Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи



Афанасьев Даниил Евгеньевич

Глобальная структура сплетенных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2022

Работа выполнена в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель – Катанаев Михаил Орионович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела математической физики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (специальность 01.01.03).

Официальные оппоненты:
Барвинский Андрей Олегович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Лаборатории теории фундаментальных взаимодействий отделения теоретической физики им. И. Е. Тамма Федерального государственного бюджетного учреждения науки Физического института им. П. Н. Лебедева Российской академии наук (специальность 01.04.02).

Березин Виктор Александрович – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела теоретической физики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института ядерных исследований Российской академии наук (специальность 01.04.02).

Ведущая организация: Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Казанский (Приволжский) федеральный университет”.

Защита диссертации состоится 21 апреля 2022 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.02 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук, по адресу: Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте МИАН
http://www.mi-ras.ru/dis/ref21/afanasev/dis.pdf

Автореферат разослан ___ февраля 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 002.022.02 доктор
физико-математических наук, профессор Ю. Н. Дрожжинов



Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Нахождение точных решений уравнений Эйнштейна является одной из центральных задач общей теории относительности. Под точным решением понимают метрику пространства-времени, удовлетворяющую уравнениям Эйнштейна, заданную в локальных координатах. Известно много точных решений в общей теории относительности [33]. Однако для физической интерпретации решения недостаточно знать одну только метрику, удовлетворяющую уравнениям Эйнштейна. Для этих целей требуется также иметь представление о глобальной структуре пространства-времени [5].

Глобальным решением в общей теории относительности мы называем пару $(\mathbb{M}, \widehat{g})$, где $\mathbb{M}$ – четырехмерное пространственно-временное многообразие, $\widehat{g}$ – заданная на нем метрика, удовлетворяющая уравнениям Эйнштейна и такая, что $\mathbb{M}$ является максимально продолженным вдоль геодезических многообразием. Последнее означает, что всякая геодезическая линия на $\mathbb{M}$ либо может быть продолжена до бесконечного значения канонического параметра в обе стороны, либо заканчивается в сингулярной точке, где один из геометрических инвариантов обращается в бесконечность.

Наиболее известным примером глобального решения в общей теории относительности является расширение Крускала-Секереша для решения Шварцшильда [34, 48]. В этом случае глобальная структура пространства-времени представляет собой произведение, $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$, лоренцевой поверхности $\mathbb{U}$ на двумерную сферу $\mathbb{S}^2$ (сферически симметричный случай). Лоренцева поверхность представляется хорошо известной диаграммой Картера-Пенроуза [14, 50]. Благодаря представлению о глобальной структуре данного решения в общей теории относительности возникли понятия черной и белой дыры [7, 12].

Еще одним примером служит решение Рейсснера-Нордстрема [36, 43, 51], которое представляет собой точное сферически-симметричное решение системы уравнений Эйнштейна-Максвелла с нулевой космологической постоянной. В этом случае глобальная структура пространства-времени также изучена [24]. Известно три типа диаграмм Картера-Пенроуза: решение Рейсснера-Нордстрема с двумя горизонтами, экстремальная черная дыра и голая сингулярность.

Тип диаграммы зависит от соотношения между массой M и зарядом Q.

Обобщение решения Рейсснера-Нордстрема на случай ненулевой космологической постоянной также известно [27], но глобальная структура пространства-времени в этом случае не была полностью исследована.

В настоящей работе дано явное описание и классификация всех глобальных решений уравнений общей теории относительности с электромагнитным полем и космологической постоянной в предположении, что пространство-время является сплетенным произведением двух поверхностей: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{V}$, где $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ – максимально продолженные поверхности с лоренцевой и евклидовой сигнатурами метрик, соответственно [23, 41, 47]. Также предполагается, что электромагнитный потенциал задан в специальном виде: $\widehat{A} = A_1 \oplus A_2$, где A_1 и A_2 определены на $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$, соответственно. При таких предположениях из уравнений Эйнштейна следует, что хотя бы одна из поверхностей в сплетенном произведении является поверхностью постоянной кривизны. В результате возникает три случая:

(A): обе поверхности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ имеют постоянную кривизну,

(B): только $\mathbb{V}$ имеет постоянную кривизну,

(C): только $\mathbb{U}$ имеет постоянную кривизну.

Все перечисленные случаи подробно рассмотрены в диссертации. Всего мы получили 4, 44, и 19 топологически различных глобальных решений в случаях (A), (B) и (C) соответственно. В частности, здесь дается явное описание и классификация всех (при указанных предположениях) глобальных сферически симметричных решений уравнений общей теории относительности с электромагнитным полем и космологической постоянной в зависимости от значений массы, заряда и космологической постоянной. В результате построено 16 глобальных сферически симметричных решений, среди которых имеются не изученные ранее глобальные решения. Одним из них является глобальное решение с горизонтом третьего порядка, обладающее интересными геометрическими и физическими свойствами. Будет показано, что оно описывает изменение топологии пространственных сечений во времени.

Для универсальных накрывающих поверхностей постоянной кривизны с лоренцевой сигнатурой метрики имеется две возможности: $\mathbb{U}$ является уни-

версальной накрывающей однополостного гиперболоида $\mathbb{L}^2$, $\mathbb{U}$ является плоскостью Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$. Все остальные лоренцевы поверхности постоянной кривизны возникают как факторпространства этих двух поверхностей по группе преобразований, действующей свободно и собственно разрывно. Следовательно, при $\mathbb{U} = \mathbb{L}^2$ глобальные решения инвариантны относительно действия группы преобразований Лоренца $\mathbb{SO}(1,2)$, при $\mathbb{U} = \mathbb{R}^{1,1}$ – относительно группы преобразований Пуанкаре $\mathbb{ISO}(1,1)$.

Для универсальных накрывающих поверхностей с евклидовой сигнатурой метрики имеется три возможности: $\mathbb{V}$ является двумерной сферой $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{V}$ является евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$ и, наконец, $\mathbb{V}$ является плоскостью Лобачевского $\mathbb{H}^2$. В первом случае возникают глобальные сферически симметричные решения, инвариантные относительно действия группы преобразований $\mathbb{SO}(3)$, во втором случае – глобальные планарные решения, инвариантные относительно действия группы преобразований Пуанкаре $\mathbb{ISO}(2)$, в третьем случае возникают глобальные гиперболические решения, инвариантные относительно действия группы преобразований Лоренца $\mathbb{SO}(1,2)$. Из сказанного следует, что никакая симметрия метрики изначально не предполагается, но возникает в качестве следствия уравнений общей теории относительности. Этот эффект мы называем “спонтанным появлением симметрии”.

Поверхности постоянной кривизны допускают наличие ровно трех векторных полей Киллинга [8, 9, 10]. В случае (A) пространство-время имеет 6 векторов Киллинга. В работе показано, что в случаях (B) и (C) точное решение допускает, помимо трех векторных полей Киллинга на поверхности постоянной кривизны, наличие дополнительного четвертого векторного поля Киллинга на лоренцевой и римановой поверхностях, соответственно.

О возникновении дополнительных векторов Киллинга в общей теории относительности известно давно. Наиболее известным примером является теорема Бирхгоффа, согласно которой любое сферически симметричное решение вакуумных уравнений Эйнштейна должно быть статическим [18]. Имеются обобщения данного утверждения на другие группы симметрий [16, 19, 25, 45]. В диссертации обобщение включает в себя добавление электромагнитного поля, а также утверждение о существовании дополнительного векторного поля Киллинга не только для случая сферической симметрии, но и для решений, инвариантных относительно групп преобразований $\mathbb{ISO}(2)$ и $\mathbb{SO}(1,2)$ в случае

(B) и относительно групп преобразований $\mathbb{SO}(1,2)$ и $\mathbb{ISO}(1,1)$ в случае (C).

Поскольку поверхности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ в случаях (B) и (C) допускают по одному векторному полю Киллинга, мы можем классифицировать все глобальные решения в рассматриваемой модели. В случае (B) мы приводим классификацию глобальных решений путем построения диаграмм Картера-Пенроуза для лоренцевых поверхностей $\mathbb{U}$ при различных соотношениях между массой M, зарядом Q и космологической постоянной Λ. В случае (C) мы строим поверхности $\mathbb{V}$ в явном виде. Построение полных римановых поверхностей и диаграмм Картера-Пенроуза для лоренцевых поверхностей мы проводим методом конформных блоков [31, 32], применимым для поверхностей, допускающих одно векторное поле Киллинга. Технически метод конформных блоков подразумевает анализ нулей и особенностей конформного множителя, входящего в двумерную часть метрики.

Многие из построенных здесь глобальных решений были изучены ранее. В статье [30] дано явное описание и классификация глобальных решений вакуумных уравнений Эйнштейна с космологической постоянной. В данной диссертации проводиться обобщение результатов указанной работы на случай присутствия электромагнитного поля.

Перечислим более ранние работы по глобальным решениям. Глобальные решения, являющиеся произведением поверхностей постоянной кривизны (случай (A)) описаны в работах [17, 35, 42, 44]. Наиболее известным примером здесь является решение Бертотти-Робинсона. Пространство-время в случае данного решения является произведением однополостного гиперболоида и двумерной сферы: $\mathbb{M} = \mathbb{L}^2 \times \mathbb{S}^2$.

Решениям с пространственной симметрией (случай (B)) посвящено много работ. Глобальная структура сферически симметричных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем изучалась в работах [21, 26, 37]. Здесь следует отметить работу Брилла и Хейворда [21], в которой построены глобальные сферически симметричные решения при положительной космологической постоянной. Тем не менее, полнота геодезических не была проанализирована. В частности, в указанной работе не проанализировано решение с горизонтом третьего порядка, описывающее изменение топологии пространственных сечений во времени.

Глобальные планарные, цилиндрические и тороидальные решения изуча-

лись в работах [22, 29, 38, 39]. Глобальные гиперболические решения описаны в работах [20, 40, 46, 49]. Глобальные свойства лоренц-инвариантных решений и решений с плоскостью Минковского изучались в уже упомянутой выше статье [30].

Вопрос об изменении во времени топологии пространственных сечений пространственного-временного многообразия обсуждался ранее [28]. Тем не менее, примера глобального решения уравнений Эйнштейна с указанным свойством построено не было. В данной диссертации такое решение построено.

Цель диссертации

Целью диссертации является построение и классификация всех глобальных решений уравнений Эйнштейна-Максвелла с космологической постоянной в предположении, что четырехмерное пространство-время является сплетенным произведением двух поверхностей: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{V}$.

Особый интерес для физики представляют сферически симметричные решения. В сферически симметричном случае четырехмерное пространство-время имеет вид произведения некоторой лоренцевой поверхности и двумерной сферы: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$. Следовательно, цель диссертации подразумевает в том числе построение всех глобальных сферически симметричных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной при указанных выше предположениях.

Задачи

Для достижения цели диссертации мы должны решить следующие задачи:

1. Записать уравнения Эйнштейна для метрики сплетенного произведения.

2. Построить общее решение уравнений Максвелла в рассматриваемом случае.

3. Найти общее решение уравнений Эйнштейна для сплетенного произведения двух поверхностей в случаях (A), (B) и (C).

4. Построить все глобальные решения в случаях (A), (B) и (C).

5. Привести физическую интерпретацию найденных решений.

Методы исследования

При написании работы использованы методы дифференциальной геометрии и уравнений в частных производных. Для построения глобальных решений использован метод конформных блоков для построения максимально продолженных лоренцевых и римановых поверхностей, обладающих одним вектором Киллинга [31, 32].

Научная новизна

В данной работе получены следующие новые результаты:

1. Показано, что при указанных выше предположениях из уравнений общей теории относительности следует, что хотя бы одна из поверхностей в сплетенном произведении должна быть поверхностью постоянной кривизны (спонтанное появление симметрии).

2. Дано явное описание и классификация всех глобальных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной при указанных выше предположениях. В частности, дана полная классификация глобальных сферически симметричных решений в рассматриваемом случае.

3. Получено новое глобальное решение с горизонтом третьего порядка, описывающее изменение топологии пространственных сечений во времени на классическом уровне.

Теоретическая и практическая ценность

Данная работа является теоретическим исследованием. Результаты, полученные в диссертации представляют интерес для специалистов, занимающихся общей теорией относительности и гравитацией.

Апробация диссертации

Основные результаты данной диссертации были изложены на следующих научных конференциях и семинарах:

1. *The 17th Russian Gravitational Conference – International Conference on Gravitation, Cosmology and Astrophysics (RUSGRAV-17), June 29 – July 3, 2020, Saint-Petersburg, Russia.* "Global properties of warped solutions in General Relativity with an electromagnetic field and a cosmological constant."

2. *Воркшоп в рамках тематической программы "New Trends in Mathematical Physics", 9 ноября – 11 декабря 2020 г., МИАН, Москва.* "Global properties of spherically symmetric solutions in General Relativity with an Electromagnetic field and a Cosmological Constant."

3. *Семинар отдела математической физики МИАН, МИАН, Москва.* "Глобальная структура сферически симметричных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной", апрель, 2021.

4. *Семинар отдела теоретической физики МИАН, МИАН, Москва.* "Глобальная структура сферически симметричных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной", сентябрь, 2021.

5. *Семинар отдела теоретической физики ИЯИ РАН, ИЯИ, Москва.* "Глобальная структура сплетенных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной", октябрь, 2021.

6. *Семинар по квантовой теории поля ФИАН, ФИАН, Москва.* "Глобальная структура сплетенных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной", ноябрь, 2021.

7. *Семинар кафедры теоретической физики физического факультета МГУ "Современная гравитация", Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва.* "Глобальная структура сплетенных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной", ноябрь, 2021.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие положения:

1. Общее решение уравнений Эйнштейна-Максвелла в случаях (A), (B) и (C). Понятие о спонтанном появлении симметрии.

2. Построение всех глобальных решений в перечисленных выше случаях.

3. Описание свойств полученных глобальных решений. В частности, описание свойств глобального сферически симметричного решения с горизонтом третьего порядка.

Содержание работы

Диссертация состоит из введения трех глав и списка литературы. Текст занимает 87 страниц и содержит 9 рисунков.

Перечислим основные определения и обозначения, используемые в диссертации. Пространством-временем мы называем четырехмерное гладкое многообразие с метрикой лоренцевой сигнатуры [6, 11, 15]. Предполагается, что четырехмерное пространство-время является сплетенным произведением двух поверхностей: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{V}$, где $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ – поверхности с лоренцевой и римановой сигнатурами метрик, соответственно. Метрика сплетенного произведения имеет вид:

$$\widehat{g} = kg \oplus mh, \tag{1}$$

где k и m - скалярные поля, заданные на $\mathbb{V}$ и $\mathbb{U}$, соответственно. Метрика g задана на $\mathbb{U}$, метрика h задана на $\mathbb{V}$.

Глобальным решением мы называем пару $(\mathbb{M}, \widehat{g})$, где $\mathbb{M}$ пространственно-временное многообразие и $\widehat{g}$ метрика на $\mathbb{M}$ такая, что она удовлетворяет уравнениям Эйнштейна, и многообразие $\mathbb{M}$ максимально продолжено вдоль геодезических: всякая геодезическая линия на $\mathbb{M}$ либо может быть продолжена до бесконечного значения канонического параметра в обе стороны, либо заканчивается в сингулярной точке, где один из геометрических инвариантов обращается в бесконечность.

В работе встречаются объекты, заданные как на всем четырехмерном пространстве-времени, так и объекты, заданные только на одном из сомножителей в сплетенном произведении. Первые отмечены шляпкой, вторые записываются без шляпки.

Через $(x^\alpha),\ \alpha = 0, 1$ и $(y^\mu),\ \mu = 2, 3$ обозначены локальные координаты на $\mathbb{U}$ и на $\mathbb{V}$, соответственно. Координаты на $\mathbb{U}$ индексируются буквами из начала греческого алфавита, $\alpha, \beta, ...$, координаты на $\mathbb{V}$ – из середины греческого алфавита, $\mu, \nu, ...$ Координаты на всем $\mathbb{M}$ мы индексируем латинскими буквами $i, j, ...$ и обозначаем через $(\widehat{x}^i),\ i = 0, 1, 2, 3$, причем $(\widehat{x}^i) := (x^\alpha, y^\mu)$.

Мы рассматриваем следующее действие:

$$S = S_{\text{НЕ}} + S_{\text{ЕМ}} = \int d^4\widehat{x}\sqrt{|\widehat{g}|}\left(\widehat{R} - 2\Lambda - \frac{1}{4}\widehat{F}^2\right), \tag{2}$$

где $|\widehat{g}|$ – модуль определителя метрики пространства-времени, Λ – космологическая постоянная и $\widehat{F}^2 := \widehat{F}^{ij}\widehat{F}_{ij}$ – квадрат тензора электромагнитного поля $\widehat{F}_{ij}$ [13]:

$$\widehat{F}_{ij} := \partial_i \widehat{A}_j - \partial_j \widehat{A}_i. \tag{3}$$

Вариация действия по метрике и электромагнитному полю приводит к системе уравнений Эйнштейна-Максвелла:

$$\widehat{R}_{ij} - \frac{1}{2}\widehat{g}_{ij}\widehat{R} + \widehat{g}_{ij}\Lambda = -\frac{1}{2}\widehat{T}_{\mathrm{EM}ij}, \qquad \partial_j\left(\sqrt{|\widehat{g}|}\widehat{F}^{ji}\right) = 0. \tag{4}$$

Мы предполагаем, что электромагнитный потенциал задан в виде:

$$\widehat{A}_i = \left(A_\alpha(x), A_\mu(y)\right). \tag{5}$$

Тогда смешанные компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля равны нулю: $\widehat{T}_{\alpha\mu} = 0$. Следовательно, в правых частях уравнений Эйнштейна со смешанными индексами $(\alpha\mu)$ стоят нули, и возникает три качественно различных случая:

(A) $k = \mathsf{const} \neq 0$ и $m = \mathsf{const} \neq 0$,

(B) $k = \mathsf{const} \neq 0$ и $m \neq \mathsf{const}$,

(C) $k \neq \mathsf{const}$ и $m = \mathsf{const} \neq 0$.

Мы используем следующие обозначения для констант интегрирования уравнений Максвелла и Эйнштейна. Через Q и P обозначены постоянные интегрирования уравнений Максвелла, через M – постоянная интегрирования уравнений Эйнштейна. При этом, постоянные Q и P входят в тензор энергии-импульса электромагнитного поля только как слагаемые в выражении $\left(Q^2 + P^2\right)$. Поэтому, при решении уравнений Эйнштейна, для краткости записи, мы используем замену $\left(Q^2 + P^2\right) \to Q^2$.

Приведем краткое содержание работы. Во **Введении** обосновывается актуальность темы, приводятся ссылки на более ранние работы по глобальным решениям в общей теории относительности, а также ссылки на работы автора по данной тематике. Здесь мы определяем цель диссертации, ставим задачи, перечисляем методы исследования и основные результаты, приводим ценность

работы и апробацию результатов, указываем положения, выносимые на защиту. Также во Введении мы приводим краткое описание работы и основные определения, обозначения и соглашения.

В **Главе 1** мы постулируем действие Эйнштейна-Максвелла и записываем систему уравнений Эйштейна-Максвелла для метрики сплетенного произведения. Здесь получено общее решение уравнений Максвелла в предположении, что электромагнитный потенциал задан в виде (5). Также здесь найдено общее решение уравнений Эйнштейна при указанных выше предположениях и построены глобальные решения в случае (A), когда оба скалярных поля k и m постоянны. Всего в указанном случае мы получили 4 глобальных решения с сигнатурой метрики $(+--)$, соответствующих различным значениям постоянных Q и Λ.

Показано, что в случае (A) для разрешимости уравнений Эйнштейна необходимо, чтобы обе поверхности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ были поверхностями постоянной кривизны. Последнее означает, что $\mathbb{U}$ является либо однополостным гиперболоидом $\mathbb{L}^2$, вложенным в трехмерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$ (или его универсальной накрывающей), либо плоскостью Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$, а поверхность $\mathbb{V}$ – либо сферой $\mathbb{S}^2$, либо евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$, либо плоскостью Лобачевского $\mathbb{H}^2$. При этом наличие симметрии метрики заранее не предполагается. Она возникает в качестве следствия уравнений Эйнштейна и требования максимального продолжения решения вдоль геодезических (спонтанное появление симметрии).

В **Главе 2** рассматривается случай (B), когда постоянно только поле k. В этом случае из уравнений Эйнштейна следует, что риманова поверхность $\mathbb{V}$ является поверхностью постоянной кривизны (спонтанное появление пространственной симметрии). Мы строим общее решение уравнений Эйнштейна и показываем, что лоренцева поверхность $\mathbb{U}$ обладает дополнительным векторным полем Киллинга (обобщенная теорема Бирхгоффа). Далее мы строим максимально продолженные лоренцевы поверхности $\mathbb{U}$ и представляем их диаграммами Картера-Пенроуза, вид которых зависит от соотношения между параметрами Q, M и Λ. При этом рассматриваются случаи обеих сигнатур $(+--)$ и $(-++)$. Всего здесь построено 44 топологически различных глобальных решения. Среди них имеется не изученное ранее глобальное сферически симметричное решение, которое обладает интересными физическими

свойствами. Показано, что оно описывает изменение топологии пространственных сечений во времени.

Также здесь обсуждается физический смысл постоянных интегрирования уравнений Максвелла. Показано, что в сферически симметричном случае при нулевой космологической постоянной константы Q и P имеют смысл электрического и магнитного зарядов, соответственно.

В **Главе 3** разбирается случай (C), когда постоянно только поле m. В этом случае из уравнений Эйнштейна следует, что лоренцева поверхность $\mathbb{U}$ является поверхностью постоянной кривизны (спонтанное появление лоренцевой симметрии). Здесь получено общее решение уравнений Эйнштейна и построены соответствующие максимально продолженные римановы поверхности $\mathbb{V}$. Как и в Главе 2 мы рассматриваем случаи обеих сигнатур $(+---)$ и $(-+++)$. Всего в указанном случае построено 19 топологически неэквивалентных глобальных решений. Отличительной особенность данного случая является то, что фиксированному набору параметров Q, M и Λ в общем случае соответствует не одно, а несколько глобальных решений, причем с разными сигнатурами метрик.

Заключение

В работе мы изучили глобальную структуру точных решений уравнений общей теории относительности с электромагнитным полем и космологической постоянной для метрики сплетенного произведения при различных значениях параметров M, Q и Λ. Константы M и Q изначально не входят в действие рассматриваемой модели, а возникают в результате интегрирования системы уравнений Эйнштейна-Максвелла. Вид глобальных решений зависит от соотношений между параметрами M, Q и Λ.

Мы предполагали, что максимально продолженное четырехмерное пространственно-временное многообразие имеет вид сплетенного произведения лоренцевой и римановой поверхностей $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$, соответственно: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{V}$. Мы показали, что если электромагнитный потенциал задан в виде (5), то хотя бы одна из поверхностей сплетенного произведения должна быть поверхностью постоянной кривизны (случаи (A), (B) и (C)). При этом никакая симметрия метрики заранее не предполагалась. Симметрия метрики возникала в качестве следствия уравнений общей теории относительности и требования максимального продолжения решения вдоль геодезических (“ спонтанное появление симметрии”). Более того, мы показали, что в случае (B) лоренцева поверхность $\mathbb{U}$ обладает дополнительным векторным полем Киллинга. Тем самом, доказано обобщение теоремы Бирхгоффа на случай решений, инвариантных относительно групп симметрии $\mathbb{ISO}(2)$ и $\mathbb{SO}(1,2)$, а также присутствия электромагнитного поля. Также доказано наличие векторного поля Киллинга на римановой поверхности $\mathbb{V}$ в случае (C).

Мы построили глобальные решения во всех трех случаях: (A), (B) и (C). В случае (A) мы получили 4 топологически неэквивалентных глобальных решения с сигнатурой метрики $(+---)$. Здесь обе поверхности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ являются поверхностями постоянной кривизны и имеют ровно по 3 векторных поля Киллинга. Всего глобальные решения в случае (A) имеют по 6 векторных полей Киллинга и являются максимально симметричными решениями, представимыми в виде сплетенного произведения поверхностей.

В случае (B) мы построили 44 различных глобальных решений с пространственной симметрией с сигнатурой метрики $(+---)$ и $(-+++)$. В этом случае каждое глобальное решение имеет по 4 векторных поля Киллинга. Глобальные

решения представлены диаграммами Картера-Пенроуза для лоренцевой поверхности $\mathbb{U}$. Сюда включены важные с физической точки зрения сферически симметричные решения ($\mathbb{SO}(3)$–симметрия). Всего мы получили 16 глобальных сферически симметричных решений. Среди них имеется новое интересное сферически симметричное глобальное решение, описывающее изменение топологии пространственных сечений пространственно-временного многообразия с течением времени, причем в рамках классической модели гравитации. Наряду со сферически симметричными решениями здесь получены также планарные ($\mathbb{ISO}(2)$–симметрия) и гиперболические ($\mathbb{SO}(1,2)$–симметрия) решения.

В случае (C) мы получили 19 топологически различных глобальных решений, имеющих по 4 векторных поля Киллинга с сигнатурами $(+---)$ и $(+--++)$. Сюда включены лоренц-инвариантные решения ($\mathbb{SO}(1,2)$–симметрия) и решения с плоскостью Минковского ($\mathbb{ISO}(1,1)$–симметрия). Глобальные решения представлены диаграммами, изображающими римановы поверхности $\mathbb{V}$ с точностью до отождествления вдоль пространственной координаты. В данном случае глобальные решения имеют интересную физическую интерпретацию. Они описывают космические струны и доменные стенки сингулярностей кривизны. Интересным также является следующее обстоятельство: фиксированному набору значений M, Q и Λ в общем случае соответствует не одно, а несколько глобальных решений.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, Катанаеву Михаилу Орионовичу, за поставленную задачу, помощь и поддержку при написании диссертации.

Список литературы

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах Web of Science, Scopus, RSCI.

[1] Д. Е. Афанасьев. Глобальная структура сферически симметричных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем. *Математическая физика и приложения. Сборник статей. К 95-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Труды МИАН*, 306, МИАН, М., 2019, 16–27.

[2] D. E. Afanasev and M. O. Katanaev. Global properties of warped solutions in General Relativity with an electromagnetic field and a cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 100 (2):024052, 2019.

[3] D. E. Afanasev and M. O. Katanaev. Global properties of warped solutions in General Relativity with an electromagnetic field and a cosmological constant. II *Phys. Rev. D*, 101 (12):124025, 2020.

[4] D. E. Afanasev and M. O. Katanaev. On global properties of warped solutions in General Relativity with an electromagnetic field and a cosmological constant. *PoS, CORFU2019*, 201, 2020.

Цитируемая литература

[5] В. А. Березин, А. Л. Смирнов. *О черных дырах и замаскированных черных дырах.* – М.: ИЯИ РАН, 2008.

[6] С. Вайнберг. *Гравитация и космология: Принципы и приложения Общей теории относительности.* пер. с англ. В. М. Дубовика и Э. А. Тагирова. Под ред. Я. А. Смородинского. – М.: Мир, 1975.

[7] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. *Современная геометрия: Методы и приложения.* – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1986.– 760 с.

[8] М. О. Катанаев. *Математические основы общей теории относительности. Часть 1* – М.: МИАН, 2017. – 312 с. – (Лекционные курсы НОЦ, ISSN 2226-8782; Вып. 28)

[9] М. О. Катанаев. *Математические основы общей теории относительно-*

сти. Часть 2 – М.: МИАН, 2018. – 366 с. – (Лекционные курсы НОЦ, ISSN 2226-8782; Вып. 29)

[10] М. О. Катанаев. Геометрические методы в математической физике. Ver. 3, 2016. arXiv:1311.0733 [math-ph].

[11] С. П. Новиков, И. А. Тайманов. *Современные геометрические структуры и поля.* – 2-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2014.– 584 с.

[12] И. Д. Новиков, В. П Фролов. *Физика черных дыр.* – М.:Наука, 1986. – 328 с.

[13] А. А. Славнов, Л. Д. Фадеев. *Введение в квантовую теорию калибровочных полей.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1988.– 272 с.

[14] Р. М. Уолд. *Общая теория относительности.* – М.: Российский университет дружбы народов, 2008. – 694 с.

[15] В. А. Фок. *Теория пространства, времени и тяготения.* – М.: Гос. изд-во технико-теорет. л-ры, 1955. – 504 с.

[16] A. Barnes. On Birkhoff's theorem in General Relativity. *Commun. Math. Phys.*, 33, 75–82, 1973.

[17] B. Bertotti. Uniform electromagnetic field in General Relativity. *Phys. Rev.*, 116, 1331–1333, 1959.

[18] G. D. Birkhoff. *Relativity and modern physics.* Cambridge, Harvard University Press, Cambridge, 1923.

[19] C. Bona. A new proof of the generalized Birkhoff theorem. *J. Math. Phys.*, 29, 1440-1441, 1988.

[20] D. R. Brill, J. Louko and P. Peldan. Thermodynamics of (3+1)–dimensional black holes with toroidal or higher genus horizons. *Phys. Rev. D*, 56, 3600—3610, 1997.

[21] D. R. Brill and S. A. Hayward Global structure of a black hole cosmos and its extremes. *Class. Quantum Grav.*, 11, 359—370, 1994.

[22] R.-G. Cai and Y.-Z. Zhang. Black plane solutions in four-dimensional spacetimes. *Phys. Rev. D*, 54, 4891-–4898, 1996.

[23] J. Carot and J. da Costa. On the geometry of warped spacetimes. *Class. Quantum Grav.*, 10, 461–482, 1993.

[24] B. Carter. Black hole equilibrium states. In C. DeWitt and B. C. DeWitt, editors, *Black Holes*, pages 58–214, New York, 1973. Gordon and Breach.

[25] H. Goenner. Einstein tensor and generalizations of Birkhoff's theorem.

Commun. Math. Phys., 16, 34–47, 1970.

[26] J. C. Graves and D. R. Brill Oscillatory character of Reissner–Nordström metric for an ideal charged wormhole. *Phys. Rev.*, 120, 1507—1513, 1960.

[27] J. B.Griffiths, J. Podolsky. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity.* Cambridge University Press, New York, 2009.

[28] G. T. Horowitz. Topology change in classical and quantum gravity. *Class. Quantum Grav.*, 8, 587-601, 1991.

[29] C-G. Huang and C-B. Liang. A torus-like black hole. *Phys. Lett. A*, 201, 27—32, 1995.

[30] M. O. Katanaev, T. Klösch, and W. Kummer. Global properties of warped solutions in General Relativity. *Ann. Phys.*, 276:191–222, 1999.

[31] M. O. Katanaev. Global solutions in gravity. Lorentzian signature. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 228:158–183, 2000.

[32] M. O. Katanaev. Global solutions in gravity: Euclidean signature. In D. Vassilevich D. Grumiller, A. Rebhan, editor, In "Fundumental Interactions. A Memorial Volume for Wolfgang Kummer", pages 249–266, Singapore, 2010. World Scientific. gr-qc/0808.1559.

[33] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, and E. Herlt. *Exact Solutions of the Einsteins Field Equations.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.

[34] M. D. Kruskal. Maximal extension of Schwarzschild metric. *Phys. Rev.*, 119(5):1743–1745, 1960.

[35] H. Nariai. On a new cosmological solution of Einstein's field equations of gravitation. *Sci. Rep. Tohoku Univ.*, 35, 62–67, 1951.

[36] G. Nordström. On the energy of the gravitational field in einstein's theory. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, 20:1238–1245, 1918.

[37] H. Laue and M. Weiss. Maximally extended Reissner–Nordström manifold with cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 16, 3376—3379, 1977.

[38] J. P.S. Lemos. Two-dimensional black holes and planar General Relativity. *Class. Quantum Grav.*, 12, 1081—1086, 1995.

[39] J. P.S. Lemos. Three dimensional black holes and cylindrical General Relativity. *Phys. Lett. B*, 353, 46—51, 1995.

[40] R. B. Mann. Pair production of topological anti-de Sitter black holes. *Class. Quantum Grav.*, 14, L109—L114, 1997.

[41] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.*

Number 103 in Pure Appl. Math. Academic Press, New York-London, 1983.

[42] J. F. Plebanski and S. Hacyan. Some exceptional electrovac type D metrics with cosmological constant. *J. Math. Phys.*, 20, 1004–1010, 1979.

[43] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Ann. Physik (Leipzig)*, 50:106–120, 1916.

[44] I. Robinson. A solution of the Maxwell–Einstein equations. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys.*, 7, 351–352, 1959.

[45] H.-J. Schmidt. The tetralogy of Birkhoff theorems. *Gen. Rel. Grav.*, 45:395–410, 2013.

[46] W. L. Smith and R. B. Mann. Formation of topological black holes from gravitational collapse. *Phys. Rev. D.*, 56, 4942—4947, 1997.

[47] O. Stoica. The geometry of warped product singularities. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14, 2017.

[48] G. Szekeres. On the singularities of a riemannian manifold. *Publ. Mat. Debrecen*, 7(1–4):285–301, 1960.

[49] L. Vanzo. Black holes with unusual topology. *Phys. Rev. D.*, 56, 6475—6483, 1997.

[50] M. Walker. Block Diagrams and the Extension of Timelike Two-Surfaces. *J. Math. Phys.*, 11, 2280, 1970.

[51] H. Weyl. Zur Gravitationstheorie. *Ann. Physik.*, 54(359), 117–145, 1917.