(1-\widehat{t}_k)^2}{(1-t_k)^2}-\left(\hat{\omega}^2_k(\theta)-\frac{1}{12k}\right)=o_P(1). \tag{1.96}$$

Теперь докажем, что асимптотика первого члена в правой части (1.89) равна $O_P(\frac{\ln L}{\sqrt{m_n}})$. Покажем, что верно соотношение

$$\frac{(1-\widehat{t}_k)^2}{(1-t_k)^2}-1\ =\ o_P(1).$$

Используя (1.90), (1.92) и (1.94), имеем

$$\frac{(1-\widehat{t}_k)^2}{(1-t_k)^2}-1=\frac{(\widehat{\theta}_n e^{-\widehat{\theta}_n E^{(L)}_{(l-k)}})^2}{(\theta e^{-\theta E^{(L)}_{(l-k)}})^2}-1=(\widehat{\theta}_n e^{-\widehat{\theta}_n E^{(L)}_{(l-k)}}-\theta e^{-\theta E^{(L)}_{(l-k)}})\cdot$$

$$\cdot\quad (\widehat{\theta}_n e^{-\widehat{\theta}_n E^{(L)}_{(l-k)}}-\theta e^{-\theta E^{(L)}_{(l-k)}}+2\theta e^{-\theta E^{(L)}_{(l-k)}})/(\theta e^{-\theta E^{(L)}_{(l-k)}})^2$$

$$=\quad \frac{O_P\left(\frac{k\ln L}{L\sqrt{m_n}}\right)\left(O_P\left(\frac{k\ln L}{L\sqrt{m_n}}\right)+O_P\left(\frac{k}{L}\right)\right)}{O_P\left(\frac{k^2}{L^2}\right)}=O_P\left(\frac{\ln L}{\sqrt{m_n}}\right)=o_P(1) \quad (1.97)$$

Осталось лишь показать, что $\hat{\omega}^2_k(\widehat{\theta}_n)-\frac{1}{12k}=O_P(1)$. Как следует из (1.97), $\frac{(1-\widehat{t}_k)^2}{(1-t_k)^2}=O_P(1)$. Деля выражение (1.96) на $\frac{(1-\widehat{t}_k)^2}{(1-t_k)^2}$, мы снова получаем выражение, которое ведет себя как $o_P(1)$. А именно, мы получаем

$$\left(\hat{\omega}^2_k(\widehat{\theta}_n)-\frac{1}{12k}\right)-\left(\hat{\omega}^2_k(\theta)-\frac{1}{12k}\right)\frac{(1-t_k)^2}{(1-\widehat{t}_k)^2}=\left(\hat{\omega}^2_k(\widehat{\theta}_n)-\frac{1}{12k}\right)$$

$$-\quad \left(\hat{\omega}^2_k(\theta)-\frac{1}{12k}\right)\left(\frac{(1-t_k)^2}{(1-\widehat{t}_k)^2}-1\right)-\left(\hat{\omega}^2_k(\theta)-\frac{1}{12k}\right)=o_P(1). \quad (1.98)$$

Из (1.97) вытекает, что второй член в левой части (1.98) есть $o_P(1)$, отсюда следует

$$\hat{\omega}^2_k(\widehat{\theta}_n)-\frac{1}{12k}=O_P\left(\hat{\omega}^2_k(\theta)-\frac{1}{12k}\right)=O_P(1).$$

Значит, первый член в (1.89) есть $o_P(1)$.

Осталось показать, что первый член в (1.88) есть $o_P(1)$. Имеем,

$$\widetilde{\omega}^2_L(\widehat{\theta}_n)-\hat{\omega}^2_k(\widehat{\theta}_n)=\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{i+0.5}{k}-y_i\right)^2-\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{i+0.5}{k}-e_i\right)^2$$

$$=\quad \sum_{i=0}^{k-1}\left(2\frac{i+0.5}{k}-e_i-y_i\right)(e_i-y_i),$$

где $e_i=e_i(\widehat{\theta}_n)=\exp\left(-\widehat{\theta}_n(E^{(L)}_{(l-i)}-E^{(L)}_{(l-k)})\right)$ и $y_i=y_i(\widehat{\theta}_n)=$
$=\exp\left(-\widehat{\theta}_n(Z_{(L-i)}-Z_{(L-k)})\right)$, $i\in\{0,\ldots,k-1\}$. Как легко следует из (1.84), (1.21) и (1.91), для всех i, $0\le i\le k-1$, выполнено

$$e_i-y_i\quad =\quad \exp\Big(-\widehat{\theta}_n(E^{(L)}_{(l-i)}-E^{(L)}_{(l-k)})\Big)-\exp\Big(-\widehat{\theta}_n(E^{(L)}_{(l-i)}-E^{(L)}_{(l-k)}+o_P(1/\sqrt{k}))\Big)$$

$$=\quad o_P(1/\sqrt{k}).$$

Наконец, из последнего соотношения, (1.21), (1.91) и (1.95) мы получаем для всех i, $0 \le i \le k-1$, что

$$2\frac{i+0.5}{k} - e_i - y_i = o_P(1/\sqrt{k}).$$

Значит,

$$\widetilde{\omega}_L^2(\widehat{\theta}_n) - \hat{\omega}_k^2(\widehat{\theta}_n) = \sum_{i=0}^{k-1} o_P(1/k) = o_P(1), \tag{1.99}$$

что завершает доказательство теоремы. □

Теорема 1.21 показывает, что при использовании метода невязки

$$\widetilde{\omega}_L^2(\widehat{\theta}_n(u)) = \delta \tag{1.100}$$

для оптимального выбора высокого уровня u в задаче оценивания экстремального индекса мы можем в качестве δ выбрать квантиль распределения A_1, например, его моду $\delta = 0.05$. Нам осталось обсудить 2 вопроса, связанных с этим методом: что делать, если у уравнения невязки существует несколько решений, и как оптимально выбирать параметр k.

Предположим, что у уравнения невязки (1.100) d решений $(u_1, \ldots, u_d)$. В этом случае в качестве финального значения оценки можно предложить среди прочих вариантов

$$\hat{\theta}_1 = \widehat{\theta}_n(u_{\min}),\ \hat{\theta}_2 = \widehat{\theta}_n(u_{\max}),\ \hat{\theta}_3 = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} \widehat{\theta}_n(u_i),$$

где $u_{\min} = \min(u_1, \ldots, u_d)$, $u_{\max} = \max(u_1, \ldots, u_d)$. Численное моделирование, проведенное в работе [150], показывает, что наиболее предпочтительной является последняя оценка $\hat{\theta}_3$, что можно объяснить тем, что взятие среднего по нескольким оценкам снижает совокупное среднеквадратическое отклонение итоговой оценки.

Исходя из численного моделирования, наиболее удачным выбором параметра k, удовлетворяющим условиям теоремы 1.21, является $k =$

$\min\{\widehat{\theta}_0 L(u), L(u)^\beta\}$, $0 < \beta < 1$, где $\widehat{\theta}_0$ – некоторая пилотная оценка экстремального индекса, например, интервальная оценка или оценка методом K-Gaps. Однако, как выяснилось, в случае выбора $k = \widehat{\theta}_0 L(u)$, который не удовлетворяет условиям теоремы 1.21, метод показывает лучшие результаты с точки зрения малости среднеквадратического отклонения, что невольно поднимает вопрос об асимптотическом поведении модификации ω^2-статистики в случае, если $k/L \to c$, где $c \in (0,1)$ – ненулевая константа. Этот вопрос мы рассмотрим в следующем разделе диссертации.

1.8 Метод невязки оценивания экстремального индекса: случай $k/L \to c > 0$.

Предельные распределения статистик критериев согласия в случае подстановки вместо параметров распределения их оценок активно изучались различными авторами. Начало этой уже ставшей классической теории было положено в работах [70] и [130], тогда как общий метод получения предельного распределения был предложен в статье [83]. Однако этот метод, основанный на многомерной центральной предельной теореме и сходимости в пространстве Скорохода, не может быть напрямую использован в задаче поиска предельного распределения статистики $\widetilde{\omega}_L^2(\widehat{\theta}_n)$, в случае если не выполнено условие $k/m_n = o(1)$ в теореме 1.21 ($m_n = O(L)$ для интервальной оценки и оценки методом K-Gaps, поэтому мы можем говорить о случае $k/L = o(1)$). По этой причине мы рассмотрим другую, нежели в разделе 1.7, модификацию ω^2-статистики, фактически являющуюся частным случаем ω^2-статистики для цензурированных данных, предложенной в работе [166],

$$\omega_{L,c}^2(\theta) = L \int_{x(c)}^{\infty} (F_L^*(x) - F_\theta(x))^2 dF_\theta(x), \tag{1.101}$$

где $F_L^*(x)$ – эмпирическая функция распределения последовательности $(Z_i)_{i \le L}$ и $x(c) = \inf\{x : F_\theta(x) \ge 1 - c\} =: F_\theta^{\leftarrow}(1-c)$, $c \in (0,1)$. В дальнейшем мы будем предполагать, что $0 < c < \theta$, тогда $F_\theta(x(c)) =$

$1-c$. Как следует из результатов работы [166] и предположения (1.84), статистика $\omega^2_{L,c}$ сходится по распределению к случайной величине $\omega^2(c)$, где

$$\omega^2(c) = \int_{1-c}^{1} B^2(t)dt$$

и $B(t)$ – стандартный броуновский мост, то есть гауссовский процесс на отрезке $[0,1]$ с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $\mathrm{cov}(B_t, B_s) = \min(t,s) - ts$.

Обозначим $\ell_c(t) = \max(t-(1-c), 0)$. Следуя идеям [83], введем эмпирический процесс

$$y_{L,c}(t,\theta) = \sqrt{L}\left(\hat{F}_{L,c}(t,\theta) - \ell_c(t)\right), \quad t \in [0,1],$$

где

$$\hat{F}_{L,c}(t,\theta) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} I(1-c < F_\theta(Z_i) \le t),$$

назовем ее усеченной эмпирической функцией распределения последовательности $(Z_i)_{i\le L}$. Легко видеть, что поскольку $\theta > c$, выполнено

$$\int_0^1 y^2_{L,c}(t,\theta)dt = \omega^2_{L,c}(\theta).$$

Обозначим через D пространство Скорохода, то есть пространство непрерывных справа и имеющих предел слева функций на $[0,1]$ и метрику $d(x,y)$ на нем (см. например [56], с. 111).

Напомним, что нас интересует предельное распределение статистики $\omega^2_{L,c}(\hat{\theta}_n)$, где $\hat{\theta}_n$ – оценка экстремального индекса. Как будет следовать из теоремы 1.22, это предельное распределение будет зависеть от того, какую оценку экстремального индекса мы выберем. Возьмем для этой цели интервальную оценку [93], см. также [52], с. 391, которая определяется следующим образом:

$$\hat{\theta}_n(u_n) = \begin{cases} \min(1, \hat{\theta}^1_n(u)), \text{ если } \max\{T_i(u_n),\ 1 \le i \le L\} \le 2, \\ \min(1, \hat{\theta}^2_n(u)), \text{ если } \max\{T_i(u_n),\ 1 \le i \le L\} > 2, \end{cases} \quad (1.102)$$

где

$$\hat{\theta}_n^1(u_n) = \frac{2\left(\sum_{i=1}^{L} T_i(u_n)\right)^2}{L\sum_{i=1}^{L}(T_i(u_n))^2} \quad \text{и} \quad \hat{\theta}_n^2(u_n) = \frac{2\left(\sum_{i=1}^{L}(T_i(u_n)-1)\right)^2}{L\sum_{i=1}^{L}(T_i(u_n)-1)(T_i(u_n)-2)}.$$

Известно, что

$$\sqrt{L}(\hat{\theta}_n(u_n) - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \theta^3 v(\theta)), \tag{1.103}$$

где $v(\theta)$ – второй момент распределения размера кластера стационарной последовательности $\{\pi(m)\}_{m\geq 1}$, [178].

Следующая теорема позволяет нам найти предельное распределение статистики $\omega^2_{L,c}(\hat{\theta}_n)$, где $\hat{\theta}_n$ – интервальная оценка экстремального индекса.

Теорема 1.22. *Предположим, что последовательность* (Z_i), *определенная в (1.83), удовлетворяет условиям теоремы 3.2 [178]. Пусть* $\theta > 0$. *Для каждого* $c \in (0, \theta)$ *"оценочный" эмпирический процесс* $\hat{y}_c(t) := y_{L,c}(t, \hat{\theta}_n)$ *слабо сходится в* D *при* $n \to \infty$ *к гауссовскому процессу* $X(t), t \in [1-c, 1]$, *с нулевым средним и ковариационной функцией*

$$\begin{aligned} C(t,s) &= \ell_c(\min(t,s)) - (2-2/\theta)\ell_c(t)\ell_c(s) - \frac{1}{2\theta^2}h_c(t)(2h_c(s) + \tilde{h}_c(s)) \\ &\quad -\frac{1}{2\theta^2}h_c(s)(2h_c(t) + \tilde{h}_c(t)) + \frac{v(\theta)}{\theta}h_c(t)h_c(s), \end{aligned} \tag{1.104}$$

где

$$h_c(t) = (1-t)\ln\left(\frac{1-t}{\theta}\right) - c\ln\left(\frac{c}{\theta}\right),\ \tilde{h}_c(t) = (1-t)\ln^2\left(\frac{1-t}{\theta}\right) - c\ln^2\left(\frac{c}{\theta}\right)$$

и $v(\theta)$ *определено в (1.103).*

Мы видим, что ковариационная функция процесса $X(t)$ зависит от θ и c. Этот факт делает использование квантилей предельного распределения статистики $\omega^2_{L,c}(\hat{\theta}_n)$ (или некоторой ее нормализации) в качестве величины невязки δ практически невозможным, поскольку величина θ нам неизвестна. Однако высокая эффективность метода невязки, возможно, означает, что значения упомянутых квантилей не сильно зависят от θ.

Доказательство. Предположим для удобства, что $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n^2(u_n)$, где $\hat{\theta}_n^2(u_n)$ определено в (1.102). Для краткости будем писать $\hat{\theta}$ вместо $\hat{\theta}_n$. Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма 1.23. *В предположениях теоремы,*

$$\sqrt{L}(\hat{\theta}-\theta) = \frac{\theta}{\sqrt{L}}\sum_{i=1}^{L}\left(2Z_i - \frac{\theta}{2}Z_i^2 - 1\right) + o_P(1),$$

где $o_P(1)$ *обозначает последовательность случайных величин, стремящихся к* 0 *по вероятности.*

Доказательство леммы 1.23. Заметим, что

$$n - \sum_{i=1}^{L} T_i(u_n) \le T_{L+1}(u_n) \stackrel{d}{=} T_1(u_n),$$

где последнее равенство верно по стационарности и определению интеркластерных расстояний. Обозначим $r_n = n\overline{F}(u_n)$. Из теоремы 3.2 [178] вытекает, что

$$\sqrt{r_n}\,(L/r_n - 1) \stackrel{d}{\longrightarrow} N(0, \theta v(\theta)), \tag{1.105}$$

поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\sqrt{r_n}\Big(1 - \frac{1}{r_n}\sum_{i=1}^{L} Z_i\Big) > \varepsilon\right) &= \mathsf{P}\left(\sqrt{r_n}\frac{\overline{F}(u_n)}{r_n}\Big(n - \sum_{i=1}^{L} T_i(u_n)\Big) > \varepsilon\right) \\
&\le \mathsf{P}\left(\frac{\overline{F}(u_n)}{\sqrt{r_n}} T_{L+1}(u_n) > \varepsilon\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{r_n}} Z_1 > \varepsilon\right) \to 0,
\end{aligned} \tag{1.106}$$

где последнее равенство верно по теореме 1.19. Заметим, что по (1.105) $L/r_n \stackrel{\mathsf{P}}{\longrightarrow} 1$, отсюда

$$\sqrt{L}(\hat{\theta}-\theta) = \sqrt{r_n}(\hat{\theta}-\theta) + o_P(1).$$

Из этих соотношений следует, что

$$\begin{aligned}\sqrt{L}(\hat{\theta}-\theta) &= \sqrt{r_n}\left(\frac{2r_n/L}{\frac{1}{r_n}\sum_{i=1}^{L} Z_i^2}-\theta\right)+o_P(1)\\ &= \theta\sqrt{r_n}\left(\frac{2r_n/(\theta L)-\frac{1}{r_n}\sum_{i=1}^{L} Z_i^2}{\frac{1}{r_n}\sum_{i=1}^{L} Z_i^2}\right)+o_P(1).\end{aligned}$$

Далее, из леммы B.7 [178] вытекает, что

$$\frac{1}{r_n}\sum_{i=1}^{L} Z_i^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} \frac{2}{\theta},$$

значит,

$$\sqrt{L}(\hat{\theta}-\theta)=\frac{\theta^2}{2}\sqrt{r_n}\left(\frac{2r_n}{\theta L}-\frac{1}{r_n}\sum_{i=1}^{L} Z_i^2\right)+o_P(1).$$

Из (1.105) и дельта-метода немедленно вытекает, что

$$\sqrt{r_n}(r_n/L-1)=\sqrt{r_n}(L/r_n-1)+o_P(1).$$

Окончательно, мы получаем из (1.106) и последнего соотношения

$$\begin{aligned}\sqrt{r_n}\left(\frac{2r_n}{\theta L}-\frac{1}{r_n}\sum_{i=1}^{L} Z_i^2\right) &= \sqrt{r_n}\left(\frac{4}{\theta}-\frac{2L}{\theta r_n}-\frac{1}{r_n}\sum_{i=1}^{L} Z_i^2\right)+o_P(1)\\ &= \frac{4}{\theta}\sqrt{r_n}\left(1-\frac{1}{r_n}\sum_{i=1}^{L} Z_i\right)\\ &\quad +\frac{2}{\theta}\sqrt{r_n}\left(2\frac{1}{r_n}\sum_{i=1}^{L} Z_i-\frac{1}{r_n}\sum_{i=1}^{L} 1-\frac{\theta}{2r_n}\sum_{i=1}^{L} Z_i^2\right)+o_P(1)\\ &= \frac{2}{\sqrt{r_n}\theta}\sum_{i=1}^{L}\left(2Z_i-\frac{\theta}{2}Z_i^2-1\right)+o_P(1).\end{aligned}$$

Используя опять $L/r_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 1$, мы получаем результат леммы. □

Прежде всего, заметим, что по (1.106) выполнено

$$\begin{aligned} y_{L,c}(t,\theta) &= \sqrt{L}\left(\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} I(1-c<F_\theta(Z_i)\le t)-\ell_c(t)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{i=1}^{L}\left(I(1-c<F_\theta(Z_i)\le t)-\ell_c(t)Z_i\right)+\ell_c(t)\sqrt{L}\left(\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}Z_i-1\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{i=1}^{L}\left(I(1-c<F_\theta(Z_i)\le t)-\ell_c(t)Z_i\right)+o_P(1). \end{aligned} \tag{1.107}$$

Также стоит заметить, что мы можем изменить все выражения вида $\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{i=1}^{L}\xi_i$, возникающие в нашем доказательстве, с $\mathsf{E}\xi_i = 0$ для всех i на выражения вида $\frac{1}{\sqrt{r_n}}\sum_{i=1}^{r_n}\xi_i$, используя те же приемы, что и в доказательстве теоремы 3.2 [178], основанные на формуле (1.105). Это означает, что случайность L не оказывает влияния на асимптотику процесса $\hat{y}_c(t)$.

Мы будем следовать идеям доказательства теоремы 1 [83]. Обозначим

$$\hat{t}(t) = F_\theta(F^{\leftarrow}_{\hat{\theta}}(t)), \quad t\in[1-c,1].$$

Поскольку $\hat{\theta}$ – это состоятельная оценка θ, см. [178], то

$$\mathsf{P}(\hat{t}(t)\ge 1-c)\to 1 \tag{1.108}$$

для всех $t\in(1-c,1]$, и для $t=1-c$ последняя вероятность стремится к $1/2$. Во-первых, мы покажем, что

$$y_{L,c}(\hat{t}(t),\theta)-y_{L,c}(t,\theta)\xrightarrow{\mathsf{P}}0 \tag{1.109}$$

равномерно по $t\in[1-c,1]$. Мы ограничимся рассмотрением случая $t\in(1-c,1]$, случай $t=1-c$ является аналогичным. Обозначим $x_1(t)=F^{\leftarrow}_{\theta_1}(t)$ и $\tilde{t}(t)=F_{\theta_2}(x_1(t))$ для $\theta_1,\theta_2\ge c$ и $t\in(1-c,1]$. Имеем,

$$\begin{aligned} \sup_{t\in(1-c,1]}|\tilde{t}-t| &\le \sup_{t\in(1-c,1]}|F_{\theta_2}(x_1(t))-F_{\theta_1}(x_1(t))| \\ &= \sup_{x>F^{\leftarrow}_{\theta_1}(1-c)}\left|(\theta_2-\theta_1)\,\frac{\partial F_\theta(x)}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=\theta^*}\right|, \end{aligned}$$

где θ^* лежит между θ_1 и θ_2. Поскольку

$$\left|\frac{\partial F_\theta(x)}{\partial\theta}\right| = \left|(\theta^2-1)e^{-\theta x}\right| \le 1$$

для всех $\theta \in [0,1]$ и $x > F^{\leftarrow}_{\theta_1}(1-c)$, мы получаем, что $\tilde{t}$ сходится равномерно к t при $\theta_1 \to \theta$ и $\theta_2 \to \theta$. Отсюда, так как $\hat{\theta}$ сходится к θ по вероятности, имеем

$$\sup_{t\in(1-c,1]} |\hat{t}(t) - t| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

Обращение к лемме B.7 [178] дает нам $y_{L,c}(t,\theta) \xrightarrow{d} y(t)$, $t \in (1-c,1]$, в пространстве D, где $y(t)$ – гауссовский случайный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\operatorname{cov}(y(t),y(s)) = \ell_c(\min(t,s)) - (2-2/\theta)\ell_c(t)\ell_c(s).$$

Оставшаяся часть доказательства (1.109) совпадает с соответствующими шагами доказательства леммы 1 [83].

Теперь покажем, что

$$\hat{y}_c(t) = y_{L,c}(t,\theta) - \sqrt{L}(\hat{\theta}-\theta)(g(t,\theta) - g(1-c,\theta)) + o_P(1), \quad t \in [1-c,1], \tag{1.110}$$

где

$$g(t,\theta) = \frac{1-t}{\theta^2}\ln\left(\frac{1-t}{\theta}\right).$$

Заметим, что по определению $\hat{y}_c(1-c) = 0$ почти наверное, тем самым, нам осталось показать (1.110) для случая $t \in (1-c,1]$. Прежде всего, найдем явную форму "оценочной" эмпирической функции распределения

$\hat{F}_{L,c}(\hat{t}(t),\theta)$. Имеем,

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{L,c}(\hat{t}(t),\theta) &= \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} I\left(1-c \le F_\theta(Z_i) < F_\theta(F_{\hat\theta}^{\leftarrow}(t))\right)\\
&= \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} I\left(F_{\hat\theta}(F_\theta^{\leftarrow}(1-c)) < F_{\hat\theta}(Z_i) \le t\right)\\
&= F_{L,c}(t,\hat\theta) - \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} I\left(1-c \le F_{\hat\theta}(Z_i) < F_{\hat\theta}(F_\theta^{\leftarrow}(1-c))\right)\\
&= F_{L,c}(t,\hat\theta) - \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} I\left(\hat{t}(1-c) < F_\theta(Z_i) \le 1-c\right).
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\tilde{F}_{L,c}(t,\theta) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} I\left(t < F_\theta(Z_i) \le 1-c\right), \quad t \le 1-c.$$

Тогда для "оценочного" эмпирического процесса $\hat{y}_c(t)$ мы получаем

$$\begin{aligned}
\hat{y}_c(t) &= \sqrt{L}(F_{L,c}(t,\hat\theta) - \ell_c(t))\\
&= \sqrt{L}\Big(F_{L,c}(\hat{t}(t),\theta) - \ell_c(\hat{t}(t))\Big) + \sqrt{L}\Big(\ell_c(\hat{t}(t)) - \ell_c(t)\Big) + \sqrt{L}\tilde{F}_{L,c}(\hat{t}(1-c),\theta)\\
&= y_{L,c}(\hat{t}(t),\theta) + \sqrt{L}\Big(\ell_c(\hat{t}(t)) - \ell_c(t)\Big) + \sqrt{L}\tilde{F}_{L,c}(\hat{t}(1-c),\theta).
\end{aligned}$$

Рассмотрим третье слагаемое в правой части последнего соотношения. Зафиксируем $c_1 \in (c,\theta)$. Заметим, что (1.109) остается верным для всех $c_1 < \theta$, поэтому мы имеем

$$y_{L,c_1}(\hat{t}(1-c),\theta) - y_{L,c_1}(1-c,\theta) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
y_{L,c_1}(\hat{t}(1-c),\theta) &- y_{L,c_1}(1-c,\theta)\\
&= \sqrt{L}(F_{L,c_1}(\hat{t}(1-c),\hat\theta) - \ell_{c_1}(\hat{t}(1-c)))\\
&\quad -\sqrt{L}(F_{L,c_1}(1-c,\hat\theta) - \ell_{c_1}(1-c))\\
&= \sqrt{L}(1-c-\hat{t}(1-c)) - \sqrt{L}\tilde{F}_{L,c}(\hat{t}(1-c),\theta),
\end{aligned}$$

следовательно, мы получаем

$$\sqrt{L}\tilde{F}_{L,c}(\hat{t}(1-c),\theta) = \sqrt{L}(1-c-\hat{t}(1-c)) + o_P(1).$$

Далее, из (1.108) следует, что $\sqrt{L}\Big(\ell_c(\hat{t}(t)) - \ell_c(t)\Big) = \sqrt{L}(\hat{t}(t)-t) + o_P(1)$ для $t \in (1-c, 1]$. Имеем,

$$\begin{aligned}\sqrt{L}\Big(\ell_c(\hat{t}(t)) - \ell_c(t)\Big) &= \sqrt{L}\Big(F_\theta(F^{\leftarrow}_{\hat{\theta}}(t)) - F_{\hat{\theta}}(F^{\leftarrow}_{\hat{\theta}}(t))\Big) + o_P(1) \\ &= \sqrt{L}(\theta-\hat{\theta})\,\frac{\partial F_\gamma(x)}{\partial\gamma}\bigg|_{\substack{x=F^{\leftarrow}_{\hat{\theta}}(t)\\ \gamma=\theta^*}} + o_P(1),\end{aligned}$$

где θ^* лежит между θ и $\hat{\theta}$. Аналогично соответствующим шагам доказательства леммы 2 [83], мы можем показать, что

$$\frac{\partial F_\gamma(x)}{\partial\gamma}\bigg|_{\substack{x=F^{\leftarrow}_{\hat{\theta}}(t)\\ \gamma=\theta^*}} = \frac{\partial F_\gamma(x)}{\partial\gamma}\bigg|_{\substack{x=F^{\leftarrow}_{\theta}(t)\\ \gamma=\theta}} + o_P(1),$$

поскольку $\partial F_\gamma(x)/\partial\gamma$ непрерывно по паре переменных (x,γ) для всех $x > F^{\leftarrow}_\theta(1-c)$ и $\gamma \in (0,1]$. Легко видеть, что

$$\frac{\partial F_\gamma(x)}{\partial\gamma}\bigg|_{\substack{x=F^{\leftarrow}_{\theta}(t)\\ \gamma=\theta}} = (x-1)e^{-\gamma x}\Big|_{\substack{x=F^{\leftarrow}_{\theta}(t)\\ \gamma=\theta}} = \frac{1-t}{\theta^2}\ln\left(\frac{1-t}{\theta}\right) = g(t,\theta).$$

Заметим, что равенство

$$\sqrt{L}(\hat{t}(t)-t) = \sqrt{L}(\theta-\hat{\theta})g(t,\theta) + o_P(1),$$

полученное выше для случая $t \in (1-c, 1]$ также остается верным и для $t = 1-c$. Наконец, собирая воедино полученные соотношения и используя (1.109), мы получаем (1.110).

Определим эмпирический процесс

$$z_L(t) = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{i=1}^{L}\Big(I(1-c < F_\theta(Z_i) \le t) - \ell_c(t)Z_i - \theta\big(2Z_i - \frac{\theta}{2}Z_i^2 - 1\big)(g(t,\theta) - g(1-c,\theta))\Big)$$

и заметим, что $\hat{y}_c(t) = z_L(t) + o_P(1)$ по лемме 1.23, (1.107) и (1.110). Для того, чтобы заверить доказательство теоремы 1.22, нам нужно показать, что

$$(z_L(t_1),\ldots,z_L(t_k)) \xrightarrow{\mathsf{P}} (X(t_1),\ldots,X(t_k)), \quad \text{для всех } 1-c \le t_1 < \ldots < t_k \le 1,$$

где $X(t)$ – это гауссовский процесс на $[1-c,1]$ с нулевым средним и ковариационной функцией (1.104), и убедиться в том, что последовательность случайных элементов (z_L) плотна. Эти части доказательства проводятся аналогично доказательствам лемм 3 и 4 [83] соответственно. □

1.9 Предельные распределения максимальных элементов эмпирической матрицы ковариаций и большие уклонения стационарных последовательностей

1.9.1 Предельные распределения максимальных диагональных и внедиагональных элементов эмпирической матрицы ковариаций

В этом разделе мы изучим предельные распределения максимальных элементов эмпирической матрицы ковариаций, расположенных на диагонали и вне диагонали соответственно, последовательности независимых строк, каждая из которых является m-зависимой последовательностью, т.е. элементы внутри последовательности, разделенные более чем m элементами, являются независимыми. Будут рассмотрены случаи, когда маргинальное распределение F элементов этих строк является регулярно меняющимся и когда оно является распределением логвейбулловского (или, что то же самое, логнормального) типа.

Для совокупности n векторов-столбцов $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n$ p-мерного временного ряда *эмпирическая матрица ковариаций*, как правило, определяется как

$$\mathbf{S}=\mathbf{X}\mathbf{X}^\top-n\,\overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{x}}^\top,$$

где $\overline{\mathbf{x}}=\frac{1}{n}\sum_i\mathbf{x}_i$ и

$$\mathbf{X}=(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n)=(X_{it})_{i=1,\dots,p,t=1,\dots,n}.$$

Теория эмпирических матриц ковариаций – важный элемент статистики многомерных данных, она применяется, в частности, в анализе главных компонент, корреляционном анализе, многомерной регрессии, факторном анализе, проверке гипотез и дискриминантном анализе. Еще в 1928 году Уишарт [200] впервые рассмотрел эмпирическую матрицу ковариаций с элементами, которые являлись нормальными случайными величинами. О дальнейшем развитии теории можно прочесть в обзоре [114]. Заметим лишь, что асимптотическое поведение спектров двух матриц растущего размера совпадает, если их разность имеет конечный ранг. Поэтому в дальнейшем под эмпирической матрицей ковариаций мы будем понимать матрицу $\mathbf{X}\mathbf{X}'$.

Как правило, предполагают, что элементы матрицы $\mathbf{X}$ одинаково распределены. Для теории эмпирических ковариационных матриц ключевым является поведение четвертого момента случайной величины X, распределенной так же, как элементы матрицы $\mathbf{X}$. Если случай конечного значения $\mathsf{E}X^4$ хорошо изучен, см. [46], [129], [192], то работы по изучению случая $\mathsf{E}X^4 = \infty$ стали появляться лишь в последнее время [71], [72], [113]. Заметим также, что ключевое значение в доказательствах двух последних работ имеют результаты типа Нагаева о больших уклонениях частичных сумм стационарных последовательностей, обзор по которым будет приведен позже в этом разделе.

Итак, рассмотрим действительнозначное случайное поле (X_{it}). Предположим, что строки этого поля $(X_{it},\ t \in \mathbb{Z})$, $i = 1, 2, \ldots$, являются н.о.р. стационарными m-зависимыми последовательностями. Рассмотрим матрицу $\mathbf{X} = (X_{it},\ i = 1, \ldots, p; t = 1, \ldots, n)$. Обозначим

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^\top = \Big(\sum_{t=1}^{n} X_{it} X_{jt} \Big)_{i,j=1,\ldots,p} =: (S_{ij}^{(n)})_{i,j=1,\ldots,p}\,.$$

Предположим, что $p = p_n \to \infty$. В дальнейшем будем писать (X_i), имея в виде последовательность н.о.р. случайных величин с общей функцией распределения F. Рассмотрим сначала случай, когда X имеет регулярно меняющееся распределение.

Лемма 1.24. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

- *$X \in \mathrm{RV}(\alpha)$ для некоторого $\alpha > 4$, это, в частности, означает, что существует числовая последовательность (c_n) такая, что $n\,\mathsf{P}(X^2 > c_n) \to 1$ и $c_n^{-1} \max_{i=1,\dots,n} X_i^2 \xrightarrow{d} Y \sim \Phi_{\alpha/2}$.*

- *Для всех $x > 0$ выполнены предельные соотношения*

$$\mathsf{P}\big(S_{11}^{(n)} - n\,\mathsf{E}X^2 > c_{np}x\big) \sim n\,\mathsf{P}(X^2 > c_{np}x)\,, \tag{1.111}$$
$$\mathsf{P}\big(|S_{12}^{(n)} - n\,(\mathsf{E}X)^2| > c_{np}x\big) \le c\,n\,\mathsf{P}(|X_1X_2| > c_{np}x) = o(p^{-2})\,. \tag{1.112}$$

Тогда верно

$$c_{np}^{-1} \max_{1\le i<j\le p} |S_{ij}^{(n)} - n\,(\mathsf{E}X)^2| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0\,, \tag{1.113}$$
$$c_{np}^{-1} \max_{i=1,\dots,p} \big(S_{ii}^{(n)} - n\,\mathsf{E}X^2\big) \xrightarrow{\mathsf{d}} Y. \tag{1.114}$$

Доказательство. По предположению (1.111), мы имеем для всех $x > 0$,

$$p\,\mathsf{P}(S_{11}^{(n)} - n\,\mathsf{E}X^2 > c_{np}x) \sim (np)\,\mathsf{P}(X^2 > c_{np}x) \to x^{-\alpha/2}\,.$$

Случайные величины $(S_{ii}^{(n)})$ являются независимыми и одинаково распределенными, поэтому (1.114) выполнено тогда и только тогда, когда выполнено последнее соотношение.

Далее, покажем, что выполнено (1.113). Имеем для всех положительных x,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Big(c_{np}^{-1} \max_{1\le i<j\le p} \big|(S_{ij}^{(n)} - n(\mathsf{E}X)^2)\big| > x\Big) \\
&\le\ \mathsf{P}\Big(\max_{1\le i<j\le p} (S_{ij}^{(n)} - n\,(\mathsf{E}X)^2) > c_{np}x\Big) \\
&\quad +\mathsf{P}\Big(\max_{1\le i<j\le p} (-S_{ij}^{(n)} + n\,(\mathsf{E}X)^2) > c_{np}x\Big) =: I_1 + I_2\,.
\end{aligned}$$

Ограничимся доказательством утверждения $I_1 \to 0$. Из условий леммы следует, что

$$I_1\ \le\ p^2\,\mathsf{P}\big(S_{12}^{(n)} - n(\mathsf{E}X)^2 > c_{np}\,x\big) \le c\,p^2\,n\,\mathsf{P}(|X_1X_2| > c_{np}x\,) \to 0\,,$$

что и завершает доказательство. □

Далее, рассмотрим случай, когда функция распределения случайной величины X^2 принадлежит области максимального притяжения Гумбеля.

Лемма 1.25. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

- *Функция распределения случайной величины X^2 лежит в $\mathrm{MDA}(\Lambda)$, то есть существуют числовые последовательности (c_n), где $c_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и (d_n) такие, что $c_n^{-1}(\max_{i=1,\dots,n} X_i^2 - d_n) \xrightarrow{d} Y$, где Y имеет стандартное распределение Гумбеля.*

- *Для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнены предельные соотношения:*

$$\mathsf{P}\big(S_{11}^{(n)} - n\,\mathsf{E}X^2 > c_{np}x + d_{np}\big) \sim n\,\mathsf{P}(X^2 > c_{np}x + d_{np})\,, \tag{1.115}$$

$$\mathsf{P}\big(S_{12}^{(n)} - n\,(\mathsf{E}X)^2 > c_{np}x + d_{np}\big) \le c\,n\,\mathsf{P}(X_1X_2 > c_{np}x + d_{np}) = o(p^{-2}), \tag{1.116}$$

Тогда верно:

$$c_{np}^{-1} \max_{1\le i<j\le p} ((S_{ij}^{(n)} - n\,(\mathsf{E}X)^2) - d_{np}) \xrightarrow{\mathsf{P}} -\infty\,, \qquad i \ne j\,, \tag{1.117}$$

$$c_{np}^{-1} \max_{i=1,\dots,p} \big((S_{ii}^{(n)} - n\,\mathsf{E}X^2) - d_{np}\big) \xrightarrow{d} Y\,. \tag{1.118}$$

Доказательство. По (1.115) мы имеем для всех x,

$$p\,\mathsf{P}(S_{11}^{(n)} - n\,\mathsf{E}X^2 > c_{np}x + d_{np}) \sim (np)\,\mathsf{P}(X^2 > c_{np}x + d_{np}) \to e^{-x}\,.$$

Случайные величины $(S_{ii}^{(n)})$ являются независимыми и одинаково распределенными, и, следовательно, условие (1.118) выполнено тогда и только тогда, когда выполнено последнее соотношение.

По условию (1.116) мы имеем для всех $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Big(\max_{1\le i<j\le p} (S_{ij}^{(n)} - n\,(\mathsf{E}X)^2) > c_{np}\,x + d_{np}\Big) \\
&\le\ p^2\,\mathsf{P}(S_{12}^{(n)} - n\,(\mathsf{E}[X])^2 > c_{np}\,x + d_{np}) \\
&\le\ c\,p^2\,n\,\mathsf{P}(X_1X_2 > c_{np}\,x + d_{np}) \to 0\,.
\end{aligned}$$

Отсюда следует условие (1.117). □

Как мы видим, леммы 1.24 и 1.25 имеют довольно элементарные доказательства. Дело в том, что в утверждениях этих лемм мы потребовали достаточно сильные условия (1.111) и (1.115), которые сами по себе являются результатами типа Нагаева о больших уклонениях частичных сумм субэкспоненциальной последовательности и которые можно доказать отдельно при наложении некоторых условий регулярности, чем мы и займемся в оставшейся части раздела 1.9. Но сначала приведем обзор результатов теории больших уклонений субэкспоненциальных последовательностей.

1.9.2 Большие уклонения m-зависимой стационарной последовательности: введение и условия регулярности

Мы будем рассматривать стационарную (в узком смысле) случайную последовательность (X_t) с действительными значениями, порождающим элементом X и функцией распределения F с конечным математическим ожиданием. Последовательность центрированных частичных сумм (X_t) задается как

$$S_0 = 0\,, \qquad S_n = X_1 + \ldots + X_n - n\,\mathsf{E}X\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{1.119}$$

Для простоты далее будем считать, что X имеет нулевое математическое ожидание. Мы также будем предполагать, что F является *субэкспоненциальной* функцией распределения.

Предположим на время, что (X_i) – независимы в совокупности. Следуя классическому определению Чистякова [40] (см. также [85], с. 39), функция распределения F является субэкспоненциальной, если X – неотрицательная случайная величина, а конечные суммы (X_i) обладают следующим асимптотическим свойством

$$\mathsf{P}(S_n > x) \sim n\,(1 - F(x)) = n\,\overline{F}(x)\,, \qquad n \geq 2\,, \qquad x \to \infty\,; \tag{1.120}$$

будем писать $F \in \mathcal{S}_+$. Под $f(x) \sim g(x)$ для положительных функций f, g будем понимать $f(x)/g(x) \to 1$ при $x \to \infty$. Далее мы будем рассматривать двусторонне-субэкспоненциальные

функции распределения, то есть такие, что $X^+ = X \vee 0$ имеет субэкспоненциальную функцию распределения и выполнено следующее *условие баланса хвостов*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathsf{P}(X > x)}{\mathsf{P}(|X| > x)} = p_+, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\mathsf{P}(-X > x)}{\mathsf{P}(|X| > x)} = p_- \tag{1.121}$$

для некоторых $p_+ > 0, p_- \geq 0$, и будем обозначать этот класс распределений как $\mathcal{S}$. Свойство (1.120) также имеет следующую интерпретацию: вероятности того, что S_n и $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ больше некоторого x, асимптотически эквивалентны при $x \to \infty$ для каждого n. Это свойство приводит нас к рассмотрению *распределений с тяжелым хвостом*, которые имеют многочисленные приложения в финансах, страховой математике, телекоммуникациях и теории массового обслуживания, см. монографии [85], [186] и [44].

Класс субэкспоненциальных распределений $\mathcal{S}_+$ покрывает большое разнообразие поведения хвостов распределений от степенных с бесконечными моментами до распределений вейбулловского типа, у которых все моменты конечны, но не существует производящей функции моментов. В дальнейшем нам будут особенно интересны два подкласса субэкспоненциальных распределений:

- $\mathbf{RV}(\alpha)$. Скажем, что X и ее функция распределения F являются регулярно меняющимися с индексом $\alpha > 0$, если $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = L(x)x^{-\alpha}$ для некоторой медленно меняющейся функции L.

- $\mathbf{LN}$. Этот класс состоит из субэкспоненциальных функций распределения F таких, что $\overline{F}(x) = \exp(-S(x))$, где S – такая медленно меняющаяся функция, что

$$S(x)/\ln x \to \infty\,, \qquad x \to \infty\,.$$

Известными примерами распределений из класса $\mathbf{RV}(\alpha)$ с положительным хвостовым индексом α являются распределения Парето, Бара, Стьюдента и Коши. Представителем класса $\mathbf{LN}$ является,

к примеру, логнормальная функция распределения с хвостом вида

$$\mathsf{P}(X > x) \sim \frac{e^{-(\ln x)^2/2}}{\sqrt{2\pi}\ln x} = e^{-(\ln x)^2/2+\ln(\sqrt{2\pi}\ln x)}\,. \tag{1.122}$$

Третий интересный подкласс $\mathcal{S}_+$ – это распределения вейбулловского типа с хвостом функции распределения $\overline{F}(x) = \exp(-x^\alpha L(x))$ для некоторой медленно меняющейся функции L и $\alpha \in (0,1)$. К сожалению, методы, представленные в данном разделе, не работают для таких функций распределения, см. замечание **??** ниже.

Достаточно быстро после введения определения субэкспоненциальности было замечено, что свойство (1.120) можно распространить на случай, когда $n \to \infty$ и $x = x_n \to \infty$. Более точно, соотношение вида

$$\sup_{x>t_n}\left|\frac{\mathsf{P}(S_n > x)}{n\,\overline{F}(x)} - 1\right| \to 0\,, \qquad n \to \infty\,, \tag{1.123}$$

будет выполнено для некоторой последовательности (t_n); будем называть ее *разделяющей* последовательностью, а свойство (1.123) – *точной асимптотикой вероятности больших уклонений субэкпоненциального типа.* Как было замечено в работе [65], условие $F \in \mathcal{S}$ является "почти" необходимым и достаточным для выполнения (1.123). Первыми работами, в которых обсуждался результат типа (1.123) для различных типов субэкспоненциальных распределений, были статьи [20, 21, 22], [23, 158], [37]; см. также [65], [76]. Большие уклонения траекторий процессов Леви и случайных блужданий с регулярно меняющимися приращениями были рассмотрены в работах [118], [177].

Пожалуй, наиболее известным результатом этого типа является статья С.В. Нагаева [158]. Для $F \in \mathbf{RV}(\alpha)$ и $\alpha > 2$, предполагая, что $\mathsf{E}X = 0$ и $\mathrm{var}X = 1$, он показал, что (1.123) выполнено для $x > t_n = \sqrt{(\alpha-2)n\,\ln n}$, тогда как для $x < t_n$ имеет место

$$\sup_{x<t_n}\left|\frac{\mathsf{P}(S_n > x)}{\overline{\Phi}(x/\sqrt{n})} - 1\right| \to 0\,, \qquad n \to \infty\,, \tag{1.124}$$

где Φ, как и ранее, обозначает функцию распределения стандартного нормального закона.

Результаты типа (1.123) и (1.124) верны также и для многих других функций распределения из класса $\mathcal{S}$. В частности, функция распределения логнормального закона с хвостом (1.122) удовлетворяет (1.123) для $x \gg t_n$ и (1.124) для $x \ll t_n$ соответственно, где $t_n = \sqrt{n}\,\ln n$ и $x \gg t_n$ означает, что $x \geq t_n\, h_n$ для некоторой последовательности $h_n \to \infty$, и $x \ll t_n$ определяется аналогично. В [37] было обнаружено, что разделяющие последовательности (t_n) в (1.123) и (1.124) являются разными в случае, если хвост F легче, чем хвост логнормальной функции распределения.

Работ по развитию результатов о больших уклонениях субэкспоненциального типа на стационарные последовательности немного. В статье [153] результат об асимптотике вероятности больших уклонений субэкспоненциального типа для регулярно меняющихся линейных процессов, построенным по регулярно меняющимся н.о.р. случайным величинам. В работах [154, 155] получены результаты о больших уклонениях регулярно меняющихся марковских цепей и m-зависимых процессов.

В этом разделе мы докажем результаты типа Нагаева о больших уклонениях m-зависимой стационарной последовательности для двух широких подклассов семейства (двусторонне)субэкспоненциальных распределений. Мы наложим условие *асимптотической независимости хвостов* на функции распределения пар случайных величин (X_0, X_h), $1 \leq h \leq m$. Также мы будем активно использовать m-зависимость последовательности (X_t) и известные результаты о больших уклонениях для последовательности н.о.р. случайных величин.

Предположим пока, что (X_i) – последовательность н.о.р. случайных величин с общей функцией распределения F.

Напомним, что условие $F \in \mathbf{RV}(\alpha)$ для $\alpha > 0$ эквивалентно принадлежности F области максимального притяжения Фреше, $F \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$. Это означает, что существую такая последовательность положительных констант (a_n), что

$$\mathsf{P}\big(a_n^{-1} M_n \leq x\big) \to \Phi_\alpha(x) = \exp(-x^{-\alpha})\,, \qquad x \geq 0\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Для $F \in \mathbf{LN} \cap \mathcal{S}$ мы также предположим, что она принадлежит области максимального притяжения Гумбеля, $F \in \mathrm{MDA}(\Lambda)$, то есть существуют такие последовательности констант (c_n), где $c_n > 0$, для всех $n \in \mathbb{N}$ и (d_n), что

$$\mathsf{P}\big(c_n^{-1}(M_n - d_n) \le x\big) \to \Lambda(x) = \exp\big(-e^{-x}\big)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Согласно теореме Пикандса-Балкема-де Хаана [168, 48], см. также теорему 3.4.5 [85], функция распределения с бесконечной правой точкой принадлежит $\mathrm{MDA}(\Lambda)$ тогда и только тогда, когда существует функция a с лебеговой плотностью a' такая, что $a'(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и выполнено

$$\frac{\overline{F}(x + y\,a(x))}{\overline{F}(x)} \to e^{-y}\,, \qquad x \to \infty\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,. \tag{1.125}$$

Вспомогательная функция a может быть выбрана как

$$a(x) = \int_x^\infty \frac{\overline{F}(y)}{\overline{F}(x)}\,dy\,, \qquad x > 0\,;$$

см. [175], предложение 1.9. Тогда $F \in \mathrm{MDA}(\Lambda)$ тогда и только тогда, когда выполнено

$$\overline{F}(x) = c(x) \exp\Big(-\int_z^x \frac{1}{a(t)} dt\Big), \qquad x > z, \tag{1.126}$$

для некоторого z и $c(x) \to c > 0$ при $x \to \infty$.

Итак, вернемся к рассмотрению стационарной последовательности (X_i) с нулевым средним и частичными суммами (S_n), определенными в (1.119). Опишем сначала первый тип условий регулярности (назовем их условия **(C)**), которые мы будем накладывать на (X_i) с функцией распределения $F \in \mathrm{MDA}(\Lambda) \cap \mathbf{LN}$ для того, чтобы получить результат теоремы 1.28. Важным объектом здесь является положительная функция g, описывающая область (t_n, ∞), где будет верен результат о больших уклонениях.

Условия (C)

$\mathbf{C_1}$ $g(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$ и существует такое $C > 0$, что для достаточно больших x выполнено

$$g(x) \le C\, x\, /S(x)\,. \tag{1.127}$$

$\mathbf{C_2}$ Существует последовательность $t_n \to \infty$ такая, что для всех $\delta > 0$,

$$\sup_{x > t_n \delta} \left| \frac{S(x)}{S(g(x))} - 1 \right| \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{g(t_n)}{\sqrt{n}} \to \infty\,, \qquad n \to \infty, \tag{1.128}$$

и для последовательности (X_i') н.о.р. случайных величин с общей функцией распределения F и частичными суммами $S_n' = X_1' + \cdots + X_n'$ верен результат о больших уклонениях

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x > t_n \delta} \left| \frac{\mathsf{P}(S_n' > x)}{n\overline{F}(x)} - 1 \right| = 0\,, \qquad \text{для всех } \delta > 0. \tag{1.129}$$

$\mathbf{C_3}$ (X_i) – m-зависимая последовательность для некоторого $m \ge 1$, и для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathsf{P}(|X_0| > \varepsilon g(x)\,, |X_h| > \varepsilon x)}{\overline{F}(x)} = 0\,, \qquad h = 1, \ldots, m\,. \tag{1.130}$$

Асимптотика $g(x)$**.** Из теоремы 1.7 [57] и (1.126) следует, что

$$\frac{a(x)S(x)}{x} \to \infty, \qquad x \to \infty.$$

Следовательно, принимая во внимание (1.127), $g(x) = o(a(x))$, откуда также верно $g(x)/x \to 0$, так как $S(x) \to \infty$ для $F \in \mathrm{MDA}(\Lambda)$ с бесконечной правой граничной точкой. Более того, мы можем заключить на основе (1.125), что для всех $c \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathsf{P}(X > x - c\, g(x))}{\mathsf{P}(X > x)} = 1\,, \tag{1.131}$$

Это условие будет активно использоваться нами в следующем подразделе.

Лемма 1.26. *Если* (1.128) *выполнено, то для любого* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>t_n} \frac{n\overline{F}(\varepsilon x)\overline{F}(\varepsilon g(x))}{\overline{F}(x)} = 0. \tag{1.132}$$

Доказательство. Поскольку $F \in \mathbf{LN} \cap \mathrm{MDA}(\Lambda)$, мы имеем $\lim_{x\to\infty} S(x)/\ln x = \infty$. Из (1.128) следует, что равномерно по $x > t_n$,

$$S(x) \sim S(g(x)) \geq S(g(t_n)) \geq S(\sqrt{n}) \gg \ln n.$$

Отсюда, по (1.128) и так как $S(x)$ медленно меняется, мы получаем равномерно по $x > t_n$,

$$\frac{n\overline{F}(\varepsilon x)\overline{F}(\varepsilon g(x))}{\overline{F}(x)} \;=\; \exp\big(\ln n - S(x)(1+o(1))\big) \to 0\,.$$

□

Пример 1.27. Приведем пример выполнения условий (1.127) и (1.128). Если мы выберем $g(x) = x/S(x)$ и $S(x) = f(\ln x)$ для дифференцируемой регулярно меняющейся функции f с индексом $\alpha > 1$, то (1.127) и (1.128) будут выполнены. Действительно, если $T(x)$ медленно меняется на бесконечности, то согласно [58], условие

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xT'(x)}{T(x)} \ln T(x) = 0 \tag{1.133}$$

гарантирует, что для любого $\rho \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\lim_{x\to\infty} \frac{T(x\,T^{\rho}(x))}{T(x)} = 1 \tag{1.134}$$

и $T(x) = S(x)$ удовлетворяет (1.133). В частности, можно выбрать $S_1(x) = c(\ln x)^{\alpha}(1 + o(1))$, или $S_2(x) = \exp(c(\ln\ln x)^{\alpha})(1 + o(1))$ для $c > 0$.

Логнормальная функция распределения является примером типа S_1 с $\alpha = 2$; см. (1.122). Для такой функции распределения мы можем выбрать $t_n \gg \sqrt{n}(\ln n)^2$. Следовательно, условия $g(t_n)/\sqrt{n} \to \infty$ и (1.129) также выполнены.

Другие примеры выполнения условий **(C)** можно найти в работе [152].

Для случая $F \in \mathbf{RV}(\alpha)$ мы наложим другие, более слабые условия регулярности.

Условия (RV)

$\mathbf{RV_1}$ Разделяющая последовательность (t_n) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{\sqrt{n \ln n}} = \infty\,. \tag{1.135}$$

$\mathbf{RV_2}$ $F \in \mathrm{RV}(\alpha)$ для некоторого $\alpha > 2$ и удовлетворяет условию баланса хвостов (1.121).

$\mathbf{RV_3}$ (X_t) – m-зависимая последовательность для некоторого $m \geq 1$, и для нее выполнено соотношение

$$\lim_{x\to\infty} \mathsf{P}(|X_h| > x \;\mid\; |X_0| > x) = 0\,, \qquad h = 1, \ldots, m\,. \tag{1.136}$$

Из условия $\mathbf{RV_2}$ вытекает, что $\mathsf{E}|X|^{2+\delta} < \infty$ для $0 < \delta < \alpha - 2$. Более того, $S(x) = -\ln F(x) = \alpha \ln x - \ln L(x)$ для некоторой медленно меняющейся функции L. Можно заключить, что любая функция g, удовлетворяющая $g(x)/x \to 0$ при $x \to \infty$, обладает свойством

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x + g(x))}{\overline{F}(x)} = 1\,.$$

Из условия $\mathbf{RV_3}$ следует асимптотическая независимость последовательности (X_t). В частности, (X_t) является регулярно меняющейся последовательностью с индексом α. Используя это свойство, мы можем переписать (1.136) в следующем виде

$$\lim_{x\to\infty} \mathsf{P}(|X_h| > \varepsilon\, x \;\mid\; |X_0| > \varepsilon x) = 0\,, \qquad h = 1, \ldots, m\ , \qquad \varepsilon > 0\,.$$

Ранее мы отмечали, что наилучшая разделяющая последовательность в н.о.р. регулярно меняющемся случае есть $t_n = \sqrt{(\alpha - 2)\, n \ln n}$. Как мы видим, условие $\mathbf{RV_1}$ не намного сильнее этого условия. Примеры выполнения условий **(RV)** также можно найти в [152].

1.9.3 Большие уклонения m-зависимой стационарной последовательности: основные результаты

В данном разделе мы приводим два результата о больших уклонениях m-зависимой стационарной последовательности в случае, если она удовлетворяет условиям **(C)** и **(RV)** соответственно. Следующий результат касается первого случая.

Теорема 1.28. *Рассмотрим m-зависимую стационарную последовательность (X_i) с маргинальной функцией распределения $F \in \mathrm{MDA}(\Lambda) \cap \mathbf{LN}$ для некоторого $m \geq 1$. Предположим, что она удовлетворяет условиям* **(C)**. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>t_n\delta} \left| \frac{\mathsf{P}(S_n > x)}{n\overline{F}(x)} - 1 \right| = 0, \qquad \text{для всех } \delta > 0. \tag{1.137}$$

После прочтения доказательства теоремы 1.28 можно сделать вывод, что она может быть обобщена в различных направлениях. Вместо условия $F \in \mathrm{MDA}(\Lambda) \cap \mathbf{LN}$ можно потребовать, чтобы выполнялись условия: $\mathsf{E}|X|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, $S(x)$ медленно меняется, g удовлетворяет условиям **(C)** и F является (εg)-нечувствительной для всех $\varepsilon > 0$ (определение g-нечувствительности см. в [95]). Таким образом мы могли бы включить в рассмотрение и распределения с бесконечными моментами, например, класс $\mathbf{RV}(\alpha)$ для $\alpha > 2$. Однако, метод доказательства обсуждаемой теоремы не позволяет получить "почти" оптимальную разделяющую последовательность $t_n \gg \sqrt{n \ln n}$ для распределений, подчиняющихся условиям $\mathbf{RV}(\alpha)$. По этой причине мы приводим отдельный результат, теорему 1.29, в которой при наложении последних условий доказывается (1.137) для лучшей из возможных разделяющих последовательностей.

Следующий результат дополняет результат об асимптотике вероятности больших уклонений m-зависимой стационарной регулярно меняющейся последовательности, полученный в работе [155]. Методика доказательства нашего результата отличается от методов, использованных в [155]: мы не используем специфические свойства регулярно меняющихся последовательностей.

Теорема 1.29. *Предположим, что* (X_t) *– m-зависимая стационарная последовательность, состоящая из регулярно меняющихся случайных величин с индексом* $\alpha > 2$, *для которой выполнены условия* (**RV**). *Тогда для нее выполнен результат о больших уклонениях* (1.137).

Как уже упоминалось, результаты этих теорем можно применить для поиска условий, при которых будут верны результаты раздела 1.9.1.

Пример 1.30. Предположим, что $X \in \mathrm{RV}(\alpha)$ для некоторого $\alpha > 4$ и условия теоремы 1.29 выполнены для последовательностей (X_{1t}^2) и $(X_{1t}X_{2t})$ с одинаковыми разделяющими последовательностями (t_n), удовлетворяющими $t_n \gg \sqrt{n \ln n}$. Тогда X^2 будет регулярно меняться с индексом $\alpha/2 > 2$ и $\mathsf{P}(X_1X_2 > x) \sim x^{-\alpha}l(x)$ для некоторой медленно меняющейся функции l; см. [84]. Выберем (c_n) такую, что $n\,\mathsf{P}(X^2 > c_n) \to 1$, а именно $c_n = n^{2/\alpha}\ell(n)$ для некоторой медленно меняющейся функции ℓ. Возьмем (p_n) такую, что $p = n^\beta$ с $\beta > \alpha/4 - 1$, тогда мы будем иметь $c_{np} \gg t_n$. Применение теоремы 1.29 дает нам для произвольного $x > 0$,

$$\mathsf{P}\big(S_{11}^{(n)} - n\,\mathsf{E}X^2 > c_{np}\,x\big) \sim n\,\mathsf{P}(X^2 > c_{np}\,x)\,.$$

Это и есть нужное нам условие (1.111). Далее, рассмотрим

$$q_n = \mathsf{P}\big(|S_{12}^{(n)} - n\,(\mathsf{E}X)^2| > c_{np}\,x\big)\,.$$

По теореме 1.29 мы получаем для медленно меняющейся функции $\widetilde{l}$,

$$q_n \sim c\,n\,\mathsf{P}(|X_1X_2| > c_{np}\,x) = c\,n(np)^{-2}\widetilde{l}(np) = n^{-1}p^{-2}\widetilde{l}(np) = o(p^{-2})$$

при условии $\widetilde{l}(np)/n \to 0$. Это условие, очевидно, выполнено, поскольку мы выбрали $p = n^\beta$. Тем самым, мы получили и условие (1.112). Это означает, что для максимумов диагональных и внедиагональных элементов $S_{ii}^{(n)}$ и $S_{ij}^{(n)}$, $i \neq j$, выполнены предельные соотношения (1.113) и (1.114) соответственно.

Для доказательства приведенных теорем нам потребуются следующие два классических экспоненциальных неравенства.

Рассмотрим последовательность (X_i) независимых центрированных случайных величин и положим $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ и $\sigma_n^2 = \mathrm{var}(S_n)$.

- **Неравенство Прохорова** ([32]; см. также [26], с. 76) Если $|X_i| \le c$ почти наверное для всех $i = 1, \dots, n$ и некоторой константы c, то

$$\mathsf{P}(S_n > x) \le \exp\left(-\frac{x}{2c}\mathrm{arsinh}\big(\frac{cx}{2\sigma_n^2}\big)\right), \qquad x > 0,$$

  где $\mathrm{arsinh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

- **Неравенство Фука-Нагаева** ([39, 24]; см. также [165], с. 78) Если $\mathsf{E}|X_i|^p < \infty$ для некоторого $p \ge 2$, $i = 1, \dots, n$, $m_{p,n} = \sum_{i=1}^n \mathsf{E}|X_i|^p$, то для некоторых констант $c_p, d_p > 0$, зависящих только от p, выполнено

$$\mathsf{P}(S_n > x) \le c_p\, m_{p,n}\, x^{-p} + e^{-d_p\,(x/\sigma_n)^2}, \qquad x > 0\,.$$

В доказательствах под c мы понимаем все константы, значения которых нам не важны.

Доказательство теоремы 1.28.

Нижняя граница.

Имеем

$$\{S_n > x\} \supset \bigcup_{i=1}^n \{|S_n - X_i| \le g(x)\,, X_i > x + g(x), |X_j| \le g(x), 1 \le j \ne i \le n\}\,.$$

События в правой части равенства являются непересекающимися, отсюда

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(S_n > x) &\geq \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\Big(|S_n - X_i| \leq g(x)\,, X_i > x + g(x), \max_{j\neq i} |X_j| \leq g(x)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\Big(X_i > x + g(x), \max_{j\neq i} |X_j| \leq g(x)\Big) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\Big(|S_n - X_i| > g(x)\,, X_i > x + g(x), \max_{j\neq i} |X_j| \leq g(x)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(X_i > x + g(x)) - \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\Big(X_i > x + g(x)\,, \max_{j\neq i} |X_j| > g(x)\Big) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\Big(|S_n - X_i| > g(x)\,, X_i > x + g(x), \max_{j\neq i} |X_j| \leq g(x)\Big) \\
&= J_1(x) - J_2(x) - J_3(x)\,. \qquad (1.138)
\end{aligned}$$

Имеем, $\sup_{x>t_n} \big|J_1(x)/(n\,\overline{F}(x)) - 1\big| \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$\begin{aligned}
\sup_{x>t_n} \frac{J_2(x)}{n\overline{F}(x)} &\leq \sup_{x>t_n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathsf{P}\Big(X_i > x + g(x), \max_{j\neq i:|j-i|\leq m} |X_j| > g(x)\Big)}{n\overline{F}(x)} \\
&\quad + \sup_{x>t_n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathsf{P}(X > x + g(x))}{n\,\overline{F}(x)} \mathsf{P}\Big(\max_{j\neq i:|j-i|>m} |X_j| > g(x)\Big) \\
&\leq 2 \sup_{x>t_n} \sum_{h=1}^{m} \frac{\mathsf{P}(X_0 > x + g(x)\,, |X_h| > g(x))}{\overline{F}(x)} \\
&\quad + \sup_{x>t_n} \frac{\mathsf{P}(X > x + g(x))}{\overline{F}(x)} \mathsf{P}\Big(\max_{i=1,\ldots,n} |X_i| > g(x)\Big) \\
&\leq o(1) + \sup_{x>t_n} n\,\mathsf{P}(|X| > g(x)) = o(1)\,,
\end{aligned}$$

где последний переход по условию $\mathbf{C_3}$ и поскольку $g(t_n)/\sqrt{n} \to \infty$. Значит, достаточно показать, что $J_3(x) \to 0$ при $n \to \infty$, чтобы получить требуемую нижнюю границу для $\mathsf{P}(S_n > x)$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения

$$\widehat{X}_j = X_j \mathbb{1}(|X_j| \leq g(x))\,, \qquad \widehat{S}_n^{(i)} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \widehat{X}_j\,. \qquad (1.139)$$

Имеем,

$$\begin{aligned} J_3(x) &= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\big(|\widehat{S}_n^{(i)}| > g(x)\,, X_i > x + g(x)\big) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{1\le t\ne i\le n\,,|t-i|\le m} \widehat{X}_t\Big| > g(x)/2\,, X_i > x + g(x)\Big) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{1\le t\le n\,,|t-i|> m} \widehat{X}_t\Big| > g(x)/2\Big)\, \mathsf{P}(X > x + g(x)) \\ &= J_{31}(x) + J_{32}(x)\,. \end{aligned}$$

Используя условие $\mathbf{C_3}$, получаем

$$\frac{J_{31}(x)}{n\,\overline{F}(x)} \le 2\sum_{h=1}^{m} \frac{\mathsf{P}(|X_h| > g(x)/(4m)\,, X_0 > x + g(x))}{\overline{F}(x)} = o(1)\,.$$

Нам осталось рассмотреть $J_{32}(x)$. Поскольку случайная величина X центрирована, мы имеем для произвольного $\delta > 0$

$$n\,|\mathsf{E}\widehat{X}| = n\,|\mathsf{E}X\mathbb{1}(|X| < g(x))| = n\,|-\mathsf{E}X\mathbb{1}(|X| > g(x))| \le \frac{n\mathsf{E}|X|^{2+\delta}}{g^{1+\delta}(x)}.$$

Мы заключаем из (1.128) и того факта, что $\mathsf{E}|X|^{2+\delta} < \infty$,

$$n|\mathsf{E}\widehat{X}| \le n\frac{\mathsf{E}|X|^{2+\delta}}{g^{1+\delta}(t_n)} = o\big(g^{1-\delta}(t_n)\big), \quad n \to \infty. \tag{1.140}$$

Обозначим $\widetilde{g}_r(x) = g(x)/(2m) - \#N_r\,\mathsf{E}\widehat{X}$, где

$$N_r = \{1 \le t \le n : t \equiv r(\mathrm{mod}\ m), |t-i| > m\}\,,$$

и заметим, что $n\,|\mathsf{E}\widehat{X}| = o(g^{1-\delta}(x))$ и $|\widehat{X} - \mathsf{E}\widehat{X}| \le 2g(x)$. Используя m-зависимость и неравенство Прохорова, мы получаем для н.о.р. копий

(X_i') случайной величины X и достаточно больших n,

$$\begin{aligned}
\frac{J_{32}(x)}{n\overline{F}(x)} &\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{t\in N_r}\widehat{X}_t'\Big| > g(x)/(2m)\Big)\frac{\mathsf{P}(X>x+g(x))}{n\overline{F}(x)}\\
&\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{t\in N_r}(\widehat{X}_t'-\mathsf{E}\widehat{X})\Big| > \widetilde{g}_r(x)\Big)\,\frac{\mathsf{P}(X>x+g(x))}{n\overline{F}(x)}\\
&\le c\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\exp\left(-\frac{\widetilde{g}_r(x)}{4g(x)}\mathrm{arsinh}\left(\frac{2g(x)\widetilde{g}_r(x)}{2\#N_r\mathrm{var}(\widehat{X})}\right)\right)\,\frac{\mathsf{P}(X>x+g(x))}{n\overline{F}(x)}\\
&\le c\;m\exp\Big(-\Big(\frac{1}{8m}+o(1)\Big)\,\ln\Big((1+o(1))\frac{m\,(g(x))^2}{2\,n\mathrm{var}(X)}\Big)\Big)\to 0\,.
\end{aligned}$$

В последнем переходе мы использовали соотношение $(g(x))^2/n \ge (g(t_n))^2/n \to \infty$; см. (1.128).

Верхняя граница

Рассмотрим следующее разбиение пространства элементарных исходов Ω:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \bigcup_{1\le i<j\le n}\{|X_i|>g(x),|X_j|>g(x)\}\,,\\
B_2 &= \bigcup_{i=1}^{n}\big\{|X_i|>g(x)\,,\max_{j=1,\dots,n,i\ne j}|X_j|\le g(x)\big\}\,,\\
B_3 &= \Big\{\max_{j=1,\dots,n}|X_j|\le g(x)\Big\}\,.
\end{aligned}$$

Оценивание B_1

Прежде всего заметим, что для всех $\xi\in(0,1)$ верно

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\big(\{S_n>x\}\cap B_1\big) &\le \sum_{1\le i<j\le n}\mathsf{P}\big(S_n>x,|X_i|>g(x)\,,|X_j|>\,g(x)\big)\\
&\le \sum_{1\le i<j\le n}\mathsf{P}\big(S_{ij}^{(1)}>\xi x,|X_i|>g(x)\,,|X_j|>\,g(x)\big)\\
&\quad+\sum_{1\le i<j\le n}\mathsf{P}\big(S_{ij}^{(2)}>(1-\xi)x,|X_i|>g(x)\,,|X_j|>\,g(x)\big)\\
&=: R_1(x)+R_2(x),
\end{aligned}$$

где

$$S_{ij}^{(1)} = \sum_{h\le n:\,|i-h|\wedge|j-h|>m} X_h = \sum_{r=1}^{m}(S_{ij}^{(r)})', \quad S_{ij}^{(2)} = \sum_{h\le n:\,|i-h|\wedge|j-h|\le m} X_h\,,$$
$$(S_{ij}^{(r)})' = \textstyle\sum_{h\in Q_{ij}^{(r)}} X_h\,, \qquad Q_{ij}^{(r)} = \{h\le n : |i-h|\wedge|j-h|>m, h\equiv r(\mathrm{mod}\, m)\}.$$

Для фиксированного r, слагаемые в сумме $(S_{ij}^{(r)})'$ независимы по свойству m-зависимости и к тому же независимы с X_i, X_j. Легко видеть, что $\#Q_{ij}^{(r)} \le n/m$, так как количество слагаемых в сумме $S_{ij}^{(2)}$ не превосходит $4m+2$. Следовательно, по результату о больших уклонениях (1.129), m-зависимости и стационарности,

$$\begin{aligned}
\frac{R_1(x)}{n\,\overline{F}(x)} &\le \sum_{1\le i<j\le n}\sum_{r=1}^{m}\frac{\mathsf{P}\big((S_{ij}^{(r)})'>\xi x/m\big)\,\mathsf{P}\big(|X_i|>g(x)\,,|X_j|>\,g(x)\big)}{n\,\overline{F}(x)}\\
&\sim \frac{\overline{F}(\xi x/m)}{\overline{F}(x)}\sum_{1\le i<j\le n}\mathsf{P}\big(|X_i|>g(x)\,,|X_j|>\,g(x)\big)\\
&= \frac{\overline{F}(\xi x/m)}{\overline{F}(x)}\sum_{h=1}^{n-1}(n-h)\mathsf{P}\big(|X_0|>g(x)\,,|X_h|>\,g(x)\big)\\
&\le n\frac{\overline{F}(\xi x/m)}{\overline{F}(x)}\sum_{h=1}^{m}\mathsf{P}\big(|X_0|>g(x)\,,|X_h|>\,g(x)\big)\\
&\quad +\frac{\overline{F}(\xi x/m)}{\overline{F}(x)}\,[n\,\mathsf{P}(|X|>g(x))]^2\\
&=: R_{11}(x)+R_{12}(x)\,.
\end{aligned}$$

Используя условие баланса хвостов, $\mathbf{C_3}$ и (1.132), получаем

$$\sup_{x>t_n} R_{11}(x) \le c\,m\sup_{x>t_n}\frac{n\overline{F}(\xi x/m)\overline{F}(g(x))}{\overline{F}(x)} \to 0\,.$$

Поскольку $g(t_n)/\sqrt{n}\to\infty$ и $\mathsf{E}X^2<\infty$, мы также имеем

$$\sup_{x>t_n} n\,\mathsf{P}(|X|>g(x)) \le \sup_{x>t_n} n\mathsf{P}(|X|>\sqrt{n}) \to 0\,. \tag{1.141}$$

Следовательно, по условию баланса хвостов, лемме 1.26 и (1.141) мы немедленно получаем, что $R_{12}\to 0$.

Далее, мы имеем

$$\begin{aligned} R_2(x) &\le \sum_{i=1}^{n-1}\Big(\sum_{j=i+1}^{(i+2m)\wedge n} + \sum_{j-i>2m, j\le n}\Big)\mathsf{P}\big(S_{ij}^{(2)} > (1-\xi)x, |X_i| > g(x)\,, |X_j| > g(x)\big) \\ &= R_{21}(x) + R_{22}(x)\,. \end{aligned}$$

Мы ограничимся рассмотрением $R_{21}(x)$; анализ $R_{22}(x)$ может быть проведен аналогичными методами. Заметим, что $S_{ij}^{(2)}$ имеет следующее представление

$$S_{ij}^{(2)} = \sum_{h=(i-m)\vee 1}^{(j+m)\wedge n} X_h.$$

Видим, что количество элементов в $S_{ij}^{(2)}$ не превосходит $4m+2$. Следовательно, из стационарности, а также отдельно рассматривая случаи $h=i$ и $h=j$, имеем

$$\begin{aligned} &R_{21}(x) \qquad\qquad (1.142)\\ &\le \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{(i+2m)\wedge n}\sum_{h=(i-m)\vee 1}^{(j+m)\wedge n}\mathsf{P}\Big(|X_h| > \frac{(1-\xi)x}{4m+2}\,, |X_i| > g(x), |X_j| > g(x)\Big) \\ &\le c\,n\sum_{h=1}^{m}\mathsf{P}\Big(|X_0| > \frac{(1-\xi)x}{4m+2}\,, |X_h| > g(x)\Big) + c\,n\,\overline{F}\Big(\frac{(1-\xi)x}{4m+2}\Big)\overline{F}(g(x))\,. \end{aligned}$$

Используя $\mathbf{C_3}$ и (1.132), мы заключаем, что

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{x>t_n}\frac{R_{21}(x)}{n\overline{F}(x)} = 0\,.$$

Собирая воедино все предыдущие оценки, мы окончательно имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x>t_n}\frac{\mathsf{P}\big(\{S_n > x\}\cap B_1\big)}{n\overline{F}(x)} = 0\,.$$

Оценивание B_2

Далее, оценим $\mathsf{P}(\{S_n > x\}\cap B_2)$, для этого напомним обозначения $\widehat{X}_j$ и $\widehat{S}_n^{(i)}$ из (1.139). Зафиксируем $b\in(0,1)$. Поскольку $g(x)/x\to 0$ при

$x \to \infty$, то

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\big(\{S_n > x\} \cap B_2\big) &\le \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\big(X_i + \widehat{S}_n^{(i)} > x\,, |X_i| > g(x)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\big(X_i + \widehat{S}_n^{(i)} > x\,, |X_i| \in (g(x), x - bx]\big) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\big(X_i + \widehat{S}_n^{(i)} > x\,, |X_i| \in (x - bx, x - g(x)]\big) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\big(X_i + \widehat{S}_n^{(i)} > x\,, |X_i| > x - g(x)\big) \\
&=: I_1(x) + I_2(x) + I_3(x)\,.
\end{aligned}$$

Оценивание $I_1(x)$

Покажем, что $I_1(x) = o(n\overline{F}(x))$. Аналогично оцениванию $R_1(x)$, используя m-зависимость, разобьем $\widehat{S}_n^{(i)}$ на m сумм н.о.р. случайных величин

$$\widehat{S}_n^{(i)} = \sum_{r=1}^{m} \widehat{S}_{i,r}, \quad \widehat{S}_{i,r} = \sum_{h \in Q_{i,r}^*} \widehat{X}_h, \quad \text{где} \quad Q_{i,r}^* = \{h \le n : h \equiv r (\mathrm{mod}\ m), h \ne i\}.$$

Ввиду (1.140) имеем $n|\mathsf{E}\widehat{X}| \le g(x)$ для всех достаточно больших x. Более того, $|\widehat{X} - \mathsf{E}\widehat{X}| \le 2\,g(x)$ и $\#Q_{i,r} \le n/m$. Применение неравенства Прохорова для достаточно больших n дает

$$\begin{aligned}
I_1(x) &\le \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\big(\widehat{S}_n^{(i)} > b\,x\big) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} \mathsf{P}\big(\widehat{S}_{i,r} > bx/m\big) \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} \mathsf{P}\big(\widehat{S}_{i,r} - \#Q_{i,r}\mathsf{E}\widehat{X} > bx/m - g(x)\big) \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} \exp\Big(-\frac{bx/m - g(x)}{4g(x)} \mathrm{arsinh}\Big(\frac{2g(x)(bx/m - g(x))}{2\#Q_{i,r}\mathrm{var}(\widehat{X})}\Big)\Big) \\
&\le n\,m \exp\Big(-c\frac{x}{g(x)} \ln\Big(\frac{x\,g(x)}{n}\Big)\Big) = o(n\,\overline{F}(x))
\end{aligned}$$

равномерно по $x > t_n$. При последнем переходе мы использовали условия на асимптотику $g(x)$ из $\mathbf{C_1}$ и $\mathbf{C_2}$.

Оценивание $I_2(x)$

Обозначим

$$\widetilde{S}_n^{(i)} = \sum_{t \notin [i-m, i+m]} \widehat{X}_t.$$

Напомним, что $|\widehat{X}| \le g(x)$. Из независимости X_i и $\widetilde{S}_n^{(i)}$, условия баланса хвостов и интегрирования по частям заключаем

$$\begin{aligned} I_2(x) &\le \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\Big(X_i + \widetilde{S}_n^{(i)} > x - 2\,m\,g(x)\,, |X_i| \in (x - bx, x - g(x)] \Big) \\ &\le c \sum_{i=1}^{n} \int_{x-bx}^{x-g(x)} \mathsf{P}(\widetilde{S}_n^{(i)} > x - 2\,m\,g(x) - y)\, dF(y) \\ &\le c\,\overline{F}(x - bx) \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\widetilde{S}_n^{(i)} > bx - 2mg(x)) \\ &\quad + c \int_{g(x)}^{bx} \sum_{i=1}^{n} \overline{F}(x-y)\, \mathsf{P}(\widetilde{S}_n^{(i)} \in dy) \\ &=: c(I_{21}(x) + I_{22}(x))\,. \end{aligned}$$

Из (1.131) для каждого $\delta > 0$ существует такое u_δ, что

$$\sup_{y \ge u_\delta/(1-b)} \frac{\overline{F}(y)}{\overline{F}(y + g(y))} \le e^{\delta}.$$

Применяя эту оценку многократно, имеем для достаточно больших x,

$$\frac{\overline{F}(x-bx)}{\overline{F}(x)} \le \prod_{h=1}^{[bx/g(x)]} \frac{\overline{F}(x - hg(x))}{\overline{F}(x - (h-1)g(x))} \frac{\overline{F}(x-bx)}{\overline{F}(x - g(x)[bx/g(x)])} \le e^{\delta([(bx)/g(x)]+1)}\,.$$

Используя метод, примененный нами для оценивания $I_1(x)$, в сочетании с $\mathbf{C_1}$, (1.128) и неравенством Прохорова, имеем равномерно по $x > t_n$,

$$\begin{aligned} \frac{I_{21}(x)}{n\,\overline{F}(x)} &\le e^{\delta([bx/g(x)]+1)}\, m\, \exp\left(-\frac{bx/m - 3g(x)}{4\,g(x)} \ln\Big(\frac{mg(x)(bx/m - 3g(x))}{n\,\mathrm{var}(X)} \Big) \right) \\ &\le \exp\left(-c\,\frac{x}{g(x)} \ln\Big(\frac{xg(x)}{n} \Big) \right) \to 0\,, \qquad n \to \infty\,. \end{aligned}$$

Аналогичным образом имеем,

$$\begin{aligned}
\frac{I_{22}(x)}{n\,\overline{F}(x)} &\le \frac{1}{n\overline{F}(x)} \sum_{k=1}^{[bx/g(x)]} \int_{g(x)k}^{g(x)(k+1)} \sum_{i=1}^{n} \overline{F}(x-y)\,\mathsf{P}(\widetilde{S}_n^{(i)} \in dy) \\
&\le \sum_{k=1}^{[bx/g(x)]} \frac{\overline{F}(x-(k+1)g(x))}{n\,\overline{F}(x)} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\widetilde{S}_n^{(i)} \in g(x)\,(k,k+1]) \\
&\le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\,\delta} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\widetilde{S}_n^{(i)} > k\,g(x)) \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-ck \ln\left(\frac{kg^2(x)}{n}\right) + (k+1)\,\delta\right) \to 0\,, \qquad n \to \infty\,.
\end{aligned}$$

Оценивание $I_3(x)$

Имеем,

$$\begin{aligned}
\limsup_{x>t_n} \frac{I_3(x)}{n\,\overline{F}(x))} &\le \limsup_{n\to\infty} \sup_{x>t_n} \frac{1}{n\,\overline{F}(x)} \Big(\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\big(X_i + \widehat{S}_n^{(i)} > x\,, X_i > x - g(x)\big) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\big(X_i + S_n^{(i)} > x\,, X_i < -x + g(x)\big)\Big) \\
&\le \limsup_{n\to\infty} \sup_{x>t_n} \frac{\overline{F}(x-g(x))}{\overline{F}(x)} \\
&\qquad + \limsup_{n\to\infty} \sup_{x>t_n} \frac{1}{n\,\overline{F}(x)} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\big(\widehat{S}_n^{(i)} > 2x - g(x)\big) \\
&\le 1 + \lim_{n\to\infty} \sup_{x>t_n} \exp\left(-c\frac{x}{g(x)} \ln\left(\frac{xg(x)}{n}\right)\right) = 1\,.
\end{aligned}$$

Второй член оценивается так же, как и $I_1(x)$, с использованием m-зависимости, условия $\mathbf{C_1}$, (1.128) и неравенства Прохорова.

Объединяя оценки для всех $I_i(x)$, мы получаем требуемое

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>t_n} \frac{\mathsf{P}\big(\{S_n > x\} \cap B_2\big)}{n\,\overline{F}(x)} \le 1\,.$$

Оценивание B_3

Осталось лишь показать, что $\mathsf{P}\big(\{S_n > x\} \cap B_3\big) = o(n\overline{F}(x))$. Легко видеть, что $\{S_n > x\} \cap B_3 = \{\widehat{S}_n > x\}$, где, напомним, $\widehat{S}_n = \sum_{i=1}^n \widehat{X}_i$ и $|\widehat{X}_i| \le g(x)$. Далее применяются те же методы, что и для оценивания $I_1(x)$ выше, мы опускаем дальнейшие детали. Доказательство верхней границы завершено. □

Доказательство теоремы 1.29. Доказательство практически аналогично доказательству теоремы 1.28. Мы будем построчно следовать шагам этого доказательства и использовать те же обозначения. Положим $g(x) = g_\varepsilon(x) = \varepsilon\, x$ для произвольного $\varepsilon > 0$.

Нижняя граница

Начнем с оценки (1.138): $\mathsf{P}(S_n > x) \ge J_1(x) - J_2(x) - J_3(x)$. Для первого члена имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \sup_{x>t_n} \frac{J_1(x)}{n\,\overline{F}(x)} &= \limsup_{n\to\infty} \sup_{x>t_n} \frac{n\,\overline{F}(x(1+\varepsilon))}{n\,\overline{F}(x)} \\ &= (1+\varepsilon)^{-\alpha}\,, \end{aligned}$$

где правая часть сходится к 1 при $\varepsilon \downarrow 0$. Используя то, что X – регулярно меняющаяся, мы имеем для $J_2(x)$

$$\begin{aligned} \sup_{x>t_n} \frac{J_2(x)}{n\,\overline{F}(x)} &\le 2 \sup_{x>t_n} \sum_{h=1}^m \frac{\mathsf{P}(X_0 > (1+\varepsilon)\,x\,, |X_h| > \varepsilon x)}{\overline{F}(x)} \\ &\quad + \sup_{x>t_n} \frac{\mathsf{P}(X > (1+\varepsilon)\,x)}{\overline{F}(x)}\, \mathsf{P}\Big(\max_{i=1,\dots,n} |X_i| > \varepsilon x\Big) \\ &\le c \sup_{x>t_n} \sum_{h=1}^m \mathsf{P}(|X_h| > \varepsilon\, x \;\mid\; |X_0| > \varepsilon x) + c\,n\,\mathsf{P}(|X| > t_n) \to 0\,. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали (1.136) для анализа первого члена, а также соотношения $t_n \gg \sqrt{n}$ и $\mathrm{var}(X) < \infty$ для анализа второго члена. Далее, рассмотрим неравенство $J_3(x) \le J_{31}(x) + J_{32}(x)$. Предельное соотношение $\lim_{n\to\infty} \sup_{x>t_n} J_{31}(x)/(n\overline{F}(x)) = 0$ можно получить

аналогично соответствующему шагу в доказательстве теоремы 1.28. Стремление к нулю отношения $J_{32}(x)/(n\overline{F}(x))$ снова доказывается с помощью неравенства Прохорова для н.о.р. регулярно меняющихся случайных величин, а также с использованием того факта, что равномерно по $x > t_n$ для фиксированного $\varepsilon > 0$ по теореме Караматы [57] и согласно $t_n \gg \sqrt{n \ln n}$ выполнено

$$n\,|\mathsf{E}[\widehat{\mathsf{X}}]| \le \mathsf{n}\,\mathsf{E}[|\mathsf{X}|\,\mathbb{1}(|\mathsf{X}| > \varepsilon\mathsf{x})] \sim \mathsf{c}\,\mathsf{n}\,(\varepsilon\mathsf{x})\mathsf{P}(|\mathsf{X}| > \varepsilon\mathsf{x}) = \mathsf{o}(\mathsf{x})\,.$$

Верхняя граница

Мы начнем с соотношения $\mathsf{P}(\{S_n > x\} \cap B_1) \le R_1(x) + R_2(x)$. Поскольку $x > t_n \gg \sqrt{n \ln n}$, то для каждой вероятности $\mathsf{P}((S_{ij}^{(r)})' > \xi x/m)$ равномерно по x выполнен классический результат Нагаева [158] о больших уклонениях. Отсюда, равномерно по $x > t_n$,

$$\frac{R_1(x)}{n\,\overline{F}(x)} \le c \sum_{h=1}^{m} \mathsf{P}(|X_h| > \varepsilon x \;\mid\; |X_0| > \varepsilon x) + c[n\mathsf{P}(|X| > \varepsilon x)] = o(1)\,.$$

Далее, имея $R_2(x) = R_{21}(x) + R_{22}(x)$, мы ограничимся рассмотрением $R_{21}(x)$, как и в доказательстве теоремы 1.28. Соотношение (1.142) остается верным, поэтому мы имеем по условию $\mathbf{RV}_3$

$$\frac{R_{21}(x)}{n\overline{F}(x)} \le c \sum_{h=1}^{m} \mathsf{P}\left(|X_h| > \varepsilon x \;\middle|\; |X_0| > \frac{(1-\xi)x}{4m+2}\right) + c[n\overline{F}(x)] = o(1)$$

равномерно по $x > t_n$.

Далее, найдем асимптотику $\mathsf{P}(\{S_n > x\} \cap B_2)$. Для всех достаточно малых $\delta > 0$ обозначим $A_\delta = \cup_{i=1}^{n}\{X_i > (1-\delta)\,x\}$. Получаем,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\{S_n > x\} \cap B_2) &= \mathsf{P}(\{S_n > x\} \cap B_2 \cap A_\delta) + \mathsf{P}(\{S_n > x\} \cap B_2 \cap A_\delta^c) \\
&\le n\,\overline{F}((1-\delta)\,x) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\big(X_i + \widehat{S}_n^{(i)} > x\,, |X_i| > \varepsilon\,x\,, X_i \le (1-\delta)\,x\big) \\
&\le n\,\overline{F}((1-\delta)\,x) + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\big(\widehat{S}_n^{(i)} > \delta\,x\,, |X_i| > \varepsilon\,x\big) \\
&=: C_1(x) + C_2(x)\,.
\end{aligned}$$

Отсюда,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x>t_n}\frac{C_1(x)}{n\,\overline{F}(x)}\le(1-\delta)^{-\alpha}\,,$$

и правая часть сходится к 1 при $\delta\downarrow 0$. Из m-зависимости имеем,

$$\begin{aligned}C_2(x)\;&\le\;\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}\Big(\sum_{j\in[i-m,i+m],j\ne i}\widehat{X}_j>\delta\,x/2\Big)\\&\quad+\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}\Big(\sum_{j\le n,j\notin[i-m,i+m]}\widehat{X}_j>\delta\,x/2\Big)\,\mathsf{P}(|X|>\varepsilon x)\,.\end{aligned}$$

Суммы в первых вероятностях в правой части могут быть ограничены сверху величиной $2mg(x)=2m\varepsilon x$. Если выбрать $2m\varepsilon<\delta/2$, то первый член будет равняться 0. Обозначая $P_{n,i}(x)$ слагаемые во втором члене, имеем

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}P_{n,i}(x)}{n\,\overline{F}(x)}\;\le\;c\,\varepsilon^{-\alpha}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}\Big(\sum_{j\le n,j\notin[i-m,i+m]}\widehat{X}_j>\delta\,x/2\Big)\,.$$

Вероятности в этой сумме могут быть ограничены равномерно по x и i с помощью разбиения суммы на m сумм н.о.р. случайных величин и применения неравенства Прохорова. Более того, эта верхняя оценка будет стремиться к 0, поскольку мы можем выбрать $\varepsilon>0$ сколь угодно малым. Следовательно, $\sup_{x>t_n}C_2(x)/(n\overline{F}(x))$ стремится к 0 при $n\to\infty$.

Наконец, оценим сверху вероятность $\mathsf{P}(\{S_n>x\}\cap B_3)=\mathsf{P}(\widehat{S}_n>x)$. Разобьем $\widehat{S}_n$ на m независимых сумм и применим неравенство Фука-Нагаева для $p>\alpha$. Тогда мы получим для некоторых констант $c,d>0$, зависящих только от p,

$$\mathsf{P}(\widehat{S}_n>x)\;\le\;c\,n\,\mathsf{E}\big[|\widehat{X}|^p\big]\,x^{-p}+\exp(-d\,x^2/n)\,.$$

По теореме Караматы равномерно по $x>t_n$ имеем

$$\frac{n\,\mathsf{E}\big[|\widehat{X}/x|^p\big]}{n\,\overline{F}(x)}\;=\;\frac{\mathsf{E}\big[|\widehat{X}|^p\big]}{(\varepsilon x)^p\,\mathsf{P}(|X|>\varepsilon x)}\,\varepsilon^p\,\frac{\mathsf{P}(|X|>\varepsilon\,x)}{\overline{F}(x)}\to c\,\varepsilon^{p-\alpha}\,,\qquad n\to\infty\,,$$

и правая часть стремится к 0 при $\varepsilon \downarrow 0$. Более того, для достаточно больших x

$$\frac{\exp(-d\,x^2/n)}{n\,\overline{F}(x)} = \exp(-d\,x^2/n - \ln n + S(x)) \le \exp(-0.5\,d\,x^2/n - \ln n + \alpha \ln x),$$

где правая часть стремится к 0 при $n \to \infty$ равномерно по $x > t_n \gg \sqrt{n \ln n}$. Доказательство теоремы закончено.

□

2 Асимптотический анализ гауссовских случайных процессов и функций от них

2.1 Введение

Пусть $(X(t), t > 0)$ – гауссовский (нестационарный) случайный процесс на действительной прямой. В этом разделе нас будет интересовать вопрос асимптотики вероятности

$$P(\mathcal{S}, u) = \mathsf{P}(\max_{t \in \mathcal{S}} X(t) > u) \tag{2.1}$$

при $u \to \infty$, а также обобщение этой задачи на гауссовские случайные поля и нормы от векторных гауссовских процессов.

В основе анализа асимптотики вероятностей типа (2.1) лежит так называемый метод двойных сумм Пикандса, разработанный Пикандсом [167] для поиска асимптотики вероятности (2.1) в случае, если $X(t)$ – стационарный процесс. Этот метод был исправлен и уточнен В.И. Питербаргом в работе [27]. В дальнейшем он был обобщен на гауссовские случайные поля в монографии [170], где рассматривались как стационарные случайные поля со степенным поведением ковариационной функции в нуле, так и нестационарные случайные поля с похожим поведением ковариационной функции в единственной точке максимума дисперсии. Однако, в то время как степенное или регулярно меняющееся поведение ковариационной функции представляется существенным для метода двойных сумм Пикандса, требование в [172], [170] степенного поведения дисперсии выглядит достаточно искусственным, как было показано в работе [11]. Тем самым, основная задача этой главы – исследовать асимптотическое поведение вероятности превышения уровня гауссовским случайным полем (в разделе 2.1) и нормой гауссовского векторного процесса (в разделе 2.2) при наложении более широких и естественных условий на ковариационную функцию и функцию дисперсии. Заметим, что в недавней работе [73] было показано, что в нестационарном случае поведение дисперсии не обязано быть в точности степенным, но может

быть хотя бы регулярно меняющимся. В текущей главе мы не будем предполагать даже этого.

Начнем мы со случая, когда $X(t)$, $t \in [-S, S]$, – почти наверное непрерывный гауссовский случайный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $r(s,t)$; обозначим $\sigma^2(t) = r(t,t)$. Рассмотрим асимптотическое поведение вероятности

$$P([-S,S];u) := \mathsf{P}(\max_{t\in[-S,S]} X(t) > u). \tag{2.2}$$

при $u \to \infty$. Предположим, что единственной точкой абсолютного максимума $\sigma(t)$ является ноль, и его значение равно единице, имея в виду, что всегда можно сдвинуть время и изменить масштаб. Следующие условия регулярности во многом аналогичны условиям, налагаемым нами в разделах 2.1 и 2.2 для изучения гауссовских нестационарных полей и норм гауссовских нестационарных векторных процессов соответственно; поэтому обсуждение и сравнение этих условий с ранее налагавшимися условиями мы приведем здесь.

A1 : Случайный процесс $X(t)$ непрерывен почти наверное.

Это условие, в частности, будет выполняться (то есть будет существовать почти наверное непрерывная версия процесса), если выполнено следующее условие Гельдера: для некоторых положительных констант Γ и γ выполнено

$$\mathsf{E}(X(t) - X(s))^2 \le \Gamma |t-s|^\gamma, \quad s,t \in [-S,S]. \tag{2.3}$$

В текущей главе условие (2.3), в отличие от работы [172], а также монографий [170], [28], не предполагается.

A2 : Абсолютный максимум функции $\sigma(t)$ на отрезке $[-S,S]$ достигается в единственной точке $t = 0$, причем $\sigma(0) = 1$. Кроме того, существуют пределы (конечные или бесконечные)

$$\lim_{t\downarrow 0, s\downarrow 0} \frac{1-\sigma^2(t)}{1-r(s,t)} \in [0,\infty] \quad \text{и} \quad \lim_{t\uparrow 0, s\uparrow 0} \frac{1-\sigma^2(t)}{1-r(s,t)} \in [0,\infty].$$

Если хотя бы один из этих пределов равен 0, то в этом случае предположим, что существуют такие константы $c > 0$ и $K < \infty$, что для всех $x \in [0, c]$ уравнение $1 - \sigma^2(t) = x$ имеет не более, чем K корней.

Заметим, что из условия **A2** следует неравенство $r(s,t) \leq 1, \forall s,t \in [-S, S]$, причем равенство достигается только в случае $s = t = 0$.

Обозначим $\rho(s,t) := r(s,t)/\sigma(s)\sigma(t)$.

A3 : Существует такая ковариационная функция $\rho(t)$ стационарного процесса, что выполнено

$$\lim_{s,t\to 0} \frac{1-\rho(s,t)}{1-\rho(t-s)} = 1.$$

A4 : Для функции ρ из предыдущего условия найдутся положительные функции $q(u)$ и $h(t)$ такие, что для всех $t \neq 0$ существует предел

$$\lim_{u\to\infty} u^2(1-\rho(q(u)t)) = h(t),$$

причем для некоторого $\varepsilon > 0$ это соотношение выполнено равномерно на отрезке $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Заметим, что $\rho(0) = 1$ и что по **A3** функция ρ является непрерывной. Отсюда $q(u) \to 0$ при $u \to \infty$, и поэтому соотношение (2.1) выполняется равномерно на любом компакте. Более того, из (2.1) следует, что для произвольных $s, t > 0$ верно:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1-\rho(q(u)t)}{1-\rho(q(u)s)} = \frac{h(t)}{h(s)}. \tag{2.4}$$

По определению регулярно меняющейся функции отсюда вытекает, что функция $1 - \rho(t)$ регулярно (или правильно) меняется в нуле, результаты теории регулярно меняющихся функций см в монографии [57]. Соответствующий индекс регулярного изменения $\alpha > 0$, более того, $h(t) = t^\alpha$. Действительно, если $\alpha < 0$, то функция $\rho(t)$ будет иметь разрыв в нуле, а если $\alpha = 0$, то $h(t) = 1$ для всех $t > 0$ и

$h(0) = 0$, и эта функция также будет разрывна. Далее, если $\alpha > 2$, то из предположений **A3** и **A4** следует, что $\rho''(t) \equiv 0$, а это противоречит положительной определенности функции ρ. Значит, $\alpha \in (0, 2]$. Также добавим, что если $\alpha = 2$, но тем не менее $t^{-2}(1 - \rho(t)) \to 0$, то ρ также не будет положительно определенной. Получаем, что условие **A4** по сути эквивалентно соответствующему условию из [27], поэтому его невыполнение является критическим для метода двойных сумм. Тем самым, мы убедились, что

Функция $1 - \rho(t)$ *регулярно меняется в нуле с параметром* $\alpha \in (0, 2]$. (2.5)

Поскольку $1 - \rho(t) = \ell(t)t^\alpha$, где $\ell(t)$ – медленно меняется в нуле, то

$$q(u) = (1 - \rho)^{\leftarrow}(u^{-2}),$$

где верхний индекс "$\leftarrow$" обозначает обобщенную обратную функцию. Применяя теоремы 1.5.12, 1.5.13 и утверждение 1.5.15 из монографии [57], получаем, что при $u \to \infty$ выполнено

$$q(u) \sim u^{-2/\alpha}\ell^{\#}(u^{-2})^{1/\alpha} \tag{2.6}$$

Здесь $f(u) \sim g(u)$ означает, что функции f и g асимптотически эквивалентны при $u \to \infty$, а $\ell^{\#}$ обозначает сопряженную по де Бруину функция к ℓ. Из (2.4), условие (2.1) имеет место для всех q' таких, что $\lim_{u\to\infty} q(u)/q'(u) = 1$. Значит, в силу того, что q регулярно меняется на бесконечности, без ограничения общности можно считать, что q – монотонная функция.

Заметим, что медленно меняющуюся функцию $\ell^{\#}$ часто можно выразить в явном виде в силу теоремы Боянича-Сенеты (см. теорему 2.3.3 и следствие 2.3.4, [57]). К примеру, если

$$\frac{\ell\left(u^{-2}\ell(u^{-2})\right)}{\ell(u^{-2})} \to 1 \text{ при } u \to \infty,$$

то $\ell^{\#} \sim 1/\ell$.

Далее, легко видеть, что из условий **A2** и **A4** следует, что существует предел

$$\lim_{u\to\infty} u^2(1-\sigma^2(q(u)t)) = h_1(t) \in [0,\infty].$$

Как и ранее, под $\Psi(u)$ мы понимаем хвост функции распределения стандартной нормальной случайной величины. "Почти стационарный" случай поведения процесса $X(t)$, о котором далее пойдет речь, обобщает случай $\beta > \alpha$ в монографиях [170, 28]. Обозначим $f(t) = (1-\sigma^2(t))/2$, а также

$$L_+(\lambda) := \int_0^\delta e^{-\lambda f(t)}dt \ \text{ и } L_-(\lambda) := \int_{-\delta}^0 e^{-\lambda f(t)}dt, \quad \lambda > 0. \tag{2.7}$$

Асимптотическое поведение этих интегралов при $\lambda \to \infty$ не зависит от выбора $\delta > 0$ в силу условий на $\sigma(t)$.

Обозначим теперь через $\chi(t)$ процесс дробного броуновского движение со сдвигом, то есть

$$\chi(0) = 0,\ \mathrm{var}(\chi(t)-\chi(s)) = 2|t-s|^\alpha, \quad \mathsf{E}\chi(t) = -|t|^\alpha;$$

положим $\chi_1(t) = \chi(t) - h_1(t)$, если $h_1(t) \in [0,\infty)$, и $\chi_1(t) = 0$, if $h_1(t) = \infty$. Далее, обозначим для замкнутого множества $S \subset \mathbb{R}$,

$$P_\alpha(S) = \mathsf{E}\exp\left(\max_{t\in S}\chi_1(t)\right).$$

Заметим, что если $h_1(t) = 0$ для всех $t \in S$, то $P_\alpha(S) = H_\alpha(S),$ константе Пикандса. Следовательно, если $h_1(t) = 0$ для всех $t > 0$, то

$$H_\alpha := \lim_{\Lambda\to\infty} \Lambda^{-1}P_\alpha([0,\Lambda]) = \lim_{\Lambda\to\infty} \Lambda^{-1}H_\alpha([0,\Lambda]) \in (0,\infty), \tag{2.8}$$

см. [170], [28]. Аналогичное верно и для интервала $[-\Lambda, 0]$ при $h_1(t) = 0$ для $t < 0$. Далее, в монографии [170] показано, что если $h_1(t) \in (0,\infty]$ для всех t, то

$$P_\alpha = \lim_{\Lambda\to\infty} P_\alpha([-\Lambda,\Lambda]) \in (0,\infty). \tag{2.9}$$

Отметим, что это соотношение нетривиально, если $h_1(t) \in (0,\infty)$ для некоторых t. Также известно, что $H_2 = \pi^{-1/2}$, см. к примеру [170].

Следующая теорема получена в работе [11] и является частным случаем основного результата следующего раздела.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* **A1-A4**. *Если* $h_1(t) = 0$, $t \in [-S, S]$, *то*

$$P([0, S], u) = H_\alpha L_+(u^2)\ q^{-1}(u)\Psi(u)(1 + o(1))$$

и

$$P([-S, S], u) = H_\alpha \left(L_+(u^2) + L_-(u^2)\right) q^{-1}(u)\Psi(u)(1 + o(1))$$

при $u \to \infty$.

2.2 Вероятность больших уклонений траекторий гауссовского случайного поля

Основным результатом раздела 2.2 является обобщение результата теоремы 2.1 на нестационарные гауссовские поля, однако на случайное поле накладываются несколько другие условия. Итак, пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ есть замыкание открытого множества, содержащего точку 0, и пусть $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathcal{S}$, – почти наверное непрерывное гауссовское поле с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $R(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \mathsf{E}X(\mathbf{s})X(\mathbf{t})$, снова обозначим через $\Sigma^2(\mathbf{t}) = R(\mathbf{t}, \mathbf{t})$ функцию дисперсии данного процесса. Целью раздела 2.2 является изучение вероятности

$$P(\mathcal{S}, u) = \mathsf{P}(\max_{\mathbf{t}\in\mathcal{S}} X(\mathbf{t}) > u) \tag{2.10}$$

при $u \to \infty$ для гауссовского поля $X(\mathbf{t})$ в почти стационарном случае. Определим $\mathbb{B}_\varepsilon = \{\mathbf{t} : \ |\mathbf{t}| \le \varepsilon\}$. Наложим условия на этот процесс, большинство из которых является естественным продолжением условий **A1-A4**.

B1 Случайное поле $X(\mathbf{t})$ непрерывно почти наверное. Более того, существует $\varepsilon > 0$ такое, что интеграл Дадли [28], [82] стандартизированного поля $\tilde{X}(\mathbf{t}) = X(\mathbf{t})/\Sigma(\mathbf{t})$ по множеству $\mathbb{B}_\varepsilon = \{\mathbf{t} : \ |\mathbf{t}| \le \varepsilon\}$ конечен.

B2 Абсолютный максимум функции $\Sigma(\mathbf{t})$ на множестве $\mathcal{S}$ достигается в единственной точке $\mathbf{t} = \mathbf{0}$, причем $\Sigma(\mathbf{0}) = 1$.

B3 Существует такая ковариационная функция $\Upsilon(\mathbf{t})$ однородного случайного поля, $\Upsilon(\mathbf{t}) < 1$ для $\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$, что выполнено

$$\lim_{\mathbf{s},\mathbf{t}\to\mathbf{0},\mathbf{s}\neq\mathbf{t}} \frac{1 - R(\mathbf{s},\mathbf{t})}{1 - \Upsilon(\mathbf{t}-\mathbf{s})} = 1.$$

B4 Существует базис в $\mathbb{R}^d$, векторная функция $\mathbf{q}(u) = (q_1(u), \ldots, q_d(u))$, $u > 0$, с положительными компонентами и положительная для всех $\mathbf{t} \neq 0$ функция $h(\mathbf{t})$ такие, что для всех $\mathbf{t}$, записанных в этих координатах, будет выполнено

$$\lim_{u\to\infty} u^2(1 - \Upsilon(\mathbf{q}(u)\mathbf{t})) = h(\mathbf{t})$$

равномерно по $\mathbf{t}$ на любом замкнутом множестве, где под $\mathbf{q}(u)\mathbf{t}$ имеется в виду вектор $(q_1(u)t_1, \ldots, q_d(u)t_d)$.

B5 Для всех $\mathbf{t}$ существует функция $h_1(\mathbf{t}) \in [0, \infty]$ такая, что выполнено предельное соотношение

$$\lim_{u\to\infty} u^2(1 - \Sigma^2(\mathbf{q}(u)\mathbf{t})) = h_1(\mathbf{t}).$$

Более того, если $h_1(\mathbf{e}) = 0$ для всех $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^{d-1}$, где $\mathbb{S}^{d-1}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^d$, то

$$\lim_{u\to\infty} u^2\big(\Sigma^2(\mathbf{s}) - \Sigma^2(\mathbf{s} + \mathbf{q}(u)\mathbf{t})\big) = 0$$

равномерно по $\mathbf{s} \in \mathbb{B}_\varepsilon$ и $\mathbf{t}$ на произвольном замкнутом множестве.

Определим

$$\hat{L}(\lambda) = \int_{|\mathbf{t}|\leq 1} e^{-\lambda(1-\Sigma^2(\mathbf{t}))/2} d\mathbf{t}, \quad \lambda > 0.$$

Определим также для произвольного компакта $T \subset \mathbb{R}^d$

$$H_{\mathbf{q}}(T) = \mathsf{E} \exp(\max_{\mathbf{t}\in T} \chi(\mathbf{t})),$$

где $\chi(\mathbf{t})$ – гауссовское почти наверное непрерывное случайное поле с $\chi(\mathbf{0}) = 0$,

$$\operatorname{var}\big(\chi(\mathbf{t}) - \chi(\mathbf{s})\big) = 2h(\mathbf{t}-\mathbf{s}),\ \mathsf{E}\chi(\mathbf{t}) = -h(\mathbf{t}).$$

Наконец, определим обобщенную константу Питербарга

$$H_{\mathbf{q}} = \lim_{T_i \to \infty,\ i \in [d]} (T_1 \cdot \ldots \cdot T_d)^{-1} H_{\mathbf{q}} \left(\bigotimes_{i=1}^{d} [0, T_i] \right).$$

Тогда будет верен следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* **B1-B5**. *Если к тому же* $h_1(\mathbf{e}) = 0$ *для всех* $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^{d-1}$, *единичной сферы в* $\mathbb{R}^d$, *то*

$$P(\mathcal{S}, u) = (1 + o(1)) H_{\mathbf{q}} \hat{L}(u^2) \prod_{i=1}^{d} q_i^{-1}(u) \Psi(u)$$

при $u \to \infty$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующий результат, известный как лемма Дмитровского [78], [28].

Лемма 2.3. *Пусть выполнено условие* **B1**. *Тогда существует такое* $\gamma(u)$, *что* $\gamma(u) \to 0$ *при* $u \to \infty$, *и для любого множества* $S_1 \subset \mathbb{B}_\varepsilon$ *выполнено*

$$P(S_1, u) \leq \exp\left(-\frac{u^2}{\sigma^2(S_1)} + u\gamma(u) \right),$$

где $\sigma^2(S_1) = \max_{\mathbf{t} \in S_1} \mathsf{E} X^2(\mathbf{t})$.

Доказательство теоремы 2.2. Используя рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве регулярного изменения функции $1 - \Upsilon(\mathbf{t})$ (см. [133], с. 416), мы можем показать, что $h_1(\mathbf{t})$ непрерывна и что если $h_1(\mathbf{e}) \in (0, \infty)$ для некоторого вектора $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^d$, то $h_1(t\mathbf{e})$ регулярно меняется в 0. Следовательно, из условия "$h_1(\mathbf{e}) = 0$ для всех $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^{d-1}$" вытекает, что $h_1(\mathbf{t}) = 0$ для всех $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$.

Заметим, что по лемме 3 [133] достаточно рассматривать лишь $\mathbf{t} \in B_u := \{\mathbf{t} :\ 1 - \Sigma^2(\mathbf{t}) \leq 2u^{-1}\gamma_1(u), \}$ где $\gamma_1(u) = \gamma(u) + u^{-1} \ln^2$ и $\gamma(u)$ взята из леммы Дмитровского.

Сначала мы рассмотрим упрощенную модель $X(\mathbf{t}) = X_0(\mathbf{t})\Sigma(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathcal{S}$, удовлетворяющую условиям **B1-B5**, где $X_0(\mathbf{t})$ – однородное гауссовское поле с нулевым средним, ковариационной функцией,

удовлетворяющей условию **B4** и дисперсией $\Sigma(\mathbf{t})$, удовлетворяющей условию **B5**.

Выберем малые ε_+ и ε_- с $\varepsilon_+ > \varepsilon_- > 0$. Для достаточно большого u_0 и всех $u \geq u_0$ существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(u) \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$ такое, что выполнено $u\gamma_1(u)/\varepsilon_0 \in \mathbb{N}$. Мы будем использовать это значение ε_0 ниже. Обозначим

$$B_k(u) = \{\mathbf{t} : k\varepsilon_0 \leq u^2(1 - \Sigma^2(\mathbf{t})) < (k+1)\varepsilon_0\}, \tag{2.11}$$

для всех таких $k \geq 0$, что $B_k(u) \subset B_u$.

Напомним, что для $\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$ выполнено

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u^2(1 - \Sigma^2(\mathbf{q}(u)\mathbf{t}))}{u^2(1 - \Upsilon(\mathbf{q}(u)\mathbf{t}))} = 0.$$

Более того, по второй части условия **B5** мы имеем для всех $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ и $\mathbf{s} \in \mathbb{B}_\varepsilon$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u^2\big(\Sigma^2(\mathbf{s}) - \Sigma^2(\mathbf{s} + \mathbf{q}(u)\mathbf{t})\big)}{u^2(1 - \Upsilon(\mathbf{q}(u)\mathbf{t}))} = 0. \tag{2.12}$$

Теперь покажем, что существуют функции $Q_i(u)$, $i \in [d]$, такие, что

$$Q_i(u)/q_i(u) \to \infty, \quad u \to \infty, \tag{2.13}$$

и

$$u^2\big(\Sigma^2(\mathbf{s}) - \Sigma^2(\mathbf{s} + \mathbf{Q}(u)\mathbf{t})\big) \to 0, \quad u \to \infty, \tag{2.14}$$

равномерно по $\mathbf{t} \in E^d = [-1, 1]^d$ и $\mathbf{s} \in \mathbb{B}_\varepsilon$. Обозначим

$$R(u) := \sup_{\mathbf{t}\in E^d, \mathbf{s}\in\mathbb{B}_\varepsilon} \frac{\Sigma^2(\mathbf{s}) - \Sigma^2(\mathbf{s} + \mathbf{q}(u)\mathbf{t})}{1 - \Upsilon(\mathbf{q}(u)\mathbf{t})}.$$

Поскольку $q_i(u)$ можно выбрать монотонной для каждого $i \in [d]$ (см. соответствующие рассуждения в разделе 2.1), $R(u)$ также монотонна и стремится к 0 по равномерной сходимости в $\mathbf{t} \in E^d$, см. (2.12).

Мы будем искать $Q_i(u)$ в форме $Q_i(u) = q_i(f(u))$, $i \in [d]$, где $f(u) \to \infty$ и $f(u)/u \to 0$ при $u \to \infty$. В этом случае (2.13) следует из регулярного изменения функций $q_i(u)$ для всех $i \in [d]$. Предположим, что

$$\frac{u^2}{f^2(u)} R(f(u)) \to 0, \quad u \to \infty.$$

Отсюда и из условия **B4** мы имеем для некоторого $\Delta > 0$

$$\sup_{\mathbf{t}\in E^d,\mathbf{s}\in\mathbb{B}_\varepsilon} \frac{\Sigma^2(\mathbf{s}) - \Sigma^2(\mathbf{s}+\mathbf{Q}(u)\mathbf{t})}{1-\Upsilon(\mathbf{q}(u)\mathbf{t})} \leq \sup_{\mathbf{t}\in E^d,\mathbf{s}\in\mathbb{B}_\varepsilon} \frac{\Sigma^2(\mathbf{s}) - \Sigma^2(\mathbf{s}+\mathbf{Q}(u)\mathbf{t})}{(1-\Delta)\frac{f^2(u)}{u^2}\big(1-\Upsilon(\mathbf{Q}(u)\mathbf{t})\big)}$$
$$= (1-\Delta)^{-1}\frac{u^2}{f^2(u)}R(f(u)) \to 0$$

при $u \to \infty$. Отсюда и из условия **B4** вытекает (2.14).

Из (2.14) и определения $B_k(u)$ немедленно следует, что для всех $k \geq 0$ и достаточно больших u существует такое $\mathbf{t}_k = \mathbf{t}_k(u) \in B_k(u)$ (без ограничения общности мы можем выбрать $\mathbf{t}_k$, удовлетворяющее условию $u^2(1-\Sigma^2(\mathbf{t}_k)) = (k+1/2)\varepsilon_0$), что выполнено

$$\mathbf{t}_k + \bigotimes_{i=1}^{d}[-Q_i(u), Q_i(u)] \subset B_k(u).$$

Отсюда для каждого $k \geq 0$ множество $B_k(u)$ удовлетворяет предположениям теоремы 1 [133]. Последнее условие в этой теореме выполнено для всех $\delta > 0$ и k, поскольку $|B_u| \to 0$ при $u \to \infty$, где $|\cdot|$ обозначает объем. Следовательно, для всех $k \geq 0$

$$\mathsf{P}\left(\max_{\mathbf{t}\in B_k(u)} X_0(\mathbf{t}) > u\right) = (1+\delta(u))H_{\mathbf{q}}|B_k(u)|\prod_{i=1}^{d} q_i^{-1}(u)\Psi(u), \qquad (2.15)$$

где $\delta(u) \to 0$ при $u \to \infty$.

Оставшаяся часть доказательства во многом совпадает с соответствующей частью доказательства теоремы 1, [173], см. раздел 3.5 в этой работе. Мы лишь будем отмечать отличия. Основное отличие состоит в том, что благодаря условию **B5** все множества $B_k(u), k \geq 0$, оказываются "большими", а именно, удовлетворяющими условиям теоремы 1 [133], и это наблюдение делает доказательство намного проще.

Заметим, что множества индексов $\mathcal{L} = \{k : B_k(u) \cap B_u \neq \varnothing\}$ и $\mathcal{L}' = \{k : B_k(u) \subset B_u\}$ совпадают за счет выбора величины ε_0. Следовательно, по неравенству Бонферрони

$$P(B_u, u) \leq \sum_{k\in\mathcal{L}} \mathsf{P}\left(\max_{\mathbf{t}\in B_k(u)} X(\mathbf{t}) > u\right) \qquad (2.16)$$

and

$$P(B_u,u) \;\geq\; \sum_{k\in\mathcal{L}} \mathsf{P}\left(\max_{\mathbf{t}\in B_k(u)} X(\mathbf{t}) > u\right) - \sum_{k\in\mathcal{L}}\sum_{l\neq k, l\in\mathcal{L}} \mathsf{P}\left(\max_{\mathbf{t}\in B_k(u)} X(\mathbf{t}) > u, \max_{\mathbf{s}\in B_l(u)} X(\mathbf{s}) > u\right) \quad (2.17)$$

Обозначим

$$\sigma_k = \sqrt{1-u^{-2}k\varepsilon_0}, \quad u_k = u/\sigma_k, \quad k \geq 0.$$

Вероятности внутри одиночных сумм в (2.16, 2.17) ограничены сверху и снизу вероятностями событий

$$A_k(u) = \left\{\max_{\mathbf{t}\in B_k(u)} X_0(\mathbf{t}) > u_k\right\} \quad \text{и} \quad A'_k(u) = \left\{\max_{\mathbf{t}\in B_k(u)} X_0(\mathbf{t}) > u_{k+1}\right\},$$

соответственно. Мы имеем по (2.15) для $k \in \mathcal{L}$

$$\mathbf{P}(A_k) = (1+\delta(u_k))H_{\mathbf{q}}|B_k(u)|\prod_{i=1}^{d} q_i^{-1}(u_k)\Psi(u_k),$$

и

$$\mathbf{P}(A'_k) = (1+\delta(u_{k+1}))H_{\mathbf{q}}|B_k(u)|\prod_{i=1}^{d} q_i^{-1}(u_{k+1})\Psi(u_{k+1}).$$

Обозначим

$$S(u) = \sum_{k\in\mathcal{L}} |B_k(u)|e^{-k\varepsilon_0/2}, \quad S'(u) = \sum_{k\in\mathcal{L}} |B_k(u)|e^{-(k+1)\varepsilon_0/2}.$$

Используя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 1 [173], см. раздел 3.5, имеем

$$\sum_{k\in\mathcal{L}} \mathsf{P}(A_k) \leq (1+\delta_1(u))\frac{H_{\mathbf{q}}}{\sqrt{2\pi}u\prod_{i=1}^{d} q_i(u)} e^{-u^2/2} S(u), \quad (2.18)$$

$$\sum_{k\in\mathcal{L}} \mathsf{P}(A'_k) \geq (1-\delta_1(u))\frac{H_{\mathbf{q}}}{\sqrt{2\pi}u\prod_{i=1}^{d} q_i(u)} e^{-u^2/2} S'(u), \quad (2.19)$$

где $\delta_1(u) \to 0$ при $u \to \infty$. Обозначим

$$I(u) = \int\limits_{f(\mathbf{t})\leq u^{-1}\gamma_1(u)} e^{-u^2 f(\mathbf{t})} d\mathbf{t}. \quad (2.20)$$

Отсюда легко видеть, что $S'(u) \le I(u) \le S(u)$ и

$$S(u)/S'(u) = e^{\varepsilon_0/2} \le 1 + 2\varepsilon_+$$

для всех достаточно малых ε_+. Следовательно, мы получаем, что $S(u)$ и $S'(u)$ – верхняя и нижняя интегральные суммы для $I(u)$ соответственно. Осталось заметить, что $\hat{L}(u^2) = I(u)(1 + o(1))$ при $u \to \infty$.

Далее, оценим сверху двойную сумму (2.17). Сначала мы рассмотрим пары множеств, которые *не являются соседними*. Итак, имеем для $k, l \ge 0$ с условием $|k - l| > 1$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(A_k \cap A_l) &\le \mathsf{P}\left(\max_{(\mathbf{s},\mathbf{t}) \in B_k(u) \otimes B_l(u)} \frac{X_0(\mathbf{s}) + X_0(\mathbf{t})}{\sqrt{2 + 2\Upsilon(\mathbf{t} - \mathbf{s})}} \ge \frac{u_k + u_l}{\sqrt{2 + 2r_{k,l}(u)}}, \right) \\ &\le C \frac{|B_k(u)| \cdot |B_l(u)|}{\left(\prod_{i=1}^d q_i(u) \right)^2} \Psi\left(\frac{u_k + u_l}{\sqrt{2 + 2r_{k,l}(u)}} \right), \end{aligned} \tag{2.21}$$

где

$$r_{k,l}(u) = \max_{(\mathbf{s},\mathbf{t}) \in B_k(u) \otimes B_l(u)} \Upsilon(\mathbf{t} - \mathbf{s})$$

и константа C не зависит от k, l. Заметим, что

$$\min_{(\mathbf{s},\mathbf{t}) \in B_k(u) \otimes B_l(u)} |\Sigma^2(\mathbf{t}) - \Sigma^2(\mathbf{s})| = u^{-2}(|k - l| - 1)\, \varepsilon_0$$

по (2.11) и непрерывности $\Sigma^2(\mathbf{t})$, поэтому из (2.12) и условия **B4** следует, что $u^2(1 - r_{k,l}(u)) \to \infty$ при $u \to \infty$ равномерно по $k, l \ge 0$, где $|k - l| > 1$. Следовательно, существует такая возрастающая функция $\kappa(u)$, стремящаяся к бесконечности при $u \to \infty$, что для всех $k, l \ge 0$ с условием $|k - l| > 1$ выполнено

$$u^2(1 - r_{k,l}(u))/\kappa(u) \to \infty, \quad u \to \infty.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \frac{(u_k + u_l)^2}{2 + 2r_{k,l}(u)} &\ge u^2 + \frac{1}{2}\kappa(u) + \frac{1}{4}u^2(1 - \sigma_k^2) + \frac{1}{4}u^2(1 - \sigma_l^2) \\ &= u^2 + \kappa(u)/2 + k\varepsilon_0/4 + l\varepsilon_0/4. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Из (2.21) и (2.22) мы получаем следующую оценку для двойной суммы в (2.17)

$$\sum_{k\in\mathcal{L}}\sum_{l\neq k,l\in\mathcal{L}}\mathsf{P}\left(\max_{\mathbf{t}\in B_k(u)}X(\mathbf{t})>u,\max_{\mathbf{s}\in B_l(u)}X(\mathbf{s})>u\right)\leq\sum_{k\in\mathcal{L}}\sum_{|l-k|>1,l\in\mathcal{L}}\mathsf{P}(A_k\cap A_l)$$

$$\leq C_1\frac{1}{\left(\prod_{i=1}^d q_i(u)\right)^2}\exp(-\kappa(u))\Psi(u)\left(\sum_{k\in\mathcal{L}}|B_k(u)|e^{-k\varepsilon_0/4}\right)^2 \quad (2.23)$$

для некоторого $C_1 > 0$, где последнее слагаемое в правой части может быть оценено сверху величиной $I(u)(1+\varepsilon_1)$ для произвольного $\varepsilon_1 > 0$ и достаточно большого u по неравенству Коши-Буняковского. Следовательно, член $\exp(-\kappa(u))$ в (2.23) позволяет сделать вывод, что двойная сумма по интервалам, не являющимися соседними, пренебрежимо мала, чем каждая из одиночных сумм в (2.18, 2.19).

Осталось рассмотреть асимптотику двойной суммы по *соседним* множествам. Обозначим

$$\Xi(u,\mathbf{t}):=\mathbf{t}+\bigotimes_{i=1}^d[-\sqrt{q_i(u)Q_i(u)},\sqrt{q_i(u)Q_i(u)}]$$

и

$$\partial B_k(u)=\{\mathbf{t}:\ u^2(1-\Sigma^2(\mathbf{t}))=(k+1)\varepsilon_0\},\quad k\geq 0.$$

Рассмотрим $l-k=1$ и введем

$$B_l'(u)=B_l(u)\cap\{\mathbf{s}:\ \exists\mathbf{t}\in\partial B_k(u)\text{ такое, что }\mathbf{s}\in\Xi(u,\mathbf{t})\},$$

"малую окрестность" множества $\partial B_k(u)$ в $B_l(u)$. Имеем,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A_k\cap A_l)\ &\leq\ \mathsf{P}\left(\max_{\mathbf{t}\in B_l'(u)}X_0(\mathbf{t})>u_l\right) \quad (2.24)\\ &\quad+\mathsf{P}\left(\max_{(\mathbf{s},\mathbf{t})\in B_k(u)\otimes(B_l(u)\setminus B_l'(u))}X_0(\mathbf{s})+X_0(\mathbf{t})>u_k+u_l\right).\end{aligned}$$

Множество $B_l'(u)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 [133] для всех $l\geq 1$, поэтому мы можем использовать те же рассуждения для оценивания суммы первых вероятностей в правой части, что и при оценивании

одиночной суммы в (2.16, 2.17) выше. Эта сумма пренебрежимо мала, чем упомянутая одиночная сумма, поскольку $|B'_l(u)|/|B_l(u)| \to 0$ при $u \to \infty$ по условиям **B4** и **B5**. Далее, из (2.12) следует, что $u^2(1 - r'_{kl}(u)) \to \infty$ при $u \to \infty$, где

$$r'_{kl}(u) = \max_{(\mathbf{s},\mathbf{t}) \in B_k(u) \otimes (B_l(u) \setminus B'_l(u))} \Xi(\mathbf{t} - \mathbf{s}).$$

Поэтому рассуждения, проведенные нами для оценивания двойной суммы по множествам, которые не являются соседними, могут быть использованы для суммы вторых вероятностей в правой части (2.24). Отсюда, эта сумма пренебрежимо мала по сравнению с одиночной суммой из (2.16, 2.17).

Наконец, с помощью стандартного перехода от упрощенной модели $X(\mathbf{t}) = X_0(\mathbf{t})\Sigma(\mathbf{t})$ к произвольному гауссовскому процессу (с помощью неравенства Слепяна, см., например, [28]) проводится последний шаг доказательства теоремы. □

2.3 Вероятность больших уклонений траекторий нормы гауссовского векторного процесса

В этом разделе нас будет интересовать асимптотика вероятности высокого экстремума евклидовой нормы гауссовского векторного процесса с независимыми одинаково распределенными компонентами для всех трех возможных случаев поведения функции дисперсии и ковариационной функции. Итак, пусть $\mathbf{X}(t) := (X_1(t), \ldots, X_d(t)) \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, T]$ – гауссовский векторный процесс, компоненты которого – независимые одинаково распределенные гауссовские процессы с нулевыми средними; также предположим, что функция дисперсии компоненты этого процесса достигает своего абсолютного максимума в единственной точке. Модуль этого процесса (то есть его евклидову норму) $\beta(t) := |\mathbf{X}(t)|$ будем называть $\beta-$процессом. Целью раздела 2.3 является нахождение асимптотики вероятности

$$\mathsf{P}\left(\max_{t \in [0,T]} \beta(t) > u\right) \tag{2.25}$$

при $u \to \infty$.

Приведенная постановка включает несколько важных частных случаев. Один из них – случай, когда координаты X_i являются стандартными винеровскими процессами, то есть β-процесс для этого случая – классический процесс Бесселя. Еще одним важным примером является бесселевский мост, который является β-процессом для векторного процесса, компоненты которого – стандартные броуновские мосты.

Процесс Бесселя, как и бесселевский мост, являются диффузионными процессами; они, как правило, изучаются методами стохастического анализа, см. например [104], [135], [176], [41]. Процесс Бесселя также связан с большим количеством моделей финансовой математики, например, геометрическим броуновским движением, процессом Кокса-Ингерсолла-Росса, моделью Хестона среди прочих, см. [41] (глава III.3) и [104].

Распределения максимумов траекторий процесса Бесселя и бесселевского моста выписаны в явной форме в виде бесконечного ряда, см. [87] (для процесса Бесселя) и [4], [131] (для бесселевского моста, так называемая формула Гихмана-Кифера). Несомненной сложностью при использовании данных разложений является тот факт, что все их члены влияют на асимптотику распределения. О дальнейших результатах в этом направлении можно прочесть в работе [174], где, в частности, формула Гихмана-Кифера была обобщена на дробные "размерности".

В текущем разделе мы получим точную асимптотику вероятности (2.25), не используя методы, основанные на марковской природе изучаемых процессов. Вместо этого, мы воспользуемся расширением метода двойных сумм Пикандса [170] на гауссовские случайные поля, чьи дисперсии достигают своих максимумов на многообразиях произвольной размерности (см. также предыдущий раздел). Похожие задачи для гауссовских стационарных процессов обсуждались, в частности, в [170], следствие 7.3, и [30]. Гауссовские векторные процессы с нестационарными компонентами также рассматривались [170], теорема

9.3, и [169], где взятие евклидовой нормы позволяет использовать методы, разработанные для гауссовских процессов на действительной прямой. Для полноты обзора добавим, что процесс $\beta(t)$, по сути, является процессом гауссовского хаоса и может быть изучен с помощью методов, аналогичным предложенным в работах [171], [7], см. также списки литературы в этих работах.

Тем самым, методы, которые будут использованы в данном разделе, являются комбинацией методов, разработанных для однородных гауссовских полей и неоднородных гауссовских полей, имеющих единственную точку максимума дисперсии, [170]. Частный случай основного результата текущего раздела был получен в работе [112], см. также [141].

Введем следующие условия регулярности, которые во многом совпадают с условиями регулярности **A1-A4** из раздела 2.1. Прежде всего, предположим, что существует единственная точка $t_0 \in [0, T]$ такая, что

$$\max_{t\in[0,T]} \sigma(t) = \sigma(t_0) = 1,$$

где $\sigma^2(t) = \operatorname{var} X_1(t)$.

E1 : Случайный процесс $\mathbf{X}(t)$ непрерывен почти наверное.

E2 : Существует такая ковариационная функция $\rho(t)$ стационарного процесса, что выполнено

$$\lim_{s,t\to t_0} \frac{1-\rho(s,t)}{1-\rho(t-s)} = 1.$$

E3 : Для функции ρ из предыдущего условия найдется положительная функция $q(u)$ и функция $h(t)$, $h(t) > 0$ при $t \neq 0$, такие, что для всех $t \neq 0$ существует предел

$$\lim_{u\to\infty} u^2(1-\rho(q(u)t)) = h(t), \tag{2.26}$$

причем для некоторого $\varepsilon > 0$ это соотношение выполнено равномерно на отрезке $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

E4: Для всех t существует предел

$$h_1(t) = \lim_{u\to\infty} u^2(1-\sigma^2(t_0+q(u)t)) \in [0,\infty]. \qquad (2.27)$$

В граничных случаях: при $t_0 = 0$ и $t < 0$ или при $t_0 = T$ и $t > 0$ – считаем, что $h_1(t) = \infty$. Более того, если $h_1(t) = 0$ для некоторого t, то существуют $c > 0$ и $K < \infty$ такие, что для всех $x \in [0, c]$ количество корней уравнения $1 - \sigma^2(t) = x$ не превосходит K.

Определим

$$L(u) := \int_{|t-t_0|\le\varepsilon} e^{-u^2(1-\sigma^2(t))/2}dt$$

и напомним, что асимптотическое поведение этого интеграла при $u \to \infty$ не зависит от значения $\varepsilon > 0$.

В вышеприведенных условиях верен основной результат раздела 2.3:

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия* **E1-E4** *на процесс* $\boldsymbol{X}(t)$. *Тогда при* $u \to \infty$ *выполнены следующие соотношения:*

1) Если хотя бы одно из чисел $h_1(1), h_1(-1)$ *равно нулю, то*

$$\mathsf{P}(\max_{[0,T]}\beta(t) > u) = \frac{\sqrt{\pi}H_\alpha}{2^{(d-3)/2}\Gamma(d/2)}u^{d-1}L(u^2)q(u)^{-1}\Psi(u)(1+o(1)),$$

где P_α *определено в разделе 2.1.*
2) Если $h_1(1) = h_1(-1) = \infty$ *(здесь имеется в виду доопределение* $h_1(t)$ *в* ***E4*** *для граничной* t_0, *то*

$$\mathsf{P}(\max_{[0,T]}\beta(t) > u) = \frac{\pi^{d/2}}{2^{(d-3)/2}\Gamma(d/2)}u^{d-1}\Psi(u)(1+o(1)).$$

3) Если хотя бы одно число из чисел $h_1(1)$, $h_1(-1)$ *положительно и конечно, при этом другое – не нуль, то*

$$\mathsf{P}(\max_{[0,T]}\beta(t) > u) = \frac{\pi^{d/2}P_\alpha}{2^{(d-3)/2}\Gamma(d/2)}u^{d-1}\Psi(u)(1+o(1)),$$

где H_α *определено в разделе 2.1.*

Доказательство. Прежде всего, введем гауссовское поле на цилиндре $[0,T]\times\mathbb{S}^{d-1}$, где, как и ранее, $\mathbb{S}^{d-1}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^d$; затем мы выделим малое информативное подмножество этого цилиндра, которое "содержит" в себе всю информацию об исследуемой асимптотике. Далее мы докажем основополагающую локальную лемму метода двойных сумм, аналогичную лемме 6.1, [170]. Оставшаяся часть доказательства во многом стандартна и является комбинацией доказательств теорем 7.1, 8.2 [170], см. также [133].

Гауссовское поле

Введем гауссовское случайное поле

$$Y(t,\mathbf{v}) = X_1(t)v_1+X_2(t)v_2+...+X_d(t)v_d,\ t\in[0,T],\ \mathbf{v}=(v_1,...,v_d)\in\mathbb{S}^{d-1}. \tag{2.28}$$

По двойственности евклидовой нормы, для любого замкнутого множества $S\subset[0,T]$,

$$\max_{t\in S}\beta(t) = \max_{(t,\mathbf{v})\in S\times\mathbb{S}^{d-1}} Y(t,\mathbf{v}).$$

Тем самым, мы можем применить метод двойных сумм [170] для поиска асимптотического поведения вероятности

$$\mathsf{P}(\max_{(t,\mathbf{v})\in S\times\mathbb{S}^{d-1}} Y(t,\mathbf{v}) > u) \tag{2.29}$$

при $u\to\infty$.

Выделение малого информативного множества

Нам будет удобно использовать следующие нестандартные сферические координаты $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\boldsymbol{\varphi})$ на $\mathbb{S}^{d-1}$, где

$$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\ldots,\varphi_{d-1})\in\Pi := (-\pi/2,\pi/2]^{d-2}\times(-3\pi/2,\pi/2],$$

угловые координаты $\boldsymbol{v}$,

$$\begin{aligned} v_1 &= \sin\varphi_1, \\ v_2 &= \cos\varphi_1 \sin\varphi_2, \\ &\dots \\ v_{d-1} &= \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \dots \cos\varphi_{d-2} \sin\varphi_{d-1}, \\ v_d &= \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \dots \cos\varphi_{d-2} \cos\varphi_{d-1}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

которые могут быть получены из классических сферических координат с помощью замены $\psi_i = \pi/2 - \varphi_i$, $i = 1, \dots, n-1$.

Рассмотрим множество

$$B_u = \left\{ t : \ 1 - \sigma^2(t) \le u^{-2} \ln^A u \right\}, \quad A > 1, \tag{2.31}$$

и обозначим $\mathcal{M} := ([0,T] \cap B_u) \times \Pi$. Имеем для всех достаточно больших значений u,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\max_{(t,\boldsymbol{\varphi})\in\mathcal{M}} Y(t,\boldsymbol{\varphi}) > u) &\le \mathsf{P}(\max_{(t,\boldsymbol{\varphi})\in[0,T]\times\Pi} Y(t,\boldsymbol{\varphi}) > u) \\ &\le \mathsf{P}(\max_{(t,\boldsymbol{\varphi})\in\mathcal{M}} Y(t,\boldsymbol{\varphi}) > u) + \mathsf{P}(\max_{(t,\boldsymbol{\varphi})\in[0,T]\times\Pi\setminus\mathcal{M}} Y(t,\boldsymbol{\varphi}) > u). \end{aligned}$$

Поскольку Y почти наверное непрерывно и функция $\sigma(t)$ достигает своего максимума, который равен 1, в единственной точке t_0, мы имеем по неравенству Бореля-Цырельсона [170] для произвольного $\varepsilon > 0$, некоторых $B > 1/2$, $b > 0$ и всех положительных u,

$$\mathsf{P}(\max_{(t,\boldsymbol{\varphi})\in[0,T]\times\Pi\setminus\mathcal{M}_\varepsilon} Y(t,\boldsymbol{\varphi}) > u) \le b \exp(-Bu^2), \tag{2.32}$$

где $\mathcal{M}_\varepsilon = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \Pi$. Обозначим $\hat{Y}(t,\boldsymbol{\varphi}) = Y(t,\boldsymbol{\varphi})/\sigma(t,\boldsymbol{\varphi})$, $\sigma^2(t,\boldsymbol{\varphi}) = \mathsf{E}Y^2(t,\boldsymbol{\varphi}) = \sigma^2(t)$, $(t,\boldsymbol{\varphi}) \in [0,T]\times\Pi$, – стандартизованное поле, и пусть $\varepsilon > 0$ из условия **E3** будет таким, чтобы было выполнено условие $\sigma(t) > 0$ для всех $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0,T]$. Используя предположения **E2** и **E3**, мы получаем для всех $s, t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0,T]$ и некоторых положительных констант c_0 и $\gamma \in (0,2]$,

$$\mathsf{E}(\hat{Y}(t,\boldsymbol{\varphi}) - \hat{Y}(s,\boldsymbol{\varphi}))^2 = 2(1 - \rho(t,s)) \le c_0 |t-s|^\gamma.$$

Действительно, напомним, что $1-\rho(s,t) = (1-\rho(t-s))(1+o(1)) = |t-s|^\alpha \ell(t-s)(1+o(1))$ с $\alpha \in (0,2]$ и медленно меняющейся в нуле функцией $\ell(x)$, поэтому отсюда следует нужное неравенство для произвольного $\gamma \in (0,\alpha)$. Заметим, что мы здесь использовали равномерную непрерывность функции ρ, которая следует из условия **E3**. Более того, легко видеть, что для всех $s \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \cap [0,T]$, $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in \Pi$ и некоторых $c_1, c_2 > 0$ мы имеем,

$$\mathsf{E}(\hat{Y}(s,\boldsymbol{\varphi}) - \hat{Y}(s,\boldsymbol{\psi}))^2 \le c_1|\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\psi}|^2 \le c_2|\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\psi}|^\gamma.$$

Мы докажем аналогичное утверждение более детально при доказательстве леммы 2.6 ниже. Из последних двух неравенств мы получаем для $c_3 = \max(c_0, c_2)$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(\hat{Y}(t,\boldsymbol{\varphi}) - \hat{Y}(s,\boldsymbol{\psi}))^2 &\le 2\mathsf{E}(\hat{Y}(t,\boldsymbol{\varphi}) - \hat{Y}(s,\boldsymbol{\varphi}))^2 + 2\mathsf{E}(\hat{Y}(s,\boldsymbol{\varphi}) - \hat{Y}(s,\boldsymbol{\psi}))^2 \\
&\le 2c_3(|t-s|^\gamma + |\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\psi}|^\gamma) \le 4c_3 \max(|t-s|^\gamma, |\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\psi}|^\gamma) \\
&= 4c_3(\max(|t-s|^2, |\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\psi}|^2))^{\gamma/2} \\
&\le 4c_3(|t-s|^2 + |\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\psi}|^2)^{\gamma/2} = 4c_3|(t,\boldsymbol{\varphi}) - (s,\boldsymbol{\psi})|^\gamma.
\end{aligned}$$

Отсюда условие **E3** из монографии [170] выполнено для поля $\hat{Y}(t,\boldsymbol{\varphi})$, следовательно, по теореме 8.1, [170], и соотношениям (2.31), (2.32), для положительных констант C, C_1, C_2 имеем

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Big(\max_{(t,\boldsymbol{\varphi})\in\mathcal{M}_\varepsilon\setminus\mathcal{M}} Y(t,\boldsymbol{\varphi}) > u\Big) \\
&\qquad \le \mathsf{P}\left(\max_{(t,\boldsymbol{\varphi})\in\mathcal{M}_\varepsilon\setminus\mathcal{M}} \hat{Y}(t,\boldsymbol{\varphi}) > u \Big/ \sqrt{1-u^{-2}\ln^A u}\right) \\
&\qquad \le CTu^{2d/\gamma-1}\exp\left(-\frac{u^2}{2-2u^{-2}\ln^A u}\right) \\
&\qquad \le C_1 T u^{2d/\gamma-1}\exp\left(-C_2\ln^A u\right)\exp\left(-u^2/2\right).
\end{aligned}$$

С другой стороны, легко видеть, что правая часть последнего соотношения стремится к 0 быстрее, чем $\mathsf{P}(Y(t_0,\boldsymbol{\varphi}) > u)$. Принимая во внимание (2.32), мы получаем

Предложение 2.5. *В условиях* $\boldsymbol{E1}-\boldsymbol{E4}$,

$$\mathsf{P}\Big(\max_{(t,\boldsymbol{\varphi})\in[0,T]\times\Pi} Y(t,\boldsymbol{\varphi}) > u\Big) = \mathsf{P}\Big(\max_{(t,\boldsymbol{\varphi})\in\mathcal{M}} Y(t,\boldsymbol{\varphi}) > u\Big)(1+o(1)) \qquad (2.33)$$

при $u \to \infty$.

Основные неравенства и лемма.

Доказательство теоремы 2.4 основано на изучении асимптотического поведения вероятности (2.29) для подходящих множеств S малого размера. Прежде всего, разобьем $\mathcal{M}$ на малые сферические цилиндры. Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{0}}(\varkappa) &:= \{\boldsymbol{\varphi} : 0 \le \varphi_i \le \varkappa(u),\ i = 1, ..., d-1\}, \quad \varkappa(u) \to 0 \text{ при } u \to \infty, \\ I_k(\kappa) &:= \{t \in [k\kappa(u), (k+1)\kappa(u)]\},\ k \in \mathbb{Z},\ \kappa(u) \to 0 \text{ при } u \to \infty, \end{aligned} \tag{2.34}$$

и

$$\Delta_{k,\mathbf{k}} = \Delta_{k,\mathbf{k}}(\kappa, \varkappa) := (t_0 + I_k(\kappa)) \times (\mathbf{k}\varkappa(u) + \Delta_{\mathbf{0}}(\varkappa)),\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{d-1}. \tag{2.35}$$

Обозначая также

$$\mathcal{K} := \{(k, \mathbf{k}) : \Delta_{k,\mathbf{k}} \cap \mathcal{M} \neq \varnothing\},\ \mathcal{K}^- := \{(k, \mathbf{k}) : \Delta_{k,\mathbf{k}} \subset \mathcal{M}\},$$

мы имеем,

$$\mathsf{P}(\max_{(t,\boldsymbol{\varphi})\in\mathcal{M}} Y(t, \boldsymbol{\varphi}) > u) \le \sum_{(k,\mathbf{k})\in\mathcal{K}} \mathsf{P}(\max_{\Delta_{k,\mathbf{k}}} Y(t, \boldsymbol{\varphi}) > u); \tag{2.36}$$

$$\mathsf{P}(\max_{(t,\boldsymbol{\varphi})\in\mathcal{M}} Y(t, \boldsymbol{\varphi}) > u) \ge \sum_{(k,\mathbf{k})\in\mathcal{K}^-} \mathsf{P}(\max_{\Delta_{k,\mathbf{k}}} Y(t, \boldsymbol{\varphi}) > u) \tag{2.37}$$

$$- \sum\sum \mathsf{P}(\max_{\Delta_{k,\mathbf{k}}} Y(t, \boldsymbol{\varphi}) > u, \max_{\Delta_{l,\mathbf{l}}} Y(t, \boldsymbol{\varphi}) > u), \tag{2.38}$$

где двойная сумма в последнем выражении взята по всем $(k, \mathbf{k}), (l, \mathbf{l}) \in \mathcal{K}$ с $(k, \mathbf{k}) \neq (l, \mathbf{l})$. Заметим, что из инвариантности относительно вращений для всех $\mathbf{k}$ следует

$$\mathsf{P}(\max_{\Delta_{k,\mathbf{k}}} Y(t, \boldsymbol{\varphi}) > u) = \mathsf{P}(\max_{\Delta_{k,\mathbf{0}}} Y(t, \boldsymbol{\varphi}) > u).$$

В дальнейшем мы будем использовать два варианта выбора функций $\varkappa(u)$ и $\kappa(u)$. В следующей основополагающей лемме метода двойных

сумм рассмотрено обобщение малых множеств типа Пикандса, см. [170], а именно, мы взяли $\varkappa(u) = \Lambda u^{-1}$, $\kappa(u) = \Lambda q(u)$. Обозначим соответствующие множества разбиения как $\Delta_{k,\mathbf{k},u}$. Другой выбор функций $\varkappa(u)$ и $\kappa(u)$ будет использован в случае, когда $h_1(t)$ будет тождественно равняться нулю в ненулевых точках, см. (2.27), в этом случае мы возьмем $\varkappa(u)$, которая будет медленнее стремиться к 0, и определим множества $\Delta_{k,\mathbf{k}}$, $(k,\mathbf{k}) \in \mathcal{K}$ несколько другим образом.

Лемма 2.6. *Предположим, что процесс* $\mathbf{X}(t)$ *удовлетворяет условиям* ***E1–E4****. Тогда для всех* $\Lambda > 0$ *при* $u \to \infty$ *будет выполнено*

в случае если $t_0 = 0$, *то*

$$\mathsf{P}(\max_{\Delta_{0,\mathbf{0},u}} Y(t,\boldsymbol{\varphi}) > u) = P_\alpha([0,\Lambda]) H_2([0,\Lambda/\sqrt{2}])^{d-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-u^2/2}(1+o(1));$$

в случае если $t_0 = T$, *то*

$$\mathsf{P}(\max_{\Delta_{-1,\mathbf{0},u}} Y(t,\boldsymbol{\varphi}) > u) = P_\alpha([-\Lambda,0]) H_2([0,\Lambda/\sqrt{2}])^{d-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-u^2/2}(1+o(1));$$

в случае если t_0 *– внутренняя точка отрезка* $[0,T]$, *то*

$$\mathsf{P}(\max_{\Delta_{-1,\mathbf{0},u}\cup\Delta_{0,\mathbf{0},u}} Y(t,\boldsymbol{\varphi}) > u)$$
$$= P_\alpha([-\Lambda,\Lambda]) H_2([0,\Lambda/\sqrt{2}])^{d-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-u^2/2}(1+o(1)).$$

Замечание 2.7. В случае если $\chi_1(t) \equiv 0$, $t \in S$, то $P_\alpha(S) = H_\alpha(S)$, то есть если $S = [0,\Lambda]$, $[-\Lambda,0]$, или $[-\Lambda,\Lambda]$, соответствующее утверждение будет также выполнено и для константы Пикандса.

Доказательство леммы 2.6: Мы "спроецируем" случайное поле $Y(t,\boldsymbol{\varphi}), (t,\boldsymbol{\varphi}) \in \Delta_{l,\mathbf{0},u}$, $l = -1, 0$ на поле, определенное на проекции окрестности точки $\boldsymbol{\varphi} = (0,\dots,0) \in \mathbb{S}^{d-1}$ в касательной гиперплоскости $\{\mathbf{v} : \mathbf{v} = (\varphi_1,...,\varphi_{d-1},1)\} \subset \mathbb{R}^d$, следующим образом. Определим гауссовское случайное поле на

$$[0,T] \times \{\varphi_i \in u^{-1}[0,\Lambda],\ i = 1,...,d-1\}$$

как

$$\widetilde{Y}(t,\boldsymbol{\varphi}) = X_1(t)\varphi_1 + ... + X_{d-1}(t)\varphi_{d-1} + X_d(t).$$

Ковариационная функция $\widetilde{r}(t,\boldsymbol{\varphi};s,\boldsymbol{\psi})$ случайного поля $\widetilde{Y}(t,\boldsymbol{\varphi})$ удовлетворяет определению 7.1 [170] локальной стационарной структуры в точке $(t_0,\mathbf{0})$ с вектором констант $C_t = (1,\sqrt{2},\ldots,\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^d$. Действительно,

$$\begin{aligned}
1-\widetilde{r}(t,\boldsymbol{\varphi};s,\boldsymbol{\psi}) &= 1-\sum_{i=1}^{d}\rho(t,s)\frac{\varphi_i^2+\psi_i^2-(\varphi_i-\psi_i)^2}{2} \\
&= 1-\rho(t,s)\sum_{i=1}^{d}\frac{\varphi_i^2+\psi_i^2}{2}+\frac{1}{2}\rho(t,s)\sum_{i=1}^{d}(\varphi_i-\psi_i)^2 \\
&= (1-\rho(t,s))(1+O(u^{-2}))+r(t,s)\sum_{i=1}^{d-1}\left(\frac{\varphi_i-\psi_i}{\sqrt{2}}\right)^2,
\end{aligned}$$

здесь $\varphi_d = \psi_d = 1$. Далее, видим, что ковариационная структура этого поля на этих малых множествах разбиения (то есть для $l=-1,0$) может быть приближена ковариационной структурой случайного поля $Y(t,\boldsymbol{\varphi})$, $(t,\boldsymbol{\varphi})\in\Delta_{l,\mathbf{0},u}$. Отсюда,

$$\mathsf{P}(\max_{\Delta_{l,\mathbf{0},u}} Y(t,\boldsymbol{\varphi}) > u) = (1+o(1))\mathsf{P}(\max_{\Delta_{l,u}}\widetilde{Y}(t,\boldsymbol{\varphi}) > u),$$

где

$$\Delta_{l,u} = (t_0+q(u)[l\Lambda,(l+1)\Lambda])\times\{\varphi_i\in u^{-1}[0,\Lambda],\ i=1,...,d-1\},\ l=-1,0.$$

Это позволяет нам, по сути, повторить доказательство леммы 6.1 [170], чтобы доказать утверждение леммы. Необходимо лишь заметить, что если $h_1(t')=\infty$ для некоторого t', то слабая сходимость в $C([-\Lambda,\Lambda]\times[0,\Lambda]^{d-1})$ условного процесса

$$\widetilde{\chi}_u(t,\boldsymbol{\varphi}) = u\left(\widetilde{Y}(t_0+q(u)(t-t_0),\sqrt{2}u^{-1}\boldsymbol{\varphi})-u\right)+w,$$

при условии $\widetilde{Y}(t_0,\mathbf{0}) = u - w/u$ должна доказываться отдельно. В этом случае нужно ограничить пространство непрерывных функций до $C([-\Lambda,0]\times[0,\Lambda]^{d-1})$ в случае $t'>0$, или до $C([0,\Lambda]\times[0,\Lambda]^{d-1})$ в случае

$t' < 0$. Используя эти ограничения, можно легко показать, что в случае $t' > 0$ имеет место слабая сходимость $\widetilde{\chi}_u(\cdot,\cdot) \longrightarrow \boldsymbol{\chi}(\cdot,\cdot)$ в пространстве $C([-\Lambda,0] \times [0,\Lambda]^{d-1})$ при условии $\widetilde{Y}(t_0,\mathbf{0}) = u - w/u$, где $\boldsymbol{\chi}(t,\boldsymbol{\varphi}) = \left(\chi_1(t), \chi_2^{(1)}(\varphi_1), \ldots, \chi_2^{(d-1)}(\varphi_{d-1})\right)$ и $\{\chi_2^{(i)}(s)\}$, $i \in [d-1]$ – независимые копии процесса $\chi_2(\varphi) = \sqrt{2}\varphi\xi - \varphi^2$, а ξ – стандартная нормальная случайная величина. Следовательно, при условии $\widetilde{Y}(t_0,\mathbf{0}) = u - w/u$, получаем следующую слабую сходимость

$$\max_{(t,\boldsymbol{\varphi})\in[-\Lambda,\Lambda]\times[0,\Lambda]^{d-1}} \widetilde{\chi}_u(t,\boldsymbol{\varphi}) \longrightarrow \max_{(t,\boldsymbol{\varphi})\in[-\Lambda,0]\times[0,\Lambda]^{d-1}} \boldsymbol{\chi}(t,\boldsymbol{\varphi})$$

при $t' > 0$. Случай $t' < 0$ аналогичен. Наконец, если $h_1(t) = \infty$ для всех $t \neq 0$, этот предел равен

$$\max_{\boldsymbol{\varphi}\in[0,\Lambda]^{d-1}} \boldsymbol{\chi}(0,\boldsymbol{\varphi}),$$

доказательство леммы завершено.

Завершение доказательства теоремы 2.4.

Оставшаяся часть доказательства теоремы 2.4 во многом аналогично доказательствам теорем 7.1 и 8.2, [170]. Случайное поле $Y(t,\boldsymbol{\varphi})$ сохраняет свои свойства при вращениях $\boldsymbol{\varphi}$, но по t оно нестационарно. Следовательно, оценивание сумм в (2.36, 2.37, 2.38) и похожих сумм ниже, по сути, аналогично оцениванию сумм для стационарных и нестационарных случайных полей (см., соответственно, доказательства теорем 7.1 и 8.2, [170]). Из инвариантности относительно вращений мы получаем, что одиночные суммы в (2.36, 2.37) равны

$$N_{\pm} \sum_{k:\Delta_{k,\mathbf{0}}\cap\mathcal{M}\neq\varnothing} \mathsf{P}(\max_{\Delta_{k,\mathbf{0}}} Y(t,\boldsymbol{\varphi}) > u) \tag{2.39}$$

где $N_{\pm}$ – число слагаемых по $\mathbf{k}$ в (2.36, 2.37), соответственно. Имеем,

$$N_{\pm} = \frac{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{d-1})(1+o(1))}{\varkappa(u)^{d-1}} = \frac{d\pi^{d/2}(1+o(1))}{\Gamma(d/2+1)\varkappa(u)^{d-1}} \tag{2.40}$$

при $u \to \infty$. Оценивание суммы в (2.39) похоже на соответствующие места в доказательстве леммы 8.2, [170], и в лекции 10, [28], с использованием леммы 2.6 вместо леммы 6.1, [170].

Почти стационарный случай (случай Пикандса).

Прежде всего, рассмотрим случай $h_1(t) = 0$ для некоторого $t \neq 0$, обобщающий случай $\beta > \alpha$ в обозначениях [170], [28], см. также раздел 2.2 диссертации. Заметим, что эти три случая, $h_1(t) = 0$ только для положительных t, только для отрицательных t и для всех t, будут рассмотрены вместе благодаря "двустороннему" определению константы P_α. В этих случаях лишь асимптотическое поведение интеграла (2.49) будет исследоваться по-разному. Заметим, что только "почти стационарная сторона" дает вклад в асимптотику.

Вначале рассмотрим упрощенную модель процесса $\mathbf{X}$, а именно, пусть $(X_i^0(t), i \in [d])$ – это гауссовский стационарный векторный процесс с н.о.р. центрированными компонентами, удовлетворяющими условиям **E1** и **E3,** и пусть

$$\mathbf{X^0}(t) := \left(\sigma(t)X_1^0(t), \ldots, \sigma(t)X_d^0(t)\right), \ t \in [0, T],$$

так что $\mathbf{X^0}(t)$ удовлетворяет условиям **E1-E4**. В конце доказательства, используя стандартные методы, включая лемму Слепяна, мы вернемся к изначальному процессу $\mathbf{X}$. Этот подход подробно описан в монографии [170]. Напомним, что мы рассматриваем случай

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1 - \sigma^2(t)}{1 - \rho(t - t_0)} = 0. \tag{2.41}$$

В упрощенной модели гауссовское поле (2.28) представимо в виде

$$Y(t, \boldsymbol{\varphi}) = \sigma(t) Y^0(t, \boldsymbol{\varphi}), \quad (t, \boldsymbol{\varphi}) \in [0, T] \times \Pi,$$

в тех же, что и в (2.30), сферических координатах $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\boldsymbol{\varphi})$, где

$$Y^0(t, \mathbf{v}) = X_1^0(t)v_1 + \ldots + X_d^0(t)v_d, \ t \in [0, T], \ \mathbf{v} = (v_1, ..., v_d) \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Выберем малые ε_+ и ε_- с условием $\varepsilon_+ > \varepsilon_- > 0$. Для достаточно больших значений u_0 и всех $u \geq u_0$ существует такое $\varepsilon = \varepsilon(u) \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$, что $(\ln^A u)/\varepsilon \in \mathbb{N}$. Мы будем использовать это значение ε в дальнейшем. Обозначим

$$B_k(u) = \{t : k\varepsilon \leq u^2(1 - \sigma^2(t)) < (k+1)\varepsilon\}, \tag{2.42}$$

для всех $k \geq 0$ с условием $B_{k+1}(u) \subset B_u$. Поскольку $q(u)$ регулярно меняется с индексом $-2/\alpha$, из (2.41) и (2.42) следует, что we

$$\zeta(u) := \frac{|B_1(u)|}{q(u)} \to \infty \text{ при } u \to \infty, \tag{2.43}$$

где $|\cdot|$ обозначает объем. Возьмем $\varkappa(u) = u^{-1/2}$ (см. (2.34)), и обозначим

$$\Delta_{k,\mathbf{k}} := B_k(u) \times (\mathbf{k}\varkappa(u) + \Delta_{\mathbf{0}}(\varkappa))^{d-1},\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{d-1},$$

$$\sigma_k = \sqrt{1 - u^{-2}k\varepsilon},\ \ u_k = u/\sigma_k.$$

Заметим, что множества индексов $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}^-$ совпадают для выбранного выше ε. Вероятности в суммах в (2.36, 2.37) ограничены сверху и снизу вероятностями событий

$$A_k(u) = \left\{ \max_{(t,\boldsymbol{\varphi})\in\Delta_{k,\mathbf{0}}} Y^0(t,\boldsymbol{\varphi}) > u_k \right\} \text{ и } A'_k(u) = \left\{ \max_{(t,\boldsymbol{\varphi})\in\Delta_{k,\mathbf{0}}} Y^0(t,\boldsymbol{\varphi}) > u_{k+1} \right\},$$

соответственно. Выберем $a \in (0,1)$ и обозначим $\upsilon(u) = q(u)\zeta^a(u)$. Заметим, что $\upsilon(u)/q(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Введем два множества индексов

$$D(u) = \{(k,\mathbf{0}) :\ |B_k(u)| > \upsilon(u)\} \text{ и } D'(u) = \{(k,\mathbf{0}) :\ |B_k(u)| \leq \upsilon(u)\}.$$

Оценим теперь асимптотическое поведение вероятностей событий $A_k(u)$ и $A'_k(u)$ в зависимости от того, выполнено $(k,\mathbf{0}) \in D(u)$ или $(k,\mathbf{0}) \in D'(u)$. В частности, мы покажем, что сумма этих вероятностей по множеству $D'(u)$ пренебрежимо мала по сравнению с суммой по первому множеству. Напомним, что

$$u \leq u_k \leq u + u^{-1}\ln^A u$$

для всех $(k,\mathbf{0})$ таких, что $B_{k+1}(u) \subset B_u$. Из условия **E4** следует, что для всех достаточно больших u каждое множество $B_k(u)$, $k \geq 0$, состоит из конечного (не более, чем K) числа интервалов, тем самым, существуют подынтервалы $B'_k(u)$ интервалов $B_k(u)$, $(k,\mathbf{0}) \in D(u)$, такие, что $|B'_k(u)|/q(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Следовательно, для всех

k, $(k,\mathbf{0}) \in D(u)$, множества $B_k(u)$ и индуцированные гауссовские поля $Y^0(t,\boldsymbol{\varphi})$, $(t,\boldsymbol{\varphi}) \in B_k(u)$, удовлетворяют условиям теоремы 1 [133]. Согласно этой теореме, имеем

$$\mathsf{P}(A_k) = \frac{H_\alpha |B_k(u)| u_k^{d/2-3/2}}{(2\pi)^{d/2} q(u_k)} e^{-u_k^2/2}(1+\gamma(u_k)),$$

и

$$\mathsf{P}(A'_k) = \frac{H_\alpha |B_k(u)| u_{k+1}^{d/2-3/2}}{(2\pi)^{d/2} q(u_{k+1})} e^{-(u_{k+1})^2/2}(1+\gamma(u_{k+1}))$$

для $(k,\mathbf{0}) \in D(u)$, где $\gamma(u) \to 0$ при $u \to \infty$. Доказательства этих утверждений следуют из леммы 2.6, примененной для случая $h_1(t) = 0$ с последующим применением соотношений (2.36 - 2.38). Аналогично, из леммы 2.6 (см. также лемму 1, [133]) следует, что для $(k,\mathbf{0}) \in D'(u)$ выполнено

$$\mathsf{P}(A_k) \le C \frac{|B_k(u)| u_k^{d/2-3/2}}{q(u_k)} e^{-u_k^2/2} \le C \frac{v(u) u_k^{d/2-3/2}}{q(u_k)} e^{-u_k^2/2},$$

где $C > 0$ – не зависящая от k константа. Обозначим

$$a(u) = u^{d/2-3/2} q(u)^{-1}.$$

Поскольку q регулярно меняется на бесконечности, без ограничения общности предположим, что q монотонна, см. [57]. По определению $\mathcal{M}$, поскольку $q(u)$ монотонна, существует такая положительная невозрастающая функция $\delta_1(u)$, $\delta_1(u) \to 0$ при $u \to \infty$, такая, что для всех k с условием $\Delta_{k,\mathbf{0}} \cap \mathcal{M} \neq \varnothing$ выполнено

$$1 - \delta_1(u) \le \frac{a(u_k)}{a(u)} \le 1 + \delta_1(u).$$

Поскольку $\delta_2(u) = \sup_{v \ge u} |\gamma(v)| \to 0$ при $u \to \infty$ и $u_k \ge u$, мы имеем для $(k,\mathbf{0}) \in D(u)$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A_k) &\lessgtr (1 \pm \delta_1(u))(1 \pm \delta_2(u)) \frac{H_\alpha |B_k(u)| u^{d/2-3/2}}{(2\pi)^{d/2} q(u)} e^{-u_k^2/2}, \\
\mathsf{P}(A'_k) &\lessgtr (1 \pm \delta_1(u))(1 \pm \delta_2(u)) \frac{H_\alpha |B_k(u)| u^{d/2-3/2}}{(2\pi)^{d/2} q(u)} e^{-u_{k+1}^2/2},
\end{aligned} \tag{2.44}$$

и для $(k, \mathbf{0}) \in D'(u)$,

$$\mathsf{P}(A_k) \le C(1+\delta_1(u))\frac{\upsilon(u)u^{d/2-3/2}}{q(u)}e^{-u_k^2/2}. \tag{2.45}$$

Теперь применим неравенства (2.36 – 2.38), меняя события внутри вероятностей на A_k для получения оценки сверху и на A'_k для оценки снизу. Получаем

$$u_k^2 = u^2 + u^2(1-\sigma_k^2) + \frac{u^2(1-\sigma_k^2)^2}{\sigma_k^2}. \tag{2.46}$$

Из неравенства

$$\frac{u^2(1-\sigma_k^2)^2}{\sigma_k^2} \ge u^{-2}\ln^{2A} u \tag{2.47}$$

следует, что для некоторой положительной функции $\delta_3(u)$ такой, что $\delta_3(u) \to 0$ при $u \to \infty$, равномерно по $\mathcal{M}$ выполнено

$$1-\delta_3(u) \le \sigma_k \exp\left(-\frac{u^2(1-\sigma_k^2)^2}{2\sigma_k^2}\right) \le 1+\delta_3(u). \tag{2.48}$$

Заметим, что $u^2(1-\sigma_k^2) = k\varepsilon$ и обозначим

$$\Sigma(u) = \sum_{(k,\mathbf{0})\in D(u)\cap\mathcal{K}} |B_k(u)|e^{-k\varepsilon/2} + C\frac{(2\pi)^{d/2}}{H_\alpha}\sum_{(k,\mathbf{0})\in D'(u)\cap\mathcal{K}} \upsilon(u)e^{-k\varepsilon/2},$$

$$\Sigma'(u) = \sum_{(k,\mathbf{0})\in D(u)\cap\mathcal{K}} |B_k(u)|e^{-(k+1)\varepsilon/2}.$$

Следовательно, по (??) и (??),

$$\sum_{(k,\mathbf{0})\in\mathcal{K}} \mathsf{P}(A_k) \le (1+\delta_4(u))\frac{H_\alpha u^{d/2-3/2}}{(2\pi)^{d/2}q(u)}e^{-u^2/2}\Sigma(u),$$

$$\sum_{(k,\mathbf{0})\in\mathcal{K}} \mathsf{P}(A'_k) \ge (1-\delta_4(u))\frac{H_\alpha u^{d/2-3/2}}{(2\pi)^{d/2}q(u)}e^{-u^2/2}\Sigma'(u).$$

где $1\pm\delta_4(u) = (1\pm\delta_1(u))(1\pm\delta_2(u))(1\pm\delta_3(u))$. Суммы $\Sigma(u)$ и $\Sigma'(u)$ приближают интеграл

$$I_\sigma(u) = \int\limits_{t:1-\sigma^2(t)\le u^{-2}\ln^A u} e^{-u^2(1-\sigma^2(t))/2}dt, \tag{2.49}$$

сверху и снизу соответственно. Действительно, легко видеть, что

$$\Sigma'(u) \le I_\sigma(u) \le \Sigma(u),$$

следовательно, достаточно показать, что $\Sigma(u) \le \Sigma'(u)(1+\varepsilon_+)$ для всех достаточно малых ε_+ и всех достаточно больших u. Имеем,

$$\begin{aligned} 1 \le \frac{\Sigma(u)}{\Sigma'(u)} &\le e^{\varepsilon/2} + \frac{C_1 \upsilon(u)}{|B_1(u)|} \sum_{(k,\mathbf{0})\in D'(u)\cap\mathcal{K}} e^{-(k-1)\varepsilon/2} \\ &\le e^{\varepsilon_+/2}\left(1 + \frac{C_1\upsilon(u)}{|B_1(u)|}\sum_{k=0}^{\varepsilon^{-1}\ln^A u} e^{-k\varepsilon/2}\right), \end{aligned} \tag{2.50}$$

где $C_1 = C(2\pi)^{d/2}/H_\alpha$. Заметим, что для достаточно малого значения $x > 0$ выполнено $e^x \le 1 + 2x$. Теперь покажем, что второе слагаемое в скобках стремится к 0 при $u \to \infty$. Это очевидно в случае $\upsilon(u)/|B_1(u)| = o(\ln^{-A} u)$. В противном случае положим $\varrho(u) = \sqrt{|B_1(u)|/\upsilon(u)}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\upsilon(u)}{|B_1(u)|}\sum_{k=0}^{\varepsilon^{-1}\ln^A u} e^{-k\varepsilon/2} &\le \frac{\upsilon(u)}{|B_1(u)|}(\varrho(u)+1) + \frac{\upsilon(u)}{|B_1(u)|}\sum_{k\in[\varrho(u)+1,\varepsilon^{-1}\ln^A u]} e^{-k\varepsilon/2} \\ &\le \gamma(u) + e^{-\varrho(u)\varepsilon}\frac{\upsilon(u)}{|B_1(u)|}\sum_{l=1}^{\infty} e^{-l\varepsilon/2} \le \gamma(u) + \frac{\upsilon(u)}{\varepsilon_-|B_1(u)|}e^{-\varrho(u)\varepsilon_-}, \end{aligned}$$

где $\gamma(u) \to 0$ при $u \to \infty$, и мы использовали соотношение $e^{-x} \le 1 - x/2$ для достаточно малых значений $x > 0$. Отсюда и из (2.50) следует, что $\Sigma(u)$ и $\Sigma'(u)$ близки друг к другу в случае, если ε_+ достаточно мало и u достаточно большое. Осталось лишь заметить, что $I_\sigma(u) = L(u)(1+o(1))$ при $u \to \infty$.

По инвариантности относительно вращений, все приведенные выше соотношения для этого случая будут верны для любого $\Delta_{k,\mathbf{k}}$, а не только для $\Delta_{k,\mathbf{0}}$. Поэтому дальнейшее доказательство пункта 1) в теореме 2.4 по сути является стандартным набором рассуждений из глав 2.7 и 2.8 [170], включая использование (2.39, 2.40) для одиночных сумм, оценивание двойной суммы (2.38) и переход от упрощенной модели $Y(t,\boldsymbol{\varphi}) = Y^0(t,\boldsymbol{\varphi})\sigma(t)$ к произвольному гауссовскому процессу с

помощью неравенства Слепяна. Завершающий переход от $\mathcal{M}$ к $[0,T]\times\Pi$ основан на предложении 2.5.

Случай Талаграна и переходный случай.

Теперь рассмотрим случай, когда $h_1(t) \neq 0$ для всех $t \neq 0$. В обозначениях и предположениях [170] и [28], это обобщает случай Талаграна $\beta < \alpha$, то есть, $h_1(t) = \infty$ при $t \neq 0$, и переходный случай $\beta = \alpha$, когда $h_1(t) \in (0,\infty)$ для всех $t \neq 0$, см. также [11] и [133]. Используя инвариантность относительно вращений, мы снова положим $\varkappa(u) = u^{-1/2}$ в неравенствах Бонферрони (2.36 – 2.38), как и в почти стационарном случае. Далее, в двусторонних случаях, то есть когда $h_1(t) \in (0,\infty)$ для всех $t \neq 0$, или когда $h_1(t) = \infty$ для всех $t \neq 0$, мы будем выбирать $\kappa(u) = 2\Lambda q(u)$, $\Delta_0 = q(u)[-\Lambda,\Lambda]$. В одностороннем случае, а именно когда $h_1(t) \in (0,\infty)$ только для положительных t, выберем $\kappa(u) = \Lambda q(u)$, $\Delta_0 = [0, q(u)\Lambda]$; в другом одностороннем случае, $h_1(t) \in (0,\infty)$ только для отрицательных t, выберем то же $\kappa(u) = \Lambda q(u)$, но с $\Delta_0 = [-q(u)\Lambda, 0]$. Легко можно показать, используя соответствующие рассуждения из [170] и [28] вместе с утверждениями леммы 2.6, что для таких выборов цилиндрических параллелепипедов разбиения только первое слагаемое в (2.39) дает вклад в финальную асимптотику при $u \to \infty$, и тогда $\Lambda \to \infty$ в переходном случае $h_1(t) \in (0,\infty)$, и $\Lambda \to 0$ в случае Талаграна $h_1(t) = \infty$. Заметим, что в односторонних случаях играет роль только компонента "промежуточного случая". Заметим опять, что фактически схемы доказательств этих утверждений, также как и оценивания двойной суммы (2.38), повторяют соответствующие доказательства в [11], [133], [170], [28], с принятием во внимание количества сферических элементов в разбиении сферы (2.39, 2.40). Доказательство теоремы 2.4 завершено. □

3 Проверка гипотез о хвостах распределений

3.1 Введение

В этой главе мы предложим различные критерии проверки гипотез о хвостах распределений, включающие критерии различения двух классов хвостов распределений и критерии согласия для хвостов распределений. Значительное преимущество предлагаемых критериев по сравнению с критериями проверки гипотез о хвостах распределений, предложенными в литературе, состоит в том, что мы в большинстве случаев не предполагаем, что хвост распределения удовлетворяет какой-либо модели экстремумов или принадлежит одной из областей максимального притяжения, и накладываем на него лишь условие непрерывности. Тем самым, настоящая глава может стать отправной точкой для создания общей теории проверки гипотез о хвостах распределений.

Наибольшее внимание исследователей, занимающихся задачами проверки гипотез в рамках статистики экстремумов, привлекают три модели.

1) Если (X_i) – это выборка ("годичных") максимумов, то можно предположить, что функция распределения F последовательности (X_i) может быть приближена обобщенным максимально устойчивым (далее пишем GEV) распределением

$$F(x) \approx \exp\left\{-\Big(1+\gamma\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)^{-1/\gamma}\right\}, \tag{3.1}$$

где параметры γ, μ и σ называют параметрами формы, сдвига и масштаба данной модели, см. детали в монографии [107].

2) Предположим, что F принадлежит области притяжения максимально устойчивого распределения

$$G_\gamma(x) = \exp\big(-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}\big),\ 1+\gamma x > 0. \tag{3.2}$$

Тогда по теореме Пикандса-Балкема-де Хаана (см. Введение) функция распределения превышения высокого уровня величиной $X \sim F$ может

быть приближена

$$\mathsf{P}(X - u < x | X > u) \approx 1 - (1 + \gamma x/\sigma)^{-1/\gamma} =: H(x), \qquad (3.3)$$

см. раздел 3.1 [89], а также [66]. Такая модель называется обобщенным распределением Парето (пишем GPD).

3) В рамках третьей модели предполагается, что F принадлежит одной из областей максимального притяжения. Данная модель является семипараметрической, в отличие от первых двух моделей, являющихся параметрическими. Сразу отметим, что первая модель не совпадает с нашей постановкой, поскольку мы будем рассматривать проверку гипотез на основе последовательности н.о.р. случайных величин.

Случай $\gamma = 0$ является пограничным для всех перечисленных моделей, потому что при $\gamma > 0$ распределения имеют бесконечную правую граничную точку, тогда как при $\gamma < 0$ правая граничная точка конечна. Поэтому много работ посвящено проверки гипотезы $H_0 : \gamma = 0$ против различных альтернатив, отметим здесь исчерпывающий обзор [121], а также главу 8 в [106]. Работ, посвященных проверке гипотез о хвостах распределений *внутри* областей максимального притяжения, а также не принадлежащих ни одной из областей, практически нет. Если с помощью оценок индекса экстремального значения γ, вероятно, можно построить критерии проверки гипотез типа $H_0 : \gamma \geq \gamma_0$ и $H_0 : \gamma = \gamma_0$ для $\gamma_0 \neq 0$, то проверить в рамках данных моделей гипотезы о хвостах распределений внутри наиболее "широкой" области максимального притяжения Гумбеля, то есть когда $\gamma = 0$, по сути невозможно. В связи с вышесказанным можно отметить лишь работу [103], в которой предложен критерий согласия с распределениями вейбулловского типа, важным классом распределений из области максимального притяжения Гумбеля, а также статью [96], где предложен критерий различения распределений с супертяжелым хвостом и регулярно меняющихся распределений. Для различения хвостов распределений вейбулловского типа могут быть использованы оценки вейбулловского хвостового индекса, предложенные в работах [55], [77], [100] среди прочих, однако о таких работах нам не известно.

3.2 Критерий различения хвостов распределений вейбулловского типа

В этом разделе мы предложим критерий проверки простой гипотезы о хвосте распределения вейбулловского типа против "левосторонней" альтернативы и докажем его состоятельность. Критерий основан на адаптации метода отношения правдоподобий к статистике экстремумов: а именно, отношение правдоподобий строилось лишь на основе максимальных порядковых статистик выборки, поскольку только их значения имеют отношение к поведению функции распределения в ее хвосте. Этот результат является развитием идей из работы автора [35], в которой предложен критерий проверки гипотезы о распределении хвоста вейбулловского типа против близких (контигуальных) альтернатив.

Итак, пусть $(X_1, \ldots, X_n)$ – н.о.р. случайные величины с общей абсолютно непрерывной функцией распределения F, принадлежащей области максимального притяжения Гумбеля, $F \in \mathrm{MDA}(\Lambda)$. Обозначим через $x_F^* = \sup\{x : F(x) < 1\}$ правую граничную точку F и предположим, что $x_F^* = +\infty$. Как и ранее,

$$X_{(1)} \leq ... \leq X_{(n-k_n)} \leq X_{(n-k_n+1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$$

обозначают вариационный ряд выборки $(X_1, \ldots, X_n)$; для построения заявленного критерия будем использовать только $k_n + 1$ максимальных порядковых статистик из него, $(X_{(n-k_n)}, X_{(n-k_n+1)}, \ldots, X_{(n)})$, где последовательность индексов (k_n) удовлетворяет следующим условиям

$$\lim_{n\to\infty} k_n = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{k_n}}{\ln n} = 0. \tag{3.4}$$

Обозначим через $\Theta_-(F)$ класс абсолютно непрерывных ф.р. $G \in \mathrm{MDA}(\Lambda)$ таких, что

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\ln g(x)}{\ln f(x)} \leq 1,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – плотности функций распределения F и G соответственно. В текущем разделе мы предложим критерий различения

простой гипотезы $H_0 : F(x) = F_0(x)$ для всех достаточно больших x против "левосторонней" альтернативы $H_1 : F \in \Theta_-(F_1)$, построенный по $k_n + 1$ максимальным порядковым статистикам выборки $(X_i)_{i=1}^n$, где абсолютно непрерывные функции распределения $F_0, F_1 \in \mathrm{MDA}(\Lambda)$ таковы, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln f_1(x)}{\ln f_0(x)} = 0, \tag{3.5}$$

где $f_0(x)$ и $f_1(x)$ – плотности функций распределения F_0 и F_1 соответственно.

Будем говорить, что хвост функции распределения G легче хвоста функции распределения H с $x_G^* = x_H^* = +\infty$, если

$$\frac{1 - H(x)}{1 - G(x)} \to 0$$

при $x \to +\infty$. Тем самым, из условия (3.5) следует, что хвост функции распределения F_1 легче хвоста функции распределения F_0.

Обозначим $S(x) = -\ln f_0(x)$ и $V(x) = -\ln f_1(x)$. По классической лемме Неймана-Пирсона, равномерно наиболее мощный критерий, различающий простые гипотезы $H_0 : F = F_0$ и $H_1 : F = F_1$, имеет вид

$$S_\lambda = \left\{ \frac{L_1(X)}{L_0(X)} \geq \lambda \right\},$$

где $L_i(X) = \prod_{j=1}^n f_i(X_j)$, $i = 0, 1$, – функции правдоподобия, соответствующие функциям распределения F_0 и F_1. Поскольку нас интересуют хвосты распределений, рассмотрим следующее модифицированное отношение правдоподобий

$$T_n = \frac{\tilde{L}_1(X_{(n)}, \ldots, X_{(n-k_n+1)})}{\tilde{L}_0(X_{(n)}, \ldots, X_{(n-k_n+1)})},$$

где $\tilde{L}_0(x_1, \ldots, x_{k_n})$ и $\tilde{L}_1(x_1, \ldots, x_{k_n})$ – совместные плотности распределения вектора порядковых статистик $(X_{(n)}, \ldots, X_{(n-k_n+1)})$ в случае, если случайные величины $(X_1, \ldots, X_n)$ имеют общую функцию распределения F_0 и F_1 соответственно. В отличие от

классического случая, наблюдение $(X_{(n)}, \ldots, X_{(n-k_n+1)})$ не является совокупностью н.о.р. случайных величин. Поэтому мы рассмотрим условное распределение статистики T_n при условии $X_{(n-k_n)}$, что в дальнейшем позволит нам использовать методы, подходящие для работы с н.о.р. последовательностями. Пишем $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, если случайные величины ξ и η равны по распределению. Как показано в [35],

$$T_n \stackrel{d}{=} R_n \frac{(S'(X_{(n-k_n)}))^{k_n}}{(V'(X_{(n-k_n)}))^{k_n}}(1+o(1)), \quad n \to \infty,$$

где

$$R_n = \exp\left(\sum_{i=0}^{k_n-1}[S(X_{(n-i)}) - S(X_{(n-k_n)})] - \sum_{i=0}^{k_n-1}[V(X_{(n-i)}) - V(X_{(n-k_n)})]\right).$$

Предел при $n \to \infty$ условного распределения статистики T_n при условии $X_{(n-k_n)}$ является вырожденным, [35], поэтому для построения критерия воспользуемся статистикой

$$U_n := \frac{S'(X_{(n-k_n)}) \ln R_n}{S'(X_{(n-k_n)}) - V'(X_{(n-k_n)})}.$$

Изучение асимптотических свойств статистики U_n основано на стандартных методах анализа – таких, как правила Лопиталя, что заставляет наложить на функцию $S(x)$ следующие условия регулярности. Далее через $S^{(k)}$ будем обозначать k-тую производную функции S.

*A*1. $S(x)/x \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

*A*2. $S(x)$ монотонна и четырежды непрерывно дифференцируема на бесконечности, пишем $S(\cdot) \in C^4$. Существуют пределы

$$a_k := \lim_{x \to +\infty} S^{(k)}(x) \in [0, \infty], \quad k = 1, 2, 3, 4;$$

причем в случае $a_k = 0$ существует такое $x_0 \in \mathbb{R}$, что $S^{(k)}(x) = 0$ $\forall x > x_0$ или $S^{(k)}(x) \neq 0$ $\forall x > x_0$, $k = 1, 2, 3, 4$.

*A*3. Существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|\ln S^{(k)}(x)|}{S(x)}=0;\ \ \lim_{x\to+\infty}\frac{S^{(k+1)}(x)}{S^{(k)}(x)S'(x)}=:b_k\le\infty,\ k=1,2,3\ ;$$
$$\lim_{x\to+\infty}\ln S'(x)/\ln S(x)=A,\ \text{где}\ |A|<\infty.$$

Отметим, что распределения, удовлетворяющие условиям **A1-A3,** принадлежат области максимального притяжения Гумбеля, см [35]. В сущности, им удовлетворяют все распределения с хвостом легче экспоненциального и достаточно гладкой на бесконечности функцией распределения. Далее, нам потребуется следующее условие асимптотической малости одной функции относительно другой.

Определение 3.1. Функции $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют условию $B(g,h)$, если

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{h'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{h''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{h'''(x)}{g'''(x)}=0.$$

В следующей теореме установлено асимптотическое поведение статистики U_n в случае верности нулевой гипотезы.

Теорема 3.2. *Пусть функции $S(x)$ и $V(x)$ удовлетворяют условиям регулярности* ***A1-A3*** *и условию $B(S,V)$, а последовательность (k_n) – условию (3.4). Если H_0 верна, то*

$$\frac{1}{\sqrt{k_n}}\,(U_n-k_n)\xrightarrow{d}\xi\sim N(0,1) \tag{3.6}$$

при $n\to\infty$.

Предложим на основе теоремы 3.2 следующий критерий проверки гипотезы H_0

$$\text{если}\ \frac{1}{\sqrt{k_n}}\,(U_n-k_n)>z_{1-\alpha},\ \text{то отвергаем}\ H_0, \tag{3.7}$$

где $z_{1-\alpha}$ – $(1-\alpha)$-квантиль стандартного нормального закона. Теорема 3.3 утверждает, что критерий (3.7) является состоятельным на альтернативе H_1.

Теорема 3.3. *Пусть для любой функции распределения $G \in \Theta_-(F_1)$ с плотностью $g(x)$ функция $K(x) = -\ln g(x)$ удовлетворяет условиям регулярности **A1-A3** и условию $B(S, K)$. Если H_1 верна, то в прочих условиях Теоремы 3.2*

$$\frac{1}{\sqrt{k_n}} (U_n - k_n) \xrightarrow{\mathsf{P}} +\infty$$

при $n \to \infty$.

Замечание 3.4. Мы не можем заменить выражение $S'(X_{(n-k_n)}) - V'(X_{(n-k_n)})$ в знаменателе U_n на $S'(X_{(n-k_n)})$, поскольку иначе в предельном соотношении (3.6) могут появиться члены порядка $O(\sqrt{k_n})$.

Как уже упоминалось, в доказательствах теорем 3.2 и 3.3 мы не можем немедленно воспользоваться независимостью случайных величин $(X_1, \ldots, X_n)$, поскольку статистика U_n зависит только от максимальных членов вариационного ряда этой выборки. Следующая лемма, которая многократно пригодится нам в оставшейся части диссертации, позволит нам найти условное распределение статистики U_n при условии $X_{(n-k)} = q$.

Лемма 3.5. *([89, лемма 3.4.1]) Пусть $X, X_1, \ldots, X_n$ – н.о.р. случайные величины с общей функцией распределения F. Совместное распределение вектора статистик $(X_{(i)})_{i=n-k+1}^{n}$ при условии $X_{(n-k)} = q$ для некоторого $k \in [n-1]$ совпадает с совместным распределением вектора порядковых статистик $\left(X^*_{(i)}\right)_{i=1}^{k}$ н.о.р. случайных величин $\left(X^*_i\right)_{i=1}^{k}$ с общей функцией распределения*

$$F_q(x) = \mathbf{P}(X \le x | X > q) = \frac{F(x) - F(q)}{1 - F(q)}, \qquad x > q.$$

Далее, следующая техническая лемма используется для поиска асимптотики условного математического ожидания и условной дисперсии случайной величины Y_1, определяемой ниже. Данный результат является развитием известного метода Лапласа оценки интегралов (см. [38]).

Лемма 3.6. *([35]) Обозначим* $I(q) = \int_q^{+\infty} \exp(-T(x))dx$. *Пусть функция* $T(x)$ *удовлетворяет следующим условиям регулярности:*

C1 $T(x)/\ln x \to +\infty$ *при* $x \to +\infty$.

C2 $T(x)$ *монотонна и* $T(\cdot) \in C^4$ *на бесконечности. Кроме того, существуют пределы*

$$a_k := \lim_{x\to\infty} T^{(k)}(x) \in [0,\infty], \quad k = 1,2,3,4.$$

C3 *Существуют пределы*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|T^{(k)}(x)|}{T(x)} = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{T^{(k+1)}(x)}{(T^{(k)}(x)T'(x))} \le \infty, \ k = 1,2,3.$$

Тогда

$$I(q) = \exp(-T(q)) \left(\sum_{k=0}^{2} c_k + o(c_2) \right) \quad при \ \ q \to +\infty,$$

где $c_k = M^k \left((T'(x))^{-1} \right)\big|_{x=q}$ *и* $M = (T'(x))^{-1} \frac{d}{dx}$.

Наконец, лемма 3.7, основанная на известной лемме Смирнова, упоминавшейся выше, используется нами для поиска предельного распределения промежуточной порядковой статистики $X_{(n-k_n)}$.

Лемма 3.7. *В условиях теоремы 3.2,*

$$X_{(n-k_n)} - a_{n/k_n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad n \to \infty,$$

где $a_{n/k_n} = F^{\leftarrow}(1 - k_n/n) = \inf\{y : F(y) \ge 1 - k_n/n\}$.

Доказательство. В условиях теоремы 3.2 верно утверждение теоремы 2.2.1, [89],

$$\sqrt{k_n} \frac{X_{(n-k_n)} - U\left(\frac{n}{k_n}\right)}{\frac{n}{k_n} U'\left(\frac{n}{k_n}\right)} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad n \to \infty, \tag{3.8}$$

где $U = (1/(1-F))^{\leftarrow}$. Из Леммы 3.6 имеем,

$$a_{n/k_n} = \arg\left\{t: \int\limits_t^{\infty} e^{-S(x)}dx = \frac{k_n}{n}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \arg\left\{t: \frac{e^{-S(t)}}{S'(t)} = \frac{k_n}{n}\right\}.$$

Кроме того, из определения a_{n/k_n} следует, что $U(n/k_n) = a_{n/k_n}$. Имеем, $U'(t) = [1-F(U(t))]^2/F'(U(t))$, поэтому $U'(n/k_n) = (k_n/n)^2/F'(a_{n/k_n})$. Заметим, что $F'(a_{n/k_n}) = \exp(-S(a_{n/k_n}))$. Получаем, что $F'(a_{n/k_n}) \to k_n S'(a_{n/k_n})/n$ при $n \to \infty$. В итоге имеем,

$$\frac{\sqrt{k_n}(X_{(n-k_n)} - a_{n/k_n})}{\frac{1}{S'(a_{n/k_n})}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad n \to \infty. \tag{3.9}$$

В условиях Теоремы 3.2 $\lim\limits_{n\to\infty} S'(a_{n/k_n}) = +\infty$, тогда из (3.9)

$$X_{(n-k_n)} - a_{n/k_n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad n \to \infty,$$

что и требовалось. □

Доказательство теоремы 3.2. Введем $Y_i = [S(X_i^*) - S(q)] - [V(X_i^*) - V(q)] - [S'(q) - V'(q)]/S'(q)$, $i \in [k_n]$, где $\left(X_i^*\right)_{i=1}^{k_n}$ – н.о.р. случайные величины из леммы 3.5 с функцией распределения

$$F_q(x) = \left(\int_q^{+\infty} e^{-S(x)}dx\right)^{-1} \cdot \int_q^x e^{-S(x)}dx.$$

Из леммы 3.5 вытекает, что совместное распределение вектора статистик $\left(Y_{(i)}\right)_{i=1}^{k_n}$ выборки $\left(Y_j\right)_{i=1}^{k_n}$ совпадает с совместным условным распределением вектора порядковых статистик $\left(Z_{(j)}\right)_{j=1}^{k_n}$ выборки $\left(Z_j\right)_{j=1}^{k_n}$ при условии $X_{(n-k_n)} = q$, где

$$Z_j = [S(X_{(n-j+1)}) - S(X_{(n-k_n)})] - [V(X_{(n-j+1)}) - V(X_{(n-k_n)})]$$
$$- \frac{S'(X_{(n-k_n)}) - V'(X_{(n-k_n)})}{S'(X_{(n-k_n)})}.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{i=1}^{k_n} Z_i = \ln R_n - k_n\left(1 - \frac{V'(X_{(n-k_n)})}{S'(X_{(n-k_n)})}\right).$$

Поэтому условное распределение статистики $\ln R_n - k_n(1 - V'(X_{(n-k_n)})/S'(X_{(n-k_n)}))$ при условии $X_{(n-k)} = q$ совпадает с распределением выражения $\sum_{i=1}^{k_n} Y_i$.

Далее, по центральной предельной теореме в форме Линдеберга-Феллера, при условии $X_{(n-k)} = q$ имеем,

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k_n} Y_i - k_n \mathsf{E}Y_1}{\sqrt{k_n \mathrm{var}\, Y_1}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad n \to \infty,$$

при выполнении условия Ляпунова

$$\frac{\mathsf{E}|Y_1 - \mathsf{E}Y_1|^{2+\delta}}{(k_n \mathrm{var}\, Y_1)^{1+\frac{\delta}{2}}} \to 0, \quad n \to \infty,$$

для некоторого $\delta > 0$. Позже мы убедимся, что условие Ляпунова выполнено при $\delta = 2$.

Найдем асимптотику условного математического ожидания и условной дисперсии случайной величины Y_1 при $X_{(n-k)} = q$. Из леммы 3.5, если H_0 верна, то

$$\mathsf{E}Y_1 = \frac{\int_q^\infty (V(x) - S(x)) \exp(-S(x))dx}{\int_q^\infty \exp(-S(x))dx} + (S(q) - V(q)) + \frac{S'(q) - V'(q)}{S'(q)}.$$

Оценим асимптотику интегралов $I_1 = \int_q^\infty \exp(-S(x))dx$ и $I_2 = \int_q^\infty \exp(-S(x) + \ln|V(x) - S(x)|)dx$ при $q \to +\infty$. В дальнейшем аргументы функций $S(x)$, $V(x)$ и всех их производных будут равняться q, поэтому будем их опускать. Используя лемму 3.6, получаем,

$$I_1 = e^{-S}\left(\frac{1}{S'} - \frac{S''}{(S')^3} + o\left(\frac{S''}{(S')^3}\right)\right) \qquad \text{и} \tag{3.10}$$

$$I_2 = (V - S)\frac{\exp(-S)}{S'}\left(\frac{1}{1 - (S' - V')/(S'(S - V))}\right.$$
$$\left. - \frac{S'(S'' - (S'' - V'')/(S - V) + (S' - V')^2/(S - V)^2)}{(S' - (S' - V')/(S - V))^3} + o(B_2)\right), \tag{3.11}$$

где B_2 – второе слагаемое в последних скобках.

Заметим, что в условиях теоремы 3.2 $S''/(S')^2 \to 0$ (см. подробнее [35]) и $(S'-V')/((S-V)S') \to 0$ при $q \to \infty$. Опуская громоздкие вычисления, имеем,

$$\mathsf{E}Y_1 = 2\frac{S''(S'-V')}{(S')^3} - \frac{S''-V''}{(S')^2} + o\left(\frac{(S'-V')^2}{(S')^2(S-V)}\right), \quad q \to \infty.$$

Видим, что $S''(S'-V')/(S')^3 = o(1)$ и $(S''-V'')/(S')^2 = o(1)$ при $q \to \infty$, тогда как $\lim_{q\to\infty}(S'-V')/S' = 1$, поэтому

$$\mathsf{E}Y_1 = \frac{S'-V'}{S'}\frac{S''}{(S')^2}(1+o(1)) = o(1)$$

при $q \to \infty$. Аналогично получаем,

$$\operatorname{var} Y_1 = \left(\frac{S'-V'}{S'}\right)^2 \left(1 + O\left(\frac{S''}{(S')^2}\right)\right), \quad q \to \infty, \text{ и}$$

$$\mathsf{E}(Y_1 - \mathsf{E}Y_1)^4 = \left(\frac{S'-V'}{S'}\right)^4 \left(1 + O\left(\frac{S''}{(S')^2}\right)\right), \quad q \to \infty,$$

откуда следует выполнение условия Ляпунова для $\delta = 2$,

$$\frac{\mathsf{E}|Y_1 - \mathsf{E}Y_1|^{2+\delta}}{(k_n \operatorname{var} Y_1)^{1+\frac{\delta}{2}}} = \frac{1}{k_n^2}\left(1 + O\left(\frac{S''}{(S')^2}\right)\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Покажем теперь, что при выполнении условий теоремы 3.2 выполнено

$$\sqrt{k_n}\frac{S''(X_{(n-k_n)})}{(S'(X_{(n-k_n)}))^2} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad n \to \infty.$$

Используя правила Лопиталя и условие регулярности **A3** (здесь S снова означает $S(q)$), имеем

$$\lim_{q\to\infty}\frac{S''S}{(S')^2} = \lim_{q\to\infty}\frac{S''/S'}{S'/S} = \lim_{q\to\infty}\frac{\ln S'}{\ln S} = A,$$

где A – положительная константа. Получаем, что $S''/(S')^2 = O(1/S)$ при $q \to \infty$. Напомним, что $a_{n/k_n} = F^{\to}(1-k_n/n)$, поэтому

$$S(a_{n/k_n}) = -\ln e^{-S(a_{n/k_n})} = \ln\frac{n}{k_n}\cdot(1+o(1)).$$

Отсюда и из условия (3.4) имеем,

$$\sqrt{k_n}\frac{S''(a_{n/k_n})}{(S'(a_{n/k_n}))^2} = \sqrt{k_n}O\left(\frac{1}{S(a_{n/k_n})}\right) = \frac{\sqrt{k_n}}{\ln n}(1+o(1)) \to 0$$

при $n \to \infty$. Далее, применяя к (3.9) дельта-метод, получаем

$$\sqrt{k_n}\left(\frac{S''(X_{(n-k_n)})}{(S'(X_{(n-k_n)}))^2} - \frac{S''(a_{n/k_n})}{(S'(a_{n/k_n}))^2}\right) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0,\ n \to \infty,$$

откуда имеем, $\sqrt{k_n}S''(X_{(n-k_n)})/(S'(X_{(n-k_n)}))^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} 0,\ n \to \infty$. Значит, при условии $X_{(n-k_n)}$,

$$\frac{k_n \mathsf{E}Y_1}{\sqrt{k_n \mathrm{var} Y_1}} = \sqrt{k_n}\frac{S''(X_{(n-k_n)})}{(S'(X_{(n-k_n)}))^2}(1+o(1)) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0,\ n \to \infty, \quad \text{и}$$

$$\sqrt{k_n \mathrm{var}\, Y_1} - \sqrt{k_n}\frac{S'(X_{(n-k_n)}) - V'(X_{(n-k_n)})}{S'(X_{(n-k_n)})} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0,\ n \to \infty.$$

В итоге, используя лемму Слуцкого, получаем,

$$\frac{1}{\sqrt{k_n}}(U_n - k_n) \xrightarrow{d} N(0,1), \quad n \to \infty,$$

что и требовалось. □

Доказательство теоремы 3.3. В обозначениях доказательства теоремы 3.2, положим $\eta_i = [S(X_i^*) - S(q)] - [V(X_i^*) - V(q)]$, $i \in [k_n]$, и найдем математическое ожидание случайной величины η_1. Заметим, что условное распределение статистики $\ln R_n$ при условии $X_{(n-k_n)} = q$ совпадает с распределением статистики $\sum_{i=1}^{k_n} \eta_i$. Аналогично доказательству теоремы 3.2, получаем

$$\mathsf{E}\eta_1 = \frac{S'(q) - V'(q)}{G'(q)}(1+o(1)), \qquad \mathrm{var}\,\eta_1 = \left(\frac{S'(q) - V'(q)}{G'(q)}\right)^2 (1+o(1)).$$

Из Закона больших чисел для схемы серий [18] следует, что

$$\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} \eta_i \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{E}\eta_1 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Это означает, что при условии $X_{(n-k_n)} = q$

$$\frac{1}{k_n}\frac{\ln R_n \cdot S'(q)}{S'(q) - V'(q)} - \mathsf{E}\eta_1 \cdot \frac{S'(q)}{S'(q) - V'(q)} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Поскольку в условиях теоремы 3.3 $\mathsf{E}\eta_1 \cdot S'(q)/(S'(q) - V'(q)) = S'(q)/G'(q)(1 + o(1)) \to +\infty$ при $q \to \infty$ и $X_{(n-k_n)} \xrightarrow{\text{п. н.}} +\infty$ при $n \to \infty$ (см. лемму 3.2.1, [89]), мы окончательно получаем,

$$\frac{1}{\sqrt{k_n}}(U_n - k_n) \xrightarrow{\mathsf{P}} +\infty \quad \text{при } n \to \infty,$$

что и требовалось. □

3.3 Критерий различения классов хвостов распределений

В данном разделе мы приведем общий критерий различения двух классов хвостов непрерывных распределений и докажем его состоятельность. По сути, это первый критерий, предложенный в литературе, который можно применять вне зависимости от того, удовлетворяет ли распределение данных условиям теоремы Фишера-Типпета-Гнеденко или нет, что является существенным продвижением в теории проверки гипотез о хвостах распределений. Заметим, что с помощью предложенного критерия можно различать широкий спектр классов хвостов распределений из области максимального притяжения Гумбеля, что также сделано впервые. Для построения критерия будет рассмотрена вспомогательная задача различения простой гипотезы о хвосте распределения против двух сложных альтернатив, включающих в себя практически все распределения, хвосты которых легче или тяжелее хвоста распределения основной гипотезы.

Итак, пусть $(X_1, \ldots, X_n)$ – н.о.р. случайные величины с непрерывной функцией распределения F. Хотя результаты раздела будут также верны для распределений с конечной правой граничной точкой, мы для удобства будем полагать, что правые граничные точки

всех рассматриваемых распределений совпадают и равны $+\infty$. Для построения заявленного критерия рассмотрим статистику типа Хилла [115]

$$R_{k,n} = \ln(1 - F_0(X_{(n-k)})) - \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^{n} \ln(1 - F_0(X_{(i)})), \tag{3.12}$$

где F_0 – некоторая непрерывная функция распределения. Заметим, что если $F_0(x) = (1 - \kappa^{1/\gamma}/x^{1/\gamma})I(x > \kappa)$ – функция распределения Парето, то

$$R_{k,n} \stackrel{d}{=} \gamma_H/\gamma,$$

при $X_{(n-k)} > \kappa$, где γ_H – это оценка Хилла индекса экстремального значения γ (фактически, хвостового индекса, поскольку оценка является состоятельной только для $\gamma > 0$),

$$\gamma_H = \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^{n} \ln X_{(i)} - \ln X_{(n-k)}.$$

Следующее условие позволит нам разделить 2 класса хвостов распределений по их тяжести.

Определение 3.8. Функции распределения H и G удовлетворяют условию $B(H, G)$ (будем также писать B-условие), если для некоторых $\varepsilon \in (0, 1)$ и x_0 выполнено

$$\frac{(1 - H(x))^{1-\varepsilon}}{1 - G(x)} \text{ не возрастает при } x > x_0. \tag{3.13}$$

Легко видеть, что при выполнении этого условия хвост функции распределения H легче, чем хвост функции распределения G. К примеру, если H и G – функции распределения экспоненциальных законов с параметрами λ и θ, $\lambda > \theta$, соответственно, то B-условие выполнено для всех $\varepsilon \leq 1 - \theta/\lambda$ и для всех $x_0 > 0$. Указанное условие выполнено и для гауссовских функций распределения с различными дисперсиями. Также заметим, что хвосты логвейбулловского типа легче, чем хвосты распределения Парето, но тяжелее, чем хвосты вейбулловского типа, см. [100], и B-условие для этих классов выполнено.

Основные результаты раздела

Сформулируем основную задачу текущего раздела. Рассмотрим два класса распределений A_0 и A_1, таких что хвосты распределений из класса A_0 легче, чем хвосты распределений из класса A_1. Предположим, что существует "разделяющая" функция распределения F_0, такая что оба условия $B(G, F_0)$ и $B(F_0, H)$ выполнены при некоторых (возможно, различных) ε и x_0 для произвольных $G \in A_0$ и $H \in A_1$. Тогда классы A_0 и A_1 мы будем называть *разделимыми*. Как замечено выше, B-условие довольно слабое, и поэтому пары A_0 и A_1 разделимых классов могут быть довольно разнообразными. Так, примерами классов A_0 и A_1 могут быть распределения логарифмического типа и регулярно меняющиеся распределения, распределения логвейбулловского и вейбулловского типов (см. [103], а также раздел 4.1), и так далее.

Итак, предположим, что 2 класса хвостов распределений A_0 и A_1 разделимы с помощью функции F_0. Рассмотрим основную гипотезу $\tilde{H}_0 : F \in A_0$ и альтернативу $\tilde{H}_1 : F \in A_1$. Основной задачей данного раздела является построение асимптотического критерия различения этих гипотез и доказательство его состоятельности. Для этой цели рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Обозначим через $\Theta(F_0)$ класс непрерывных функций распределения F_1, удовлетворяющих либо условию $B(F_1, F_0)$, либо условию $B(F_0, F_1)$. Рассмотрим простую гипотезу $H_0 : F(x) = F_0(x)$ для всех достаточно больших x (фактически, мы проверяем гипотезу о том, что функция распределения F имеет тот же хвост, что и F_0 – будем называть гипотезы такого типа *гипотезами о хвостах распределений*) и альтернативную гипотезу $H_1 : F \in \Theta(F_0)$. Заметим, что если функции распределения F_0, F_1 удовлетворяют либо условию $B(F_1, F_0)$, либо условию $B(F_0, F_1)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то это же условие будет выполняться для всех ε_1, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Поэтому обозначим

$$\varepsilon(F_0, F_1) = \max\{\varepsilon : F_0, F_1 \text{ удовлетворяют либо } B(F_0, F_1), \text{ либо } B(F_1, F_0) \text{ для } \varepsilon\}.$$

Обозначим через $\Theta_\varepsilon(F_0)$ класс непрерывных функций распределения F_1,

удовлетворяющих условию $B(F_1, F_0)$ или условию $B(F_0, F_1)$ с $\varepsilon(F_0, F_1) \geq \varepsilon$, и рассмотрим другую альтернативную гипотезу $H_{1,\varepsilon} : F \in \Theta_\varepsilon(F_0)$.

Следующие два результата описывают асимптотическое поведение статистики $R_{k,n}$ при $k, n \to \infty$, $k < n$, при условии выполнения основной гипотезы H_0 и альтернатив H_1 и $H_{1,\varepsilon}$ соответственно.

Теорема 3.9. *Если H_0 верна, то при $k, n \to \infty$ выполнено*

$$\sqrt{k}(R_{k,n} - 1) \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, 1). \tag{3.14}$$

Теорема 3.10. (i) *Если H_1 верна, то*

$$\sqrt{k}\ |R_{k,n} - 1| \xrightarrow{d} +\infty,$$

где $k = k(n) \to \infty$, $k/n \to 0$ при $n \to \infty$.

(ii) *Если верна $H_{1,\varepsilon}$, то в тех же условиях*

$$\inf_{F_1 \in \Theta_\varepsilon(F_0)} \sqrt{k}\ |R_{k,n} - 1| \xrightarrow{d} +\infty.$$

На основе двух этих теорем можно предложить критерий проверки гипотезы $\tilde{H}_0$ против альтернативы $\tilde{H}_1$. Если классы хвостов распределений A_0 и A_1 разделимы и хвосты распределений из класса A_0 легче хвостов распределений из A_1, то, очевидно, существует такая функция распределения F_0, что условия $B(G, F_0)$ и $B(F_0, H)$ выполнены при некоторых (возможно, различных) ε и x_0 для произвольных функций распределения $G \in A_0$ и $H \in A_1$. Рассмотрим критерий проверки гипотезы $\tilde{H}_0$:

$$\text{если } R_{k,n} > 1 + \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{k}}, \text{ то отвергнуть } \tilde{H}_0, \tag{3.15}$$

где $u_{1-\alpha}$ – квантиль соответствующего уровня стандартного нормального закона. Тогда будет верным такое следствие из теорем 3.9 и 3.10.

Теорема 3.11. *Критерий* (3.15) *проверки нулевой гипотезы $\tilde{H}_0$ асимптотически имеет уровень значимости α. Кроме того, он является состоятельным на альтернативе $\tilde{H}_1$.*

Если же хвосты распределений из класса A_0 тяжелее, чем хвосты распределений из класса A_1, и существует такая функция распределения F_0, что оба условия $B(F_0, G)$ и $B(H, F_0)$ выполнены для некоторых (возможно, различных) ε, x_0 и произвольных функций распределения $G \in A_0$ и $H \in A_1$, то критерий проверки гипотезы $\tilde{H}_0 : F \in A_0$ против альтернативы $\tilde{H}_1 : F \in A_1$ с теми же асимптотическими свойствами будет иметь следующий вид

$$\text{если } R_{k,n} < 1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{k}}, \text{ то отвергнуть } \tilde{H}_0. \tag{3.16}$$

Доказательства

Назовем функцию распределения $F_q(x)$, введенную в лемме 3.5, функцией хвоста распределения. Рассмотрим две непрерывных функции распределения F, G и случайную величину ξ_q с функцией распределения G_q, где $q \in \mathbb{R}$. Определим

$$\eta_q = \ln\left(\frac{1 - F(q)}{1 - F(\xi_q)}\right).$$

Легко видеть, что $\eta_q \geq 0$ для всех $q \in \mathbb{R}$. Ключевым моментом в доказательстве теоремы 3.10 является изучение поведения случайной величины η_q.

Предложение 3.12. *Пусть F_q и G_q – функции хвостов распределений, связанные F и G соответственно. Тогда*

(i) *Если для некоторого x_0, $q > x_0$, и всех $x > q$ выполнено $F_q(x) = G_q(x)$, то η_q имеет стандартное экспоненциальное распределение.*

(ii) *$G_q(x) \geq F_q(x)$ при всех $x > q$ тогда и только тогда, когда η_q стохастически меньше, чем стандартная экспоненциальная случайная величина.*

$G_q(x) \leq F_q(x)$ при всех $x > q$ тогда и только тогда, когда η_q стохастически больше, чем стандартная экспоненциальная случайная величина.

(iii) *$G_q(x) \geq F_q(x)$ при всех $x > q \geq x_0$ и некоторого x_0 тогда и только тогда, когда $(1 - G(x))/(1 - F(x))$ есть невозрастающая функция при $x > x_0$.*

Доказательство. (i) Пусть $F_q(x) = G_q(x)$ для всех $x > q$, тогда для функции распределения случайной величины η_q имеем,

$$\mathsf{P}(\eta_q \leq y) = \mathsf{P}\left(\ln\left(\frac{1-F(q)}{1-F(\xi_q)}\right) \leq y\right) = \mathsf{P}\left(\frac{1-F(q)}{1-F(\xi_q)} \leq e^y\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(F(\xi_q) \leq 1 - (1-F(q))e^{-y}\right) = \mathsf{P}\left(\xi_q \leq F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1-F(q)}{e^y}\right)\right), \tag{3.17}$$

где $F^{\leftarrow}(x) = \inf\{z : F(z) = x\}$. Более того, для того же значения y,

$$\mathsf{P}\left(\xi_q \leq F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1-F(q)}{e^y}\right)\right) = \frac{F\left(F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1-F(q)}{e^y}\right)\right) - F(q)}{1-F(q)} = 1 - e^{-y}.$$

(ii) Предположим, что для всех $x > q$ и некоторого $q \in \mathbb{R}$ выполнено $G_q(x) \geq F_q(x)$. Тогда, с учетом (3.17) и того факта, что $1-(1-F(q))e^{-y} \geq F(q)$ при всех $y \geq 0$, имеем

$$\mathsf{P}(\eta_q \leq y) = \frac{G\left(F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1-F(q)}{e^y}\right)\right) - G(q)}{1-G(q)} \geq$$

$$\frac{F\left(F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1-F(q)}{e^y}\right)\right) - F(q)}{1-F(q)} = 1 - e^{-y}, \tag{3.18}$$

что и требовалось. Докажем утверждение в другую сторону. Предположим, что η_q стохастически меньше, чем стандартная экспоненциальная случайная величина, то есть $P(\eta_q \leq y) \geq 1 - e^{-y}$ для всех $y \geq 0$. С учетом (3.17), получаем

$$\frac{G\left(F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1-F(q)}{e^y}\right)\right) - G(q)}{1-G(q)} \geq 1-e^{-y} \iff \frac{1 - G\left(F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1-F(q)}{e^y}\right)\right)}{1-G(q)} \leq e^{-y}$$

$$\iff G\left(F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1-F(q)}{e^y}\right)\right) \leq 1 - \frac{1-G(q)}{e^y} \iff$$

$$F^{\leftarrow}\left(1-\frac{1-F(q)}{e^y}\right)\le G^{\leftarrow}\left(1-\frac{1-G(q)}{e^y}\right).$$

Обозначим $z_F = F^{\leftarrow}\left(1-e^{-y}(1-F(q))\right)$ и $z_G = G^{\leftarrow}\left(1-e^{-y}(1-G(q))\right)$. Поскольку $F(z_F) = 1-e^{-y}(1-F(q))$ и $G(z_G) = 1-e^{-y}(1-G(q))$, имеем,

$$e^{-y} = \frac{1-G(z_G)}{1-G(q)} = \frac{1-F(z_F)}{1-F(q)}.$$

Далее, поскольку $z_F \le z_G$, то

$$\frac{1-F(z_F)}{1-F(q)} = \frac{1-G(z_G)}{1-G(q)} \le \frac{1-G(z_F)}{1-G(q)}.$$

Это наблюдение завершает доказательство, поскольку $z_F \in [q,\infty)$. Доказательство второго утверждения этого пункта аналогично.

(iii) Имеем,

$$\frac{G(x)-G(q)}{1-G(q)} \ge \frac{F(x)-F(q)}{1-F(q)} \ \ \forall x > q \ge x_0 \iff$$

$$\frac{1-G(x)}{1-G(q)} \le \frac{1-F(x)}{1-F(q)} \ \ \forall x > q \ge x_0 \iff$$

$\frac{1-G(x)}{1-F(x)} \le \frac{1-G(q)}{1-F(q)} \ \forall x > q \ge x_0 \iff \frac{1-G(x)}{1-F(x)}$ не возрастает для всех $x > x_0$.

□

Доказательство теоремы 3.9. Доказательство теоремы 3.9 достаточно просто, аналогичные шаги используются в стохастической теории экстремумов для обоснования состоятельности оценки Хилла, см., к примеру, лемму 3.2.3 [89] и ее доказательство. В условиях теоремы, $F_0(X_1)$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, $F_0(X_1) \sim U[0,1]$, следовательно, $-\ln(1-F_0(X))$ – стандартная экспоненциальная случайная величина. Из представления Реньи (см. [89]) следует, что

$$\left(-\ln(1-F_0(X_{(n-i)})) + \ln(1-F_0(X_{(n-k)}))\right)_{i=0}^{k-1} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j=i+1}^{k}\frac{E_{n-j+1}}{j}\right)_{i=0}^{k-1},$$

где $E_1, E_2, \ldots$ – независимые стандартные экспоненциальные случайные величины. Отсюда, распределение левой части не зависит от n и

$$\left\{-\ln(1-F_0(X_{(n-i)}))+\ln(1-F_0(X_{(n-k)}))\right\}_{i=0}^{k-1} \stackrel{d}{=} \left\{E_{(k-i)}\right\}_{i=0}^{k-1},$$

где $E_{(1)} \leq \ldots \leq E_{(k)}$ – вариационный ряд выборки $(E_i)_{i=1}^k$. Наконец, имеем,

$$\sqrt{k}(R_{k,n}-1) \stackrel{d}{=} \sqrt{k}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} E_{(k-i)}-1\right) = \sqrt{k}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} E_j - 1\right),$$

и требуемое утверждение следует из центральной предельной теоремы. □

Доказательство Теоремы 3.10. Сначала докажем пункт (i). Схема доказательства теоремы содержит шаги, аналогичные проведенным в предыдущем разделе. Рассмотрим асимптотическое поведение статистики $R_{k,n}$ при $n \to \infty$. Обозначим

$$Y_i = \ln(1-F_0(q)) - \ln(1-F_0(X_i^*)),$$

где $(X_i^*)_{i=1}^k$ – н.о.р. случайные величины, введенные в Лемме 3.5, с функцией распределения

$$F_q(x) = \frac{F_1(x)-F_1(q)}{1-F_1(q)}, \quad q < x.$$

Полагая $F = F_0$ и $G = F_1$, имеем $Y_i \stackrel{d}{=} \eta_q$, $i \in [k]$. Заметим, что, как следует из Леммы 3.5, совместное условное распределение множества порядковых статистик $(Y_{(i)})_{i=1}^k$ выборки $(Y_j)_{i=1}^k$ при условии $X_{(n-k)} = q$ совпадает с совместным распределением множества порядковых статистик $(Z_{(j)})_{j=1}^k$ выборки $(Z_j)_{j=1}^k$, где

$$Z_j = \ln(1-F_0(X_{(n-k)})) - \ln(1-F_0(X_{(n-j+1)})),\ j = 1, ..., k.$$

Далее, видим, что

$$R_{k,n} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Z_i.$$

Отсюда, условное распределение $R_{k,n}$ при условии $X_{(n-k)} = q$ совпадает с распределением статистики $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_i$. Далее, функции распределения F_1 и F_0 удовлетворяют условию $B(F_0, F_1)$ или $B(F_1, F_0)$ по условию теоремы. Предположим сначала, что выполняется условие $B(F_0, F_1)$ для некоторых $\varepsilon > 0$ и x_0. Поскольку $x^* = +\infty$, то $X_{(n-k)} \to +\infty$ почти наверное, поэтому мы можем рассматривать только случай $q > x_0$. Из предложения 3.12 (iii) следует, что

$$\frac{1 - F_1(x)}{1 - F_1(x_0)} \geq \frac{(1 - F_0(x))^{1-\varepsilon}}{(1 - F_0(x_0))^{1-\varepsilon}}, \quad x > x_0.$$

Используя (3.18), получаем,

$$\mathsf{P}(Y_1 \leq x) = 1 - \frac{1 - F_1\left(F_0^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1-F_0(q)}{e^x}\right)\right)}{1 - F_1(q)} \leq$$

$$1 - \frac{\left(1 - F_0\left(F_0^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1-F_0(q)}{e^x}\right)\right)\right)^{1-\varepsilon}}{(1 - F_0(q))^{1-\varepsilon}} = 1 - e^{-(1-\varepsilon)x},$$

отсюда Y_1 стохастически больше, чем случайная величина $E \sim Exp(1-\varepsilon)$, будем писать $Y_1 \gg E$. Далее, пусть $E_1, \ldots, E_k$ – н.о.р. случайные величины с функцией распределения $H(x) = 1 - e^{-(1-\varepsilon)x}$, тогда

$$\sqrt{k}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_i - 1\right) \gg \sqrt{k}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} E_i - 1\right). \tag{3.19}$$

Поскольку (3.19) выполнено для всех $q > x_0$ и $X_{(n-k)} \to +\infty$ почти наверное при $n \to \infty$, то в предположениях теоремы имеем,

$$\sqrt{k}(R_{k,n} - 1) \gg \sqrt{k}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} E_i - 1\right). \tag{3.20}$$

Из теоремы Линдеберга-Феллера следует, что

$$(1-\varepsilon)\sqrt{k}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} E_i - \frac{1}{1-\varepsilon}\right) \xrightarrow{d} \xi \sim N(0,1), \quad n \to \infty,$$

поэтому

$$\sqrt{k}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}E_i - 1\right) \xrightarrow{\mathsf{P}} +\infty, \quad n \to \infty. \tag{3.21}$$

Окончательно, используя (3.20), получаем,

$$\sqrt{k}(R_{k,n} - 1) \xrightarrow{\mathsf{P}} +\infty, \quad n \to \infty. \tag{3.22}$$

Если же выполнено условие $B(F_1, F_0)$, то проводя аналогичные рассуждения, имеем,

$$\sqrt{k}(R_{k,n} - 1) \xrightarrow{\mathsf{P}} -\infty, \quad n \to \infty. \tag{3.23}$$

Второе утверждение теоремы легко следует из (3.20) и (3.21). □

Доказательство теоремы 3.11. Как следует из (3.22) и (3.23), если $\tilde{H}_0$ верна, то $\sqrt{k}(R_{k,n} - 1) \xrightarrow{\mathsf{P}} +\infty$ при $n \to \infty$. С другой стороны, если $\tilde{H}_1$ верна, то $\sqrt{k}(R_{k,n} - 1) \xrightarrow{\mathsf{P}} -\infty$ при $n \to \infty$, что доказывает, что критерий, предложенный в (3.15), является состоятельным. □

3.4 Обобщение результатов раздела 3.3 на разрывные распределения

Целью текущего раздела является обобщение результатов предыдущего раздела: во-первых, мы ослабим условие разделимости классов хвостов распределений, во-вторых, приведем условия, в которых критерий (3.15) может быть применен для разрывных хвостов распределений, а в-третьих, избавимся от условия бесконечности правой граничной точки рассматриваемых распределений.

Итак, пусть, как и ранее, $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ – н.о.р. случайные величины с функцией распределения F, а F_0 – произвольная функция распределения. Далее будем предполагать, что у всех рассматриваемых функций распределения одинаковая правая граничная точка $x^* = x^*_F = x^*_{F_0}$. Если у функции распределения F_0 конечное число точек разрыва и хвост этой функции распределения непрерывен при $x > x_0$, где

$x_0 < x^*_{F_0}$, то в условиях $k \to \infty$ и $k/n < 1 - F_0(x_0) - \varepsilon$ при $n \to \infty$ для произвольного $\varepsilon \in (0, 1 - F_0(x_0))$ утверждение теоремы 3.9 будет выполнено. Если же число точек разрыва функции распределения F_0 в окрестности ее правой граничной точки счетно, то для выполнения (3.14) необходимо наложить дополнительное условие. Обозначим через $\mathcal{X}_{F_0} = \{x_i\}_{i\geq 1}$ множество точек разрыва функции распределения F_0. Поскольку точки разрыва F_0 вблизи ее левой граничной точки $x_{*F_0} = \inf\{x : F_0(x) > 0\}$ не являются предметом исследования этой работы, для удобства будем считать, что последовательность $\{x_i\}_{i\geq 1}$ в случае, если она бесконечна, возрастает к x^*.

Будем говорить, что хвосты функций распределения F_0 и F совпадают, если найдется такое $x_0 < x_{F_0}$, что $F_0(x) = F(x)$ для всех $x > x_0$, пишем $F \simeq F_0$. Следующая теорема является обобщением теоремы 3.9.

Теорема 3.13. *Пусть верна гипотеза $H_0 : F \simeq F_0$, где F_0 – произвольная функция распределения. Если для некоторого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F_0(x_i) - F_0(x_i - 0)}{(1 - F_0(x_i))^{1+\varepsilon}} = 0, \tag{3.24}$$

где $F_0(x_i - 0)$ – предел слева функции F_0 в точке x_i, то (3.14) *выполнено для последовательности $k = k(n)$, такой что*

$$k^{1+2\varepsilon}/n^{2\varepsilon} \to 0, k \to \infty \text{ при } n \to \infty. \tag{3.25}$$

Если множество точек разрыва функции распределения F_0 в некоторой окрестности x^* пусто, то полагаем, что условие (3.24) *выполнено по умолчанию, в этом случае сходимость в* (3.14) *достигается при $k \to \infty, k/n \to 0, n \to \infty$.*

Замечание 3.14. Условие (3.24) является более сильным вариантом классического для теории экстремумов необходимого условия принадлежности функции распределения F области притяжения какого-либо экстремального закона, см. теорему 1.7.13 [137],

$$\lim_{x\uparrow x^*_F} \frac{1 - F(x)}{1 - F(x - 0)} = 1. \tag{3.26}$$

Приведем примеры распределений, которые удовлетворяют условию (3.24). Как уже было отмечено в условии Теоремы 3.13, для непрерывных распределений и распределений с непрерывным хвостом это условие заведомо выполнено. Наиболее интересным случаем являются дискретные распределения. Дискретными распределениями, удовлетворяющими условиям теоремы Гнеденко и подчиняющимися (3.24), в частности, являются распределения со степенным типом убывания хвоста на бесконечности, такие как дискретное распределение Парето, дискретное распределение Коши и другие. Интересно, что условию (3.24) также удовлетворяют дискретные распределения с супертяжелым хвостом, не принадлежащие ни одной из областей максимального притяжения. Биномиальное, пуассоновское и геометрическое распределения не удовлетворяют условию (3.26), а значит, и (3.24), но они не удовлетворяют условиям теоремы Гнеденко, как упоминалось ранее. Примерами дискретных распределений, для которых выполнено (3.26), но не выполнено (3.24), являются, по сути, все распределения, имеющие своим носителем $\mathbb{N}$ и принадлежащие области максимального притяжения Гумбеля, например, дискретное логнормальное распределение (см. [25]) и дискретное распределение Вейбулла с параметром $1/2$ и вероятностями $P(X = k) = e^{-\sqrt{k-1}} - e^{-\sqrt{k}},\ k \in \mathbb{N}$.

Как и в предыдущем разделе, наложим на распределения, принадлежащие альтернативной гипотезе, B-условие (3.13), отделяющее их от F_0 по асимптотике поведения хвоста распределения в окрестности правой граничной точки. Обозначим через $\Theta(F_0)$ класс хвостов произвольных функций распределения G, удовлетворяющих либо условию $B(F_0, G)$, либо условию $B(G, F_0)$, а также условию (3.24). Рассмотрим альтернативную гипотезу $H_1 : F \in \Theta(F_0)$ и изучим асимптотическое поведение статистики $R_{k,n}$ в случае, если H_1 верна.

Теорема 3.15. *Если гипотеза H_1 верна, то в условиях* (3.25)

$$\sqrt{k}|R_{k,n} - 1| \to +\infty$$

почти наверное.

Центральным результатом текущего раздела является критерий различения разделимых классов хвостов распределений, основанный на Теоремах 3.13 и 3.15. Данный критерий по форме совпадает с критерием (3.15), однако хвост распределения F_0 не обязательно должен быть непрерывным. Также отметим, что даже в непрерывном случае мы налагаем менее жесткие условия на основную и альтернативную гипотезы, чем в предыдущем разделе. Критерий может быть использован для выбора подходящей параметрической модели хвоста распределения, после чего задача оценивания хвоста распределения может быть сведена к задаче оценивания его параметров, см. главу 4 диссертации.

Рассмотрим 2 класса хвостов распределений A_0 и A_1 таких, что хвосты распределений из первого класса легче хвостов из второго.

Определение 3.16. Назовем классы хвостов распределений A_0 и A_1 *разделимыми справа* с помощью функции распределения F_0, если для всех $G \in A_0$ выполнено условие

$$\frac{1-G(x)}{1-F_0(x)} \text{ не возрастает при } x > x_0,$$

и для всех $H \in A_1$ выполнено условие $B(F_0, H)$, определенное в (3.13).

Отсюда, в частности, следует, что хвост функции распределения F_0 не легче хвостов распределений из A_0 и легче хвостов из A_1.

Итак, рассмотрим основную гипотезу $H_0' : F \in A_0$ и альтернативу $H_1' : F \in A_1$, где классы хвостов распределений A_0 и A_1 разделимы справа с помощью функции F_0. Для различения этих гипотез выберем критерий, по сути совпадающий с (3.15)

$$\text{если } R_{k,n} > 1 + \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{k}}, \text{ то отвергнуть } H_0', \tag{3.27}$$

где $u_{1-\alpha}$, как и ранее, обозначает квантиль уровня $1-\alpha$ распределения $N(0,1)$.

Теорема 3.17. *Критерий* (3.27) *различения гипотез* H_0' *и* H_1' *асимптотически имеет уровень значимости* α *и является состоятельным в условиях* (3.25).

Ясно, что аналогичным образом можно построить критерий различения классов хвостов распределений A_0 и A_1, если хвосты распределений из A_0 тяжелее, чем хвосты распределений из A_1. Скажем, что классы хвостов распределений A_0 и A_1 *разделимы слева* с помощью функции распределения F_0, если для всех $G \in A_0$ функция $(1 - F_0(x))/(1-G(x))$ не возрастает при $x > x_0$ и для всех $H \in A_1$ выполнено $B(H, F_0)$. Тогда критерий проверки гипотезы $H_0^* : F \in A_0$ против альтернативы $H_1^* : F \in A_1$, где классы A_0 и A_1 разделимы слева,

$$\text{если } R_{k,n} < 1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{k}}, \text{ то отвергнуть } H_0^*$$

обладает теми же асимптотическими свойствами, что и критерий (3.27).

Доказательство теоремы 3.13. Поскольку статистика $R_{k,n}$ зависит только от максимальных порядковых статистик выборки $\mathbf{X}_n$, мы не можем напрямую использовать независимость случайных величин из этой выборки и снова используем лемму 3.5 для поиска условного распределения статистики $R_{k,n}$ при условии $X_{(n-k)} = q$. Далее для удобства полагаем $x^* = \infty$, случай $x^* < \infty$ рассматривается аналогично. Обозначим

$$Y_i = \ln(1 - F_0(q)) - \ln(1 - F_0(X_i^*)), \tag{3.28}$$

где $(X_i^*)_{i=1}^k$ – н.о.р. случайные величины, введенные в Лемме 3.5, с функцией распределения

$$F_q(x) = \frac{F_0(x) - F_0(q)}{1 - F_0(q)}, \quad x > q.$$

Легко видеть, что при условии $X_{(n-k)} = q$ случайные величины $(Y_i)_{i=1}^k$ являются н.о.р., а также что распределение статистики $R_{k,n}$ при условии $X_{(n-k)} = q$ совпадает с распределением величины $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k Y_i$.

С целью применения центральной предельной теоремы найдем $\mathsf{E}Y_1$ и $\mathrm{var}Y_1$. Заметим, что если бы хвост распределения F_0 был непрерывным, то величина Y_1 имела бы стандартное экспоненциальное распределение, и в этом случае $\mathsf{E}Y_1 = \mathrm{var}Y_1 = 1$, см. предыдущий раздел. Имеем,

$$\mathsf{E}Y_1 = \int_q^\infty \ln \frac{1 - F_0(q)}{1 - F_0(x)} dF_q(x) = \int_q^\infty \ln \frac{1 - F_0(x)}{1 - F_0(q)} d\left(\frac{1 - F_0(x)}{1 - F_0(q)}\right).$$

Обозначим

$$y_i = \frac{1-F_0(x_i)}{1-F_0(q)},\ y_{i-} = \frac{1-F_0(x_i-0)}{1-F_0(q)},$$

где $x_i \in \mathcal{X}_{F_0}$ и $x_i > q$. Заметим, что функция $(1-F_0(x))/(1-F_0(q))$ убывает от 1 до 0, когда x возрастает от q до ∞, и имеет разрывы размера $y_{i-} - y_i$ в точках x_i. Тем самым получаем,

$$\int_q^\infty \ln\frac{1-F_0(x)}{1-F_0(q)} d\left(\frac{1-F_0(x)}{1-F_0(q)}\right) = 1 + \sum_{i:x_i>q}\left(\ln y_{i-}(y_{i-}-y_i) - \int_{y_i}^{y_{i-}} \ln y dy\right)$$

$$= 1 + \sum_{i:x_i>q}\big(y_i(\ln y_i - \ln y_{i-}) - (y_i - y_{i-})\big), \tag{3.29}$$

здесь мы использовали соотношение $\int_0^1 \ln y dy = 1$. Найдем асимптотику выражения $y_i(\ln y_i - \ln y_{i-}) - (y_i - y_{i-})$ при $q \to \infty$. Далее для удобства пишем x_{i-} вместо $x_i - 0$. Используя разложение функции $\ln(1+x)$ в ряд Тейлора и условие (3.24), имеем

$$y_i(\ln y_i - \ln y_{i-}) - (y_i - y_{i-}) = -\frac{1-F_0(x_i)}{1-F_0(q)}\ln\left(\frac{1-F_0(x_{i-})}{1-F_0(x_i)}\right) + \frac{F_0(x_i)-F_0(x_{i-})}{1-F_0(q)}$$

$$= -\frac{1-F_0(x_i)}{1-F_0(q)}\left(\frac{F_0(x_i)-F_0(x_{i-})}{1-F_0(x_i)} - \frac{1}{2}\left(\frac{F_0(x_i)-F_0(x_{i-})}{1-F_0(x_i)}\right)^2(1+o(1))\right)$$

$$+\frac{F_0(x_i)-F_0(x_{i-})}{1-F_0(q)} \le \frac{1}{2}\frac{F_0(x_i)-F_0(x_{i-})}{1-F_0(q)}\frac{F_0(x_i)-F_0(x_{i-})}{1-F_0(x_i)},$$

откуда получаем для суммы в правой части (3.29)

$$\sum_{i:x_i>q}\big(y_i(\ln y_i - \ln y_{i-}) - (y_i - y_{i-})\big)$$

$$\le \frac{1}{2}\max_{i:x_i>q}\left(\frac{F_0(x_i)-F_0(x_{i-})}{1-F_0(x_i)}\right)\sum_{i:x_i>q}\frac{F_0(x_i)-F_0(x_{i-})}{1-F_0(q)}$$

$$\le \frac{1}{2}\max_{i:x_i>q}\frac{F_0(x_i)-F_0(x_{i-})}{1-F_0(x_i)}. \tag{3.30}$$

Рассуждая аналогичным образом, находим асимптотику $\mathrm{var}Y_1$ при $q \to \infty$,

$$1 \le \mathrm{var}Y_1 \le 1 + \max_{i:x_i>q}\frac{F_0(x_i)-F_0(x_{i-})}{1-F_0(q)}. \tag{3.31}$$

Из (3.30) следует, что условное математическое ожидание статистики $R_{k,n}-1$ при $X_{(n-k)}=q$ может отличаться от 0, что препятствует в данной ситуации прямому применению центральной предельной теоремы для схемы серий. Поэтому для доказательства (3.14) воспользуемся методом характеристических функций. Обозначим через $F_{X_{(n-k)}}$ функцию распределения порядковой статистики $X_{(n-k)}$. Используя формулу полной вероятности и свойства характеристической функции, имеем

$$\mathsf{E}\exp\left(it\sqrt{k}(R_{k,n}-1)\right)=\int_q^\infty \mathsf{E}\exp\left(it\sqrt{k}(R_{k,n}-1)\Big|\, X_{(n-k)}=q\right)dF_{X_{(n-k)}}(q) \tag{3.32}$$

$$=\int_q^\infty\left(1+\frac{it\mathsf{E}(Y_1-1)}{\sqrt{k}}-\frac{t^2\mathsf{E}(Y_1-1)^2}{2k}+o(1/k)\right)^k dF_{X_{(n-k)}}(q).$$

Заметим, что $\mathsf{E}(Y_1-1)$ и $\mathsf{E}(Y_1-1)^2$ являются функциями от q, обозначим их $\varphi(q)$ и $\psi(q)$ соответственно. Докажем, что в условиях теоремы

$$\sqrt{k}\varphi(X_{(n-k)})\to 0 \text{ почти наверное.} \tag{3.33}$$

Из (3.30) имеем,

$$0\le\sqrt{k}\varphi(X_{(n-k)})\le\frac{\sqrt{k}}{2}\max_{i:x_i>X_{(n-k)}}\frac{F_0(x_i)-F_0(x_{i-})}{1-F_0(x_i)}$$

$$\le\sqrt{k}(1-F_0(X_{(n-k)}))^\varepsilon\max_{i:x_i>X_{(n-k)}}\frac{F_0(x_i)-F_0(x_{i-})}{(1-F_0(x_i))^{1+\varepsilon}}. \tag{3.34}$$

Из условия (3.24) следует, что $1-F_0(X_{(n-k)})=O(k/n)$. Отсюда и из (3.25) имеем

$$\sqrt{k}(1-F_0(X_{(n-k)}))^\varepsilon=\sqrt{k}O((k/n)^\varepsilon)=o(1).$$

Второй множитель в правой части (3.34) стремится к 0 по условию (3.24), т.к. $X_{(n-k)}\to\infty$ в условиях теоремы по лемме 3.2.1 [89], откуда и следует (3.33).

Докажем теперь, что в условиях теоремы

$$\psi(X_{(n-k)})\to 1 \text{ почти наверное.} \tag{3.35}$$

Аналогично рассуждениям выше, обозначим $\mathrm{var}Y_1$ как $\zeta(q)$, тогда, очевидно, $\psi(X_{(n-k)}) = \zeta(X_{(n-k)}) + (\varphi(X_{(n-k)}))^2$. Из (3.30) и (3.31),

$$1 \le \zeta(X_{(n-k)}) \le 1 + 2\varphi(X_{(n-k)}),$$

отсюда и из (3.33) получаем требуемое.

Возвращаясь к формуле (3.32), имеем с учетом (3.33) и (3.35)

$$\mathsf{E}\exp\left(it\sqrt{k}(R_{k,n}-1)\right) = \int_q^\infty \left(1 - \frac{t^2}{2k} + o(1/k)\right)^k dF_{X_{(n-k)}}(q) \to e^{-t^2/2},$$

теорема доказана. □

Доказательство теоремы 3.15. Рассмотрим случай, когда функция распределения F выборки $\mathbf{X}_n$ удовлетворяет условию $B(F, F_0)$ для некоторых ε и x_0, случай выполнения условия $B(F_0, F)$ рассматривается аналогично. Из условия $B(F, F_0)$ следует, что для всех $y > x > x_0$

$$\left(\frac{1-F(y)}{1-F(x)}\right)^{1-\varepsilon} \le \frac{1-F_0(y)}{1-F_0(x)}. \tag{3.36}$$

Рассмотрим величины $(Y_i)_{i=1}^k$ (3.28), введенные в доказательстве теоремы 3.13. Отличие от случая теоремы 3.13 состоит в том, что величины $(X_i^*)_{i=1}^k$, фигурирующие в (3.28), имеют функцию распределения

$$F_q(x) = \frac{F(x) - F(q)}{1 - F(q)}, \quad q < x.$$

Напомним также, что $R_{k,n} \stackrel{d}{=} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k Y_i$ при условии $X_{(n-k)} = q$. Рассмотрим функцию распределения случайной величины Y_1. Из (3.36) имеем

$$\mathsf{P}(Y_1 \le x) = \mathsf{P}\left(\ln\frac{1-F_0(q)}{1-F_0(X_1^*)} \le x\right) \ge \mathsf{P}\left(\ln\frac{1-F(q)}{1-F(X_1^*)} \le \frac{x}{1-\varepsilon}\right).$$

Введем для всех $i = 1, \ldots, k$

$$Z_i = \ln(1 - F(q)) - \ln(1 - F(X_i^*)),$$

данные случайные величины, очевидно, являются независимыми и одинаково распределенными. Кроме того, для каждого $i = 1, \ldots, k$ величина $(1-\varepsilon)Z_i$ стохастически больше величины Y_i, пишем $(1-\varepsilon)Z_i \gg Y_i$. Введем статистику

$$S_{k,n} = \ln(1 - F_0(X_{(n-k)})) - \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^{n} \ln(1 - F(X_{(i)})).$$

Легко видеть, что $S_{k,n} \stackrel{d}{=} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} Z_i$ при условии $X_{(n-k)} = q$, тем самым, выполнено

$$(1 - \varepsilon)S_{k,n} \gg R_{k,n}. \tag{3.37}$$

Но из теоремы 3.13 следует, что

$$\sqrt{k}(S_{k,n} - 1) \stackrel{d}{\to} \xi \sim N(0, 1), \tag{3.38}$$

откуда и из (3.37) получаем

$$\sqrt{k}(R_{k,n} - 1) \ll (1 - \varepsilon)\sqrt{k}(S_{k,n} - 1) - \varepsilon\sqrt{k} \stackrel{\mathsf{P}}{\to} -\infty,$$

теорема доказана. □

Доказательство теоремы 3.17. Покажем, что уровень значимости критерия (3.27) асимптотически не превосходит α. Действительно, из (3.37) для $\varepsilon = 0$ и (3.38) имеем

$$\mathsf{P}(\sqrt{k}(R_{k,n} - 1) > u_{1-\alpha}) \leq \mathsf{P}(\sqrt{k}(S_{k,n} - 1) > u_{1-\alpha}) \to \alpha$$

в условиях (3.25). Состоятельность критерия (3.27) непосредственно следует из теоремы 3.15. □

3.5 Критерии согласия для хвостов распределений

В данном разделе мы покажем, каким образом следует изменить классические критерии согласия Колмогорова и типа омега-квадрат так, чтобы их можно было применить для проверки гипотезы согласия с хвостом распределения. Также будет доказана состоятельность

предложенных критериев на широких альтернативах. Будет рассмотрены как постановка теории цензурированных данных, так и постановка стохастической теории экстремумов.

Модификации классических критериев согласия для цензурированных данных, предложенные в литературе, как правило, получены одним из двух следующих методов: либо с помощью усечения статистики критерия, либо с помощью специального преобразования данных. Первый метод был, в частности, использован в работах [49] (для критерия Колмогорова) и [166] (для критериев Крамера-фон Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга), достаточно полное описание этого направления можно найти в монографии [68]. Например, в работе [166] среди прочих была рассмотрена статистика ${}_{p,r}W_n^2 = \int_p^r (F_n(t) - t)^2 dt$, где $0 \leq p < r \leq 1$ и $F_n(t)$ – эмпирическая функция распределения выборки из распределения на $[0,1]$, которая является обобщением статистики Крамера-фон Мизеса-Смирнова $\omega_n^2 = \int_0^1 (F_n(t) - t)^2 dt$. В рамках второго направления выделим работы [151] и [140]. Метод построения критериев согласия в рамках этого подхода основан на специальных преобразованиях k максимальных (или минимальных) членов вариационного ряда выборки из стандартного равномерного закона $U[0,1]$, при которых преобразованные данные совпадают по распределению с выборкой из $U[0,1]$ размера k. Предельные распределения статистик критериев, полученных в данном подходе, при верности нулевой гипотезы совпадают с предельными распределениями статистик их классических аналогов.

Однако упомянутые подходы имеют свои недостатки. Предельные распределения статистик критериев, полученных в рамках первого подхода, в случае верности гипотезы согласия зависят от порога (или порогов, как статистика ${}_{p,r}W_n^2$), наблюдения выше (или ниже) которого представляются недостоверными. Такое свойство критериев делает их применение достаточно неудобным, поскольку для каждого фиксированного значения порога необходимо отдельно вычислять квантили предельного распределения для корректного применения теста. Более того, в случае если порог случаен и, например, равен

выборочной квантили высокого уровня, подход вовсе перестает работать. Работы в рамках второго подхода не отвечают на вопрос, на каких альтернативах предложенные критерии являются состоятельными; кроме того, численное сравнение эффективности критериев, полученных в рамках первого и второго подходов, показывает преимущество первых, см. [140]. Отметим также, что работы, затрагивающие задачу проверки гипотезы согласия в постановке статистики экстремумов – когда доля используемых (или известных) максимальных порядковых статистик выборки существенно мала, – начали появляться лишь в недавнее время, см. предыдущие разделы этой главы.

Пусть $\mathbf{X}^n = (X_1, \ldots, X_n)$ – н.о.р. случайные величины с непрерывной функцией распределения F. По аналогии со стандартной гипотезой согласия, определим $H_0^T : F(x) = F_0(x)$ *для всех достаточно больших* x и назовем ее *гипотезой согласия с (правым) хвостом распределения*, аналогично можно определить гипотезу согласия с левым хвостом F_0 (буква T в обозначении H_0^T означает связь гипотезы с хвостом распределения). Заметим, что гипотеза H_0^T отличается от гипотезы $H_0^q : F(x) = F_0(x), x > q$ статистики цензурированных (II типа) данных, поскольку порог q в данном случае неизвестен. Гипотезу согласия с хвостом распределения можно корректно проверить в рамках постановки теории экстремумов: для проверки гипотезы используются только $k = k(n)$ максимальных порядковых статистик выборки $\mathbf{X}^n$, где $k \to \infty$ и $k/n \to 0$ при $n \to \infty$, см. обзор [121] критериев такого рода. Первый критерий, проверяющий гипотезу H_0^T для функций распределения с непрерывным хвостом, был предложен в работе [34], см. также раздел 3.2 диссертации, там же была доказана его состоятельность. Аналог критерия согласия типа Крамера-фон Мизеса-Смирнова для хвоста распределения, являющийся частным случаем предлагаемого в работе критерия типа омега-квадрат, был предложен в [185], см. также раздел 1.8.

Критерии согласия для хвостов распределений, предлагаемые в настоящей работе, по сути проверяют более широкую гипотезу, чем H_0^T.

Напомним определение *функции хвоста распределения* F :

$$F_q(x) := P(X_1 \le x | X_1 > q) = \frac{F(x) - F(q)}{1 - F(q)}, \quad x > q,$$

для удобства в этом разделе будем обозначать ее как $F(x|q)$. Рассмотрим гипотезу $\hat{H}_0^T$: $F(x|q) = F_0(x|q), x > q$ *для некоторого (неизвестного)* q и обсудим ее связь с гипотезами H_0^T и H_0^q. Как легко видеть, если гипотеза $\hat{H}_0^T$ выполнена для некоторого q, то найдется такая константа $C > 0$, что при всех $x > q$ верно соотношение $1-F(x) = C(1-F_0(x))$. Тем самым, гипотеза H_0^T есть сужение гипотезы $\hat{H}_0^T$ на случай $C = 1$, а H_0^q – на случай $C = 1$ и фиксированного q. Если при исследовании случай $C \neq 1$ является нежелательным, то его можно выявить с помощью применения QQ-plot для хвостов распределений. Отметим, что в работе [63] были построены, по сути, модификации классических критериев согласия проверки гипотезы $\hat{H}_0^T$ для фиксированного q, сходные с критериями, предлагаемые в текущем разделе, однако отличия ее от гипотезы H_0^T и состоятельность предложенных критериев авторами исследованы не были.

Напомним, что статистика критерия Колмогорова для проверки гипотезы согласия $H_0 : F = F_0$ записывается в виде

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\widehat{F}_n(x) - F_0(x)|,$$

где $\widehat{F}_n$ – эмпирическая функция распределения выборки $\mathbf{X}^n$. Предложим на ее основе статистику, зависящую только от максимальных членов вариационного ряда выборки $\mathbf{X}^n$:

$$D_{k,n}^T = \sup_{x > X_{(n-k)}} \left|\widehat{F}_n(x|X_{(n-k)}) - F_0(x|X_{(n-k)})\right|,$$

и покажем, что предельное распределение статистики $\sqrt{k} D_{k,n}^T$ в случае верности гипотезы $\hat{H}_0^T$ совпадает с распределением Колмогорова.

Теорема 3.18. *Пусть случайная величина* K *имеет функцию распределения Колмогорова. Предположим, что гипотеза* $\hat{H}_0^T$ *верна для*

непрерывной функции распределения F_0. Тогда существует такое q, что

$$\sqrt{k}D_{k,n}^T \xrightarrow{d} K, \quad n \to \infty,$$

для всех последовательностей $k = k(n)$ таких, что $k \to \infty$ и $k/n < 1 - F_0(q) - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$.

Заметим, что в отличие от классической постановки задачи статистики экстремумов, мы не требуем выполнения условия $k/n \to 0$, однако проверку гипотезы $\hat{H}_0^T$ стоит проводить при выполнении этого условия, поскольку q заранее неизвестно. Также заметим, что требование непрерывности F_0 в этом случае также необязательно – достаточно потребовать, чтобы F_0 была непрерывна в окрестности правой граничной точки своего носителя $x_{F_0}^*$.

Доказательство теоремы 3.18. Из условия $k/n < 1 - F_0(q) - \varepsilon$ имеем $P(X_{(n-k)} > x_0) \to 1$ в предположениях теоремы. Учитывая, что гипотеза $\hat{H}_0^T$ эквивалентна выполнению равенства $1 - F(x) = C(1 - F_0(x))$ для всех $x > q$ и некоторого $C > 0$, то ввиду известного факта $1 - F_0(X) \sim U[0,1]$ для $X \sim F_0$ получаем, что вектор порядковых статистик $\{1 - F_0(X_{(n-i+1)})\}_{i=1}^k$ совпадает по распределению с вектором порядковых статистик $\{Y_{(i)}\}_{i=1}^k$ выборки $\{Y_j\}_{j=1}^n$ из распределения $U[0, C^{-1}]$. Тем самым, статистика $D_{k,n}^T$ записывается в виде

$$\begin{aligned} D_{k,n}^T &\stackrel{d}{=} \sup_{y \in [0, Y_{(k+1)})} \left| \frac{k/n - n^{-1}\sum_{i=1}^n I(Y_i \le y)}{k/n} - \frac{Y_{(k+1)} - y}{Y_{(k+1)}} \right| \\ &= \sup_{y \in [0, Y_{(k+1)})} \left| \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k I(Y_{(i)} \le y) - \frac{y}{Y_{(k+1)}} \right|, \end{aligned}$$

где $\stackrel{d}{=}$ означает равенство по распределению.

Рассмотрим условное распределение $D_{k,n}^T$ при условии $Y_{(k+1)} = t$. По лемме 3.5, совместное распределение вектора порядковых статистик $\{Y_{(i)}\}_{i=1}^k$ при условии $Y_{(k+1)} = t$ совпадает с совместным распределением вектора порядковых статистик $\{U_{(i)}\}_{i=1}^k$ выборки $\{U_i\}_{i=1}^k$

из распределения $U[0,t]$. Делая замену переменных $z = y/t$ и замечая, что $U_i/t \sim U[0,1]$ для всех $i \in \{1,\dots,k\}$, имеем

$$D_{k,n}^T \big| \{Y_{(k+1)} = t\} \stackrel{d}{=} \sup_{z\in[0,1]} \Big| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} I(U_i/t \le z) - z \Big| \stackrel{d}{=} D_k.$$

Видим, что распределение статистики $D_{k,n}^T$ при условии $Y_{(k+1)} = t$ не зависит от t, и, более того, совпадает с распределением статистики Колмогорова D_k. Это означает, что предельное распределение статистики $\sqrt{k}D_{k,n}^T$ совпадает с предельным распределением $\sqrt{k}D_k$, а именно распределением Колмогорова, в условиях теоремы. Теорема доказана. □

Теорема 3.18 показывает, что критерий

$$\text{если } \sqrt{k}D_{k,n}^T > K_{1-\alpha}, \text{ то отвергнуть } \hat{H}_0^T, \tag{3.39}$$

где $K_{1-\alpha}$ – $(1-\alpha)-$квантиль распределения Колмогорова, асимптотически имеет уровень значимости α; в следующей теореме обсуждается его состоятельность.

Теорема 3.19. *(i) Если для некоторого $c \in (0,1)$ выполнено $k/n > c$ при $n \to \infty$, то критерий* (3.39) *состоятелен на альтернативе $\hat{H}_1^T : \hat{H}_0^T$ неверна.*

(ii) Если $k \to \infty$ и $k/n \to 0$ при $n \to \infty$, то критерий (3.39) *состоятелен на более узкой альтернативе $\hat{H}_2^T$: $\forall q < x^*_{F_1}\ \exists x_0 > q$: $|F(x_0|q) - F_0(x_0|q)| > d$ для некоторого $d > 0$.*

Доказательство теоремы 3.19. (i) Пусть F_1 – функция распределения X_1 и $u(c)$ – квантиль F_1 уровня $1-c+\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon \in (0,c)$. Тогда в условиях теоремы $P(X_{(n-k)} < u(c)) \to 1$. Из определения функции распределения хвоста и условий теоремы немедленно вытекает, что $f(q) = \sup_{x>q} |F_1(x|q) - F_0(x|q)| > 0$ для всех $q \le u(c)$. Более того, функция $f(x)$ непрерывна и при $x = -\infty$ отделена от нуля (иначе $F_1 = F_0$), значит, существует такое $d > 0$, что $\sup_{x>q} |F_1(x|q) - F_0(x|q)| \ge d$ для всех $q \le u(c)$.

Используя Теорему 1, неравенство треугольника и последнее соотношение, имеем с вероятностью, стремящейся к 1, для произвольного $\varepsilon \in (0, d)$

$$\begin{aligned} D_{k,n}^T &= \sup_{x>X_{(n-k)}} \left|\widehat{F}_n(x|X_{(n-k)}) - F_0(x|X_{(n-k)})\right| \\ &\geq \sup_{x>X_{(n-k)}} \left|F_1(x|X_{(n-k)}) - F_0(x|X_{(n-k)})\right| \\ &\quad - \sup_{x>X_{(n-k)}} \left|\widehat{F}_n(x|X_{(n-k)}) - F_1(x|X_{(n-k)})\right| \geq d - \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\sqrt{k}D_{k,n}^T$ стремится к бесконечности по вероятности, что и требовалось.

(ii) Отличие доказательства этого пункта от предыдущего лишь в том, что утверждение $\sup_{x>q} |F_1(x|q) - F_0(x|q)| \geq d$ при $q \uparrow x_{F_1}^*$ доказывать не нужно – оно автоматически следует из условия теоремы. Теорема доказана. □

Используя ту же идею замены функций распределения в статистике критерия согласия на функции распределения хвоста, введем аналог статистики омега-квадрат $\omega_n^2(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \psi(F_0(x))(\widehat{F}_n(x) - F_0(x))^2 dF_0(x)$, зависящую только от максимальных порядковых статистик выборки,

$$\omega_{k,n}^T(\psi) = \int_{X_{(n-k)}}^{\infty} \psi(F_0(x|X_{(n-k)}))(\widehat{F}_n(x|X_{(n-k)}) - F_0(x|X_{(n-k)}))^2 dF_0(x|X_{(n-k)})$$

и предложим на ее основе критерий проверки гипотезы о пропорциональности хвостов $\hat{H}_0^T$:

$$\text{если } k\omega_{k,n}^T(\psi) > u_{1-\alpha}(\psi), \text{ то отвергнуть } \hat{H}_0^T, \tag{3.40}$$

где $u_{1-\alpha}(\psi)$ – $(1-\alpha)-$квантиль предельного распределения $A(\psi)$ статистики $\omega_n^2(\psi)$ при верности гипотезы согласия, см. [17]. Напомним, что частными случаями критериев типа омега-квадрат являются критерии согласия Крамера-фон Мизеса-Смирнова (для $\psi(x) = 1$) и Андерсона-Дарлинга (для $\psi(x) = (x(1-x))^{-1}$). Следующие теоремы, аналогичные теоремам 3.18 и 3.19 соответственно, утверждают, что

приведенный критерий асимптотически имеет уровень значимости α и является состоятельным на широкой альтернативе.

Теорема 3.20. *Пусть гипотеза $\hat{H}_0^T$ верна для непрерывной функции распределения F_0. Тогда существует такое q, что*

$$k\omega_{k,n}^T(\psi) \xrightarrow{d} \xi \sim A(\psi), \quad n \to \infty,$$

для всех последовательностей k таких, что $k \to \infty$ и $k/n < 1 - F_0(q) - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 3.21. *(i) Если для некоторого $c \in (0,1)$ выполнено $k/n > c$ при $n \to \infty$, то критерий (0.14) состоятелен на альтернативе $\hat{H}_1^T$.*

(ii) Если $k \to \infty$ и $k/n \to 0$ при $n \to \infty$, то критерий (0.14) состоятелен на альтернативе $\hat{H}_2^T$: $\forall q < x_{F_1}^*$ $\int_q^\infty \psi(F_0(x|q)(F_1(x|q) - F_0(x|q))^2 dF_0(x|q) > d$ для некоторого $d > 0$.

Доказательства Теорем 3.20 и 3.21 полностью аналогичны доказательствам Теорем 3.18 и 3.19 соответственно.

Введенные в данном разделе критерии согласия для хвостов распределений проверяют гипотезу $\hat{H}_0^T$ и являются состоятельными на альтернативе $\hat{H}_1^T$: $\hat{H}_0^T$ *неверна* (в постановке теории экстремумов – на чуть более узкой альтернативе). Перечислим преимущества предлагаемых критериев по сравнению с критериями в рамках первого и второго подходов, рассмотренными во введении к этому разделу. Во-первых, предельные распределения статистик критериев при верности нулевой гипотезы известны и совпадают с предельными распределениями статистик их классических аналогов (в отличие от критериев, полученных с помощью усечения статистики критерия). Во-вторых, доказана состоятельность критериев на отрицании нулевой гипотезы (в отличие от критериев, полученных с помощью

преобразования данных). В-третьих, универсальность предложенных критериев позволяет использовать их также и в постановке теории экстремумов.

4 Оценивание параметров хвостов распределений

4.1 Общий метод оценивания одномерного параметра хвоста распределения

Оценивание хвоста распределения является центральной задачей статистики экстремумов. Сейчас наиболее популярный метод оценивания хвоста распределения основан на уже упоминавшейся теореме Пикандса-Балкема-де Хаана, [48], [168]. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – н.о.р. случайные величины с функцией распределения F. Напомним, что теорема утверждает, что если функция распределения F случайной величины X области максимального притяжения закона G_γ (3.2) для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$, то для x таких, что $0 < x < (\min(0, -\gamma))^{-1}$, выполнено

$$\lim_{t \uparrow x^*} \mathsf{P}\left(\frac{X - t}{f(t)} > x \,|X > t \right) = (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}, \tag{4.1}$$

где, как и ранее, $x_F^* = \sup\{x : F(x) < 1\}$, $f(t)$ – некоторая функция (детали см. в монографии [89]), и при $\gamma = 0$ выражение $(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}$ следует понимать как e^{-x}. Параметр γ, как уже упоминалось, называется *индексом экстремального значения* и играет ведущую роль в статистике экстремумов. Соотношение (4.1) может быть переписано в следующем виде, более удобном для практики

$$\mathsf{P}(X > t + x | X > t) - (1 + \gamma x/\sigma)^{-1/\gamma} \to 0, \quad t > 0.$$

Таким образом, достаточно оценить должным образом параметры γ и σ, чтобы получить оценку хвоста распределения. По оцениванию параметров этой модели существует исчерпывающая литература, см. [188] для совместного оценивания параметров γ и σ с помощью аналога метода максимального правдоподобия, [74], [80], [168] среди прочих для оценивания γ, [69], [115], [162] среди прочих для оценивания $\gamma > 0$ (так называемые оценки хвостового индекса), а также монографии [89], [52], [85]. В качестве порога t, как правило, выбирается $X_{(n-k)}$, $(n-k)$-тая

порядковая статистика выборки $(X_i)_{i=1}^n$, $k < n$. Отсюда возникает задача оптимального выбора параметра k, [109].

Однако указанный подход имеет свои недостатки. Так, существует большой класс распределений, например, распределения с хвостом логарифмического типа или такие распределения, как пуассоновское и геометрическое, для которых не выполнены условия теоремы Гнеденко, поэтому применение рассмотренного подхода не представляется возможным. Данный метод хорошо работает для распределений, принадлежащих областям максимального притяжения Фреше и Вейбулла, так как они хорошо описываются посредством индекса экстремального значения γ, однако с помощью него невозможно различить распределения из области максимального притяжения Гумбеля, поскольку $\gamma = 0$ для всех распределений из этой области. Кроме того, скорость сходимости в теореме Фишера-Типпетта-Гнеденко к распределению Гумбеля крайне медленная (а именно, она логарифмическая, [108]). Тем самым, возникает необходимость либо в решении каждого описанного выше случая по отдельности, либо в общем методе оценивания хвоста распределения, не зависящего от выполнения условий теоремы Гнеденко.

Некоторое количество авторов последовали первому пути и рассмотрели частный случай оценивания параметров хвостов распределений, принадлежащих некоторым широким классам распределений из области максимального притяжения Гумбеля. Классы распределений вейбулловского и логвейбулловского типов являются примерами таких классов. Скажем, что функция распределения F вейбулловского типа, если существует такое $\theta > 0$, что для всех $\lambda > 0$ мы имеем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 - F(\lambda x))}{\ln(1 - F(x))} = \lambda^\theta, \tag{4.2}$$

см. также раздел 5.1. Видим, что параметр θ, называемый вейбулловским хвостовым индексом, управляет асимптотикой убывания хвоста этого распределения на бесконечности. При анализе распределений с хвостами, убывающими на бесконечности с экспоненциальной скоростью,

оценивание θ и последующее оценивания экстремальных квантилей занимает центральное положение. Если для некоторой функции распределения F функция распределения $F(e^x)$ принадлежит классу распределений вейбулловского типа с параметром $\theta > 0$, то скажем, что F логвейбулловского типа. Заметим, что распределения логвейбулловского типа с параметром $\theta > 1$ принадлежат области максимального притяжения Гумбеля. Если же $0 < \theta < 1$, то такие распределения имеют супертяжелый хвост. Оценки вейбулловского хвостового индекса были предложены в работах [140], [51], [100], [101] среди прочих (см. также раздел 5.1), тогда как задача оценивания логвейбулловского индекса, который определяется аналогично (4.2), как нам известно, до сих пор не была никем рассмотрена.

Целью настоящего раздела является построение общего метода оценивания параметра хвоста непрерывного распределения. Предлагаемый метод может быть использован как для оценивания вейбулловского и логвейбулловского хвостовых индексов, так и для оценивания параметров распределений с супертяжелыми хвостами. Подчеркнем, что предлагаемый метод не зависит от выполнения условий теоремы Фишера-Типпетта-Гнеденко для рассматриваемого распределения.

Итак, пусть $X_1, \ldots, X_n$ – н.о.р. случайные величины с функцией распределения F. Для удобства положим $x_F^* = +\infty$ и будем обозначать $\overline{G}(x) = 1 - G(x)$. Скажем, что функции распределения G и H с $x_G^* = x_H^* = +\infty$ имеют одинаковый хвост, если $\overline{G}(x)/\overline{H}(x) \to 1$ при $x \to +\infty$. Далее будем полагать, что все рассматриваемые функции распределения непрерывны и обладают бесконечной правой точкой. Далее, назовем параметрическое семейство хвостов распределений $\mathcal{F} = \{F_\theta,\ \theta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \mathbb{R}$, *упорядоченным по параметру* θ, если для всех $\theta_1, \theta_2 \in \Theta,\ \theta_1 < \theta_2$, выполнено условие $B(F_{\theta_1}, F_{\theta_2})$ (см. определение B-условия в разделе 3.3) или для всех $\theta_1, \theta_2 \in \Theta,\ \theta_1 < \theta_2$, выполнено $B(F_{\theta_2}, F_{\theta_1})$. Предположим, что хвост F принадлежит параметрическому классу хвостов распределений $\mathcal{F}$.

Предложим общий метод оценивания параметра θ хвоста функции

распределения F. Для этой цели рассмотрим обобщение статистики (3.12)

$$R_{k,n}(\theta) = \ln(1 - F_\theta(X_{(n-k)})) - \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^{n} \ln(1 - F_\theta(X_{(i)})). \tag{4.3}$$

Следующая теорема утверждает, что оценка

$$\theta^*_{k,n} = \arg\{\theta : \ R_{k,n}(\theta) = 1\} \tag{4.4}$$

является состоятельной для параметра θ.

Теорема 4.1. *Пусть $(X_1, \dots, X_n)$ – н.о.р. случайные величины с функцией распределения $F = F_{\theta_0}$, семейство хвостов распределений $\mathcal{F} = \{F_\theta, \theta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \mathbb{R}$ является упорядоченным по параметру θ и $F_\theta(x)$ непрерывна по x и θ. Предположим, что последовательность $k = k(n), k \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям*

$$k \to \infty, \ \frac{k}{n} \to 0 \quad \textit{при } n \to \infty. \tag{4.5}$$

Тогда

$$\theta^*_{k,n} \xrightarrow{P_{\theta_0} - ..} \theta_0.$$

Замечание 4.2. Условие упорядоченности параметрического семейства $\mathcal{F}$ по параметру θ гарантирует единственность почти наверное решения уравнения $R_{k,n}(\theta) = 1$ относительно θ. Тем самым, оценка $\theta^*_{k,n}$ определена корректно.

Доказательство теоремы 4.1. Предположим, что в предположениях теоремы для всех $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, $\theta_1 < \theta_2$ выполнено условие $B(F_{\theta_1}, F_{\theta_2})$. Далее будем писать $X \ll Y$ в случае, если случайная величина X стохастически меньше случайной величины Y. Из теоремы 3.9 следует, что

$$R_{k,n}(\theta_0) \to 1 \ \ P_{\theta_0} - \text{п.н.}$$

в условиях (4.5). Далее, предположим, что $\theta_1 > \theta_0$ и условие $B(F_{\theta_0}, F_{\theta_1})$ выполнено для некоторого ε. Пусть $(E_1, \dots, E_k)$ – независимые

случайные величины, экспоненциально распределенные с параметром $1-\varepsilon$. По теореме 3.10, в условиях (4.5) выполнено

$$R_{k,n}(\theta_1) \gg \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} E_i \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Аналогично, если $\theta_1 < \theta_0$ и выполнено условие $B(F_{\theta_1}, F_{\theta_0})$ для некоторого δ, то при выполнении (4.5) верно

$$R_{k,n}(\theta_1) \ll \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} E'_i \xrightarrow{\text{п.н.}} 1-\delta,$$

где $(E'_i)_{i=1}^{k}$ – независимые случайные величины, экспоненциально распределенные с параметром $\frac{1}{1-\delta}$. Тем самым, утверждение (4.1) установлено в случае выполнения условия $B(F_{\theta_1}, F_{\theta_2})$ для всех $\theta_1, \theta_2 \in \Theta,\ \theta_1 < \theta_2$, разбор второго случая аналогичен. □

Для того, чтобы оценка $\theta^*_{k,n}$ была асимптотически нормальной, на параметрическое семейство $\mathcal{F}$ необходимо наложить более сильные условия. Обозначим $S(x,\theta) = \ln(1-F_\theta(x))$. Легко видеть, что функция $S(x,\theta)$ дифференцируема по θ тогда и только тогда, когда $F_\theta(x)$ дифференцируема по θ. Обозначим также

$$I(q,\theta) = \frac{1}{1-F_\theta(q)}\int_q^\infty \frac{\partial S(x,\theta)}{\partial\theta} dF_\theta(x) - \frac{\partial S(q,\theta)}{\partial\theta}.$$

Рассмотрим следующие условия регулярности.

A1 Функция $\frac{\partial S(x,\theta)}{\partial\theta}$ непрерывна по паре переменных (x,θ) при $x > x_0$;

A2 Для всех $\theta_0 \in \Theta$ существует $x_1(\theta_0)$ такое, что функция $\frac{\partial S(x,\theta)}{\partial\theta}$ монотонна по θ в некоторой окрестности θ_0 при $x > x_1(\theta_0)$.

A3 Для всех $\theta_0 \in \Theta$ существует $x_2(\theta_0)$ такое, что выполнено $|I(x,\theta_0)| < \infty$ при $x > x_2(\theta_0)$.

В следующей теореме установлены условия асимптотической нормальности оценки (4.4).

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия* **A1-A3**. *Тогда в предположениях Теоремы 4.1,*

$$\sqrt{k}I(X_{(n-k)},\theta^*_{k,n})(\theta^*_{k,n}-\theta_0)\xrightarrow{d_{\theta_0}}\xi\sim N(0,1)$$

для всех $\theta_0\in\Theta$.

Доказательство теоремы 4.3. Из (4.4) имеем $\sqrt{k}(R_{k,n}(\widehat{\theta}_{k,n})-1)=0$. Обозначим

$$\tau=\sqrt{k}I(X_{(n-k)},\theta_0)(\widehat{\theta}_{k,n}-\theta_0)$$

разложим выражение $\sqrt{k}(R_{k,n}(\widehat{\theta}_{k,n})-1)$ в ряд Тейлора в точке θ_0 с остаточным членом в форме Лагранжа (ясно, что равенство будет верно P_{θ_0}-почти наверное)

$$0=\sqrt{k}(R_{k,n}(\widehat{\theta}_{k,n})-1)=\sqrt{k}(R_{k,n}(\theta_0)-1)+\frac{\tau}{I(X_{(n-k)},\theta_0)}\frac{\partial}{\partial\theta}R_{k,n}(\widetilde{\theta})\quad(4.6)$$

где $\widetilde{\theta}$ лежит между θ_0 и $\widehat{\theta}_{k,n}$. Из теоремы 3.9 следует, что в условиях теоремы

$$\sqrt{k}(R_{k,n}(\theta_0)-1)\xrightarrow{d_{\theta_0}}N(0,1)\qquad(4.7)$$

и, кроме того, что распределение статистики $R_{k,n}(\theta_0)$ не зависит от значения $X_{(n-k)}$.

Рассмотрим поведение случайной величины $\tau(I(X_{(n-k)},\theta_0))^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta}R_{k,n}(\widetilde{\theta})$ при условии $X_{(n-k)}=q$. Заметим, что если (ξ_n) – последовательность случайных величин такая, что $\xi_n\to C$ почти наверное при $n\to\infty$, $C\in\mathbb{R}$, то из критерия сходимости почти наверное следует, что для всех $\varepsilon>0$ существует последовательность положительных чисел (c_n), $c_n\to 0$ при $n\to\infty$, такая что для некоторого $n=n(\varepsilon)$ выполнено

$$\mathsf{P}(\exists l>n:\ |\xi_l-C|>c_l)<\varepsilon.\qquad(4.8)$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$. Поскольку $\widetilde{\theta}$ лежит между θ_0 и $\widehat{\theta}_{k,n}$, то $\widetilde{\theta}\to\theta_0$ P_{θ_0}-почти наверное в предположениях теоремы. Используя (4.8) и монотонность функции $\frac{\partial S(x,\theta)}{\partial\theta}$ (без ограничения общности предположим,

что $\frac{\partial S(x,\theta)}{\partial\theta}$ монотонно возрастает по θ), мы имеем с вероятностью $1-\varepsilon$ при $n > n(\varepsilon)$,

$$\frac{1}{k}\sum_{i=n-k+1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}S(X_{(i)},\theta_0-c_n)-\frac{\partial}{\partial\theta}S(X_{(n-k)},\theta_0+c_n)\le\frac{\partial}{\partial\theta}R_{k,n}(\widetilde{\theta})\le$$
$$\frac{1}{k}\sum_{i=n-k+1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}S(X_{(i)},\theta_0+c_n)-\frac{\partial}{\partial\theta}S(X_{(n-k)},\theta_0-c_n) \quad (4.9)$$

Из леммы 3.5 следует, что совместное распределение вектора порядковых статистик $(X_{(i)})_{i=n-k+1}^{n}$ при условии $X_{(n-k)}=q$ совпадает с совместным распределением вектора порядковых статистик $(X^*_{(j)})_{j=1}^{k}$ последовательности н.о.р. случайных величин $(X_i^*)_{j=1}^{k}$ с функцией распределения

$$F_q(x)=\frac{F_{\theta_0}(x)-F_{\theta_0}(q)}{1-F_{\theta_0}(q)},\quad q<x.$$

При условии $X_{(n-k)}=q$ имеем

$$\frac{1}{k}\sum_{i=n-k+1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}S(X_{(i)},\theta_0-c_n)-\frac{\partial}{\partial\theta}S(q,\theta_0+c_n)\overset{d_{\theta_0}}{=}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial\theta}S(X^*_{(j)},\theta_0-c_n)-$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}S(q,\theta_0+c_n)=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial\theta}S(X_j^*,\theta_0-c_n)-\frac{\partial}{\partial\theta}S(q,\theta_0+c_n).$$

По закону больших чисел,

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial\theta}S(X_j^*,\theta_0-c_n)-\frac{1}{1-F_{\theta_0}(q)}\int_q^\infty\frac{\partial}{\partial\theta}S(x,\theta_0-c_n)dF_{\theta_0}(x)\xrightarrow{P_{\theta_0}}0.$$

Следовательно, мы получаем

$$\frac{1}{I(q,\theta_0)}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial\theta}S(X_j^*,\theta_0-c_n)-\frac{\partial}{\partial\theta}S(q,\theta_0+c_n)\right)\xrightarrow{P_{\theta_0}}\frac{I(q,\theta_0)}{I(q,\theta_0)}=1.$$

Аналогично мы находим, что что выражение в правой части соотношения (4.9) при условии $X_{(n-k)}=q$ стремится к 1 по вероятности.

Поскольку значение ε произвольно, то при условии $X_{(n-k)} = q$ верно $\frac{\partial}{\partial\theta} R_{k,n}(\widetilde{\theta}) \xrightarrow{P_{\theta_0}} 1$. Отсюда, из (4.6) и (4.7) мы имеем

$$\tau = \sqrt{k} I(q, \theta_0)(\widehat{\theta}_{k,n} - \theta_0) \xrightarrow{d_{\theta_0}} N(0, 1).$$

Используя условия регулярности **A1**, **A3** и лемму Слуцкого, при условии $X_{(n-k)} = q$ имеем

$$\sqrt{k} I(q, \widehat{\theta}_{k,n})(\widehat{\theta}_{k,n} - \theta_0) \xrightarrow{d_{\theta_0}} N(0, 1).$$

Заметим, что последнее соотношение верно при любом значении q, откуда следует утверждение теоремы. □

4.2 Оценивание параметров сдвига и масштаба хвоста распределения.

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – н.о.р. случайные величины с непрерывной функцией распределения F с бесконечной правой граничной точкой. Будем говорить, что семейство одномерных функций распределения $\{F_a, a \in A\}$ обладает *параметром сдвига*, если $\forall a \in A, \forall x \in \mathbb{R}\ F_a(x) = F_0(x - a)$. Семейство функций распределения $\{F_b, b \in B\}$ обладает *параметром масштаба*, если $\forall b \in B, \forall x \in \mathbb{R}\ F_b(x) = F_1(x/b)$.

В настоящем разделе рассматривается задача оценивания параметров сдвига и масштаба хвоста функции распределения F по максимальным членам вариационного ряда выборки X. Указанная задача для распределений из области максимального притяжения Гумбеля рассматривается впервые. Состоятельность и асимптотическая нормальность оценки параметра сдвига доказаны для распределений из области максимального притяжения Гумбеля. Для параметра масштаба указанные свойства установлены для всех распределений из областей максимального притяжения Гумбеля и Фреше.

Как и ранее, под $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ имеем в виду вариационный ряд случайных величин $(X_1, \ldots, X_n)$. Предположим,

что функция распределения F имеет третью производную и дважды непрерывно дифференцируема.

Пусть $F \in \mathrm{MDA}(G_\gamma)$, в этом случае [89], с учетом существования у нее второй производной, F удовлетворяет условию фон Мизеса

$$\lim_{t \to x_F^*} \frac{(1 - F(t))F''(t)}{(F'(t))^2} = -\gamma - 1, \tag{4.10}$$

см. также раздел 3.5. Более того, известно, что если функция распределения F удовлетворяет условию фон Мизеса с параметром γ, то $F \in \mathrm{MDA}(G_\gamma)$, см. подробнее [89].

Далее, будем считать, что функция распределения F принадлежит семейству распределений $\{F_{a,b}(x), a \in \mathbb{R}, b > 0\}$, где a и b – параметры сдвига и масштаба соответственно. Т.е. существуют такие a_0 и b_0, что

$$F\left(\frac{x - a}{b}\right) = F_{0,1}(x).$$

В дальнейшем вместо $F_{0,1}(x)$ пишем $F_0(x)$. Легко видеть, что F_0 удовлетворяет условию фон Мизеса с тем же значением параметра γ, что и F.

Основные результаты.

Введем $(Y_1, \ldots, Y_n)$ – последовательность н.о.р. случайных величин с функцией распределения F_0. Очевидно, $\forall l \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено $X_l \stackrel{d}{=} bY_l + a$. Рассмотрим случай $b = 1$. Легко видеть, что при условии $E|X_1| < +\infty$ оценка

$$\overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

является несмещенной и состоятельной оценкой параметра сдвига a. По аналогии с предыдущей оценкой, рассмотрим

$$\hat{a} = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} X_{(n-i)} - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} Y_{(n-i)}.$$

Как показано в следующей теореме, в некоторых условиях на последовательность $k = k(n)$ и принадлежности семейства

распределений $\{F_{a,b}(x), a \in \mathbb{R}, b > 0\}$ области притяжения Гумбеля оценка является состоятельной оценкой параметра a.

Теорема 4.4. *Предположим, что функция распределения F_0 удовлетворяет условию фон Мизеса* (4.10) *при $\gamma = 0$. Пусть последовательность $k = k(n)$ удовлетворяет условиям*

$$k \to +\infty, \ \frac{k}{n} \to 0 \quad \text{при } n \to +\infty, \tag{4.11}$$

и при этом существует такое $M > 0$, что

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1 - F_0(M\sqrt{k})}{k/n} \le 1.$$

Тогда оценка $\hat{a}$ является состоятельной оценкой параметра a.

Теперь рассмотрим случай $a = 0$, тогда оценка

$$\hat{b} = \exp\left\{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\ln X_{(n-i)}}{k} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\ln Y(n-i)}{k}\right\}$$

при некоторых условиях является состоятельной оценкой параметра масштаба b, как показано в следующей теореме.

Теорема 4.5. *Пусть функция распределения F_0 удовлетворяет условию фон Мизеса* (4.10) *для $\gamma \ge 0$. Пусть последовательность $k = k(n)$ удовлетворяет условиям* (4.11)*, причем существует такое $M > 1$, что*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1 - F_0(\exp\{M\sqrt{k}\})}{k/n} \le 1.$$

Тогда оценка $\hat{b}$ является состоятельной оценкой параметра b.

Обозначим через

$$U(x) = \inf_t \left\{t : \ \frac{1}{1 - F_0(t)} = x\right\}$$

квантильную функцию F_0. Функция $U(x)$ играет огромную роль в стохастической теории экстремумов, в частности, в задачах, связанных

со скоростью сходимости в предельной теореме Гнеденко, [108]. Для того, что введенные нами оценки параметров сдвига и масштаба были асимптотически нормальными, необходимо потребовать выполнения более жестких условий на функцию распределения F_0. Обозначим $T(x) = -\ln(1 - F_0(x))$. Наложим на функцию $T(x)$ следующие условия регулярности.

(R1) $T(x) \in C^{(3)}$ $\forall x > x_0$, причём $T(x)$, $T'(x)$ и $T''(x)$ монотонны на бесконечности и имеют там предел (возможно, бесконечный). Дополнительно, для $m \in \{1, 2, 3\}$ существуют (возможно, бесконечные) пределы

$$a_m := \lim_{x \to +\infty} \frac{T'(x)}{x^m}.$$

(R2) Выполнено

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln |(T(\sqrt{x}))''|}{T(\sqrt{x})} = 0.$$

Для таких функций распределений F_0 верна следующая теорема.

Теорема 4.6. *Пусть для функции распределения F_0 выполнено условие фон Мизеса* (4.10) *при $\gamma = 0$, а последовательность $k = k(n)$ удовлетворяет условиям* (4.11). *Если для функции T выполнены условия* **(R1)**, **(R2)** *и $\sqrt{k}T'(U(n/k)) \to +\infty$ при выполнении* (4.11), *то*

$$\sqrt{k}T'(U(n/k))(\hat{a} - a) \xrightarrow{d} N(0, 4). \tag{4.12}$$

Введем функцию $Z(x) = -\ln(1 - F_0(e^x))$. В следующей теореме указаны условия, в которых оценка $\hat{b}$ является асимптотически нормальной оценкой параметра масштаба b.

Теорема 4.7. *Пусть для функции распределения F_0 выполнено условие фон Мизеса* (4.10) *при $\gamma \geq 0$, а последовательность $k = k(n)$ удовлетворяет условиям* (4.11). *Если функция $Z(x)$ удовлетворяет условиям регулярности* **(R1)**, **(R2)**, *то*

$$\sqrt{k}Z'(\ln(U(n/k)))(\hat{b} - b) \xrightarrow{d} N(0, 4b^2).$$

Укажем теперь семейства распределений, для которых условия теорем 4.6 и 4.7 будут выполняться.

Пример 4.8. Пусть функция $T(x)$ такова, что $T(x)/x \to +\infty$ при $x \to +\infty$ (т.е. хвост функции распределения F_0 легче, чем у экспоненциального закона) и $T(x)$ трижды дифференцируема. В этом случае условия теоремы 4.6 выполнены.

Действительно, поскольку $T'(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то $\sqrt{k}T'(U(n/k)) \to +\infty$ при $n \to +\infty$.

Пример 4.9. Пусть функция $T(x)$ такова, что $T(x)/\ln x \to +\infty$ при $x \to +\infty$ и $\alpha \in (0,1)$ и $T(x)$ трижды дифференцируема. В этом случае условия теоремы 4.6 выполнены для последовательности $k = n^\beta$ для любого $\beta \in (0,1)$.

Далее, легко видеть, что оценка $\hat{b}$ параметра масштаба b получена как оценка параметра сдвига функции распределения $F(e^x)$, поэтому приведенные примеры легко переносятся на случай оценивания параметра масштаба. В частности, мы получаем, что если F трижды дифференцируема, то оценка $\hat{b}$ является асимптотически нормальной оценкой параметра масштаба b для всех распределений из области максимального притяжения Гумбеля с $x_F^* = +\infty$, удовлетворяющих условиям **(R1), (R2)**, при произвольном поведении последовательности $k(n)$, как следует из примера 4.8. Кроме того, из этого примера следует, что

$$\sqrt{k}Z'(\ln(U(n/k))) \to +\infty \tag{4.13}$$

при выполнении (4.11).

Доказательства.

Прежде всего заметим, что из условия фон Мизеса (4.10) вытекает

$$\lim_{t\to+\infty} -T''(t)/(T'(t))^2 = -\gamma.$$

При доказательстве теорем текущего раздела нам, помимо лемм 3.5, 3.6 и утверждения 3.8, понадобится следующий результат.

Лемма 4.10. *Пусть для любого x из множества точек непрерывности некоторой функции распределения F ($C(F)$) и для любого q выполнено следующее соотношение*

$$F_n(x,q) := \mathsf{P}(\eta_n \le x | \xi_n = q) \to F(x),\ n \to +\infty,$$

где $\{\eta_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{\xi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательности случайных величин, причём $\xi_n \uparrow x^*$ почти наверное при $n \to \infty$. Тогда $\forall x \in C(F)$ $\mathsf{P}(\eta_n \le x) \to F(x)$ при $n \to +\infty$.

Данный результат означает, что сходимость по распределению последовательности случайных величин $\{\eta_n\}$ будет сохраняться, если предельная функция распределения не будет зависеть от параметра q.

Доказательство леммы 4.10. По формуле полной вероятности,

$$\mathsf{P}(\eta_n \le x) = \int_{\mathbb{R}} \mathsf{P}(\eta_n \le x \mid \xi_n = q) dF_{\xi_n}(q),$$

где $F_{\xi_n}(q)$ — функция распределения случайной величины ξ_n. По условию, существует такой компакт $[x_0, x^*]$, что $\mathsf{P}(\xi_n \in [x_0, x^*]) \to 1$ при $n \to +\infty$, а на компакте сходимость $\mathsf{P}(\eta_n \le x \mid \xi_n = q)$ к $F(x)$ будет равномерной по q, что и приводит к требуемому утверждению. Заметим, что утверждение доказывается аналогично, если $\{\xi_n\}$ – это последовательность случайных векторов. □

Доказательство теоремы 4.4.

Условное распределение статистики $\hat{a}$ при условии $X_{(n-k)} = q$, $Y_{(n-k)} = r$ будет иметь вид

$$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} X_{(n-i)} - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} Y_{(n-i)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i^* - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_i^*,$$

где (X_i^*) и (Y_i^*) – случайные величины из леммы 3.5. По усиленному закону больших чисел, выражение справа почти наверное стремится к

$\delta := \mathsf{E}X_1^* - \mathsf{E}Y_1^*$. Обозначим через f_0 плотность случайной величины Y_1, через f_a обозначим плотность случайной величины X_1. Имеем,

$$\mathsf{E}X_1^* - \mathsf{E}Y_1^* = \frac{\int_q^{+\infty} x f_0(x-a)dx}{1-F_0(q-a)} - \frac{\int_r^{+\infty} x f_0(x)dx}{1-F_0(r)} =$$

$$\frac{\int_{q-a}^{+\infty}(x+a) f_0(x)dx}{1-F_0(q-a)} - \frac{\int_r^{+\infty} x f_0(x)dx}{1-F_0(r)} = a + \frac{\int_{q-a}^{+\infty} x f_0(x)dx}{1-F_0(q-a)} - \frac{\int_r^{+\infty} x f_0(x)dx}{1-F_0(r)}.$$

Рассмотрим числитель каждой из дробей, с помощью интегрирования по частям имеем

$$\int_r^{+\infty} x f_0(x)dx = -\int_r^{+\infty} x d(1-F_0(x)) =$$

$$x(1-F_0(x))|_r^{+\infty} + \int_r^{+\infty}(1-F_0(x))dx = r(1-F_0(r)) + \int_r^{+\infty}(1-F_0(x))dx.$$

Тогда искомая разность математических ожиданий равняется

$$a + (q-a) - r + \left(\frac{\int_{q-a}^{+\infty}(1-F_0(x))dx}{1-F_0(q-a)} - \frac{\int_r^{+\infty}(1-F_0(x))dx}{1-F_0(r)} \right).$$

Применяя 3.8 и соотношение $U_a(t) = U(t) + a$ к случайным величинам $X_{(n-k)}$ и $Y_{(n-k)}$, имеем

$$\sqrt{k} \cdot \frac{X_{(n-k)} - a - U(\frac{n}{k})}{n/k \cdot U'\left(\frac{n}{k}\right)} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad \sqrt{k} \cdot \frac{Y_{(n-k)} - U(\frac{n}{k})}{n/k \cdot U'\left(\frac{n}{k}\right)} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

при $k \to +\infty$, $k/n \to 0$, $n \to +\infty$.

Применим дельта-метод для функции

$$h(r) = r + \frac{\int_r^{+\infty}(1-F(x))dx}{1-F(r)}$$

и выражений выше. Положим $\alpha = U(\frac{n}{k})$, $b_n = U'(\frac{n}{k})/\sqrt{k}$. Докажем, что в условиях теоремы $h'(r) \to 1$ при $r \to +\infty$. Прежде всего проверим, что для функции $S(x) := -\ln(1-F(x)) = T(x)$ выполнены предположения леммы 3.6.

C1: По критерию принадлежности области максимального притяжения Гумбеля [89], $T(x)/\ln x \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

C3: Покажем, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln T'(x)}{T(x)} = 0.$$

Заметим, что $T(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Поэтому по правилу Лопиталя и условию фон Мизеса (4.10) имеем,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln T'(x)}{T(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-T''(x)}{(T'(x))^2} = 0.$$

Условие **C2** леммы 3.6 также выполнено. Вернемся к доказательству сходимости $h'(r) \to 1$ при $r \to +\infty$. Имеем,

$$h'(r) = 1 - \frac{1-F(r)}{1-F(r)} + \frac{f(r)\int_r^{+\infty}(1-F(x))dx}{(1-F(r))^2}. \tag{4.14}$$

В силу леммы 3.6, находим

$$\int_r^{+\infty}(1-F(x))dx = \frac{(1-F(r))^2}{f(r)} \cdot (1+o(1)). \tag{4.15}$$

Подставляя выражение (4.15) в выражение (4.14), заключаем, что $h'(r) = 1 + o(1)$ при $r \to +\infty$, что и требовалось.

Применяя дельта-метод и (3.8), имеем:

$$\sqrt{k}\frac{h(X_{(n-k)} - a) + h(U(n/k))}{n/k \cdot U'(n/k)} \xrightarrow{d} N(0,1), \tag{4.16}$$

$$\sqrt{k}\frac{h(Y_{(n-k)}) - h(U(n/k))}{n/k \cdot U'(n/k)} \xrightarrow{d} N(0,1) \tag{4.17}$$

при $k \to +\infty$, $k/n \to 0$, $n \to +\infty$. Вычитая из выражения (4.16) выражение (4.17), имеем в силу независимости выборок X и Y

$$\sqrt{k}\frac{h(X_{(n-k)} - a) - h(Y_{(n-k)})}{n/k \cdot U'(n/k)} \xrightarrow{d} N(0,2) \tag{4.18}$$

при $k \to +\infty$, $k/n \to 0$, $n \to +\infty$. С учетом того, что разность математических ожиданий равняется

$$\mathsf{E}(X_1^* - Y_1^*) = a + h(q-a) - h(r), \tag{4.19}$$

получаем предельное распределение при условии $X_{(n-k)}$

$$\sqrt{k}\frac{\mathsf{E}X_1^* - \mathsf{E}Y_1^* - a}{n/k \cdot U'(n/k)} \xrightarrow{d} N(0,2) \tag{4.20}$$

при $k \to +\infty$, $k/n \to 0$, $n \to +\infty$. В итоге, применяя Лемму 4.10 к последовательностям пар случайных величин $X_{(n-k)}$, $Y_{(n-k)}$ (можно применять, так как k является функцией от n) и случайным величинам

$$\eta_{n,k} = \sqrt{k}\frac{\mathsf{E}X_1^* - \mathsf{E}Y_1^* - a}{n/k \cdot U'(n/k)},$$

где разность математических ожиданий является пределом последовательности условных математических ожиданий $\mathsf{E}(\hat{a}|X_{(n-k)}, Y_{(n-k)})$, получаем в условиях (4.11) аналогичное утверждение для $\hat{a}$:

$$\sqrt{k}\frac{\hat{a} - a}{n/k \cdot U'(n/k)} \xrightarrow{d} N(0,2). \tag{4.21}$$

Для завершения доказательства достаточно проверить, что в условиях теоремы

$$\frac{\sqrt{k}}{n/k \cdot U'(n/k)} \to +\infty.$$

Заметим, что по определению функции U, выполнено равенство $1/(1 - F(U(t))) = t$ для всех t, лежащих в некоторой окрестности x_F^*. Преобразуем выражение $n/k \cdot U'(n/k)$,

$$F(U(t)) = 1 - \frac{1}{t},\ f(U(t))U'(t) = \frac{1}{t^2},\ tU'(t) = \frac{1}{t \cdot f(U(t))}.$$

Выясним, при каких условиях на последовательность $k = k(n)$ выполнено

$$\frac{1}{\sqrt{k} \cdot \frac{n}{k} \cdot f\left(U\left(\frac{n}{k}\right)\right)} \to 0.$$

Из условия фон Мизеса вытекает

$$\left(\frac{1 - F(t)}{f(t)}\right)' = \frac{-f(t)f(t) - f'(t)(1 - F(t))}{f(t)^2} = -1 - \frac{f'(t)(1 - F(t))}{f(t)^2} \to 0$$

при $t \to +\infty$. Далее, по известному утверждению [89] для функций распределения $F \in \mathrm{MDA}(\Lambda)$

$$\frac{1-F(t)}{tf(t)} \to 0,\ t \to +\infty,$$

где f – плотность функции распределения F. Тогда имеем,

$$\frac{n}{k} \cdot f\left(U\left(\frac{n}{k}\right)\right) \cdot U\left(\frac{n}{k}\right) \to +\infty,\ n \to +\infty.$$

Тем самым, достаточным условием сходимости является ограниченность выражения $U(n/k)/\sqrt{k}$. Пусть существует такое $M > 0$, что при достаточно больших n, k выполнено $U(n/k)/\sqrt{k} \leq M$. Тогда $1 - F_0(M\sqrt{k}) \leq k/n$, что и завершает доказательство.

Доказательство теоремы 4.5.

Теорема 4.5 представляет собой несложное следствие теоремы 4.4. Как известно [89], если случайная величина X имеет функцию распределения, удовлетворяющую условию фон Мизеса для $\gamma \geq 0$, то случайная величина $\ln X$ имеет функцию распределения, удовлетворяющую условию фон Мизеса для $\gamma = 0$.

Таким образом, переписывая условия теоремы 4.4 терминах функции распределения для логарифмов порядковых статистик, получаем утверждение теоремы 4.5, поскольку $X_{(n-k)} \to +\infty$ п.н. при $n \to +\infty$, $k \to +\infty$, $k/n \to 0$.

Доказательство теоремы 4.6.

Для условных распределений выполнена центральная предельная теорема

$$\sqrt{k}\frac{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i^* - \mathsf{E}X_1^*}{\sqrt{\mathrm{var}\, X_1^*}} \xrightarrow{d} N(0,1),\ k \to +\infty. \tag{4.22}$$

Оценим асимптотику математического ожидания и дисперсии случайной величины X_1^* при условии $X_{(n-k)} = q$. Из доказательства теоремы 4.4

имеем

$$\mathsf{E}X_1^* = a + (q-a) + \frac{\int_{q-a}^{+\infty}(1-F_0(x))dx}{1-F_0(q-a)},\ \mathsf{E}Y_1^* = r + \frac{\int_r^{+\infty}(1-F_0(x))dx}{1-F_0(r)}.$$

Функция $T(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3.6 – действительно, выполнение ее условий установлено при доказательстве теоремы 4.4.

Докажем теперь, что

$$\frac{T'''(x)}{T''(x)T'(x)} \to 0 \text{ при } x \to +\infty.$$

Из условия фон Мизеса следует, что $T''(x)/(T'(x))^2 \to 0$ при $x \to +\infty$. Рассмотрим три случая:

1. $T'(x) \to 0$, $T''(x) \to 0$. По правилу Лопиталя, имеем $\frac{T'''(x)}{T''(x)T'(x)} \to 0$.
2. $T'(x) \to +\infty$, $T''(x) \to +\infty$ — аналогичен первому случаю.
3. $T''(x) \to c$, $T'(x) \to \infty$ для некоторого числа $c \in \mathbb{R}$.

Тем самым, осталось разобрать третий случай. Покажем, что в этом случае верно соотношение $T'''(x)/T''(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Действительно,

$$\frac{T'''(x)}{T''(x)} = \frac{(\ln|T''(x)|)'}{x'}.$$

Если $T''(x)$ не имеет нулевой предел, то тогда предел равен 0, поскольку в этом случае $(\ln|T''(x)|)' \to 0$. Если $T''(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то тогда покажем, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon : \forall x > x_\varepsilon\ \ln|T''(x)|/x < \varepsilon$. Предположим, что $\exists\varepsilon > 0\ \forall x\ \exists x^* > x$: $\ln|T''(x^*)|/x^* \le -\varepsilon$; противоположный случай невозможен из-за наличия нулевого предела у функции $T''(x)$. Тогда $|T''(x)| \le \exp\{-\varepsilon x/2\}$ в окрестности точки x^*, что говорит о конечном пределе функции $T'(x)$.

Применяя лемму 3.6, имеем

$$\frac{\int_r^{+\infty} e^{-T(x)}dx}{e^{-T(r)}} = \frac{1}{T'(r)} \cdot \left(1 - \frac{T''(r)}{(T'(r))^2} + o\left(\frac{T''(r)}{(T'(r))^2}\right)\right), r \to +\infty.$$

В итоге, получаем

$$\mathsf{E}X_1^* = a + (q-a) + \frac{1}{T'(q-a)} - \frac{T''((q-a))}{T'((q-a))^3} + o\left(\frac{T''((q-a))}{T'((q-a))^3}\right), \quad (4.23)$$

$$\mathsf{E}Y_1^* = r + \frac{1}{T'(r)} - \frac{T''(r)}{T'(r)^3} + o\left(\frac{T''(r)}{T'(r)^3}\right), \ r \to +\infty, \ q \to +\infty. \quad (4.24)$$

Для того, чтобы оценить $\operatorname{var} X_1^*$, найдем асимптотику $\mathsf{E}(X_1^*)^2$. Имеем,

$$\mathsf{E}(X_1^*)^2 = \frac{\int_q^{+\infty} x^2 f_a(x)dx}{1-F_a(q)} = a^2 + 2a \cdot \frac{\int_{q-a}^{+\infty} x f_0(x)dx}{1-F_0(q-a)} + \frac{\int_{q-a}^{+\infty} x^2 f_0(x)dx}{1-F_0(q-a)}.$$

Тогда искомая дисперсия будет равняться

$$\begin{aligned}\operatorname{var} X_1^* &= a^2 + 2a \cdot \frac{\int_{q-a}^{+\infty} x f_0(x)dx}{1-F_0(q-a)} + \frac{\int_{q-a}^{+\infty} x^2 f_0(x)dx}{1-F_0(q-a)} - \left(a + \frac{\int_{q-a}^{+\infty} x f_0(x)dx}{1-F_0(q-a)}\right)^2 \\ &= \frac{\int_{q-a}^{+\infty} x^2 f_0(x)dx}{1-F_0(q-a)} - \left(\frac{\int_{q-a}^{+\infty} x f_0(x)dx}{1-F_0(q-a)}\right)^2,\end{aligned}$$

то есть не зависит от параметра a. Интегрируя по частям, получаем

$$\frac{\int_{q-a}^{+\infty} x^2 f_0(x)dx}{1-F_0(q-a)} = \frac{\int_{q-a}^{+\infty} x^2 d(1-F_0(x))}{1-F_0(q-a)} = (q-a)^2 + \frac{\int_{q-a}^{+\infty} 2x(1-F_0(x))dx}{1-F_0(q-a)}. \quad (4.25)$$

Обозначим $W(x) = T(\sqrt{x})$. Тогда выражение (4.25) будет иметь следующий вид

$$\frac{\int_{q-a}^{+\infty} x^2 f_0(x)dx}{1-F_0(q-a)} = (q-a)^2 + \frac{\int_{(q-a)^2}^{+\infty} \exp\{-W(x)\}dx}{\exp\{-W((q-a)^2)\}}.$$

Покажем, что для функции W выполнены условия Леммы 3.6. Заметим, что производные функции W равны

$$W'(x) = \frac{T'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, \ W''(x) = \frac{T''(\sqrt{x})}{4x} - \frac{T'(\sqrt{x})}{4x^{3/2}}.$$

Условие **(C1)**: $W(x)/\ln x \to +\infty$ при $x \to +\infty$ выполнено, поскольку

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{W(x)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{T(x)}{\ln x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{T(x)}{2\ln x} = 0.$$

Условие **(C2)***:* для функции $W'(x^2) = T'(x)/(2x)$ показывается применением правила Лопиталя при условии $\lim_{x\to+\infty} T'(x) = \infty$. Покажем, что $W''(x)$ имеет конечный или бесконечный предел при $x \to +\infty$. Действительно, заметим, что поскольку $T'(x) \to +\infty$, то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{T'(x)}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}\frac{T''(x)}{x^2}.$$

Тем самым, если $W'(x)$ имеет конечный предел, то $W''(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Иначе, заметим, что

$$W''(x^2) = \frac{(T'(x)/(2x))'}{(x^2)'} = \frac{(W'(x^2))'}{(x^2)'}$$

и по правилу Лопиталя, существование предела для $W''(x)$ при $x \to +\infty$ эквивалентно наличию предела $T'(x)/x^3$ при $x \to +\infty$, поскольку $W'(x^2) \to +\infty$ в рассматриваемом случае, а наличие предела функции $T'(x)/x^3$ при $x \to +\infty$ следует из условия **(R1)**.

Условие **(C3.1)***:* Заметим, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|W'(x)|}{W(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|T'(x)| - \ln 2 - \ln x}{T(x)} = 0,$$

из условий **(C1)** и **(C3.1)** леммы 3.6 для функции $T'(x)$.

Условие **(C3.2)***:* следует из условий регулярности **(R1)**, **(R2)**.

Таким образом, условия леммы 3.6 для функции $W(x)$ выполнены, поэтому имеем

$$I(s) := \frac{\int_s^{+\infty} \exp\{-W(x)\}dx}{\exp\{-W(s)\}} = \frac{1}{W'(s)} \cdot \left(1 - \frac{W''(s)}{(W'(s))^2} + o\left(\frac{W''(s)}{(W'(s))^2}\right)\right) \tag{4.26}$$

при $s \to +\infty$, где $s = (q-a)^2$. Преобразуем выражение $W''(s)/(W'(s))^2$

$$H(s) := \frac{W''(s)}{(W'(s))^2} = \frac{T''(\sqrt{s}) - T'(\sqrt{s})/\sqrt{s}}{(T'(\sqrt{s}))^2} = \frac{T''(\sqrt{s})}{(T'(\sqrt{s}))^2} - \frac{1}{\sqrt{s}T'(\sqrt{s})}. \tag{4.27}$$

В итоге, из (4.26) имеем

$$I(s) = \frac{2\sqrt{s}}{T'(\sqrt{s})} \cdot \left(1 - \frac{T''(\sqrt{s})}{(T'(\sqrt{s}))^2} + \frac{1}{\sqrt{s}T'(\sqrt{s})} + o(H(s))\right) = \frac{2(q-a)}{T'(q-a)} -$$

$$\frac{2(q-a)T''(q-a)}{(T'(q-a))^3}+\frac{2}{(T'(q-a))^2}+o\left(H((q-a)^2)\cdot\frac{2(q-a)}{T'(q-a)}\right).$$

Применяя соотношение для оценивания асимптотики интегралов, получаем (оценка о-малых опускается для простоты записи выражения и будет произведена далее),

$$\begin{aligned}\operatorname{var}X_1^*\sim(q-a)^2+\frac{2(q-a)}{T'(q-a)}-\frac{2(q-a)T''(q-a)}{(T'(q-a))^3}+\frac{2}{(T'(q-a))^2}-\\ -\left(q-a+\frac{1}{T'(q-a)}-\frac{T''(q-a)}{(T'(q-a))^3}\right)^2=\\ =\frac{1}{(T'(q-a))^2}-2\frac{T''(q-a)}{(T'(q-a))^4}-\left(\frac{T''(q-a)}{(T'(q-a))^2}\right)^2=\\ =\left(\frac{1}{T'(q-a)}\right)^2\cdot\left[\left(1-\frac{T''(q-a)}{(T'(q-a))^2}\right)^2-\left(\frac{T''(q-a)}{(T'(q-a))^2}\right)^2\right].\end{aligned}$$

Произведем анализ о-малых. Из условия фон Мизеса для области максимального притяжения Гумбеля следует, что значимыми слагаемыми, стоящими под знаком о-малого в математическом ожидании (4.23), являются

$$\frac{(q-a)T''(q-a)}{(T'(q-a))^3},\ \frac{T''(q-a)}{(T'(q-a))^4}.$$

Под знаком о-малого для $I(s)$ таковыми слагаемыми являются

$$\frac{(q-a)T''(q-a)}{(T'(q-a))^3},\ \frac{1}{(T'(q-a))^2}.$$

Однако, по правилу Лопиталя,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1/\ T'(x-a)}{(x-a)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{T''(x-a)}{(T'(x-a))^2}.$$

В итоге, значения функций под знаком о-малого в выражении для $I(s)$ можно оценить как

$$\frac{1}{(T'(q-a))^2}(1+o(1)),x\to+\infty.$$

Поскольку в силу условия фон Мизеса

$$\frac{T''(x-a)}{(T'(x-a))^2}\to 0,\ x\to+\infty,$$

то асимптотика дисперсии X_1^* имеет вид

$$\operatorname{var} X_1^* = \left(\frac{1}{T'(q-a)}\right)^2 \cdot (1+o(1)),\ q \to +\infty. \tag{4.28}$$

Проводя аналогичные рассуждения для выборки (Y_i^*), получаем

$$\operatorname{var} Y_1^* = \left(\frac{1}{T'(r)}\right)^2 \cdot (1+o(1)),\ r \to +\infty. \tag{4.29}$$

Найдем асимпотическую дисперсию оценки. Применим для этого центральную предельную теорему для случайных величин $(X_i^*)_{i=1}^k$ и $(Y_i^*)_{i=1}^k$. Обозначим $M_{X,k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k X_i^*$, $M_{Y,k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k Y_i^*$, получаем

$$\sqrt{k}(M_{X,k} - \mathsf{E}X_1^*) \xrightarrow{d} N(0, \operatorname{var} X_1^*),\ k \to +\infty, \tag{4.30}$$

$$\sqrt{k}(M_{Y,k} - \mathsf{E}Y_1^*) \xrightarrow{d} N(0, \operatorname{var} Y_1^*),\ k \to +\infty. \tag{4.31}$$

Вычитая из соотношения (4.30) соотношение (4.31), имеем

$$\sqrt{k}(M_{X,k} - M_{Y,k} - a) + \sqrt{k}(a - \mathsf{E}X_1^* + \mathsf{E}Y_1^*) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \operatorname{var} X_1^* + \operatorname{var} Y_1^*) \tag{4.32}$$

при $k \to +\infty$. Обозначим $V(X,Y) = \mathsf{E}X_1^* - \mathsf{E}Y_1^* - a$. Тогда предельный закон (4.20) представляется в виде:

$$D(X,Y,n,k) := \sqrt{k}\frac{V(X,Y)}{n/k \cdot U'(n/k)} \xrightarrow{d} N(0,2),\ n \to +\infty.$$

Покажем теперь, что для любых $n > k$ выполнено

$$\frac{1}{T'\left(U\left(\frac{n}{k}\right)\right)} = \frac{n}{k}U'\left(\frac{n}{k}\right). \tag{4.33}$$

Ранее было показано, что

$$\frac{n}{k}U'(n/k) = \frac{1}{f(U(n/k)) \cdot \frac{n}{k}}.$$

Заметим, что $f(U(n/k)) = T'(U(n/k))e^{-T(U(n/k))}$. С другой стороны, $F(U(n/k)) = 1 - k/n = 1 - e^{-T(U(n/k))}$, поэтому $e^{-T(U(n/k))} = k/n$. Следовательно,

$$f\left(U\left(\frac{n}{k}\right)\right) \cdot \frac{n}{k} = T'\left(U\left(\frac{n}{k}\right)\right),$$

что и приводит к доказательству (4.33).

Таким образом, имеем при $n \to +\infty$

$$\sqrt{k}(M_{X,k} - M_{Y,k} - a) - D(X,Y,n,k)\frac{1}{T'(U(n/k))} \xrightarrow{d} N(0, \operatorname{var} X_1^* + \operatorname{var} Y_1^*). \tag{4.34}$$

Покажем, что

$$\frac{T'(X_{(n-k)} - a)}{T'(U(n/k))} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1, \ \frac{T'(Y_{(n-k)})}{T'(U(n/k))} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1, \ n \to +\infty.$$

Применим дельта-метод для функции $g(x) = 1/T'(x)$ и утверждение (3.8) к выборкам X и Y (метод применим, поскольку производная имеет нулевой предел в силу условия фон Мизеса, $g'(x) = -T''(x)/(T'(x))^2$). В итоге, получаем при $n \to +\infty$

$$\sqrt{k}T'\left(U\left(\frac{n}{k}\right)\right) \cdot \frac{(T'(U(n/k)))^2}{T''(U(n/k))}\left(\frac{1}{T'(X_{(n-k)} - a)} - \frac{1}{T'(U(n/k))}\right) \xrightarrow{d} N(0,1),$$

который может быть преобразован к следующему виду

$$\sqrt{k}\frac{(T'(U(n/k)))^2}{T''(U(n/k))}\left(\frac{T'(U(n/k))}{T'(X_{(n-k)} - a)} - 1\right) \xrightarrow{d} N(0,1), \ n \to +\infty.$$

Поскольку верно

$$\sqrt{k}\frac{(T'(U(n/k)))^2}{T''(U(n/k))} \to \infty, \ n \to +\infty,$$

то получаем требуемое. Для дроби $T'(Y(n-k))/T'(U(n/k))$ рассуждения аналогичны. Таким образом, выполнены предельные соотношения

$$\frac{1/T'(U(n/k))}{\sqrt{\operatorname{var} X_1^*}} \to 1, \ \frac{1/T'(U(n/k))}{\sqrt{\operatorname{var} Y_1^*}} \to 1,$$

где n, k удовлетворяют условию теоремы, откуда

$$\frac{1/T'(U(n/k))}{\sqrt{\operatorname{var} X_1^* + \operatorname{var} Y_1^*}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}, \ n \to +\infty.$$

Из леммы Слуцкого и формулы (4.34) имеем

$$\sqrt{k}\frac{M_{X,k}-M_{Y,k}-a}{\sqrt{\operatorname{var} X_1^*+\operatorname{var} Y_1^*}}-\frac{1}{\sqrt{2}}D(X,Y,n,k)\xrightarrow{d}N(0,1),\ n\to+\infty,$$

откуда

$$\sqrt{k}T'(U(n/k))(M_{X,k}-M_{Y,k}-a)\xrightarrow{d}N(0,4),\ n\to+\infty. \tag{4.35}$$

Применяя лемму 4.10 аналогично доказательству теоремы 4.4, получаем

$$\sqrt{k}T'(U(n/k))(\hat{a}-a)\xrightarrow{d}N(0,4),\ n\to+\infty, \tag{4.36}$$

что и доказывает теорему 4.6.

Доказательство теоремы 4.7.

Будем считать, что функция T задана для случайной величины $\ln Y_1$. Тогда с учетом лемм, выполнен предельный закон

$$\sqrt{k}T'(U(n/k))(\ln\hat{b}-\ln b)\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,4),\ n\to+\infty. \tag{4.37}$$

Переход к параметру сдвига осуществляется посредством применения теоремы о наследовании асимптотической нормальности к формуле (4.37) для функции $m(x)=e^x$. Тогда асимптотическая дисперсия станет равной $4(m'(\ln b))^2=4b^2$, откуда

$$\sqrt{k}T'(U(n/k))(\hat{b}-b)\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,4b^2), n\to+\infty.$$

5 Приложение: результаты численного моделирования.

5.1 Критерий (3.15).

5.1.1 Различение регулярно меняющихся хвостов и хвостов логарифмического типа.

В данном разделе мы продемонстрируем эффективность критерия (3.15) по сравнению с другими критериями, предложенными в литературе, методами численного моделирования.

Рассмотрим сначала задачу различения распределений с регулярно меняющимися и супертяжелыми (т.е. тяжелее регулярно меняющихся) хвостами. Предложенный в разделе 3.2 критерий не может быть применен к решению данной задачи из-за невозможности выбора разделяющей функции F_0. Однако для более узкой задачи различения распределений с регулярно меняющимися хвостами и распределений логарифмического вида с функцией распределения $F(x) = 1 - (\ln x)^{-\theta}(1+o(1)), \theta > 0$, при $x \to \infty$ предложенный критерий применим. Пусть A_0 – класс распределений логарифмического вида, A_1 – класс распределений с регулярно меняющимися хвостами. Рассмотрим задачу различения гипотез $H_0 : F \in A_0$ и $H_1 : F \in A_1$. В качестве разделяющей функции для критерия (3.15) выберем $F_0(x) = 1 - \exp(-\sqrt{\ln x})$. В таблицах 5.1.1 и 5.1.2 приведены значения вероятностей ошибок I рода и мощности критерия (3.15) и критерия из работы [96] соответственно для распределения лог-Парето с функцией распределения $F_{LP} = (1 - (\ln x)^{-\theta})I(x > e)$ с параметрами $\theta = 1$ и $\theta = 2$, лог-гамма с параметрами (2,1) и плотностью $f_{LG}(x) = x^{-2}\ln x I(x > 1)$, стандартного распределения Коши, распределения Парето с параметром 2 и стандартного логнормального распределения, хотя оно и не является регулярно меняющимся. Отметим большие значения вероятностей ошибки I рода теста из работы [96] на распределении лог-Парето с параметром 2.

n	100	100	200	200	500	1000	5000
k	10	20	20	50	50	50	50
log-Pareto(2)	0.07	0.2	0.06	0.36	0.03	0	0
log-Pareto(1)	0	0	0	0	0	0	0
log-Gamma	0.56	0.78	0.9	0.98	1	1	1
Cauchy	0.62	0.88	0.94	1	1	1	1
Pareto(2)	0.98	1	1	1	1	1	1
LN(0,1)	0.99	1	1	1	1	1	1

Таблица 5.1.1. Вероятности ошибок первого рода и мощности критерия (3.15) на различных распределениях. Количество реализаций $m = 10000$.

n	100	100	200	200	500	1000	5000
k	10	20	20	50	50	50	50
log-Pareto(2)	0.28	0.71	0.49	0.98	0.84	0.6	0.19
log-Pareto(1)	0.06	0.12	0.07	0.3	0.09	0.06	0.04
log-Gamma	0.37	0.58	0.62	0.89	0.94	0.97	0.99
Cauchy	0.51	0.8	0.8	0.99	0.99	1	1
Pareto(2)	0.92	1	1	1	1	1	1
LN(0,1)	0.91	0.98	1	1	1	1	1

Таблица 5.1.2. Вероятности ошибок первого рода и мощности критерия из работы [96] на различных распределениях. Количество реализаций $m = 10000$.

5.1.2 Различение хвостов вейбулловского и логвейбулловского типов.

Важными классами распределений, принадлежащих области максимального притяжения Гумбеля, являются вейбулловский и логвейбулловский классы распределений. Будем говорить, что функция распределения F принадлежит вейбулловскому классу распределений, если существует такое $\theta > 0$, что для всех $\lambda > 0$ выполнено

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 - F(\lambda x))}{\ln(1 - F(x))} = \lambda^{\theta},$$

пишем $F \in \mathcal{W}$. Параметр θ также называют вейбулловским хвостовым индексом. Другая характеризация этого класса распределений следующая

$$1 - F(x) = \exp(-x^{\theta}\ell(x)),$$

где $\ell(x)$ медленно меняется на бесконечности. Вейбулловскому классу распределений принадлежат, в частности, нормальное, экспоненциальное, гамма и другие важные для статистики распределения. Если для некоторой функции распределения F функция распределения $F(e^x)$ принадлежит вейбулловскому классу с $\theta > 1$, то говорят, что F принадлежит лог-вейбулловскому классу распределений, пишем $F \in \mathcal{LW}$.

В работах [55], [77], [100] среди прочих предложены оценки вейбулловского хвостового индекса, см. также раздел 4.2 диссертации, которые можно использовать для построения критериев различения хвостов вейбулловского типа. Однако единственной работой в литературе, в которой рассматривается критерий, различающий хвосты распределений внутри области максимального притяжения Гумбеля, является статья [103]. Это налагает определенные ограничения на выбор гипотезы, которую мы будем проверять в рамках данного моделирования: мы рассмотрим задачу различения хвостов распределений вейбулловского и логвейбулловского типов. Мы включим в рассмотрение как непрерывные, так и дискретные распределения.

Для различения гипотез $H_0^W : F \in \mathcal{W}$ против альтернативы $H_1^W : F \in \mathcal{LW}$ воспользуемся критерием (3.15) с разделяющей функцией распределения, заданной соотношением

$$F_0(x) = 1 - \exp(-\exp(\sqrt{c \ln x})),\ x > 1,\ c > 0, \tag{5.1}$$

с $c = 1.5$, и сравним его свойства со свойствами двух критериев проверки гипотезы H_0^W, предложенных в [103]: критерием типа Льюиса и критерием типа Джексона. Для построения этих критериев Гугебер и Гийю использовали 3 оценки параметра $1/\theta$, где θ – вейбулловский

хвостовой индекс: оценку, впервые введенную в работе [51],

$$\hat{\theta}_0 = \frac{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \ln X_{(n-i+1)} - \ln X_{(n-k)}}{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \ln\left(\ln \frac{n+1}{i}\right) - \ln\left(\ln \frac{n+1}{k+1}\right)},$$

оценку, основанную на статистике Джексона [122], изначально предложенной для построения критерия согласия для экспоненциального распределения,

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \left[\ln\left(\ln \frac{n+1}{i}\right) - \ln\left(\ln \frac{n+1}{k+1}\right)\right] \left[\ln X_{(n-i+1)} - \ln X_{(n-k)}\right]}{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \left[\ln\left(\ln \frac{n+1}{i}\right) - \ln\left(\ln \frac{n+1}{k+1}\right)\right]^2},$$

и оценку, основанную на статистике Льюиса [139], предложенной с той же целью, что и статистика Джексона,

$$\hat{\theta}_2 = \frac{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{k+1} [\ln X_{(n-i+1)} - \ln X_{(n-k)}]}{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{k+1} \left[\ln\left(\ln \frac{n+1}{i}\right) - \ln\left(\ln \frac{n+1}{k+1}\right)\right]}.$$

Критерии проверки гипотезы H_0^W

$$\text{если } 2\sqrt{k}\left|\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_0} - 1\right| > u_{1-\alpha/2}, \text{ то отвергнуть } H_0^W \tag{5.2}$$

(будем называть его критерием типа Джексона) и

$$\text{если } \sqrt{3k}\left|\frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_0} - 1\right| > u_{1-\alpha/2}, \text{ то отвергнуть } H_0^W \tag{5.3}$$

(назовем его критерием типа Льюиса) асимптотически имеют уровень значимости α и являются состоятельными на альтернативе H_1' : $F \notin \mathcal{W}$ при некоторых предположениях о функции распределения и последовательности k.

Для сравнения приведенных критериев изучим их поведение на различных распределениях, набор которых во многом совпадает с распределениями, рассмотренными в [103].

- Распределение Вейбулла $W(\theta, c)$ с $F(x) = 1 - \exp(-(x/c)^\theta)$, $x > 0$, $\theta, c > 0$. Выберем $(\theta, c) = (3, 0.5),\ (0.5, 5)$.

- Распределение модуля нормальной случайной величины $|N(\mu, \sigma^2)|$, выберем $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$.

- Гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \lambda)$, для моделирования выберем $(\alpha, \lambda) = (4, 1)$.

- Модифицированное распределение Вейбулла $MW(\theta, c)$, определенное как распределение случайной величины $Y = X \ln X$, где $X \sim W(\theta, c)$, выберем $\theta = c = 1$.

- Дискретное экспоненциальное распределение $ED(\theta)$ с вероятностями $p_k = P(X = k) = e^{-\theta k}(e^{\theta} - 1)$, $k \in \mathbb{N}$; выберем $\theta = 1$.

- Логнормальное распределение $LN(\mu, \sigma)$ с плотностью $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $x > 0$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$. Будем рассматривать $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$.

- Логвейбулловское распределение $LW(\theta, c)$ с функцией распределения $F(x) = 1 - \exp(-(\ln(x/c))^{\theta})$, $x > c$, $\theta, c > 0$, положим $(\theta, c) = (1.5, 1)$.

- Обобщенное распределение Парето $GPD(\alpha, \sigma)$ с $F(x) = 1 - (1 + x/\sigma)^{-\alpha}$, $x > 0$, $\alpha, \sigma > 0$. Для моделирования воспользуемся парами значений параметров $(\alpha, \sigma) = (1, 1), (2, 1), (3, 1/3)$, далее эти распределения обозначены как P_1, P_2 и P_3 соответственно.

- Квадратичное дискретное распределение Q, $p_k = \frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Первые шесть распределений принадлежат вейбулловскому классу распределений, тогда как последние шесть являются распределениями логвейбулловского типа.

Ниже приведены графики эмпирических уровней значимости (для первых шести распределений) и эмпирических мощностей (для последних шести распределений) трех рассматриваемых в данном разделе критериев в зависимости от k для $n = 5000$ и $k =$

$20, 40, \ldots, 2000$, построенные по $m = 500$ выборкам. Результаты моделирования работы критериев типа Льюиса и Джексона согласуются с соответствующими результатами, приведенными в [103]. Исходя из полученных графиков, можно сделать следующие выводы:

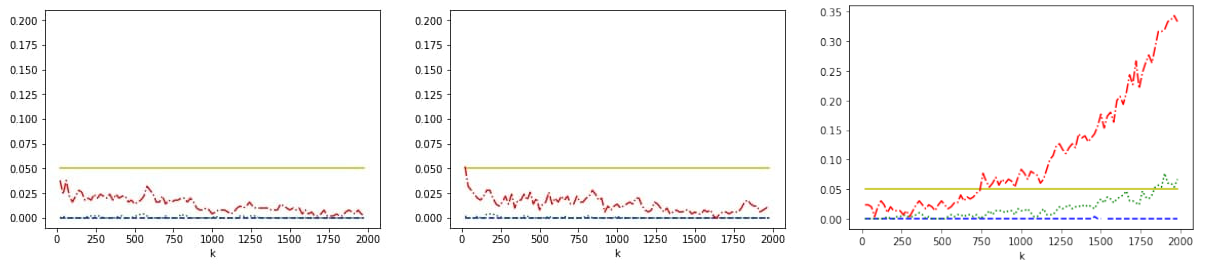
1. предложенный критерий показывает наилучшее качество среди критериев, избранных для сравнения, исключением является распределение $MW(1, 1)$, на котором все три критерия ведут себя неадекватно;

2. использованные для сравнения критерии достаточно хорошо ведут себя на альтернативной гипотезе;

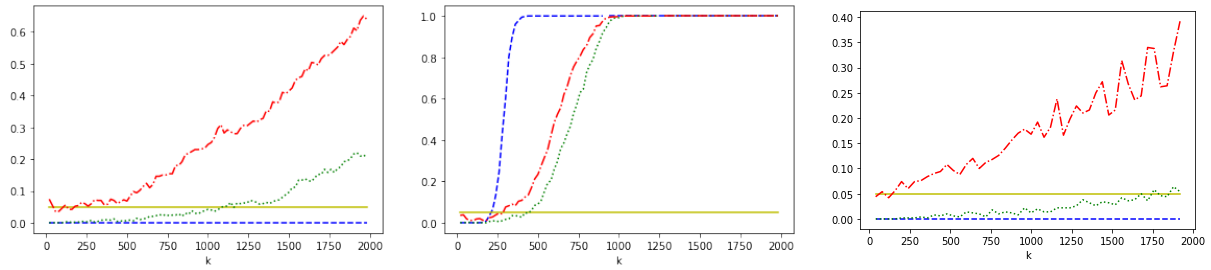
3. эмпирическая вероятность ошибки I рода критерия типа Льюиса часто превышает заявленный уровень значимости, поэтому данным критерием рекомендуется пользоваться лишь при малом значении отношения k/n;

4. приведенные критерии не являются достаточно мощными при малых значениях отношения k/n.

Исследователей, применяющих результаты статистики экстремумов на практике, неизменно волнует вопрос выбора параметра k. К сожалению, на настоящий момент не предложено алгоритма, позволяющего выбрать данный параметр в задачах проверки гипотез о хвостах распределений оптимально в каком-либо смысле. Классический для теории экстремумов эмпирический метод выбора k из промежутка стабильности статистики также не может быть использован, так как статистики критериев проверки гипотез о хвостах распределений, как правило, не имеют четко выраженной тенденции в своем поведении при росте k, общей для всех распределений. Таким образом, на настоящий момент данный вопрос остается открытым.



$W(3, 0.5)$ $W(0.5, 5)$ $|N(0, 1)|$



$\Gamma(4, 1)$ $MW(1, 1)$ $ED(1)$

Рис. 1: Значения эмпирических вероятностей ошибки I рода критериев (0.14) (штриховая линия), типа Джексона (пунктирная линия) и типа Льюиса (штрихпунктирная линия) для различных распределений, уровень значимости $\alpha = 0.05$ отмечен сплошной линией. Количество реализаций $m = 500$.

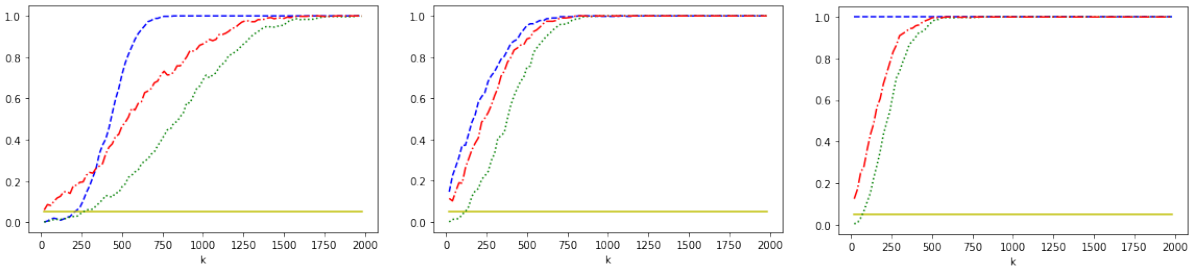
5.2 Оценка (4.4).

В данном разделе нас будет интересовать качество оценивания вейбулловского хвостового индекса с помощью метода, предложенного в разделе 4.1 по сравнению с двумя другими его оценками, предложенными в литературе. Также мы изучим качество нашего метода при применении его для оценивания логвейбулловского индекса.

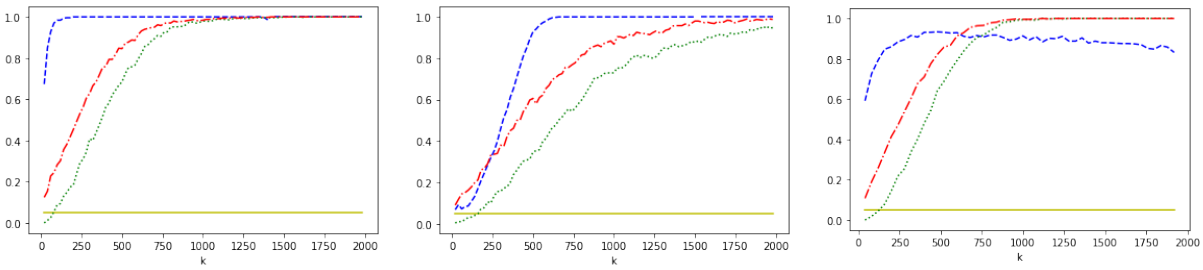
В работе [51] была предложена следующая оценка вейбулловского хвостового индекса

$$\widehat{\theta}^{(1)} = \frac{X_{(n-k+1)}}{\ln(n/k)} \Bigg/ \sum_{i=1}^{k-1} (X_{(n-i+1)} - X_{(n-k+1)}) \, .$$

Также рассмотрим другую оценку вейбулловского хвостового индекса,



$LN(0,1)$ $LW(1.5,1)$ P_1



P_2 P_3 Q

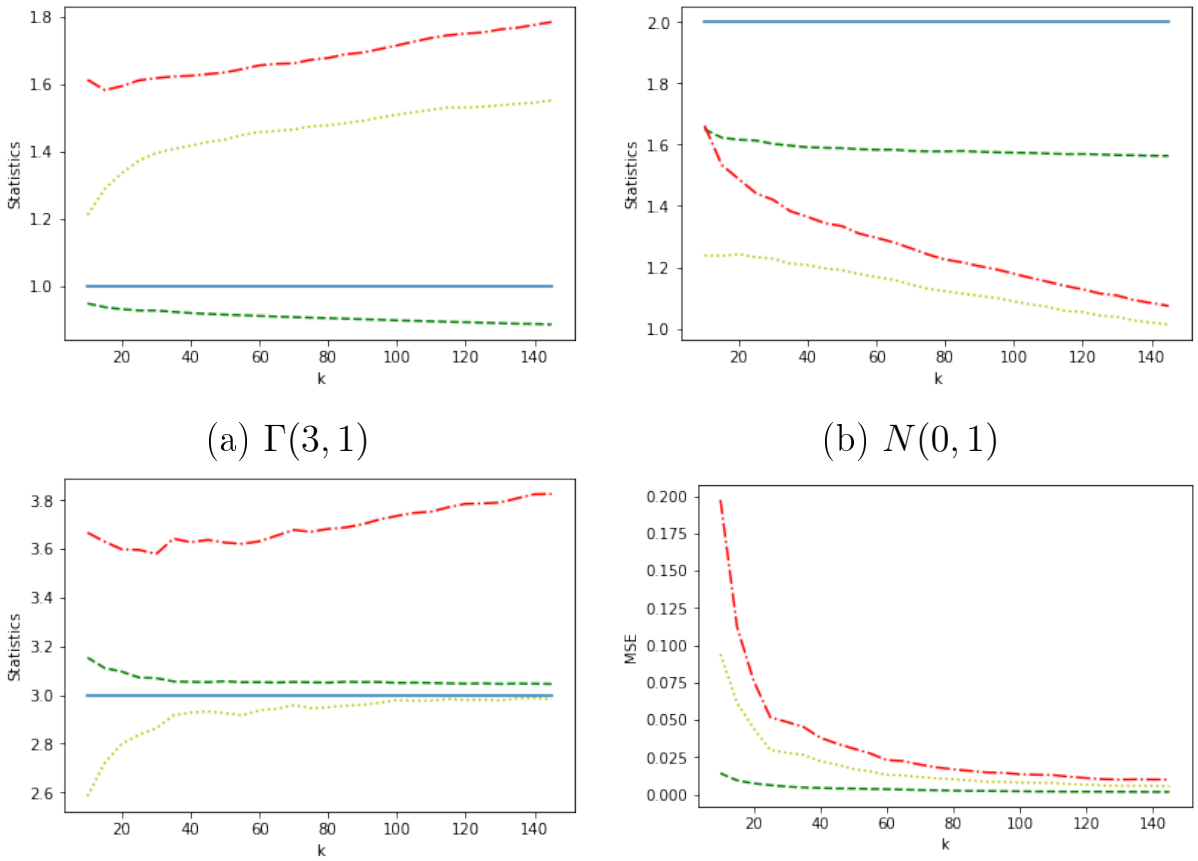
Рис. 2: Значения эмпирических мощностей критериев (0.14) (штриховая линия), типа Джексона (пунктирная линия) и типа Льюиса (штрихпунктирная линия) для различных распределений, уровень значимости $\alpha = 0.05$ отмечен сплошной линией. Количество реализаций $m = 500$.

предложенную в работе [101],

$$\widehat{\theta}^{(2)} = \sum_{i=1}^{k-1} (\ln_2(n/i) - \ln_2(n/k)) \Big/ \sum_{i=1}^{k-1} (\ln X_{(n-i+1)} - \ln X_{(n-k+1)}) \,,$$

где $\ln_2(x) = \ln(\ln x), x > 1$. Последняя оценка, как легко видеть, является нормализацией известной оценки Хилла индекса экстремального значения γ при $\gamma > 0$, [115]. Мы сравним качество работы оценок $\widehat{\theta}^{(1)}$, $\widehat{\theta}^{(2)}$ and $\widehat{\theta}^{(0)} = \widehat{\theta}_{k,n}$, см. (4.4) (для предложенной нами оценки выберем $F_\theta(x) = 1 - \exp(-x^\theta)$, $x > 0$) на четырех распределениях: $Exp(1)$, $\Gamma(3,1)$, $N(0,1)$ и распределении Вейбулла $W(3)$ с функцией распределения $F(x) = 1 - \exp(-x^3)$, $x > 0$. В каждом случае мы берем $m = 300$ выборок $(\mathbf{X}_i)_{i=1}^m$ размера $n = 1000$. Для каждой выборки $\mathbf{X}_i$ значения всех трех оценок $\widehat{\theta}_i^{(0)}$, $\widehat{\theta}_i^{(1)}$ и $\widehat{\theta}_i^{(2)}$ считаются для $k = 5, 10, \ldots, 150$. Наконец, мы наносим точки $\left(k, \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \widehat{\theta}_i^{(j)}\right)$, $j = 0, 1, 2$ на графики для выборок из распределений $\Gamma(3,1)$, $N(0,1)$ and $W(3)$, а для выборок из экспоненциального распределения

рисуем графики эмпирического среднеквадратичного отклонения оценок $\left(k, \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\widehat{\theta}_i^{(j)} - \theta)^2\right)$, $j = 0, 1, 2$.



(a) $\Gamma(3, 1)$ (b) $N(0, 1)$

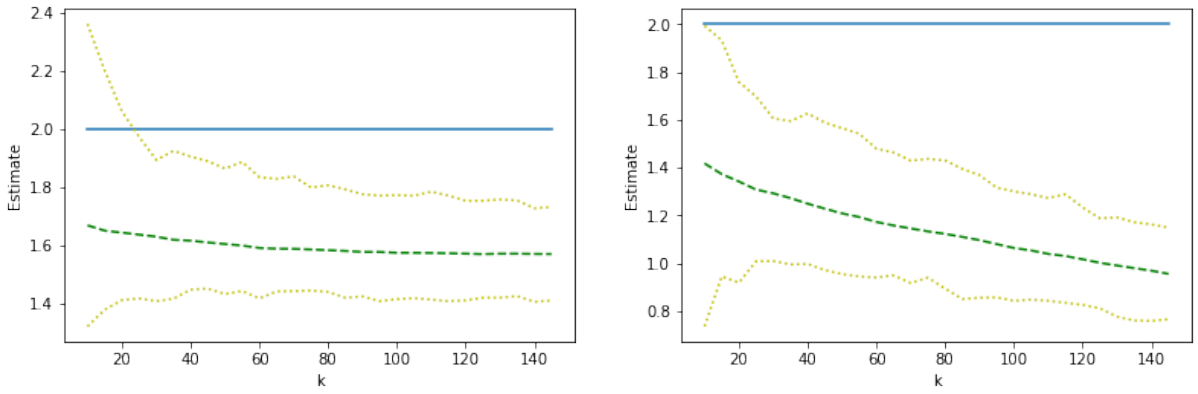
(c) $W(3)$ (d) $Exp(1)$

Рис. 3: Сравнение оценок $\hat{\theta}^{(j)}$, $j = 0, 1, 2$ на различных распределениях. Сплошная линия: истинное значение параметра, штриховая линия: $\hat{\theta}^{(0)}$, штрих-пунктирная линия: $\hat{\theta}^{(1)}$, пунктирная линия: $\hat{\theta}^{(2)}$.

Результаты представлены на рисунке 3. На нем видно, что во всех случаях, которые были рассмотрены при моделировании, оценка $\widehat{\theta}^{(0)}$ лучше остальных. Также можно отметить, что сравниваемые оценки показали не самое лучшее качество на выборках из стандартного нормального распределения. Результаты численного моделирования, приведенные выше, соответствуют результатам, полученным в работе [101].

Изучим теперь качество оценивания логвейбулловского индекса оценкой $\widehat{\theta}_{k,n}$ на двух классах распределений логвейбулловского типа:

$\mathbb{F}^0 = \{F^0_\theta, \theta > 0\}$ с $F^0_\theta(x) = 1 - \exp(-(\ln x)^\theta)$, $x > 1$, и $\mathbb{F}^1 = \{F^1_\theta, \theta > 1\}$ с $F^1_\theta(x) = 1 - x^{-1}\exp(-(\ln x)^\theta)$, $x > 1$. В обоих случаях выборки сделаны из стандартного логнормального распределения. Легко видеть, что логнормальное распределение не принадлежит ни одному из рассматриваемых классов. Как и ранее, мы строим эмпирическое среднее значений оценок, посчитанное по $m = 300$ выборкам размера $n = 1000$ для $k = 5, 10, \ldots, 150$.



(a) $\mathbb{F}^0$ (b) $\mathbb{F}^1$

Рис. 4: Сравнение качества работы оценки $\hat{\theta}_{k,n}$, построенной по классам $\mathbb{F}^0$ и $\mathbb{F}^1$. Сплошная линия: истинное значение, штриховая линия: $\hat{\theta}_{n,k}$, пунктирные линии: эмпирический 95% доверительный интервал.

Результаты численного моделирования оценок логвейбулловского хвостового индекса представлены на рисунке 4. Можно видеть, что выбор класса хвостов распределений существенно влияет на качество работы предложенного метода в задаче оценивания логвейбулловского хвостового индекса.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Родионов И.В. Критерий различения хвостов распределений типа Вейбулла. *Теория вероятностей и ее применения*, **63(2)** (2018), 402–413.

[2] Родионов И.В. Различение близких гипотез о хвостах распределений по максимальным членам вариационного ряда. *Теория вероятностей и ее применения*, **63 (3)** (2018), 447–467.

[3] Родионов И.В. О различении классов хвостов распределений. *Проблемы передачи информации*, **54(2)** (2018), 29–44.

[4] Жуковский М.Е., Родионов И.В. Распределение максимальных k-степеней биномиального случайного графа. *Доклады Академии наук*, **483(5)** (2018), 485–487.

[5] Питербарг В.И., Родионов И.В. Большие выбросы процесса Бесселя и других процессов бесселевского типа. *Доклады Академии наук*, **487(3)** (2019), 238–241.

[6] Родионов И.В. О параметрическом оценивании хвоста распределения. *Доклады Академии наук*, **488(4)** (2019), 356–359.

[7] Rodionov I.V. On Estimation of Weibull-Tail and Log-Weibull-tail Distributions for Modeling End-to-end Delay // *In: Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2019. Communications in Computer and Information Science*, **1141** (2019), 302–314.

[8] Piterbarg V.I., Rodionov I.V. High excursions of Bessel and related random processes. *Stochastic Processes and their Applications*, **130** (2020), 4859-4872.

[9] Markovich N.M., Rodionov I.V. Maxima and sums of non-stationary random length sequences. *Extremes*, **23** (2020), 451-464.

[10] Жан Р., Жуковский М.Е., Исаев М.И., Родионов И.В. Стохастическая теория экстремумов для схемы серий зависимых

случайных величин. *Успехи математических наук*, **75(5)** (2020), 193–194.

[11] Ахтямов П.И., Родионов И.В. Об оценке параметров сдвига и масштаба хвостов распределений. *Фундаментальная и прикладная математика*, **23(1)** (2020), 25–49.

[12] Rodionov I.V. On parametric estimation of distribution tails. *In: Proceedings of 4th ISNPS, Salerno, Italy, 2018. Springer International Publishing Switzerland, Michele La Rocca, Brunero Liseo, Luigi Salmaso, (Eds.) Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, **339** (2020), 445-455.

[13] Кантонистова Е.О., Родионов И.В. Об аналогах классических критериев согласия для хвостов распределений. *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, **496(1)** (2021), 44-47.

[14] Kobelkov S.G., Piterbarg V.I., Rodionov I.V. Correction to: On maximum of gaussian random fields having unique maximum point of its variance. *Extremes*, **24(1)** (2021), 85-90.

[15] Jakubowski A., Rodionov I., Soja-Kukieła N. Directional phantom distribution functions for stationary random fields. *Bernoulli*, **27(2)** (2021), 1028-1056.

[16] Mikosch T., Rodionov I. Precise large deviations for dependent subexponential variables. *Bernoulli*, **27(2)** (2021), 1319-1347.

[17] Rodionov I.V. On threshold selection problem for extremal index estimation. *In: Proceedings of 5th ICSM, Moscow, Russia, 2020. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2021, in press.

[18] Когут Н.С., Родионов И.В. О критериях различения хвостов распределений. *Теория вероятностей и ее применения*, 2021, в печати. http://mi.mathnet.ru/tvp5375

Список литературы

[1] Ахтямов П.И., Родионов И.В. Об оценке параметров сдвига и масштаба хвостов распределений. *ФПМ*, **23(1)** (2020), 25–49.

[2] Беляев Ю.К. О числе пересечений уровня гауссовским случайным процессом. *ТВП*, **12**(3) (1967), 444-457.

[3] Вапник В.Н., Маркович Н.М., Стефанюк А.Р. О скорости сходимости в L_2 проекционной оценки плотности вероятности. *AuT*, **7** (1992), 64-74.

[4] Гихман И.И. Об одном непараметрическом критерии однородности k выборок. *ТВП*, **2(3)** (1957), 380-384.

[5] Голдаева А.А. Индексы многомерных рекуррентных стохастических последовательностей. *Соврем. пробл. мат. мех.*, **8(3)** (2013), 42-51.

[6] Жан Р., Жуковский М.Е., Исаев М.И., Родионов И.В. Стохастическая теория экстремумов для схемы серий зависимых случайных величин. *УМН*, **75(5)** (2020), 193–194.

[7] Жданов А.И., Питербарг В.И. Большие выбросы процессов гауссовского хаоса. Аппроксимация в дискретном времени. *ТВП*, **63(1)** (2018), 3-28.

[8] Жуковский М.Е., Родионов И.В. Распределение максимальных k-степеней биномиального случайного графа. *ДАН*, **483(5)** (2018), 485–487.

[9] Ивченко Г.И. Об асимптотическом поведении степеней вершин в случайном графе. *ТВП*, **18(1)** (1973), 195-203.

[10] Кантонистова Е.О., Родионов И.В. Об аналогах классических критериев согласия для хвостов распределений. *Докл. РАН. Мат. информ. проц. управл.*, **496(1)** (2021), 44-47.

[11] Кобельков С.Г., Питербарг В.И., Родионов И.В., Хашорва Э. Вероятность высокого максимума траектории нестационарного процесса. *ФПМ*, **23(1)** (2020), 161–174.

[12] Когут Н.С., Родионов И.В. О критериях различения хвостов распределений. *ТВП*, (2021), в печати. http://mi.mathnet.ru/tvp5375

[13] Лебедев А.В. Неклассические задачи стохастической теории экстремумов. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.05. М.: МГУ, 2015.

[14] Лебедев А.В. Экстремальные индексы в схеме серий и их приложения. *Информ. примен.*, **9(3)** (2015), 39-54.

[15] Лебедев А.В. Максимумы активности в некоторых моделях информационных сетей со случайными весами и тяжелыми хвостами. *ППИ*, **51(1)** (2015), 72-81.

[16] Маркович Н.М. Экспериментальный анализ непараметрических оценок плотности вероятности и методов их сглаживания. *АиТ*, **7** (1989), 110-119.

[17] Мартынов Г.В. *Критерии омега-квадрат.* М.: Наука, 1978.

[18] Микушева А.Е. Закон больших чисел и логарифмический закон в схеме серий. *ФПМ,* **6(1)** (2000), 195-206.

[19] Михалева Т.Л., Питербарг В.И. О распределении максимума гауссовского поля с постоянной дисперсией на гладком многообразии. *ТВП*, **41(2)** (1996), 438–451.

[20] Нагаев А.В. Предельные теоремы с учетом больших уклонений при нарушении условий Крамера. *Изв. АН УзССР, Сер. физ.-мат. наук,* **6** (1969), 17-22.

[21] Нагаев А.В. Интегральные предельные теоремы, включающие большие уклонения, когдау условие Крамера не выполнено, I, II. *ТВП*, **14** (1969), 51-64, 203-215.

[22] Нагаев А.В. Об одном свойстве сумм независимых случайных величин. *ТВП*, **22(2)** (1977), 335-346.

[23] Нагаев С.В. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. *ТВП*, **10(2)** (1965), 231-254.

[24] Нагаев С.В. Письмо в редакцию. *ТВП*, **21(4)** (1976), 896.

[25] Песенко Ю.А. *Принципы и методы количественного анализа в фаунистических исследованиях.* М.: Наука, 1982.

[26] Петров В.В. *Суммы независимых случайных величин.* М.: Наука, 1972.

[27] Питербарг В.И. О работе Пикандса "Вероятности пересечения для гауссовского стационарного процесса". *Вест. Моск. ун-та, Сер. 1 Мат. Мех.*, **5** (1972), 25-30.

[28] Питербарг В.И. *Двадцать лекций о гауссовских процессах.* МЦНМО Москва, 2015.

[29] Питербарг В.И., Родионов И.В. Большие выбросы процесса Бесселя и других процессов бесселевского типа. *ДАН*, **487(3)** (2019), 238–241.

[30] Питербарг В.И., Стаматович С. Предельная теорема для a-выходов траекторий χ-процесса за высокий уровень. *ТВП*, **48(4)** (2003), 811–818.

[31] Питербарг В.И., Фаталов В.Р. Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах. *УМН*, **50 (6)** (1995), 57–150.

[32] Прохоров Ю.В. Одна экстремальная задача теории вероятностей. *ТВП*, **4(2)** (1959), 211-214.

[33] Родионов И.В. Критерий различения хвостов распределений типа Вейбулла. *ТВП*, **63(2)** (2018), 402–413.

[34] Родионов И.В. О различении классов хвостов распределений. *ППИ*, **54(2)** (2018), 29–44.

[35] Родионов И.В. Различение близких гипотез о хвостах распределений по максимальным членам вариационного ряда. *ТВП*, **63 (3)** (2018), 447–467.

[36] Родионов И.В. О параметрическом оценивании хвоста распределения. *ДАН*, **488(4)** (2019), 356–359.

[37] Розовский Л.В. Вероятности больших уклонений на всей оси. *ТВП*, **38(1)** (1993), 79-109.

[38] Федорюк М.В. *Метод перевала.* М.: Наука, 1977.

[39] Фук Д.Х., Нагаев С.В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин. *ТВП*, **16(4)** (1971), 660-675.

[40] Чистяков В.П. Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам. *ТВП*, **9(4)** (1964), 710–718.

[41] Ширяев А.Н. *Основы стохастической финансовой математики. Том 1: факты, модели.* М.: Фазис, 1998.

[42] Alon N., Spencer J.H., *The Probabilistic Method*, Third Edition, John Wiley & Sons, 2008.

[43] Ancona-Navarrete M.A., Tawn J.A. A comparison of methods for estimating the extremal index. *Extremes*, **3(1)** (2000), 5-38.

[44] Asmussen S. *Applied Probability and Queues.* 2nd edn. New York: Springer, 2003.

[45] Asmussen S., Foss S. Regular variation in a fixed-point problem for single- and multi-class banching processes and queues. *Branching Processes and Applied Probability. Papers in Honour of Peter Jagers. Adv. Appl. Prob.*, 50A (2018).

[46] Bai Z.D., Yin Y.Q. Limit of the smallest eigenvalue of a large-dimensional sample covariance matrix. *Ann. Probab.*, **21(3)** (1993), 1275–1294.

[47] Balakrishnan N., Kateri M. On the maximum likelihood estimation of parameters of Weibull distribution based on complete and censored data. *Stat. Probab. Lett.*, **78** (2008), 2971–2975.

[48] Balkema A., de Haan L. Residual life time at great age, *Ann. Probab.*, **2** (1974), 792-804.

[49] Barr D. M., Davidson T. A Kolmogorov-Smirnov test for censored samples. *Technometrics,* **15** (1973), 739–757.

[50] Basrak B., Tafro A. Extremes of moving averages and moving maxima on a regular lattice. *Probab. Math. Statist.*, **34** (2014), 61-79.

[51] Beirlant J., Broniatowski M., Teugels J.L., Vynckier, P. The mean residual life function at great age: Applications to tail estimation. *J. Statist. Plann. Infer.*, **45** (1995), 21-48.

[52] Beirlant J., Goegebeur Y., Teugels J., Segers J. *Statistics of Extremes: Theory and Applications.* New York: Wiley, 2004.

[53] Berghaus B., Bücher A. Weak convergence of a pseudo maximum likelihood estimator for the extremal index. *Ann. Statist.*, **46(5)** (2018), 2307-2335.

[54] Berman S.M. Limit theorems for the maximum term in stationary sequences. *Ann. Math. Statist.*, **35** (1964), 502-516.

[55] Berred M. Record values and the estimation of the Weibull tail-coefficient. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **312(12)** (1991), 943-946.

[56] Billingsley P. *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

[57] Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. *Regular variation.* Cambridge: Cambridge university press, 1987.

[58] Bojanic R., Seneta E. Slowly varying functions and asymptotic relations. *J. Math. Anal. Appl.*, **34** (1971), 302-315.

[59] Bollobás B. The distribution of the maximum degree of a random graph. *Discrete Mathematics*, **32(2)** (1980), 201-203.

[60] Breiman L. On some limit theorems similar to the arc-sin law. *Theor. Probab. Appl.,* **10** (1965), 323–331.

[61] Chen N., Litvak N., Olvera-Cravioto M. PageRank in Scale-Free Random Graphs. *WAW 2014, ed. A. Bonato et al., Springer, Switzerland, Lecture Notes in Computer Science*, **8882** (2014), 120-131.

[62] Chernick M. R. On strong mixing and Leadbetter's D condition. *J. Appl. Probab.*, **18** (1981), 764-769.

[63] Chernobai A., Rachev S., Fabozzi F. Composite goodness-of-fit tests for left-truncated loss samples. *Handbook of Financial Econometrics and Statistics* (2005), 575-596.

[64] Choi H. Central Limit Theory and Extremes of Random Fields. PhD dissertation (2002)

[65] Cline D.B.H., Hsing T. Large deviation probabilities for sums of random variables with heavy or subexponential tails. Technical Report, Texas A& M University, 1998.

[66] Coles S. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values.* Springer, 2001.

[67] Cramer H. On the intersections between the trajectories of a normal stationary stochastic process and a high level. *Ark. Mat.* **6** (1965), 1656-1663.

[68] D'Agostino R.B., Stephens M.A. *Goodness of Fit Techniques*, New York: Marcel Dekker, 1986.

[69] Danielsson J., Jansen D.W., de Vries C.G. The method of moments ratio estimator for the tail shape parameter. *Commun. Stat. Theory*, **25** (1986), 711–720.

[70] Darling D.A. The Cramér-Smirnov test in the parametric case. *Ann. Math. Statist.*, **26** (1955), 1-20.

[71] Davis R.A., Heiny J., Mikosch T., Xie X. Extreme value analysis for the sample autocovariance matrices of heavy-tailed multivariate time series. *Extremes*, **19(3)** (2016), 517–547.

[72] Davis R.A., Mikosch T., Pfaffel O. Asymptotic theory for the sample covariance matrix of a heavy-tailed multivariate time series. *Stoch. Proc. Appl.*, **126(3)** (2016), 767–799.

[73] Dębicki K., Hashorva E., Liu P. Extremes of Gaussian random fields with regularly varying dependence structure. *Extremes*, **20** (2017), 333-392.

[74] Dekkers A.L.M., Einmahl J.H.J., de Haan L. A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *Ann. Statist.* **17** (1989), 1833–1855.

[75] Dekkers A.L.M., de Haan L. On the estimation of the extreme-value index and large quantile estimation. *Ann. Statist.*, **17** (1989), 1795-1832.

[76] Denisov D., Dieker A.B., Shneer V. Large deviations for random walks under subexponentiality: the big-jump domain. *Ann. Probab.*, **36** (2008), 1946-1991.

[77] Diebolt J., Gardes L., Girard S., Guillou A. Bias-reduced estimators of the Weibull tail-coefficient. *TEST*, **17(2)** (2008), 311-331.

[78] Dmitrovsky V.A. On the integrability of the maximum and the local properties of Gaussian fields. *In: Grigelionis, B., Prohorov, Yu.V., Sazonov, V.V., Statulevicius, V. (eds.) Probability Theory and Mathematical Statistics, vol. I*, Mokslas, Vilnius (1990), 271–284.

[79] Doukhan P., Jakubowski A., Lang G. Phantom distribution functions for some stationary sequences. *Extremes*, **18** (2015), 697-725.

[80] Drees H., Ferreira A., de Haan L. On maximum likelihood estimation of the extreme value index. *Ann. Appl. Probab.*, **14** (2003), 1179–1201.

[81] Dubickas A. An estimate for the probability of dependent events. *Statistics & Probability Letters*, **78(17)** (2008), 2839-2843.

[82] Dudley R.M. The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes. *J. Funct. Anal.* **1** (1967), 290–330.

[83] Durbin J. Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated. *Ann. Statist.*, **1** (1973), 279-290.

[84] Embrechts P., Goldie C.M. On closure and factorization theorems for subexponential and related distributions. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **29** (1980), 243-256.

[85] Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. *Modelling extremal events for insurance and finance.* Springer, Berlin, 1997.

[86] Engelke S., Hitz A.S. Graphical models for extremes. *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, **82(4)** (2020), 871-932.

[87] Estrella A. Critical values and p values of Bessel process distributions: computation and an application to structural break tests. *Econometric Theory*, **19(6)** (2003), 1128-1143.

[88] Feller W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Volume II. Second Edition.* Wiley, New York, 1971.

[89] Ferreira A., Haan L. de. *Extreme value theory. An introduction.* Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. N. Y.: Springer, 2006.

[90] Ferreira H., Pereira L. How to compute the extremal index of stationary random fields. *Statist. Probab. Lett.*, **78** (2008), 1301-1304.

[91] Ferreira M. Analysis of estimation methods for the extremal index. *J. Appl. Stat. Anal.*, **11(1)** (2018), 296-306.

[92] Ferreira M. Heuristic tools for the estimation of the extremal index: a comparison of methods. *REVSTAT Stat. J.*, **16(1)** (2018), 115-136.

[93] Ferro C.A.T., Segers J. Inference for Clusters of Extreme Values. *J. R. Stat. Soc. Ser. B.*, **65** (2003), 545-556.

[94] Fisher R.A., Tippet L.H.C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **24** (1928), 180-190.

[95] Foss S., Korshunov D., Zachary S. *An Introduction to Heavy-tailed and Subexponential Distributions.* Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, 2nd edn, New York: Springer, 2013.

[96] Fraga Alves I., de Haan L., Neves C. A Test Procedure for Detecting Super-Heavy Tails. *J. Statist. Plann. Infer.*, **139(2)**(2009), 213–227.

[97] Fukutome S., Liniger M.A., Süveges M. Automatic threshold and run parameter selection: a climatology for extreme hourly precipitation in Switzerland. *Theor. Appl. Climatol.*, **120** (2015), 403-416.

[98] Galambos J. On the distribution of the maximum of random variables. *Ann. Math. Statist.*, **43(2)** (1972), 516-521.

[99] Galambos J. Variants of the graph dependent model in extreme value theory. *Comm. Statist. Theor. Meth.*, **17(7)** (1988), 2211-2221.

[100] Gardes L., Girard S., Guillou A. Weibull tail-distributions revisited: a new look at some tail estimators. *J. Statist. Plann. Infer.*, **141(1)** (2011), 429-444.

[101] Girard S. The Hill-type of the Weibull tail-coefficient. *Comm. Stat. Theor. Meth.*, **33(2)** (2004), 205–234.

[102] Gnedenko B.V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.*, **44** (1943), 423-453.

[103] Goegebeur J., Guillou A. Goodness-of-fit testing for Weibull-type behavior. *J. Statist. Plann. Infer.*, **140(6)** (2010), 1417-1436.

[104] Göing-Jaeschke A., Yor M. A survey and some generalizations of Bessel processes. *Bernoulli*, **9(2)** (2003), 313-349.

[105] Goldaeva A.A., Lebedev A.V. On extremal indices greater than one for a scheme of series. *Lith. Math. J.* **58(4)** (2018), 384–398.

[106] Gomes M.I., Guillou A. Extreme Value Theory and Statistics of Univariate Extremes: A Review. *Int. Stat. Rev.*, **83(2)** (2015), 263-292.

[107] Gumbel E.J. *Statistics of Extremes.* Columbia University Press, New York, 1958.

[108] de Haan L., Resnick S. Second-order regular variation and rates of convergence in extreme value theory. *Ann. Probab.*, **24(1)** (1996), 97–124.

[109] de Haan L., Peng L. Comparison of tail index estimators. *Stat. Neerl.*, **52** (1998), 60-70.

[110] Hall P. On some simple estimates of an exponent of regular variation. *Journal of the Royal Statistical Society*, **B44**(1982), 37-42.

[111] Harris T.E. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **56** (1960), 13-20.

[112] Hashorva E., Ji L. Piterbarg theorems for chi-processes with trend. *Extremes*, **18(1)** (2015), 37–64.

[113] Heiny J., Mikosch T. Eigenvalues and eigenvectors of heavy-tailed sample covariance matrices with general growth rates: The i.i.d. case. *Stoch. Proc. Appl.*, **127 (7)** (2017), 2179–2207.

[114] Heiny J. Random Matrix Theory for Heavy-Tailed Time Series. *J. Math. Sci.*, **237** (2019), 652–666.

[115] Hill B.M. A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Statist.*, **3** (1975), 1163-1174.

[116] Hsing T. On tail index estimation using dependent data. *Ann. Statist.*, **19** (1991), 1547-1569.

[117] Hsing T. Extremal index estimation for a weakly dependent stationary sequence. *Ann. Statist.*, **21(4)**(1993), 2043-2071.

[118] Hult H., Lindskog F., Mikosch T., Samorodnitsky G. Functional large deviations for multivariate regularly varying random walks. *Ann. Appl. Probab.* **15** (2005), 2651-2680.

[119] Hüsler J. Asymptotic approximation of crossing probabilities of random sequences. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **63(2)** (1983), 257-270.

[120] Hüsler J. Extreme values of non-stationary random sequences. *J. Appl. Probab.*, **23(4)** (1986), 937-950.

[121] Hüsler J., Peng L. Review of testing issues in extremes: in honor of Professor Laurens de Haan. *Extremes*, **11** (2008), 99-111.

[122] Jackson O.A.Y. An analysis of departures from the exponential distribution. *J. R. Stat. Soc. Ser. B.*, **29** (1967), 540-549.

[123] Jakubowski A., Soja-Kukieła N. Managing local dependencies in asymptotic theory for maxima of stationary random fields. *Extremes*, **22** (2019), 293-315.

[124] Jakubowski A., Rodionov I., Soja-Kukieła N. Directional phantom distribution functions for stationary random fields. *Bernoulli*, **27(2)** (2021), 1028-1056.

[125] Janson S., Łuczak T., Ruciński A. *Random graphs*. Wiley, 2000.

[126] Jelenkovic P.R., Olvera-Cravioto M. Information ranking and power laws on trees. *Adv. Appl. Probab.*, **42(4)** (2010), 1057-1093.

[127] Jelenkovic P.R., Olvera-Cravioto M. Maximums on trees. *Stoch. Proc. Appl.*, **125** (2015), 217-232.

[128] Jessen A.H., Mikosch T. Regularly varying functions. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* **80** (2006), 171-192.

[129] Johnstone I.M. On the distribution of the largest eigenvalue in principal components analysis. *Ann. Statist.*, **29(2)** (2001), 295–327.

[130] Kac M., Kiefer J., Wolfowitz J. On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods. *Ann. Math. Statist.*, **26** (1955), 189-211.

[131] Kiefer J. K-sample analogues of the Kolmogorov-Smirnov and Cramér-v. Mises tests. *Ann. Math. Statist.*, **30** (1959), 420-447.

[132] Kleitman D.J. Families of non-disjoint subsets. *J. Comb. Theory*, **1(1)** (1966), 153-155.

[133] Kobelkov S.G., Piterbarg V.I. On maximum of Gaussian random field having unique maximum point of its variance. *Extremes*, **22** (2019), 413-432.

[134] Kobelkov S.G., Piterbarg V.I., Rodionov I.V. Correction to: On maximum of gaussian random fields having unique maximum point of its variance. *Extremes*, **24(1)** (2021), 85-90.

[135] Lawler G. F. Notes on the Bessel process. Chicago University ed., 2018. *http://www.math.uchicago.edu/~lawler/bessel18new.pdf*

[136] Leadbetter M.R.. On extreme values in stationary sequences. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, **28** (1974), 289-303.

[137] Leadbetter M.R, Lindgren G., Rootźen H. *Extremes and related properties of random sequences and processes.* Springer Statistics Series. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1983.

[138] Lee J., Olvera-Cravioto M. PageRank on inhomogeneous random digraphs. *Stoch. Proc. Appl.*, **130(4)** (2020), 2312-2348.

[139] Lewis P.A.W. Some results on tests for Poisson processes. *Biometrika,* **52** (1965), 67-77.

[140] Lin C.-T., Huang Y.-L., Balakrishnan N. A New Method for Goodness-of-Fit Testing Based on Type-II Right Censored Samples. *IEEE Trans. Reliab.*, **57(4)** (2008), 633-642.

[141] Liu P., Ji L. Extremes of locally stationary chi-square processes with trend. *Stoch. Proc. Appl.*, **127(2)** (2017), 497–525.

[142] Loynes R.M.. Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes. *Ann. Math. Statist.*, **36** (1965), 993—999.

[143] Mann N.R., Scheuer E.M., Fertig K.W. A new goodness-of-fit test for the two-parameter Weibull or extreme-value distribution with unknown parameters. *Comm. Statist.* **2**, 383–400 (1973)

[144] Markovich N.M. *Nonparametric Analysis of Univariate Heavy-Tailed data: Research and Practice*, Wiley, 2007.

[145] Markovich N.M. Modeling clusters of extreme values. *Extremes,* **17(1)** (2014), 97-125.

[146] Markovich N.M. Nonparametric estimation of extremal index using discrepancy method. *In: Proceedings of the X International conference "System identification and control problems" SICPRO–2015 Moscow January 26–29, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences.* (2015), 160–168.

[147] Markovich N.M. Erratum to: modeling clusters of extreme values. Extremes. *Extremes,* **19(1)** (2016), 139-142.

[148] Markovich N.M.: Clusters of extremes: modeling and examples. *Extremes*, **20** (2017), 519-538.

[149] Markovich N.M., Rodionov I.V. Maxima and sums of non-stationary random length sequences. *Extremes*, **23** (2020), 451-464.

[150] Markovich N.M., Rodionov I.V. Threshold selection for extremal index estimation. *Scand. J. Stat.* (2021), arxiv:2009.02318.

[151] Michael J.R., Schucany W.R. A new approach to testing goodness of fit for censored samples. *Technometrics,* **21** (1979), 435–441.

[152] Mikosch T., Rodionov I. Precise large deviations for dependent subexponential variables. *Bernoulli*, **27(2)** (2021), 1319-1347.

[153] Mikosch T., Samorodnitsky G. The supremum of a negative drift random walk with dependent heavy-tailed steps. *Ann. Appl. Probab.*, **10** (2000), 1025-1064.

[154] Mikosch T., Wintenberger O. Precise large deviations for dependent regularly varying sequences. *Probab. Th. Rel. Fields.* **156** (2013), 851-887.

[155] Mikosch T., Wintenberger O. A large deviations approach to limit theory for heavy-tailed time series. *Probab. Th. Rel. Fields.* **166** (2016), 233-269.

[156] Mittal Y., Ylvisaker D. Limit distributions for the maxima of stationary Gaussian processes. *Stoch. Proc. Appl.* **3** (1975), 1-18.

[157] Nadarajah S., Mitov K. Asymptotics of maxima of discrete random variables. *Extremes*, **5(3)** (2002), 287-294.

[158] Nagaev S. V. Large deviations of sums of independent random variables. *Ann. Probab.*, **7** (1979), 745-789.

[159] Northrop P.J. An efficient semiparametric maxima estimator of the extremal index. *Extremes*, **18(4)** (2015), 585-603.

[160] O'Brien G. Extreme values for stationary and Markov sequences. *Ann. Probab.* **15** (1987), 281-291

[161] Olvera-Cravioto M. Asymptotics for weighted random sums. *Adv. Appl. Prob.*, **44(4)** (2012), 1142-1172.

[162] Paulauskas V., Vaiciulis M. On the improvement of Hill and some others estimators. *Lith. Math. J.*, **53** (2013), 336–355.

[163] Pereira L. On the extremal behavior of a nonstationary normal random field. *J. Stat. Plan. Infer.*, **140** (2010), 3567-3576.

[164] Pereira L., Ferreira H. Limiting crossing probabilities of random fields. *J. Appl. Probab.*, **3** (2006), 884-891.

[165] Petrov V.V. *Limit Theorems of Probability Theory.* Oxford: Oxford University Press, 1995.

[166] Pettitt A.N., Stephens M.A. Modified Cramér-von Mises statistics for censored data, *Biometrika*, **63** (1976), 291-298.

[167] Pickands J. Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **145** (1969), 51-73.

[168] Pickands J. Statistical inference using extreme order statistics, *Ann. Stat.*, **3** (1975), 119-131.

[169] Piterbarg V.I. High excursion for non-stationary generalized chi-square processes. *Stoch. Proc. Appl.*, **53(2)** (1994), 307–337.

[170] Piterbarg V.I. *Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields.* American Mathematical Society [Providence, R.I., etc.], United States, 2012.

[171] Piterbarg V.I. High extrema of Gaussian chaos processes. *Extremes*, **19(2)** (2016), 253–272.

[172] Piterbarg V.I., Prisyazhnyuk V.P. Asymptotics of the probability of large excursions for a nonstationary gaussian process. *Theor. Probab. Math. Statist.*, **18** (1979), 131–144.

[173] Piterbarg V.I., Rodionov I.V. High excursions of Bessel and related random processes. *Stoch. Proc. Appl.*, **130** (2020), 4859-4872.

[174] Pitman J., Yor M. The law of the maximum of a Bessel bridge. *Electron. J. Probab.*, **4** (1999), 15.

[175] Resnick S.I. *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes.* New York: Springer, 1987.

[176] Revuz D., Yor M. *Continuous Martingales and Brownian Motion, 2nd ed.*, Springer Verlag, 1994.

[177] Rhee C. H., Blanchet J., Zwart B. Sample path large deviations for Levy processes and random walks with regularly varying increments. *Ann. Probab.*, **47** (2019), 3551-3605.

[178] Robert C.Y. Asymptotic distributions for the intervals estimators of the extremal index and the cluster–size probabilities. *J. Stat. Plann. Infer.*, **139** (2009), 3288-3309.

[179] Robert C.Y. Inference for the limiting cluster size distribution of extreme values. *Ann. Statist.*, **37** (2009), 271-310.

[180] Robert C.Y., Segers J. Tails of random sums of a heavy-tailed number of light-tailed terms. *Insur. Math. Econ.,* **43** (2008), 85-92.

[181] Robert C.Y., Segers J., Ferro C.A.T. A sliding blocks estimator for the extremal index. *Electr. J. Statist.*, **3** (2009), 993-1020.

[182] Robert C.Y. Automatic declustering of rare events. *Biometrika*, **100** (2013), 587-606.

[183] Rodionov I.V. On Estimation of Weibull-Tail and Log-Weibull-tail Distributions for Modeling End-to-end Delay // *In: Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2019. Communications in Computer and Information Science*, **1141** (2019), 302–314.

[184] Rodionov I.V. On parametric estimation of distribution tails. *In: Proceedings of 4th ISNPS, Salerno, Italy, 2018. Springer International Publishing Switzerland, Michele La Rocca, Brunero Liseo, Luigi Salmaso, (Eds.) Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, **339** (2020), 445-455.

[185] Rodionov I.V. On threshold selection problem for extremal index estimation. *In: Proceedings of 5th ICSM, Moscow, Russia, 2020. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, (2021).

[186] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. *Stochastic Processes for Insurance and Finance.* New York: Wiley, 1999.

[187] Smith R. Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases. *Biometrika* **72** (1985), 67–90.

[188] Smith R.L. Estimating tails of probability distributions. *Ann. Stat.*, **15(3)** (1987), 1174-1207.

[189] Suen W.C.S. A correlation inequality and a Poisson limit theorem for nonoverlapping balanced subgraphs of a random graph. *Rand. Struct. Alg.*, **1(2)** (1990), 231-242.

[190] Süveges M., Davison A.C. Model misspecification in peaks over threshold analysis. *Ann. Appl. Stat.*, **4(1)** (2010), 203-221.

[191] Szegedy M. The Lovász local lemma – a survey. *Computer Science – Theory and Applications*, 11–23 (2013).

[192] Tikhomirov K. The limit of the smallest singular value of random matrices with i.i.d. entries. *Adv. Math.*, **284** (2015), 1–20.

[193] Tillier C., Wintenberger O. Maxima and exceedances of stationary Markov chains. *Extremes,* **21** (2018), 27-56.

[194] Turkman K.F. A note on the extremal index for space-time processes. *J. Appl. Prob.*, **43** (2006), 114-126.

[195] Voinov V., Nikulin M., Balakrishnan N. *Chi-squared Goodness-of-Fit Tests with Applications*, Boston: Academic Press, 2013.

[196] Volkovich Y.V., Litvak N. Asymptotic analysis for personalized web search. *Adv. Appl. Prob.*, **42(2)** (2010), 577-604.

[197] Wan P., Wang T., Davis R.A., Resnick S.I. Are extreme value estimation methods useful for network data? *Extremes*, **23** (2020), 171-195.

[198] Watson G.S. Extreme values in samples from m-dependent stationary stochastic processes. *Ann. Math. Stat.*, **25(4)** (1954), 798-800.

[199] Weissman I., Novak S.Yu. On blocks and runs estimators of the extremal index. *J. Statist. Plann. Infer.*, **66** (1998), 281-288.

[200] Wishart J. The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population. *Biometrika*, (1928), 32–52.

[201] Wu L., Samorodnitsky G. Regularly varying random fields. *Stoch. Proc. Appl.*, **130** (2020), 4470-4492.