Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Афанасьев Даниил Евгеньевич

Глобальная структура сплетенных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук
Катанаев Михаил Орионович

Москва – 2021

Оглавление

Введение 3

Глава 1. Уравнения общей теории относительности для метрики двойного сплетенного произведения 15

1.1. Действие Эйнштейна-Максвелла 18

1.2. Решение уравнений Максвелла 20

1.3. Уравнения Эйнштейна 22

1.4. Случай (A). Произведение поверхностей постоянной кривизны 24

Глава 2. Случай (B). Пространственно симметричные решения 27

2.1. Локальное решение 28

2.2. Глобальные сферически симметричные решения $K^{(h)} = 1$ . . . 39

2.3. Глобальные планарные решения $K^{(h)} = 0$ 55

2.4. Глобальные гиперболические решения $K^{(h)} = -1$ 62

Глава 3. Случай (C). Лоренц-инвариантные решения 64

3.1. Локальное решение 64

3.2. Глобальные лоренц-инвариантные решения $K^{(g)} = 1$ 69

3.3. Глобальные решения с плоскостью Минковского $K^{(g)} = 0$ . . . 77

Список литературы 83

Введение

Нахождение точных решений уравнений Эйнштейна является одной из центральных задач общей теории относительности. Под точным решением понимают метрику пространства-времени, удовлетворяющую уравнениям Эйнштейна, заданную в локальных координатах. Известно много точных решений в общей теории относительности [47]. Однако для физической интерпретации решения недостаточно знать одну только метрику, удовлетворяющую уравнениям Эйнштейна. Для этих целей требуется также иметь представление о глобальной структуре пространства-времени [2].

Глобальным решением в общей теории относительности мы называем пару $(\mathbb{M}, \widehat{g})$, где $\mathbb{M}$ – четырехмерное пространственно-временное многообразие, $\widehat{g}$ – заданная на нем метрика, удовлетворяющая уравнениям Эйнштейна, и такая, что $\mathbb{M}$ является максимально продолженным вдоль геодезических многообразием. Последнее означает, что всякая геодезическая линия на $\mathbb{M}$ либо может быть продолжена до бесконечного значения канонического параметра в обе стороны, либо заканчивается в сингулярной точке, где один из геометрических инвариантов обращается в бесконечность.

Наиболее известным примером глобального решения в общей теории относительности является расширение Крускала-Секереша для решения Шварцшильда [48, 63]. В этом случае глобальная структура пространства-времени представляет собой произведение, $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$, лоренцевой поверхности $\mathbb{U}$ на двумерную сферу $\mathbb{S}^2$ (сферически симметричный случай). Лоренцева поверхность представляется хорошо известной диаграммой Картера-Пенроуза [21, 65]. Благодаря представлению о глобальной структуре данного решения в общей теории относительности возникли понятия черной и белой дыры [8, 16].

Еще одним примером служит решение Рейсснера-Нордстрема [50, 57, 66], которое представляет собой точное сферически симметричное решение системы уравнений Эйнштейна-Максвелла с нулевой космологической постоянной. В этом случае глобальная структура пространства-времени также изучена [35]. Известно три типа диаграмм Картера-Пенроуза: решение Рейсснера-Нордстрема с двумя горизонтами, экстремальная черная дыра и голая сингулярность. Тип диаграммы зависит от соотношения между массой M и зарядом Q. Обобщение решения Рейсснера-Нордстрема на случай ненулевой космологической

постоянной также известно [38], но глобальная структура пространства-времени в этом случае не была полностью исследована.

В настоящей работе дано явное описание и классификация всех глобальных решений уравнений общей теории относительности с электромагнитным полем и космологической постоянной в предположении, что пространство-время является сплетенным произведением двух поверхностей: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{V}$, где $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ – максимально продолженные поверхности с лоренцевой и евклидовой сигнатурами метрик, соответственно [34, 55, 62]. Также предполагается, что электромагнитный потенциал задан в специальном виде: $\widehat{A} = A_1 \oplus A_2$, где A_1 и A_2 определены на $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$, соответственно. При таких предположениях из уравнений Эйнштейна следует, что хотя бы одна из поверхностей в сплетенном произведении является поверхностью постоянной кривизны. В результате возникает три случая:

(A): обе поверхности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ имеют постоянную кривизну,

(B): только $\mathbb{V}$ имеет постоянную кривизну,

(C): только $\mathbb{U}$ имеет постоянную кривизну.

Все перечисленные случаи подробно рассмотрены в диссертации. Всего мы получили 4, 44, и 19 топологически различных глобальных решений в случаях (A), (B) и (C), соответственно. В частности, здесь дается явное описание и классификация всех (при указанных предположениях) глобальных сферически симметричных решений уравнений общей теории относительности с электромагнитным полем и космологической постоянной в зависимости от значений массы, заряда и космологической постоянной. В результате построено 16 глобальных сферически симметричных решений, среди которых имеются не изученные ранее глобальные решения. Одним из них является глобальное решение с горизонтом третьего порядка, обладающее интересными геометрическими и физическими свойствами. Будет показано, что оно описывает изменение топологии пространственных сечений во времени.

Для универсальных накрывающих поверхностей постоянной кривизны с лоренцевой сигнатурой метрики имеется две возможности: $\mathbb{U}$ является универсальной накрывающей однополостного гиперболоида $\mathbb{L}^2$, $\mathbb{U}$ является плоскостью Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$. Все остальные лоренцевы поверхности постоянной

кривизны возникают как факторпространства этих двух поверхностей по группе преобразований, действующей свободно и собственно разрывно. Следовательно, при $\mathbb{U} = \mathbb{L}^2$ глобальные решения инвариантны относительно действия группы преобразований Лоренца $\mathbb{SO}(1,2)$, при $\mathbb{U} = \mathbb{R}^{1,1}$ – относительно группы преобразований Пуанкаре $\mathbb{ISO}(1,1)$.

Для универсальных накрывающих поверхностей с евклидовой сигнатурой метрики имеется три возможности: $\mathbb{V}$ является двумерной сферой $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{V}$ является евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$ и, наконец, $\mathbb{V}$ является плоскостью Лобачевского $\mathbb{H}^2$. В первом случае возникают глобальные сферически симметричные решения, инвариантные относительно действия группы преобразований $\mathbb{SO}(3)$, во втором случае – глобальные планарные решения, инвариантные относительно действия группы преобразований Пуанкаре $\mathbb{ISO}(2)$, в третьем случае возникают глобальные гиперболические решения, инвариантные относительно действия группы преобразований Лоренца $\mathbb{SO}(1,2)$. Из сказанного следует, что никакая симметрия метрики изначально не предполагается, но возникает в качестве следствия уравнений общей теории относительности. Этот эффект мы называем “спонтанным появлением симметрии”.

Поверхности постоянной кривизны допускают наличие ровно трех векторных полей Киллинга [9, 10, 11]. В случае (A) пространство-время имеет 6 векторов Киллинга. В работе показано, что в случаях (B) и (C) точное решение допускает, помимо трех векторных полей Киллинга на поверхности постоянной кривизны, наличие дополнительного четвертого векторного поля Киллинга на лоренцевой и римановой поверхностях, соответственно.

О возникновении дополнительных векторов Киллинга в общей теории относительности известно давно. Наиболее известным примером является теорема Бирхгоффа, согласно которой любое сферически симметричное решение вакуумных уравнений Эйнштейна должно быть статическим [29]. Имеются обобщения данного утверждения на другие группы симметрий [27, 30, 36, 59]. В диссертации обобщение включает в себя добавление электромагнитного поля, а также утверждение о существовании дополнительного векторного поля Киллинга не только для случая сферической симметрии, но и для решений, инвариантных относительно групп преобразований $\mathbb{ISO}(2)$ и $\mathbb{SO}(1,2)$ в случае (B) и относительно групп преобразований $\mathbb{SO}(1,2)$ и $\mathbb{ISO}(1,1)$ в случае (C).

В связи с веденным нами понятием о спонтанном появлении симметрии,

следует упомянуть теорему Израэля [23, 41, 42]. В ней утверждается, что при определенных ограничениях статическое пространство-время является сферически симметричным решением Шварцшильда или, при наличии электромагнитного поля, сферически симметричным решением Рейсснера-Нордстрема. В частности, Израэль требует, чтобы пространственные сечения пространства-времени были "асимптотически евклидовыми". В нашей работе не делается предположений относительно вида метрики на бесконечности. Более того, мы получаем решения, обладающие не только сферической симметрией. Таким образом, спонтанное появление симметрии является следствием предположений, отличающихся от условий теоремы Израэля. Также отметим, что термин "спонтанное появление симметрии" подчеркивает противоположенный характер данного механизма по отношению к механизму спонтанного нарушения симметрии в теории калибровочных полей [20].

Поскольку поверхности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ в случаях (B) и (C) допускают по одному векторному полю Киллинга, мы можем классифицировать все глобальные решения в рассматриваемой модели. В случае (B) мы приводим классификацию глобальных решений путем построения диаграмм Картера-Пенроуза для лоренцевых поверхностей $\mathbb{U}$ при различных соотношениях между массой M, зарядом Q и космологической постоянной Λ. В случае (C) мы строим поверхности $\mathbb{V}$ в явном виде. Построение полных римановых поверхностей и диаграмм Картера-Пенроуза для лоренцевых поверхностей мы проводим методом конформных блоков [44, 45], применимым для поверхностей, допускающих одно векторное поле Киллинга. Технически метод конформных блоков подразумевает анализ нулей и особенностей конформного множителя, входящего в двумерную часть метрики.

Многие из построенных здесь глобальных решений были изучены ранее. В статье [43] дано явное описание и классификация глобальных решений вакуумных уравнений Эйнштейна с космологической постоянной. В данной диссертации проводится обобщение результатов указанной работы на случай присутствия электромагнитного поля. Также заметим, что полученные в диссертации метрики в случаях (A), (B) и (C) были известны ранее. В частности, они входят в класс метрик Плебанского-Демянского [38].

Перечислим более ранние работы по глобальным решениям. Глобальные решения, являющиеся произведением поверхностей постоянной кривизны (слу-

чай (A)) описаны в работах [28, 49, 56, 58]. Наиболее известным примером здесь является решение Бертотти-Робинсона. Пространство-время в случае данного решения является произведением однополостного гиперболоида и двумерной сферы: $\mathbb{M} = \mathbb{L}^2 \times \mathbb{S}^2$.

Решениям с пространственной симметрией (случай (B)) посвящено много работ. Глобальная структура сферически симметричных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем изучалась в работах [32, 37, 51]. Здесь следует отметить работу Брилла и Хейворда [32], в которой построены глобальные сферически симметричные решения при положительной космологической постоянной. Тем не менее, полнота геодезических не была проанализирована. В частности, в указанной работе не проанализировано решение с горизонтом третьего порядка, описывающее изменение топологии пространственных сечений во времени.

Глобальные планарные, цилиндрические и тороидальные решения изучались в работах [33, 40, 52, 53]. Глобальные гиперболические решения описаны в работах [31, 54, 61, 64]. Глобальные свойства лоренц-инвариантных решений и решений с плоскостью Минковского изучались в уже упомянутой выше статье [43].

Вопрос об изменении во времени топологии пространственных сечений пространственного-временного многообразия обсуждался ранее [39]. Тем не менее, примера глобального решения уравнений Эйнштейна с указанным свойством построено не было. В данной диссертации такое решение построено.

Цель диссертации

Целью диссертации является построение и классификация всех глобальных решений уравнений Эйнштейна-Максвелла с космологической постоянной в предположении, что четырехмерное пространство-время является сплетенным произведением двух поверхностей: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{V}$.

Особый интерес для физики представляют сферически симметричные решения. В сферически симметричном случае четырехмерное пространство-время имеет вид произведения некоторой лоренцевой поверхности и двумерной сферы: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$. Следовательно, цель диссертации подразумевает в том числе построение всех глобальных сферически симметричных решений урав-

нений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной при указанных выше предположениях.

Задачи

Для достижения цели диссертации мы должны решить следующие задачи:

1. Записать уравнения Эйнштейна для метрики сплетенного произведения.
2. Построить общее решение уравнений Максвелла в рассматриваемом случае.
3. Найти общее решение уравнений Эйнштейна для сплетенного произведения двух поверхностей в случаях (A), (B) и (C).
4. Построить все глобальные решения в случаях (A), (B) и (C).
5. Привести физическую интерпретацию найденных решений.

Методы исследования

При написании работы использованы методы дифференциальной геометрии и уравнений в частных производных. Для построения глобальных решений использован метод конформных блоков для построения максимально продолженных лоренцевых и римановых поверхностей, обладающих одним вектором Киллинга [44, 45].

Научная новизна

В данной работе получены следующие новые результаты:

1. Показано, что при указанных выше предположениях из уравнений общей теории относительности следует, что хотя бы одна из поверхностей в сплетенном произведении должна быть поверхностью постоянной кривизны (спонтанное появление симметрии).

2. Дано явное описание и классификация всех глобальных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной при указанных выше предположениях. В частности, дана полная классификация глобальных сферически симметричных решений в рассматриваемом случае.

3. Получено новое глобальное решение с горизонтом третьего порядка, описывающее изменение топологии пространственных сечений во времени на классическом уровне.

Теоретическая и практическая ценность

Данная работа является теоретическим исследованием. Результаты, полученные в диссертации представляют интерес для специалистов, занимающихся общей теорией относительности и гравитацией.

Апробация диссертации

Основные результаты данной диссертации были изложены на следующих научных конференциях и семинарах:

1. *The 17th Russian Gravitational Conference – International Conference on Gravitation, Cosmology and Astrophysics (RUSGRAV-17), June 29 – July 3, 2020, Saint-Petersburg, Russia.* "Global properties of warped solutions in General Relativity with an electromagnetic field and a cosmological constant."

2. *Воркшоп в рамках тематической программы "New Trends in Mathematical Physics", 9 ноября – 11 декабря 2020 г., МИАН, Москва.* "Global properties of spherically symmetric solutions in General Relativity with an Electromagnetic field and a Cosmological Constant."

3. *Семинар отдела математической физики МИАН, МИАН, Москва.* "Глобальная структура сферически симметричных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной", апрель, 2021.

4. *Семинар отдела теоретической физики МИАН, МИАН, Москва.* "Глобальная структура сферически симметричных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной", сентябрь, 2021.

5. *Семинар отдела теоретической физики ИЯИ РАН, ИЯИ, Москва.* "Глобальная структура сплетенных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной", октябрь, 2021.

6. *Семинар по квантовой теории поля ФИАН, ФИАН, Москва.* "Глобальная структура сплетенных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной", ноябрь, 2021.

7. *Семинар кафедры теоретической физики физического факультета МГУ "Современная гравитация", Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва.* "Глобальная структура сплетенных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной", ноябрь, 2021.

Основные публикации

При написании диссертации использовались четыре основные публикации [1, 24, 25, 26], приведенные в конце работы в библиографии.

Основные определения, обозначения и соглашения

Пространством-временем мы называем четырехмерное гладкое многообразие с метрикой лоренцевой сигнатуры [5, 15, 22]. Предполагается, что четырехмерное пространство-время является сплетенным произведением двух поверхностей: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{V}$, где $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ – поверхности с лоренцевой и евклидовой сигнатурами метрик, соответственно. Метрика сплетенного произведения имеет вид:

$$\widehat{g} = kg \oplus mh, \tag{1}$$

где k и m - скалярные поля, заданные на $\mathbb{V}$ и $\mathbb{U}$, соответственно. Метрика g задана на $\mathbb{U}$, метрика h задана на $\mathbb{V}$. Для сплетенного произведения по-

верхностей мы не пользуемся специальными обозначениями и обозначаем его символом "$\times$".

В работе встречаются объекты, заданные как на всем четырехмерном пространстве-времени, так и объекты, заданные только на одном из сомножителей в сплетенном произведении. Первые отмечены шляпкой, вторые записываются без шляпки.

Через $(x^\alpha),\ \alpha = 0, 1$ и $(y^\mu),\ \mu = 2, 3$ обозначены локальные координаты на $\mathbb{U}$ и на $\mathbb{V}$, соответственно. Координаты на $\mathbb{U}$ индексируются буквами из начала греческого алфавита, $\alpha, \beta, ...$, координаты на $\mathbb{V}$ – из середины греческого алфавита, $\mu, \nu, ...$ Координаты на всем $\mathbb{M}$ мы индексируем латинскими буквами $i, j, ...$ и обозначаем через $(\widehat{x}^i),\ i = 0, 1, 2, 3$, причем $(\widehat{x}^i) := (x^\alpha, y^\mu)$.

Глобальным решением мы называем пару $(\mathbb{M}, \widehat{g})$, где $\mathbb{M}$ пространственно-временное многообразие и $\widehat{g}$ метрика на $\mathbb{M}$ такая, что она удовлетворяет уравнениям Эйнштейна, и многообразие $\mathbb{M}$ максимально продолжено вдоль геодезических: всякая геодезическая линия на $\mathbb{M}$ либо может быть продолжена до бесконечного значения канонического параметра в обе стороны, либо заканчивается в сингулярной точке, где один из геометрических инвариантов обращается в бесконечность.

Мы пользуемся следующими определениями символов Кристоффеля, тензора Римана, тензора Риччи и скалярной кривизны [12]:

$$\begin{aligned}
\widehat{\Gamma}_{ij}{}^{k} &:= \frac{1}{2}\widehat{g}^{kr}\left(\partial_i\widehat{g}_{jr} + \partial_j\widehat{g}_{ir} - \partial_r\widehat{g}_{ij}\right), \\
\widehat{R}_{ijk}{}^{r} &:= \partial_i\widehat{\Gamma}_{jk}{}^{r} - \partial_j\widehat{\Gamma}_{ik}{}^{r} - \widehat{\Gamma}_{ik}{}^{s}\widehat{\Gamma}_{js}{}^{r} + \widehat{\Gamma}_{jk}{}^{s}\widehat{\Gamma}_{is}{}^{r}, \\
\widehat{R}_{ij} &:= \widehat{R}_{irj}{}^{r}, \\
\widehat{R} &:= g^{ij}\widehat{R}_{ij}.
\end{aligned}$$

Аналогичные формулы применяются и в случае, когда эти геометрические объекты заданы только на одном из сомножителей сплетенного произведения: только на $\mathbb{U}$ или только на $\mathbb{V}$. При этом достаточно убрать шляпки и заменить латинские индексы $i, j, ...$ на соответствующие индексы начала $\alpha, \beta, ...$ или середины $\mu, \nu, ...$ греческого алфавита.

Мы рассматриваем следующее действие:

$$S = S_{\text{НЕ}} + S_{\text{ЕМ}} = \int d^4\widehat{x}\sqrt{|\widehat{g}|}\left(\widehat{R} - 2\Lambda - \frac{1}{4}\widehat{F}^2\right), \tag{2}$$

где $|\widehat{g}|$ – модуль определителя метрики пространства-времени, Λ – космологическая постоянная и $\widehat{F}^2 := \widehat{F}^{ij}\widehat{F}_{ij}$ – квадрат тензора электромагнитного поля $\widehat{F}_{ij}$ [19]:

$$\widehat{F}_{ij} := \partial_i\widehat{A}_j - \partial_j\widehat{A}_i. \tag{3}$$

Вариация действия по метрике и электромагнитному полю приводит к системе уравнений Эйнштейна-Максвелла:

$$\widehat{R}_{ij} - \frac{1}{2}\widehat{g}_{ij}\widehat{R} + \widehat{g}_{ij}\Lambda = -\frac{1}{2}\widehat{T}_{\text{ЕМ}ij}, \qquad \partial_j\left(\sqrt{|\widehat{g}|}\widehat{F}^{ji}\right) = 0. \tag{4}$$

Если электромагнитный потенциал задан в виде:

$$\widehat{A}_i = \left(A_\alpha(x), A_\mu(y)\right), \tag{5}$$

то смешанные компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля равны нулю: $\widehat{T}_{\alpha\mu} = 0$. Тогда, в правых частях уравнений Эйнштейна со смешанными индексами $(\alpha\mu)$ стоят нули, и возникает три качественно различных случая:

(A) $k = \mathsf{const} \neq 0$ и $m = \mathsf{const} \neq 0$,

(B) $k = \mathsf{const} \neq 0$ и $m \neq \mathsf{const}$,

(C) $k \neq \mathsf{const}$ и $m = \mathsf{const} \neq 0$.

Мы используем следующие обозначения для констант интегрирования уравнений Максвелла и Эйнштейна. Через Q и P обозначены постоянные интегрирования уравнений Максвелла, через M – постоянная интегрирования уравнений Эйнштейна. При этом, постоянные Q и P входят в тензор энергии-импульса электромагнитного поля только как слагаемые в выражении $\left(Q^2 + P^2\right)$. Поэтому, при решении уравнений Эйнштейна, для краткости записи, мы используем замену $\left(Q^2 + P^2\right) \to Q^2$. Поскольку случай $Q = 0$, соответствующий вакуумным уравнениям Эйнштейна, был рассмотрен ранее в работе

[43], мы предполагаем, что $Q \neq 0$. В данной работе мы строим классические решения уравнений Эйнштейна-Максвелла [6, 7, 17].

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие положения:

1. Общее решение уравнений Эйнштейна-Максвелла в случаях (A), (B) и (C). Понятие о спонтанном появлении симметрии.

2. Построение всех глобальных решений в перечисленных выше случаях.

3. Описание свойств полученных глобальных решений. В частности, описание свойств глобального сферически симметричного решения с горизонтом третьего порядка.

Структура, объем и содержание работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Текст занимает 87 страниц и содержит 9 рисунков. Список литературы содержит 66 наименований.

В Главе 1 мы постулируем действие Эйнштейна-Максвелла и записываем систему уравнений Эйштейна-Максвелла для метрики сплетенного произведения. Здесь получено общее решение уравнений Максвелла в предположении, что электромагнитный потенциал задан в виде (5). Также здесь построены глобальные решения уравнений Эйнштейна в случае (A), когда оба скалярных поля k и m постоянны. Показано, что в этом случае обе поверхности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ являются поверхностями постоянной кривизны. Последнее означает, что $\mathbb{U}$ является либо однополостным гиперболоидом $\mathbb{L}^2$, вложенным в трехмерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$ (или его универсальной накрывающей), либо плоскостью Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$, а поверхность $\mathbb{V}$ – либо сферой $\mathbb{S}^2$, либо евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$, либо плоскостью Лобачевского $\mathbb{H}^2$. При этом наличие симметрии метрики заранее не предполагается. Она возникает в качестве следствия уравнений Эйнштейна и требования максимального продолжения решения вдоль геодезических (спонтанное появление симметрии).

В Главе 2 рассматривается случай (B), когда постоянно только поле k. В этом случае только риманова поверхность $\mathbb{V}$ является поверхностью постоянной кривизны (спонтанное появление пространственной симметрии). Мы строим общее решение уравнений Эйнштейна и показываем, что лоренцева поверхность $\mathbb{U}$ обладает дополнительным векторным полем Киллинга (обобщенная теорема Бирхгоффа). Далее мы строим максимально продолженные лоренцевы поверхности $\mathbb{U}$ и представляем их диаграммами Картера-Пенроуза, вид которых зависит от соотношения между параметрами Q, M и Λ. При этом рассматриваются случаи обеих сигнатур $(+---)$ и $(-+++)$.

В Главе 3 разбирается случай (C), когда постоянно только поле m. В этом случае лоренцева поверхность $\mathbb{U}$ является поверхностью постоянной кривизны (спонтанное появление лоренцевой симметрии). Здесь получено общее решение уравнений Эйнштейна и построены соответствующие максимально продолженные римановы поверхности $\mathbb{V}$. Как и в Главе 2 мы рассматриваем случаи обеих сигнатур $(+---)$ и $(-+++)$. Отличительной особенность данного случая является то, что фиксированному набору параметров Q, M и Λ в общем случае соответствует не одно, а несколько глобальных решений, причем с разными сигнатурами метрик.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, Катанаеву Михаилу Орионовичу, за поставленную задачу, помощь и поддержку при написании диссертации.

Глава 1

Уравнения общей теории относительности для метрики двойного сплетенного произведения

Мы считаем, что пространство-время является четырехмерным многообразием $\mathbb{M}$ и представляет собой двойное сплетенное произведение двух поверхностей: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{V}$, где $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ – поверхности с лоренцевой и евклидовой сигнатурами метрик, соответственно. Локальные координаты на $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ мы индексируем греческими буквами из начала и середины алфавита и обозначаем через (x^α) $(\alpha, \beta, ... = 0, 1)$ и (y^μ) $(\mu, \nu, ... = 2, 3)$, соответственно. Локальные координаты на произведении, $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{V}$, мы индексируем латинскими буквами и обозначаем через $(\widehat{x}^i)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. При этом предполагается, что $(\widehat{x}^i) = (x^\alpha, y^\mu)$. Геометрические объекты, заданные на всем четырехмерном многообразии, $\mathbb{M}$, отмечены шляпкой для того, чтобы отличать их от геометрических объектов, заданных только на поверхностях $\mathbb{U}$ или $\mathbb{V}$.

Метрика двойного сплетенного произведения в заданных локальных координатах, по определению, имеет блочно-диагональный вид:

$$\widehat{g}_{ij} = \begin{pmatrix} k(y) g_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & m(x) h_{\mu\nu}(y) \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где $g_{\alpha\beta}$, $h_{\mu\nu}$, $m(x) \neq 0$ и $k(y) \neq 0$ – метрики и скалярные поля (дилатоны), заданные на лоренцевой и римановой поверхностях $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$, соответственно. Не ограничивая общности, можем считать, что сигнатуры метрик $g_{\alpha\beta}$ и $h_{\mu\nu}$ равны $(+-)$ и $(++)$. При этом мы не накладываем никаких ограничений на знаки скалярных полей k и m. Следовательно, сигнатура четырехмерной метрики $\widehat{g}_{ij}$ изначально не фиксирована. В зависимости от знака m сигнатура будет равна либо $(+---)$, либо $(-+++)$ с точностью до перестановки первых двух координат. Метрика (1.1) двойного сплетенного произведения сводится к метрике обычного сплетенного произведения, если положить $k = \mathsf{const}$ или $m = \mathsf{const}$. Также мы считаем, что обе поверхности являются ориентируемыми многообразиями.

Выпишем символы Кристоффеля $\widehat{\Gamma}_{ij}{}^k$, компоненты тензора кривизны $\widehat{R}_{ijk}{}^l$

и тензора Риччи $\widehat{R}_{ij}$, а также скалярную кривизну $\widehat{R}$ метрики (1.1). Метрика $\widehat{g}^{ij}$, обратная к (1.1), имеет вид:

$$\widehat{g}^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} g^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} h^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где $g^{\alpha\beta}$ и $h^{\mu\nu}$ – матрицы, обратные к $g_{\alpha\beta}$ и $h_{\mu\nu}$. Символы Кристоффеля даются формулой:

$$\widehat{\Gamma}_{ij}{}^{k} = \frac{1}{2}\widehat{g}^{kl}\left(\partial_i \widehat{g}_{jl} + \partial_j \widehat{g}_{il} - \partial_l \widehat{g}_{ij}\right). \tag{1.3}$$

Из (1.3) следует симметричность символов Кристоффеля по нижним индексам: $\widehat{\Gamma}_{ij}{}^{k} = \widehat{\Gamma}_{ji}{}^{k}$. Путем прямого вычисления получим следующие выражения для всех линейно независимых символов Кристоффеля:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}, \\
&\widehat{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\mu} = -\frac{1}{2m} g_{\alpha\beta} h^{\mu\nu} \partial_\nu k, \\
&\widehat{\Gamma}_{\alpha\mu}{}^{\gamma} = \widehat{\Gamma}_{\mu\alpha}{}^{\gamma} = \frac{1}{2k} \delta^{\gamma}_{\alpha} \partial_\mu k, \\
&\widehat{\Gamma}_{\alpha\mu}{}^{\nu} = \widehat{\Gamma}_{\mu\alpha}{}^{\nu} = \frac{1}{2m} \delta^{\nu}_{\mu} \partial_\alpha m, \\
&\widehat{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\alpha} = -\frac{1}{2k} h_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\beta m, \\
&\widehat{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ и $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho}$ – символы Кристоффеля для метрик $g_{\alpha\beta}$ и $h_{\mu\nu}$, соответственно.

Компоненты тензора кривизны в локальной системе координат, по определению, равны:

$$\widehat{R}_{ijk}{}^{l} = \partial_i \widehat{\Gamma}_{jk}{}^{l} - \widehat{\Gamma}_{ik}{}^{m} \widehat{\Gamma}_{jm}{}^{l} - \partial_j \widehat{\Gamma}_{ik}{}^{l} + \widehat{\Gamma}_{jk}{}^{m} \widehat{\Gamma}_{im}{}^{l}. \tag{1.5}$$

Из (1.5) следует, что тензор кривизны с контравариантным индексом антисимметричен по первым двум индексам: $\widehat{R}_{ijk}{}^{l} = -\widehat{R}_{jik}{}^{l}$. С учетом сказанного, путем прямого вычисления находим все линейно независимые компоненты тен-

зора кривизны:

$$
\begin{aligned}
\widehat{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} &= R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} + \frac{(\partial k)^2}{4mk}\left(g_{\alpha\gamma}\delta^{\delta}_{\beta} - g_{\beta\gamma}\delta^{\delta}_{\alpha}\right), \\
\widehat{R}_{\alpha\beta\mu}{}^{\delta} &= \frac{\partial_{\mu}k}{4mk}\left(\partial_{\beta}m\delta^{\delta}_{\alpha} - \partial_{\alpha}m\delta^{\delta}_{\beta}\right), \\
\widehat{R}_{\mu\alpha\beta}{}^{\delta} &= \frac{\partial_{\mu}k}{4mk}\left(g_{\alpha\beta}\partial^{\delta}m - \partial_{\beta}m\delta^{\delta}_{\alpha}\right), \\
\widehat{R}_{\alpha\mu\nu}{}^{\delta} &= -h_{\mu\nu}\frac{\nabla_{\alpha}\nabla^{\delta}m}{2k} - \frac{\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}k}{2k}\delta^{\delta}_{\alpha} + h_{\mu\nu}\frac{\partial_{\alpha}m\partial^{\delta}m}{4mk} + \frac{\partial_{m}k\partial_{\nu}k}{4k^2}\delta^{\delta}_{\alpha}, \\
\widehat{R}_{\mu\nu\alpha}{}^{\delta} &= 0, \\
\widehat{R}_{\mu\nu\rho}{}^{\delta} &= \frac{\partial^{\delta}m}{4k^2}\left(h_{\nu\rho}\partial_{\mu}k - h_{\mu\rho}\partial_{\nu}k\right), \\
\widehat{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma} &= \frac{\partial^{\sigma}k}{4m^2}\left(g_{\beta\gamma}\partial_{\alpha}m - g_{\alpha\gamma}\partial_{\beta}m\right), \\
\widehat{R}_{\alpha\beta\mu}{}^{\sigma} &= 0, \\
\widehat{R}_{\alpha\mu\beta}{}^{\sigma} &= g_{\alpha\beta}\frac{\nabla_{\mu}\nabla^{\sigma}k}{2m} + \frac{\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}m}{2m}\delta^{\sigma}_{\mu} - g_{\alpha\beta}\frac{\partial_{\mu}k\partial^{\sigma}k}{4mk} - \frac{\partial_{\alpha}m\partial_{\beta}m}{4m^2}\delta^{\sigma}_{\mu}, \\
\widehat{R}_{\alpha\mu\nu}{}^{\sigma} &= \frac{\partial_{\alpha}m}{4mk}\left(h_{\mu\nu}\partial^{\sigma}k - \partial_{\nu}k\delta^{\sigma}_{\mu}\right), \\
\widehat{R}_{\mu\nu\alpha}{}^{\sigma} &= \frac{\partial_{\alpha}m}{4mk}\left(\partial_{\nu}k\delta^{\sigma}_{\mu} - \partial_{\mu}k\delta^{\sigma}_{\nu}\right), \\
\widehat{R}_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma} &= R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma} + \frac{(\partial m)^2}{4mk}\left(h_{\mu\rho}\delta^{\sigma}_{\nu} - h_{\nu\rho}\delta^{\sigma}_{\mu}\right),
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

где введены обозначения: $\partial^{\alpha}m := g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}m$, $\partial^{\mu}k := h^{\mu\nu}\partial_{\nu}k$, $(\partial m)^2 := g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}m\partial_{\beta}m$ и $(\partial k)^2 := h^{\mu\nu}\partial_{\mu}k\partial_{\nu}k$.

Компоненты тензора Риччи, по определению, равны:

$$
\widehat{R}_{ij} := \widehat{R}_{ikj}{}^{k}. \tag{1.7}
$$

Используя данное определение, а также найденные компоненты тензора кри-

визны (1.6), выпишем компоненты тензора Риччи:

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} + \frac{\nabla_\alpha\nabla_\beta m}{m} - \frac{\nabla_\alpha m\nabla_\beta m}{2m^2} + g_{\alpha\beta}\frac{\nabla^2 k}{2m}, \\
\widehat{R}_{\alpha\mu} &= -\frac{\nabla_\alpha m\nabla_\mu k}{2mk}, \\
\widehat{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + \frac{\nabla_\mu\nabla_\nu k}{k} - \frac{\nabla_\mu k\nabla_\nu k}{2k^2} + h_{\mu\nu}\frac{\nabla^2 m}{2k},
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где ∇ обозначает двумерную ковариантную производную с соответствующими символами Кристоффеля, $R_{\alpha\beta}$ и $R_{\mu\nu}$ – тензоры Риччи поверхностей $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$, соответственно, $\nabla^2 m := g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta m$, $\nabla^2 k := h^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu k$.

Наконец, используя определение:

$$\widehat{R} = \widehat{R}_{ij}\widehat{g}^{ij}, \tag{1.9}$$

вычислим скалярную кривизну четырехмерной метрики двойного сплетенного произведения (1.1):

$$\widehat{R} = \frac{1}{k}R^{(g)} + \frac{2\nabla^2 m}{mk} - \frac{(\nabla m)^2}{2m^2 k} + \frac{1}{m}R^{(h)} + \frac{2\nabla^2 k}{mk} - \frac{(\nabla k)^2}{2mk^2}, \tag{1.10}$$

где $(\nabla m)^2 := g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha m\nabla_\beta m$, $(\nabla k)^2 := h^{\mu\nu}\nabla_\mu k\nabla_\nu k$, $R^{(g)}$ и $R^{(h)}$ – скалярные кривизны поверхностей $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$, соответственно.

1.1. Действие Эйнштейна-Максвелла

Мы рассматриваем модель общей теории относительности с действием вида:

$$S = S_{\text{НЕ}} + S_{\text{ЕМ}} = \int d^4\widehat{x}\sqrt{|\widehat{g}|}\left(\widehat{R} - 2\Lambda - \frac{1}{4}\widehat{F}^2\right), \tag{1.11}$$

где $\widehat{g} := \det\widehat{g}_{ij}$ – определитель четырехмерной метрики $\widehat{g}_{ij}$, Λ – космологическая постоянная, $\widehat{F}^2 := \widehat{F}^{ij}\widehat{F}_{ij}$ – квадрат тензора электромагнитного поля $\widehat{F}_{ij}$:

$$\widehat{F}_{ij} := \partial_i\widehat{A}_j - \partial_j\widehat{A}_i. \tag{1.12}$$

Здесь $\widehat{A}_i$ – компоненты потенциала электромагнитного поля [13]. Для краткости записи, гравитационную и электромагнитную константы связи мы поло-

жили равными единицы.

Вариация действия по метрике приводит к уравнениям Эйнштейна [3]:

$$\widehat{R}_{ij} - \frac{1}{2}\widehat{g}_{ij}\widehat{R} + \widehat{g}_{ij}\Lambda = -\frac{1}{2}\widehat{T}_{\mathrm{EM}ij}, \tag{1.13}$$

где $\widehat{T}_{\mathrm{EM}ij}$ – тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$\widehat{T}_{\mathrm{EM}ij} := -\widehat{F}_{ik}\widehat{F}_j{}^k + \frac{1}{4}\widehat{g}_{ij}\widehat{F}^2. \tag{1.14}$$

Варьируя (1.11) по электромагнитному полю, получим уравнения Максвелла в искривленном пространстве-времени:

$$\partial_j\left(\sqrt{|\widehat{g}|}\widehat{F}^{ji}\right) = 0. \tag{1.15}$$

Определитель $\widehat{g}$ четырехмерной метрики (1.1) можно представить в виде:

$$\widehat{g} = k^2m^2gh, \qquad g := \det g_{\alpha\beta}, \qquad h := \det h_{\mu\nu}. \tag{1.16}$$

Мы будем предполагать, что четырехмерный потенциал электромагнитного поля $\widehat{A}_i$ состоит из двух частей:

$$\widehat{A}_i = \left(A_\alpha(x), A_\mu(y)\right), \tag{1.17}$$

где двумерные потенциалы $A_\alpha(x)$ и $A_\mu(y)$ определены на поверхностях $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$, соответственно. Тогда тензор электромагнитного поля будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\widehat{F}_{ij} = \begin{pmatrix} F_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & F_{\mu\nu}(y) \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

где

$$F_{\alpha\beta} := \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha, \qquad F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{1.19}$$

Заметим, что $A_\alpha(x)$ и $A_\mu(y)$, а следовательно и $F_{\alpha\beta}(x)$ и $F_{\mu\nu}(y)$ образуют тензорные поля на поверхностях $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$, соответственно. Для дальнейших вычислений нам понадобятся контравариантные компоненты тензора электро-

магнитного поля (1.18):

$$\widehat{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{k^2} F^{\alpha\beta}, \qquad \widehat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{m^2} F^{\mu\nu}, \qquad \widehat{F}^{\alpha\mu} = 0. \tag{1.20}$$

Здесь мы использовали обычное правило поднятия тензорных индексов с помощью обратных метрик на многообразиях $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$:

$$F^{\alpha\beta} := g^{\alpha\delta} g^{\beta\varepsilon} F_{\delta\varepsilon}, \qquad F^{\mu\nu} := h^{\mu\rho} h^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{1.21}$$

1.2. Решение уравнений Максвелла

Перейдем к решению уравнений Максвелла (1.15). Следующая теорема устанавливает общее решение этой системы уравнений.

Теорема 1.2.1. *Пусть четырехмерное пространство-время имеет вид двойного сплетенного произведения, $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{V}$, с метрикой (1.1), где $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ – поверхности с лоренцевой и евклидовой сигнатурами метрик, соответственно. Пусть также электромагнитный потенциал имеет вид (1.17). Тогда общее решение уравнений Максвелла (1.15) дается формулами:*

$$F^{\alpha\beta} = \frac{2Q}{|m|} \varepsilon^{\alpha\beta}, \qquad F^{\mu\nu} = \frac{2P}{|k|} \varepsilon^{\mu\nu}, \qquad Q = \mathsf{const}, \qquad P = \mathsf{const}, \tag{1.22}$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta}$ и $\varepsilon^{\mu\nu}$ полностью антисимметричные тензоры второго ранга.

Доказательство. Запишем уравнения (1.15) для индексов $i = \alpha$ и $i = \mu$:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \left(\sqrt{|\widehat{g}|} \widehat{F}^{\alpha\beta} \right) &= 0, \qquad \alpha, \beta = 0, 1, \\ \partial_\mu \left(\sqrt{|\widehat{g}|} \widehat{F}^{\mu\nu} \right) &= 0, \qquad \mu, \nu = 2, 3. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Используя формулы (1.16) и (1.20) распишем первое из уравнений (1.23):

$$\frac{1}{|k|} \sqrt{|h|} \partial_\alpha \left(|m| \sqrt{|g|} F^{\alpha\beta} \right) = 0. \tag{1.24}$$

В силу антисимметричности $F^{\alpha\beta}$, общее решение уравнений (1.24) имеет вид:

$$|m| \sqrt{|g|} F^{\alpha\beta} = 2Q \hat{\varepsilon}^{\alpha\beta}, \tag{1.25}$$

где $Q = \text{const}$ – постоянная интегрирования, $\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta}$ – полностью антисимметричная тензорная плотность второго ранга на многообразии $\mathbb{U}$, ненулевые компоненты которой постоянны и равны по модулю единице.

Вводя полностью антисимметричный тензор второго ранга $\varepsilon^{\alpha\beta} = \hat{\varepsilon}^{\alpha\beta}/\sqrt{|g|}$, перепишем это решение в виде:

$$F^{\alpha\beta} = \frac{2Q}{|m|}\varepsilon^{\alpha\beta}. \tag{1.26}$$

Аналогично, расписывая второе уравнение системы (1.23), получим:

$$\frac{1}{|m|}\sqrt{|g|}\partial_\mu\left(|k|\sqrt{|h|}F^{\mu\nu}\right) = 0. \tag{1.27}$$

Общее решение (1.27) дается формулой:

$$F^{\mu\nu} = \frac{2P}{|k|}\varepsilon^{\mu\nu}, \qquad P = \mathsf{const}, \tag{1.28}$$

где P – постоянная интегрирования, $\varepsilon^{\mu\nu}$ – полностью антисимметричный тензор второго ранга. □

Множитель 2 в общем решении уравнений Максвелла, стоящий перед постоянными интегрирования, введен для упрощения дальнейших вычислений. Постоянные Q и P заранее не вводятся, а возникают в результате интегрирования уравнений Максвелла (1.15). В главе 2 при рассмотрении глобальных сферически симметричных решений будет показано, что они имеют смысл электрического и магнитного зарядов.

Используя (1.26) и (1.28) выпишем компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля (1.14). В нашем случае он имеет блочно-диагональный вид:

$$\widehat{T}_{\mathrm{EM}ij} = \begin{pmatrix} \widehat{T}_{\mathrm{EM}\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \widehat{T}_{\mathrm{EM}\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{1.29}$$

где

$$\widehat{T}_{\mathrm{EM}\alpha\beta} = \frac{2g_{\alpha\beta}}{m^2k}\left(Q^2+P^2\right), \qquad \widehat{T}_{\mathrm{EM}\mu\nu} = -\frac{2h_{\mu\nu}}{mk^2}\left(Q^2+P^2\right) \tag{1.30}$$

Заметим, что постоянные интегрирования Q и P встречаются в уравнениях Эйнштейна (1.13) только в качестве слагаемых в выражении $\left(Q^2+P^2\right)$. Следо-

вательно, мы можем для краткости положить: $P = 0$, или, что эквивалентно, произвести замену $Q^2 + P^2 \to Q^2$. Это не приведет к потере общности, поскольку в дальнейшем при необходимости всегда можно произвести обратную замену $Q^2 \to Q^2 + P^2$.

1.3. Уравнения Эйнштейна

Перейдем к решению уравнений Эйнштейна (1.13). Заметим, что след тензора энергии-импульса электромагнитного поля (1.14) равен нулю $\widehat{T}_i^{\,i} = 0$. Следовательно, вычислив след уравнений (1.13), для скалярной кривизны четырехмерного пространства-времени получим:

$$\widehat{R} = 4\Lambda. \tag{1.31}$$

Исключив скалярную кривизну, уравнения Эйнштейна (1.13) запишем в эквивалентном виде:

$$\widehat{R}_{ij} - \widehat{g}_{ij}\Lambda = -\frac{1}{2}\widehat{T}_{\mathrm{EM}ij}. \tag{1.32}$$

Подставляя в данное уравнение метрику (1.1), тензор Риччи (1.8) и тензор электромагнитного поля (1.30), для индексов $(\alpha\beta)$ и $(\mu\nu)$ получим:

$$R_{\alpha\beta} + \frac{\nabla_\alpha\nabla_\beta m}{m} - \frac{\nabla_\alpha m\nabla_\beta m}{2m^2} + g_{\alpha\beta}\left(\frac{\nabla^2 k}{2m} - k\Lambda + \frac{Q^2}{m^2 k}\right) = 0, \tag{1.33}$$

$$R_{\mu\nu} + \frac{\nabla_\mu\nabla_\nu k}{k} - \frac{\nabla_\mu k\nabla_\nu k}{2k^2} + h_{\mu\nu}\left(\frac{\nabla^2 m}{2k} - m\Lambda - \frac{Q^2}{mk^2}\right) = 0. \tag{1.34}$$

Для дальнейшего анализа выразим след и бесследовую часть уравнений (1.33) и (1.34). В результате мы получим эквивалентную систему уравнений:

$$R^{(g)} + \frac{\nabla^2 m}{m} - \frac{(\nabla m)^2}{2m^2} + \frac{\nabla^2 k}{m} - 2k\Lambda + \frac{2Q^2}{m^2 k} = 0, \tag{1.35}$$

$$R^{(h)} + \frac{\nabla^2 k}{k} - \frac{(\nabla k)^2}{2k^2} + \frac{\nabla^2 m}{k} - 2m\Lambda - \frac{2Q^2}{mk^2} = 0, \tag{1.36}$$

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta m - \frac{\nabla_\alpha m\nabla_\beta m}{2m} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\left(\nabla^2 m - \frac{(\nabla m)^2}{2m}\right) = 0, \tag{1.37}$$

$$\nabla_\mu\nabla_\nu k - \frac{\nabla_\mu k\nabla_\nu k}{2k} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\left(\nabla^2 k - \frac{(\nabla k)^2}{2k}\right) = 0. \tag{1.38}$$

Уравнения (1.37), (1.38) получены с использованием тождеств:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R^{(g)}, \qquad R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} R^{(h)}, \tag{1.39}$$

справедливых в двумерном случае.

Нам осталось выписать уравнение со смешанными индексами $(\alpha\mu)$. Покажем, что оно накладывает сильные ограничения на скалярные поля, входящие в метрику сплетенного произведения. Для этого сформулируем простую, но важную для дальнейшего анализа теорему.

Теорема 1.3.1. *Пусть смешанные компоненты тензора энергии-импульса материи равны нулю:* $\widehat{T}_{\mathrm{EM}\alpha\mu} = 0$, *где* $\alpha = 0, 1$ *и* $\mu = 2, 3$. *Тогда из уравнений Эйнштейна (1.13) следует, что хотя бы одно из скалярных полей* k *и* m, *входящих в метрику (1.1) должно быть постоянным.*

Доказательство. Запишем уравнение (1.32) для смешанных индексов $(\alpha\mu)$. С учетом выражения (1.8) получим равенство:

$$-\frac{\nabla_\alpha m \nabla_\mu k}{2mk} = 0, \tag{1.40}$$

из которого непосредственно следует утверждение теоремы. □

Заметим, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля (1.30) удовлетворяет условию теоремы 1.3.1. В дальнейшем мы увидим, что утверждение теоремы вместе с требованием максимального продолжения решения эквивалентно утверждению, что хотя бы одна из поверхностей $\mathbb{U}$ или $\mathbb{V}$ должна быть геодезически полной поверхностью постоянной кривизны ("спонтанное появление симметрии"). В частности, в рассматриваемый нами класс глобальных решений входят все глобальные сферически симметричные сплетенные решения. Действительно, в сферически симметричном случае пространство-время имеет вид произведения лоренцевой поверхности на двумерную сферу: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$. Это обстоятельство оправдывает выбор электромагнитного потенциала в виде (1.17). В результате мы имеем три качественно различных случая:

(A) $k = \mathsf{const} \neq 0$ и $m = \mathsf{const} \neq 0$,

(B) $k = \mathsf{const} \neq 0$ и $\nabla_\alpha m \neq 0$,

(C) $\nabla_\mu k \neq 0$ и $m = \mathsf{const} \neq 0$.

Уравнения (1.35)–(1.38) вместе с (1.40) образуют полную систему уравнений Эйнштейна. Поскольку во всех случаях (A), (B) и (C) уравнение (1.40) выполнено автоматически, мы можем его отбросить и рассматривать только уравнения (1.35)–(1.38).

Мы детально изучим все три случая, дадим геометрическую и физическую интерпретацию глобальных решений. Начнем с самого простого случая (A).

1.4. Случай (A). Произведение поверхностей постоянной кривизны

В этом случае оба скалярных поля k и m постоянны. Глобальные решения, которые здесь возникают известны [38], и мы приводим их для полноты классификации. Следующая теорема устанавливает, что в этом случае поверхности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ являются поверхностями постоянной кривизны.

Теорема 1.4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.1 и оба скалярных поля k и m постоянны: $k = \mathsf{const} \neq 0$, $m = \mathsf{const} \neq 0$. Тогда поверхности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ являются поверхностями постоянной кривизны.*

Доказательство. Поскольку оба скалярных поля m и k постоянны, уравнения (1.37) – (1.38) выполнены тождественно. Уравнения (1.35), (1.36) можно представить в виде:

$$R^{(g)} = -2K^{(g)}, \qquad K^{(g)} := -k\left(\Lambda - \frac{Q^2}{m^2k^2}\right), \tag{1.41}$$

$$R^{(h)} = -2K^{(h)}, \qquad K^{(h)} := -m\left(\Lambda + \frac{Q^2}{m^2k^2}\right), \tag{1.42}$$

где $K^{(g)}$ и $K^{(h)}$ – гауссовы кривизны поверхностей $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$, соответственно. Из (1.41) и (1.42) сразу следует, что $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ являются поверхностями постоянной кривизны. □

В качестве локальных координат на $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ выбирем стереографические координаты [11]. Тогда метрика четырехмерного пространства-времени, представляющего собой произведение поверхностей постоянной кривизны запишется в виде:

$$\begin{aligned} ds^2 =& k g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + m h_{\mu\nu} dy^\alpha dy^\beta = \\ =& k \frac{dt^2 - dx^2}{\left(1 + \frac{K^{(g)}}{4}\left(t^2 - x^2\right)\right)^2} + m \frac{dy^2 + dz^2}{\left(1 + \frac{K^{(h)}}{4}\left(y^2 + z^2\right)\right)^2}, \end{aligned} \tag{1.43}$$

где $(x^\alpha) =: (t, x)$, $(y^\mu) =: (y, z)$. Рассмотрим случай $k > 0$, $m < 0$, соответствующий сигнатуре $(+---)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Для краткости, будем считать, что $k = 1$, $m = -1$. Выполнения данного условия всегда можно добиться растяжкой координат. Также переобозначим константу интегрирования $Q^2 / \left(k^2 m^2\right) \mapsto Q^2$. Тогда метрика (1.43) запишется в виде:

$$ds^2 = \frac{dt^2 - dx^2}{\left(1 + \frac{K^{(g)}}{4}\left(t^2 - x^2\right)\right)^2} - \frac{dy^2 + dz^2}{\left(1 + \frac{K^{(h)}}{4}\left(y^2 + z^2\right)\right)^2}. \tag{1.44}$$

Гауссовы кривизны поверхностей $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ после проведенной замены равны:

$$K^{(g)} := Q^2 - \Lambda, \qquad K^{(h)} := Q^2 + \Lambda. \tag{1.45}$$

Выпишем все глобальные решения с сигнатурой метрики $(+---)$. Ограничимся случаем $Q^2 \neq 0$, поскольку случай $Q = 0$ был рассмотрен ранее в работе [43]. В зависимости от соотношений между параметрами Q и Λ мы получим четыре топологически различных глобальных решения:

$$\Lambda < -Q^2 : \quad K^{(g)} > 0, \quad K^{(h)} < 0 : \quad \mathbb{M} = \mathbb{L}^2 \times \mathbb{H}^2, \tag{1.46}$$

$$\Lambda = -Q^2 : \quad K^{(g)} > 0, \quad K^{(h)} = 0 : \quad \mathbb{M} = \mathbb{L}^2 \times \mathbb{R}^2, \tag{1.47}$$

$$-Q^2 < \Lambda < Q^2 : \quad K^{(g)} > 0, \quad K^{(h)} > 0 : \quad \mathbb{M} = \mathbb{L}^2 \times \mathbb{S}^2, \tag{1.48}$$

$$Q^2 = \Lambda : \quad K^{(g)} = 0, \quad K^{(h)} > 0 : \quad \mathbb{M} = \mathbb{R}^{1,1} \times \mathbb{S}^2, \tag{1.49}$$

$$Q^2 < \Lambda : \quad K^{(g)} < 0, \quad K^{(h)} > 0 : \quad \mathbb{M} = \mathbb{L}^2 \times \mathbb{S}^2, \tag{1.50}$$

где $\mathbb{R}^{1,1}$ – плоскость Минковского, $\mathbb{R}^2$ – евклидова плоскость, $\mathbb{L}^2$ – однопо-

лостный гиперболоид (в общем случае его универсальная накрывающая), вложенный в трехмерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$, $\mathbb{H}^2$ – плоскость Лобачевского (верхняя пола двуполостного гиперболоида, вложенного в $\mathbb{R}^{1,2}$), $\mathbb{S}^2$ – двумерная сфера. Третье и пятое решения топологически эквивалентны.

Все построенные решения (1.46) – (1.50) обладают шестью векторами Киллинга, и инварианты относительно действия соответствующих групп симметрии. Заметим, что мы заранее не требовали наличия симметрии метрики пространства-времени. Симметрия метрики здесь возникает в качестве следствия уравнений общей теории относительности и требования максимального продолжения решения вдоль геодезических. Данный эффект мы называем “спонтанным появлением симметрии”.

Глава 2

Случай (B). Пространственно симметричные решения

В этой главе мы подробно рассмотрим случай (B). В данном случае скалярные поля удовлетворяют условиям: $k = \mathsf{const} \neq 0, \nabla_\alpha m \neq 0$. Мы покажем, что для разрешимости уравнений Эйнштейна необходимо, чтобы максимально продолженная риманова поверхность $\mathbb{V}$ являлась поверхностью постоянной кривизны.

Максимально продолженные поверхности постоянной кривизны обладают ровно тремя векторными полями Киллинга [11]. Имеется три возможности: $\mathbb{V} = \mathbb{S}^2$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{V} = \mathbb{H}^2$. В результате мы построим глобальные сферически симметричные решения, $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$, обладающие $\mathbb{SO}(3)$–симметрией, глобальные планарные решения, $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{R}^2$, обладающие $\mathbb{ISO}(2)$–симметрией и глобальные гиперболические решения, $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{H}^2$, обладающие $\mathbb{SO}(1,2)$–симметрией. При этом, наличие симметрии метрики изначально не предполагается, симметрия возникает в качестве следствия уравнений общей теории относительности (спонтанное появление симметрии). Также мы покажем, что метрика пространства-времени обладает дополнительным четвертым векторным полем Киллинга на поверхности $\mathbb{U}$. Данный результат можно рассматривать как обобщение известной теоремы Бирхгоффа [29] на случай присутствия электромагнитного поля, а также решений, обладающих $\mathbb{ISO}(2)$ и $\mathbb{SO}(1,2)$–симметриями.

С физической точки зрения особый интерес представляют глобальные сферически симметричные решения: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$. Мы построим 16 глобальных сферически симметричных решений, соответствующих различным значениям параметров M, Q и Λ. Сюда входят как хорошо известные решения, включая решение Рейсснера-Нордстрема с двумя горизонтами, экстремальную черную дыру и голую сингулярность, так и новые. Мы покажем, что существует не изученное ранее глобальное решение, описывающее изменение топологии пространственных сечений пространства-времени с течением времени. В результате мы дадим полную классификацию глобальных сферически симметричных

решений в нашей модели общей теории относительности с электромагнитным полем и космологической постоянной.

2.1. Локальное решение

В данном случае выполнены условия $k = \mathsf{const}$, $m \neq \mathsf{const}$. Как и в случае (A), проведя соответствующую замену координат мы всегда можем добиться выполнения условия $k = \pm 1$. Не ограничивая общности, положим $k = 1$. Тогда система уравнений (1.35) – (1.38) принимает вид:

$$R^{(g)} + \frac{\nabla^2 m}{m} - \frac{(\nabla m)^2}{2m^2} - 2\Lambda + \frac{2Q^2}{m^2} = 0, \tag{2.1}$$

$$R^{(h)} + \nabla^2 m - 2m\Lambda - \frac{2Q^2}{m} = 0, \tag{2.2}$$

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta m - \frac{\nabla_\alpha m \nabla_\beta m}{2m} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left(\nabla^2 m - \frac{(\nabla m)^2}{2m} \right) = 0. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.1 и $k = \mathsf{const} \neq 0$. Тогда для разрешимости уравнений Эйнштейна необходимо, чтобы риманова поверхность $\mathbb{V}$ являлась поверхностью постоянной кривизны.*

Доказательство. В уравнении (2.2) скалярная кривизна $R^{(h)}$ зависит только от координат (y^μ) на римановой поверхности $\mathbb{V}$, в то время как скалярное поле m зависит только от координат (x^α) на лоренцевой поверхности $\mathbb{U}$. Сумма двух функций, зависящих от разных переменных, может равняться нулю только в случае, если эти функции постоянны. Следовательно, для того, чтобы уравнение (2.2) удовлетворялось, необходимо выполнение условия: $R^{(h)} = \mathsf{const}$. Это означает, что риманова поверхность $\mathbb{V}$ является поверхностью постоянной кривизны. □

В зависимости от значений гауссовой кривизны поверхность $\mathbb{V}$ будет представлять собой сферу $\mathbb{S}^2$, евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ или плоскость Лобачевского $\mathbb{H}^2$. Таким образом, четырехмерное пространство-время обладает по крайней мере тремя векторами Киллинга. Мы видим, что симметрия метрики пространства-времени является следствием уравнений Эйнштейна. Следовательно, мы имеем “спонтанное появление симметрии”.

Вводя обозначение $R^{(h)} := -2K^{(h)}$, перепишем (2.2) в виде:

$$\nabla^2 m - 2K^{(h)} - 2m\Lambda - \frac{2Q^2}{m} = 0. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1.1. *Уравнение (2.1) является следствием уравнений (2.4) и (2.3).*

Доказательство. Продифференцируем уравнение (2.4):

$$\nabla_\alpha \left(\nabla^2 m\right) - 2\Lambda \nabla_\alpha m + \frac{2Q^2}{m^2}\nabla_\alpha m = 0. \tag{2.5}$$

Преобразуем первое слагаемое в левой части данного уравнения. Чтобы поменять порядок дифференцирования, воспользуемся формулой:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]\, A_\gamma = -R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} A_\delta, \tag{2.6}$$

справедливой для любого ковекторного поля A_γ. Учитывая антисимметрию тензора кривизны по последним двум индексам, а также равенство (1.39), получим:

$$\nabla_\alpha \left(\nabla^2 m\right) = \frac{1}{2} R^{(g)} \nabla_\alpha m + g^{\beta\gamma} \nabla_\beta \nabla_\alpha \nabla_\gamma m. \tag{2.7}$$

Выразим $\nabla_\alpha \nabla_\gamma m$ из уравнения (2.3) и подставим во второе слагаемое в выражении (2.7). После некоторых алгебраических преобразований получим

$$\nabla_\alpha \left(\nabla^2 m\right) = \left(R^{(g)} + \frac{\nabla^2 m}{m} - \frac{(\nabla m)^2}{2m^2}\right) \nabla_\alpha m. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.5) получим уравнение:

$$\left(R^{(g)} + \frac{\nabla^2 m}{m} - \frac{(\nabla m)^2}{2m^2} - 2\Lambda + \frac{2Q^2}{m^2}\right) \nabla_\alpha m = 0, \tag{2.9}$$

из которого при условии $m \neq \mathsf{const}$ следует уравнение (2.1). □

Согласно утверждению 2.1.1 достаточно решить только уравнения (2.3) и (2.4). Уравнение (2.1) выполняется автоматически, как только выполнены уравнения (2.3) и (2.4).

Перейдем к решению уравнений (2.3), (2.4). Для этого зафиксируем конформную калибровку метрики $g_{\alpha\beta}$ на лоренцевой поверхности $\mathbb{U}$. Тогда интер-

вал в координатах светового конуса запишется в виде:

$$ds^2_{\mathbb{U}} = \Phi(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{2.10}$$

где $\Phi(\xi,\eta) \neq 0$ – конформный множитель, зависящий от координат светового конуса ξ, η. Временна́я τ и пространственная σ координаты выражаются через координаты светового конуса по формулам:

$$\tau = \frac{1}{2}(\xi+\eta), \qquad \sigma = \frac{1}{2}(\xi-\eta). \tag{2.11}$$

Конформная калибровка для двумерной метрики (2.10) определена с точностью до конформных преобразований: $\xi,\eta \to F(\xi), G(\eta)$. При этом конформный множитель преобразуется по правилу $\Phi \to \Phi/(F'G')$. Метрика $g_{\alpha\beta}$ и обратная к ней $g^{\alpha\beta}$ в конформной калибровке в координатах светового конуса равны:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\Phi}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad g^{\alpha\beta} = \frac{2}{\Phi}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Интервал четырехмерного пространства-времени имеет вид:

$$ds^2 = \Phi d\xi d\eta + m d\Omega^2, \tag{2.12}$$

где $d\Omega^2$ – метрика на римановой поверхности $\mathbb{V}$ постоянной кривизны. Знак конформного множителя Φ мы в начале не фиксируем.

При $\Phi > 0$ и $m < 0$ сигнатура метрики (2.12) равна $(+--\,-)$. Если изменить знак скалярного поля m, сигнатура станет равна $(+--\,+)$. Аналогичное преобразование сигнатуры получается при изменении общего знака метрики $\widehat{g}_{ij} \mapsto -\widehat{g}_{ij}$ с последующей перестановкой первых двух координат $\tau \leftrightarrow \sigma$. Уравнения Эйнштейна (1.32) с электромагнитным полем и космологической постоянной не инвариантны относительно указанных преобразований с одновременным изменением знака космологической постоянной, поскольку при этом изменится знак правой части. Следовательно, мы должны рассмотреть два случая:

$$m < 0 \Leftrightarrow \mathsf{sign}\,\widehat{g}_{ij} = (+---), \qquad m > 0 \Leftrightarrow \mathsf{sign}\,\widehat{g}_{ij} = (-+++). \tag{2.13}$$

Заметим, что в общей теории относительности оба выбора сигнатур считаются эквивалентными. Действительно, изменение сигнатуры $(+---) \to (-+++)$ соответствует преобразованию: $\widehat{g}_{ij} \to -\widehat{g}_{ij}$. Действие (1.11) инвариантно относительно преобразования: $\left(\widehat{g}_{ij}, \widehat{R}\right) \to \left(-\widehat{g}_{ij}, -\widehat{R}\right)$. Следовательно, если изменение сигнатуры метрики на противоположенную сопровождается изменением знака в действии перед скалярной кривизной, $\widehat{R}$, то оба выбора сигнатур окажутся эквивалентными. Это означает, что в обоих случаях мы получим одни и те же решения (с точностью до изменения сигнатуры метрики). В нашем случае изменение сигнатуры возникает естественным образом в результате изменения знака скалярного поля m. При этом знаки в действии остаются фиксированными. Таким образом, изменив знак скалярного поля m, мы получим новые решения.

2.1.1. Сигнатура $(+---)$. Локальное решение

Рассмотрим случай $m < 0$, соответствующий сигнатуре $(+---)$. Введем параметризацию:

$$m = -q^2, \qquad q(\xi, \eta) > 0. \tag{2.14}$$

Ненулевые символы Кристоффеля для метрики (2.10) равны:

$$\Gamma_{\xi\xi}{}^{\xi} = \frac{\partial_\xi \Phi}{\Phi}, \qquad \Gamma_{\eta\eta}{}^{\eta} = \frac{\partial_\eta \Phi}{\Phi}. \tag{2.15}$$

Уравнения (2.3) со смешанными индексами (ξ, η) выполнены тождественно. В результате уравнения (2.3), (2.4), принимают вид:

$$-\partial^2_{\xi\xi} q + \frac{\partial_\xi \Phi \partial_\xi q}{\Phi} = 0, \tag{2.16}$$

$$-\partial^2_{\eta\eta} q + \frac{\partial_\eta \Phi \partial_\eta q}{\Phi} = 0, \tag{2.17}$$

$$-2\frac{\partial^2_{\xi\eta} q^2}{\Phi} - K^{(h)} + q^2\Lambda + \frac{Q^2}{q^2} = 0. \tag{2.18}$$

Таким образом, система уравнений (2.1)–(2.3) в конформной калибровке сводиться к трем уравнениям (2.16)–(2.18) на две неизвестные функции $\Phi(\xi, \eta)$ и $q(\xi, \eta)$. Эта система уравнений может быть проинтегрирована в явном виде.

Лемма 2.1.2. *Из уравнения (2.18) при условии* $q \neq \mathsf{const}$ *следует, что* $\partial_\xi q \neq 0$ *и* $\partial_\eta q \neq 0$.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Предположим, что $\partial_\xi q = 0$. Тогда из уравнения (2.18) следует, что q является корнем алгебраического уравнения

$$-K^{(h)} + q^2\Lambda + \frac{Q^2}{q^2} = 0.$$

Следовательно, выполнено условие $q = \mathsf{const}$. Аналогично рассматривается случай, когда $\partial_\xi q = 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость леммы. □

Лемма 2.1.2 устанавливает, что если $q \neq \mathsf{const}$, то одновременно $\partial_\xi q \neq 0$ и $\partial_\eta q \neq 0$. Случай $q = \mathsf{const}$ соответствует случаю (A), рассмотренному выше. Поэтому, будем считать, что $\partial_\xi q \neq 0$ и $\partial_\eta q \neq 0$.

Проинтегрируем первые два уравнения системы (2.16)–(2.18). Для этого разделим уравнения (2.16), (2.17) на $\partial_\xi q$ и $\partial_\eta q$, соответственно. Тогда после интегрирования получим равенства:

$$-\ln|\partial_\xi q| + \ln|\Phi| = \widetilde{G}(\eta), \tag{2.19}$$

$$-\ln|\partial_\eta q| + \ln|\Phi| = \widetilde{F}(\xi), \tag{2.20}$$

где $\widetilde{G}(\eta)$ и $\widetilde{F}(\xi)$ – произвольные функции, смысл которых станет ясен из дальнейшего анализа. Зададим монотонные функции $G(\eta)$, $F(\xi)$ с помощью дифференциальных уравнений

$$G' := \frac{dG}{d\eta} = Ce^{\widetilde{G}} > 0, \qquad F' := \frac{dF}{d\xi} = Ce^{\widetilde{F}} > 0, \tag{2.21}$$

где $C > 0$ – некоторая положительная постоянная. Для дальнейшего анализа нам потребуется разность уравнений (2.19) и (2.20). С учетом (2.21) имеем:

$$\frac{|\partial_\xi q|}{F'} = \frac{|\partial_\eta q|}{G'} \tag{2.22}$$

Произведем замену координат $\xi, \eta \to F(\xi), G(\eta)$, где F и G определяются уравнениями (2.21). Это всегда можно сделать, поскольку якобиан данного преобразования отличен от нуля $J = F'G' \neq 0$.

Лемма 2.1.3. *Уравнения (2.16) – (2.18) ковариантны относительно конформных преобразований:*

$$\xi, \eta \to F(\xi), G(\eta), \qquad \Phi \to \widetilde{\Phi} := \frac{\Phi}{F'G'} \tag{2.23}$$

Доказательство. Запишем частные производные $\partial_\xi q$, $\partial^2_{\xi\xi} q$ в новых координатах:

$$\partial_\xi q = F' \partial_F q, \qquad \partial^2_{\xi\xi} q = F'^2 \partial^2_{FF} q + F'' \partial_F q. \tag{2.24}$$

Частная производная конформного множителя $\partial_\xi \Phi$ запишется в виде:

$$\partial_\xi \Phi = F'^2 G' \partial_F \widetilde{\Phi} + F'' G' \widetilde{\Phi}. \tag{2.25}$$

Подставляя (2.24), (2.25) в уравнение (2.16), получим:

$$-\partial^2_{FF} q + \frac{\partial_F \widetilde{\Phi} \partial_F q}{\widetilde{\Phi}} = 0. \tag{2.26}$$

Ковариантность уравнения (2.17) доказывается аналогично. Для доказательства ковариантности уравнения (2.18) выразим смешанную частную производную $\partial^2_{\xi\eta} q^2$ в новых координатах:

$$\partial^2_{\xi\eta} q^2 = F' G' \partial^2_{FG} q^2. \tag{2.27}$$

Подставляя (2.27) в уравнение (2.18), с учетом закона преобразования конформного множителя, $\Phi = F'G'\widetilde{\Phi}$, получим:

$$-2\frac{\partial^2_{FG} q^2}{\widetilde{\Phi}} - K^{(h)} + q^2 \Lambda + \frac{Q^2}{q^2} = 0. \tag{2.28}$$

□

Таким образом, произвольные функции $\widetilde{G}(\eta)$ и $\widetilde{F}(\xi)$, возникающие в результате интегрирования уравнений (2.16), (2.17) соответствуют конформным преобразованиям.

Лемма 2.1.4. *Если $\partial_\xi q \partial_\eta q > 0$, то в новых координатах функция q будет зависеть только от временно́й координаты $\tau := \frac{1}{2}(F + G)$. Если $\partial_\xi q \partial_\eta q < 0$, то*

q будет зависеть только от пространственной координаты $\sigma := \frac{1}{2}(F - G)$.

Доказательство. Пусть $\partial_\xi q \partial_\eta q > 0$. Покажем, что $\partial_\sigma q = 0$. Действительно, учитывая монотонность функций (2.21) и равенство (2.22), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial (F-G)} = \partial_\xi q \frac{\partial \xi}{\partial (F-G)} + \partial_\eta q \frac{\partial \eta}{\partial (F-G)} = \\ = \partial_\xi q \frac{\partial \xi}{\partial F} - \partial_\eta q \frac{\partial \eta}{\partial G} = \frac{\partial_\xi q}{F'} - \frac{\partial_\eta q}{G'} = 0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Пусть теперь $\partial_\xi q \partial_\eta q > 0$. Покажем, что $\partial_\tau q = 0$. Учитывая, что модули в равенстве (2.22) в данном случае раскрываются с разными знаками, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial (F+G)} = \partial_\xi q \frac{\partial \xi}{\partial (F+G)} + \partial_\eta q \frac{\partial \eta}{\partial (F+G)} = \\ = \partial_\xi q \frac{\partial \xi}{\partial F} + \partial_\eta q \frac{\partial \eta}{\partial G} = \frac{\partial_\xi q}{F'} + \frac{\partial_\eta q}{G'} = 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

□

Теперь каждое из уравнений (2.19) и (2.20) приводят к одному и тому же равенству:

$$|q'| = 2C \frac{|\Phi|}{F'G'}, \tag{2.31}$$

где q' обозначает производную либо по временно́й τ, либо по пространственной координате σ. Из (2.22) следует, что постоянная C отвечает за растяжение координат F и G. Для упрощения формул положим $C = 1/2$. После конформного преобразования (2.23) равенство (2.31) запишется в более простом виде:

$$|q'| = |\Phi|, \tag{2.32}$$

где для упрощения записи мы опустили знак тильды над конформным множителем.

Проанализируем полученный результат. Мы показали, что всегда существует такая система координат, в которой решением системы уравнений (2.16)–(2.18) является пара (Φ, q), где функции $\Phi = \Phi(\zeta)$ и $q = q(\zeta)$ зависят либо

только от временно́й, либо только от пространственной координаты:

$$\zeta = \begin{cases} \tau := \frac{1}{2}(\xi + \eta), \text{ если } \partial_\xi q \partial_\eta q > 0, \\ \sigma := \frac{1}{2}(\xi - \eta), \text{ если } \partial_\xi q \partial_\eta q < 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

При этом равенство (2.32) задает общее решение уравнений (2.16), (2.17) с точностью до конформных преобразований (2.23). Таким образом, двумерная метрика (2.10), заданная на лоренцевой поверхности обладает дополнителным векторным полем Киллинга ∂_σ или ∂_τ. Соответствующие решения мы будем называть однородными или статическими. Данный результат является обобщением теоремы Бирхгоффа [29]. Обобщение включает электромагнитное поле, а также подразумевает существование дополнительного векторного поля Киллинга не только для сферически симметричных решений $\left(K^{(h)} = 1\right)$, но и для решений, инвариантных относительно действия групп преобразований $\mathbb{ISO}(2)$ $\left(K^{(h)} = 0\right)$ и $\mathbb{SO}(1,2)$ $\left(K^{(h)} = -1\right)$. В силу важности данного результата сформулируем его в виде отдельной теоремы.

Теорема 2.1.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.1 и* $k = \mathsf{const} \neq 0$. *Тогда решение уравнений Эйнштейна (1.13) должно быть либо однородным, либо статическим.*

Приступим к решению уравнения (2.18). В однородном $q = q(\sigma)$ и статическом $q = q(\tau)$ случаях уравнение (2.18) записывается в виде:

$$\left(q^2\right)'' = -2\Phi\left(K^{(h)} - q^2\Lambda - \frac{Q^2}{q^2}\right), \qquad q = q(\tau), \tag{2.34}$$

$$\left(q^2\right)'' = \quad 2\Phi\left(K^{(h)} - q^2\Lambda - \frac{Q^2}{q^2}\right), \qquad q = q(\sigma). \tag{2.35}$$

Рассмотрим статический случай $q = q(\sigma)$. Предположим, что $q' > 0$ и $\Phi > 0$. Тогда, с учетом (2.32), уравнение (2.34) примет вид:

$$\left(q^2\right)'' = 2q'\left(K^{(h)} - q^2\Lambda - \frac{Q^2}{q^2}\right). \tag{2.36}$$

Интегрируя уравнение (2.36) получим:

$$\left(q^2\right)' = 2\left(K^{(h)}q - 2M - \frac{\Lambda q^3}{3} + \frac{Q^2}{q}\right), \tag{2.37}$$

где M – константа интегрирования. Вычислив производную в левой части (2.37) и затем разделив обе части на $2q > 0$, получим:

$$q' = K^{(h)} - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3} + \frac{Q^2}{q^2}. \tag{2.38}$$

Поскольку в рассматриваемом случае $q' = \Phi$, уравнение (2.38) позволяет выразить конформный множитель через переменную q:

$$\Phi(q) = K^{(h)} - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3} + \frac{Q^2}{q^2}. \tag{2.39}$$

В статическом случае $q = q(\sigma)$ при $q' < 0$ и $\Phi > 0$ аналогичное интегрирование приводит к равенству:

$$q' = -\Phi, \tag{2.40}$$

где конформный множитель Φ дается тем же выражением (2.39). Решение в рассмотренных двух случаях мы можем записать в виде одного равенства:

$$|q'| = \Phi, \qquad q = q(\sigma), \qquad \Phi > 0. \tag{2.41}$$

В однородном случае $q = q(\tau)$ аналогичный анализ позволяет записать решение уравнений Эйнштейна в виде:

$$|q'| = \hat{\Phi}(q), \qquad q = q(\tau), \qquad \hat{\Phi} > 0, \tag{2.42}$$

где конформный множитель

$$\hat{\Phi} = -\left(K^{(h)} - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3} + \frac{Q^2}{q^2}\right) \tag{2.43}$$

отмечен шляпкой и отличается от (2.39) знаком $\hat{\Phi} = -\Phi$

Случай отрицательного конформного множителя рассматривается анало-

гично. При $q = q(\sigma)$ и $q = q(\tau)$ мы получим решения:

$$|q'| = -\Phi, \qquad q = q(\sigma), \qquad \Phi < 0, \tag{2.44}$$

$$|q'| = -\hat{\Phi}, \qquad q = q(\tau), \qquad \hat{\Phi} < 0. \tag{2.45}$$

Сигнатура четырехмерной метрики (2.12) при отрицательных значениях конформного множителя равна $(- + --)$. Если провести замену $\tau \leftrightarrow \sigma$, то мы вернемся к прежней сигнатуре $(+ - --)$. Указанную замену необходимо провести также в формулах (2.44) – (2.45). С учетом сказанного перепишем решения (2.41), (2.42), (2.44) – (2.45) в виде:

$$\begin{aligned} |q'| &= \Phi, \qquad q = q(\sigma), \qquad \Phi > 0, \\ |q'| &= -\Phi, \qquad q = q(\tau), \qquad \Phi < 0, \end{aligned} \tag{2.46}$$

где $\Phi = \Phi(q)$ определяется выражением (2.39).

Проведенные рассуждения вместе с равенством $\hat{\Phi} = -\Phi$ позволяют нам объединить статическое и однородное решения. Для этого мы поставим конформный множитель под знак модуля в выражении для метрики (2.12). Сформулируем результат в виде теоремы:

Теорема 2.1.3. *Существует система координат, в которой общее решение уравнений Эйнштейна (1.13) с электромагнитным полем (1.17) для метрики сплетенного произведения (1.1) при $k = \mathsf{const} \neq 0$ и $m < 0$ имеет вид:*

$$ds^2 = |\Phi(q)| \left(d\tau^2 - d\sigma^2\right) - q^2 d\Omega^2, \tag{2.47}$$

где $m =: -q^2$ и конформный множитель $\Phi(q)$ дается выражением (2.39). Переменная q при этом зависит либо только от пространственной координаты σ (статическое локальное решение), либо только от временной координаты τ (однородное локальное решение) и определяется дифференциальным уравнением:

$$\left|\frac{dq}{d\zeta}\right| = \pm\Phi(q), \tag{2.48}$$

где выполнено правило знаков:

$$\begin{aligned} \Phi > 0: &\qquad \zeta = \sigma, &\qquad \textit{знак} \quad +, \\ \Phi < 0: &\qquad \zeta = \tau, &\qquad \textit{знак} \quad -\,. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Чтобы показать нетривиальность полученного решения (2.47) – (2.48) вычислим скалярную кривизну, $R^{(g)}$. Из уравнений (2.1) и (2.4), с учетом параметризации $m = -q^2$, следует выражение для скалярной кривизны метрики $g_{\alpha\beta}$:

$$R^{(g)} = \frac{2K^{(h)}}{q^2} + \frac{2\left(\nabla q\right)^2}{q^2} - \frac{4Q^2}{q^4}. \tag{2.50}$$

Распишем числитель второго слагаемого:

$$\left(\nabla q\right)^2 = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha q \partial_\beta q = \frac{1}{\Phi}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha q \partial_\beta q = \frac{1}{\Phi}\left(\partial_\tau q\right)^2 - \frac{1}{\Phi}\left(\partial_\sigma q\right)^2. \tag{2.51}$$

В статическом $q = q(\sigma)$ и однородном $q = q(\tau)$ случаях конформный множитель Φ дается выражениями (2.39) и (2.43), соответственно. Следовательно, в обоих случаях получим:

$$\left(\nabla q\right)^2 = -\frac{(q')^2}{\Phi}, \tag{2.52}$$

где Φ определяется выражением (2.39) и штрих обозначает производную по σ или по τ. Отсюда следует, что скалярная кривизна $R^{(g)}$ равна:

$$R^{(g)} = \frac{2\Lambda}{3} + \frac{4M}{q^3} - \frac{2Q^2}{q^4}. \tag{2.53}$$

Она не зависит от гауссовой кривизны $K^{(h)}$ римановой поверхности $\mathbb{V}$ и сингулярна в точке $q = 0$ при $M \neq 0$ и/или $Q \neq 0$.

2.1.2. Сигнатура $(-+++)$. Локальное решение

При $m > 0$ сигнатура метрики пространства-времени равна $(-+++)$. Данный случай рассматривается аналогично случаю $m < 0$. Общее решение уравнений Эйнштейна дается следующей теоремой.

Теорема 2.1.4. *Существует система координат, в которой общее решение уравнений Эйнштейна (1.13) с электромагнитным полем (1.17) для метрики*

сплетенного произведения (1.1) при $k = \mathsf{const} \neq 0$ *и* $m > 0$ *имеет вид:*

$$ds^2 = |\Phi(q)| \left(d\tau^2 - d\sigma^2\right) + q^2 d\Omega^2, \tag{2.54}$$

где $m =: q^2$ *и конформный множитель* $\Phi(q)$ *дается выражением:*

$$\Phi(q) = K^{(h)} - \frac{2M}{q} + \frac{\Lambda q^2}{3} - \frac{Q^2}{q^2}, \qquad M = \mathsf{const}. \tag{2.55}$$

Переменная q *при этом зависит либо только от пространственной координаты* σ *(статическое локальное решение), либо только от временной координаты* τ *(однородное локальное решение) и определяется уравнением*

$$\left|\frac{dq}{d\zeta}\right| = \pm\Phi(q), \tag{2.56}$$

где выполнено правило знаков

$$\begin{aligned} &\Phi > 0: \qquad \zeta = \sigma, \qquad \textit{знак} \quad +, \\ &\Phi < 0: \qquad \zeta = \tau, \qquad \textit{знак} \quad -\,. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Заметим, что конформный множитель (2.55) получается из (2.39) путем замены $\Lambda \to -\Lambda$, $Q^2 \to -Q^2$. Теперь мы можем перейти к построению глобальных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной.

2.2. Глобальные сферически симметричные решения $K^{(h)} = 1$

Построение глобальных решений начнем с наиболее интересного с физической точки зрения сферически симметричного случая. Четырехмерное пространство-время в данном случае имеет вид: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{S}^2$, где $\mathbb{U}$ – максимально продолженная лоренцева поверхность, которую мы будем представлять диаграммой Картера-Пенроуза. Наличие на $\mathbb{U}$ векторного поля Киллинга позволяет классифицировать все глобальные решения. Построение диаграмм Картера-Пенроуза мы проводим методом конформных блоков для лоренцевых поверх-

ностей, допускающих одно векторное поле Киллинга [44]. Метод конформных блоков в нашем случае сводиться к определению типа и количества нулей и полюсов конформного множителя (2.39) при $K^{(h)} = 1$. Поскольку знание точного положения нулей конформного множителя не является необходимым, мы ограничимся качественным исследованием поведения конформного множителя.

2.2.1. Сигнатура $(+---)$. Сферически симметричные решения

Рассмотрим решения с сигнатурой метрики $(+---)$. Тогда метрика на $\mathbb{M}$ задается выражением (2.47), где $d\Omega^2$ – метрика сферы $\mathbb{S}^2$. В данном случае при $\Phi > 0$ метрика пространства-времени в координатах Шварцшильда $(\tau, q, \theta, \varphi)$ имеет вид:

$$ds^2 = \Phi(q)d\tau^2 - \frac{dq^2}{\Phi(q)} - q^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{2.58}$$

где конформный множитель задан уравнением:

$$\Phi(q) = 1 - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3} + \frac{Q^2}{q^2}. \tag{2.59}$$

Как и в случае (A), мы будем рассматривать решения, соответствующие ненулевым значениям заряда, $Q^2 \neq 0$, и, не ограничивая общности, будем считать, что $Q > 0$.

Глобальные свойства решений зависят от поведения конформного множителя. Мы строим максимально продолженные вдоль геодезических решения, соответствующие положительному интервалу $(q_-; q_+) = (0; +\infty)$. В точке $q = 0$ скалярная кривизна (2.53) имеет сингулярность, и решение через данную точку не продолжается. Нули конформного множителя соответствуют горизонтам пространства-времени. Количество и тип нулей и полюсов определяют вид диаграмм Картера-Пенроуза. Построение глобальных решений в рассматриваемом случае сводиться к определению количества и типа нулей и полюсов конформного множителя (2.59) при $q > 0$ и при всех возможных значениях параметров M, Λ и Q.

Конформный множитель (2.59) имеет полюс второго порядка в нуле:

$$\Phi \approx \frac{Q^2}{q^2}, \qquad q \to 0. \tag{2.60}$$

На бесконечности Φ имеет асимптотику:

$$\Phi \approx 1 - \frac{\Lambda q^2}{3}, \qquad q \to \infty. \tag{2.61}$$

Следовательно, при нулевой космологической постоянной пространство-время является асимптотически плоским, при положительных и отрицательных значениях космологической постоянной мы получим асимптотически пространство-время де Ситтера и анти-де Ситтера, соответственно.

Заметим, что конформный множитель (2.59) инвариантен относительно одновременной замены:

$$M \to -M, \qquad q \to -q.$$

Следовательно, вместо того, чтобы рассматривать корни $\Phi(q)$ на положительной полуоси, $q > 0$, при всех M, мы можем ограничиться случаем неотрицательных значений массы: $M \geq 0$. При этом мы должны рассматривать поведение $\Phi(q)$ также и при $q < 0$. Глобальные решения, возникающие при $M < 0$, будут соответствовать отрицательному интервалу $q \in (-\infty; 0)$.

Корни конформного множителя (2.59) совпадают с корнями уравнения:

$$\phi(q) + 3Q^2 = 0, \tag{2.62}$$

где мы ввели вспомогательную функцию:

$$\phi(q) := -\Lambda q^4 + 3q^2 - 6Mq. \tag{2.63}$$

Рассмотрим отдельно три случая: $\Lambda = 0$, $\Lambda > 0$ и $\Lambda < 0$.

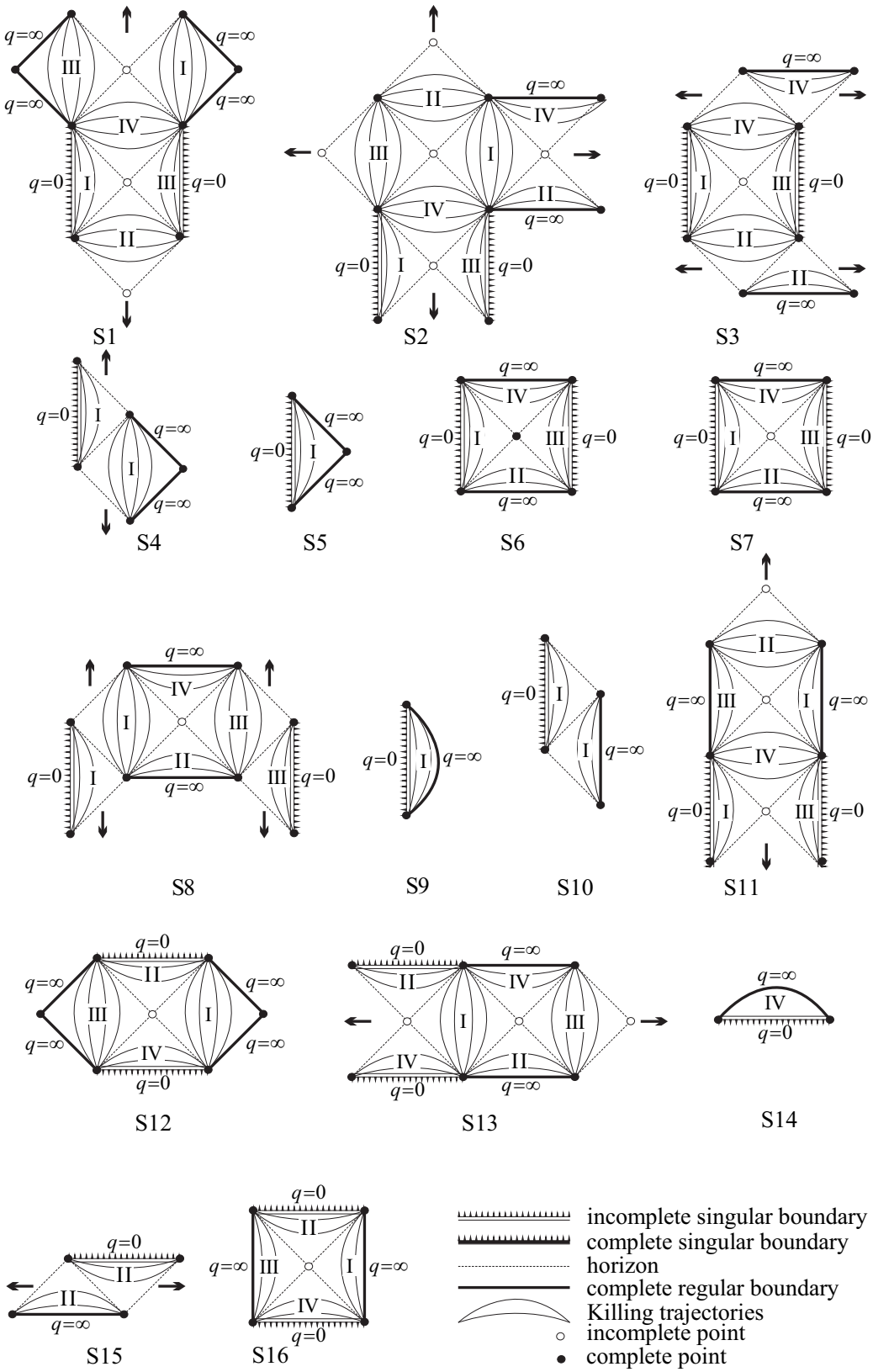


Рис. 2.1: Диаграммы Картера-Пенроуза для глобальных сферически симметричных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем и космологической постоянной. Диаграммы S1–S11 и S12–S16 представляют глобальные решения с сигнатурами $(+---)$ и $(-+++)$, соответственно.

Сигнатура $(+---)$. Случай $\Lambda = 0$

В данном случае (2.62) представляет собой квадратное уравнение:

$$q^2 - 2Mq + Q^2 = 0, \tag{2.64}$$

корни которого равны

$$q_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}.$$

Выпишем все глобальные сферически симметричные решения уравнений общей теории относительности с электромагнитным полем при нулевой космологической постоянной, соответствующие различным значениям параметров M и Q.

Решение Рейсснера-Нордстрема с двумя горизонтами. При $M > Q$ конформный множитель (2.59) имеет два положительных простых нуля. Глобальное решение является асимптотически плоским, содержит два горизонта q_- и q_+ и времениподобную сингулярность $q = 0$. Соответствующая диаграмма Картера-Пенроуза S1 изображена на рисунке 2.1. Ее необходимо периодически продолжить вдоль направлений, указанных стрелками, или склеить противоположенные горизонты сверху и снизу.

Экстремальная черная дыра. При условии $M = Q$ мы имеем один положительный корень второго порядка $q = M$. Диаграмма Картера-Пенроуза S4 изображена на рисунке 2.1. Времениподобная сингулярность $q = 0$ не окружена горизонтом и, следовательно, является голой.

Голая сингулярность. Если $M < Q$, то уравнение (2.62) не имеет корней. Следовательно, конформный множитель не имеет нулей и решение представляет собой голую времениподобную сингулярность. Соответствующая диаграмма Картера-Пенроуза S5 состоит из треугольного конформного блока, изображенного на рисунке 2.1, и его пространственного отражения.

Мы построили все глобальные сферически симметричные решения с сигнатурой $(+---)$ при $\Lambda = 0$, соответствующие различным значениям M и Q. Данные решения хорошо известны [38] и мы привели их для полноты классификации. Мы видим что при нулевой космологической постоянной имеется только 3 глобальных сферически симметричных решения с сигнатурой $(+---)$.

Сигнатура $(+---)$. Случай $\Lambda > 0$

В случае положительной космологической постоянной нули конформного множителя определяются уравнением четвертой степени (2.62). Для построения глобальных решений нам не обязательно определять точное положение нулей конформного множителя на оси q. Достаточно определить их количество и тип. Для этого мы можем качественно исследовать поведение вспомогательной функции (2.63) и сдвинуть ее график вверх на $3Q^2$.

Первая и вторая производные функции $\phi(q)$ равны:

$$\begin{aligned} \phi'(q) &= -4\Lambda q^3 + 6q - 6M, \\ \phi''(q) &= -12\Lambda q^2 + 6. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Вспомогательная функция $\phi(q)$ и ее производные $\phi'(q)$ и $\phi''(q)$ имеют следующее асимптотическое поведение при $q = 0$ и $q \to \infty$:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0, & \phi(\infty) &\approx -\Lambda q^4, \\ \phi'(0) &= -6M, & \phi'(\infty) &\approx -4\Lambda q^3, \\ \phi''(0) &= 6, & \phi''(\infty) &\approx -12\Lambda q^2. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Для определения типа нулей конформного множителя необходимо найти локальные экстремумы функции $\phi(q)$, которые определяются кубическим уравнением [46]:

$$q^3 - \frac{3}{2\Lambda} q + \frac{3M}{2\Lambda} = 0. \tag{2.67}$$

В зависимости от значений величины

$$\Upsilon := -\frac{1}{8\Lambda^3} + \frac{9M^2}{16\Lambda^2}, \tag{2.68}$$

мы получим три качественно различных случая:

$$\Upsilon > 0 \quad \Leftrightarrow \quad M > \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \quad - \quad \text{один действительный и два комплексно сопряженных корня,}$$

$$\Upsilon = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \quad - \quad \text{три действительных корня (по крайней мере два из которых совпадают),}$$

$$\Upsilon < 0 \quad \Leftrightarrow \quad M < \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \quad - \quad \text{три различных действительных корня.}$$

При фиксированном значении Λ перечисленные условия представляют собой ограничения на параметр M.

Рассмотрим самый простой случай $\Upsilon = 0$. В этом случае при $M > 0$ уравнение (2.67) имеет один отрицательный корень и один положительный корень второго порядка:

$$q_1 = -\sqrt{\frac{2}{\Lambda}}, \qquad q_{2,3} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\Lambda}}. \tag{2.69}$$

При $\Upsilon < 0$ корни уравнения (2.67) можно представить в виде:

$$q_3 = \sqrt{\frac{2}{\Lambda}}\cos\frac{\alpha}{3}, \qquad q_{2,1} = -\sqrt{\frac{2}{\Lambda}}\cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right), \tag{2.70}$$

где

$$\cos\alpha = -3M\sqrt{\frac{\Lambda}{2}}.$$

Корни в (2.70) пронумерованы так, чтобы в пределе

$$M \to \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \tag{2.71}$$

они совпадали с (2.69).

Поскольку мы рассматриваем случай $M \geq 0$, то $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Следовательно, при $M > 0$ мы получим один отрицательный корень q_1, и два положительных корня q_2 и q_3. В случае $M = 0$ имеется отрицательный корень q_1, положительный корень q_3, а также корень $q_2 = 0$.

При $\Upsilon > 0$ уравнение (2.67) имеет один отрицательный корень q_1:

$$q_1 = \sqrt[3]{-\frac{3M}{4\Lambda} + \sqrt{\Upsilon}} + \sqrt[3]{-\frac{3M}{4\Lambda} - \sqrt{\Upsilon}}. \tag{2.72}$$

Количество и тип нулей конформного множителя $\Phi(q)$ мы сможем определить, сдвигая график вспомогательной функции $\phi(q)$ вверх на величину $3Q^2$. Введем обозначения:

$$\phi_1 := \phi(q_1), \qquad \phi_2 := \phi(q_2), \qquad \phi_3 := \phi(q_3), \tag{2.73}$$

где ϕ_1 – максимум, ϕ_2 и ϕ_3 – локальный минимум и локальный максимум вспомогательной функции $\phi(q)$, соответственно. При условии $\Upsilon = 0$ локальный минимум и максимум совпадают: $q_2 = q_3$. При $q < 0$ максимум функции $\phi(q)$ всегда положителен: $\phi_1 > 0$. При $q > 0$ локальный минимум всегда отрицателен: $\phi_2 < 0$. Знак локального максимума ϕ_3 зависит от соотношения между массой и космологической постоянной:

$$\begin{aligned} 0 \le M < \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \phi_3 > 0, \\ M = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \phi_3 = 0, \\ M > \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \phi_3 < 0. \end{aligned}$$

Качественное поведение вспомогательной функции (2.63) при различных значениях Υ представлено на рисунке 2.2. Мы изучили поведение вспомогательной функции при всех значениях q и неотрицательных значениях массы: $M \ge 0$. Для построения глобальных решений мы должны ограничиться случаем $q > 0$. Чтобы учесть случай $M < 0$, сделаем замену $q \to -q$, после чего зафиксируем условие $q > 0$. Перечислим все сферически симметричные глобальные решения в случае положительной космологической постоянной.

Времениподобная сингулярность с одним горизонтом. Конформный множитель имеет один простой нуль на положительной полуоси $q > 0$,

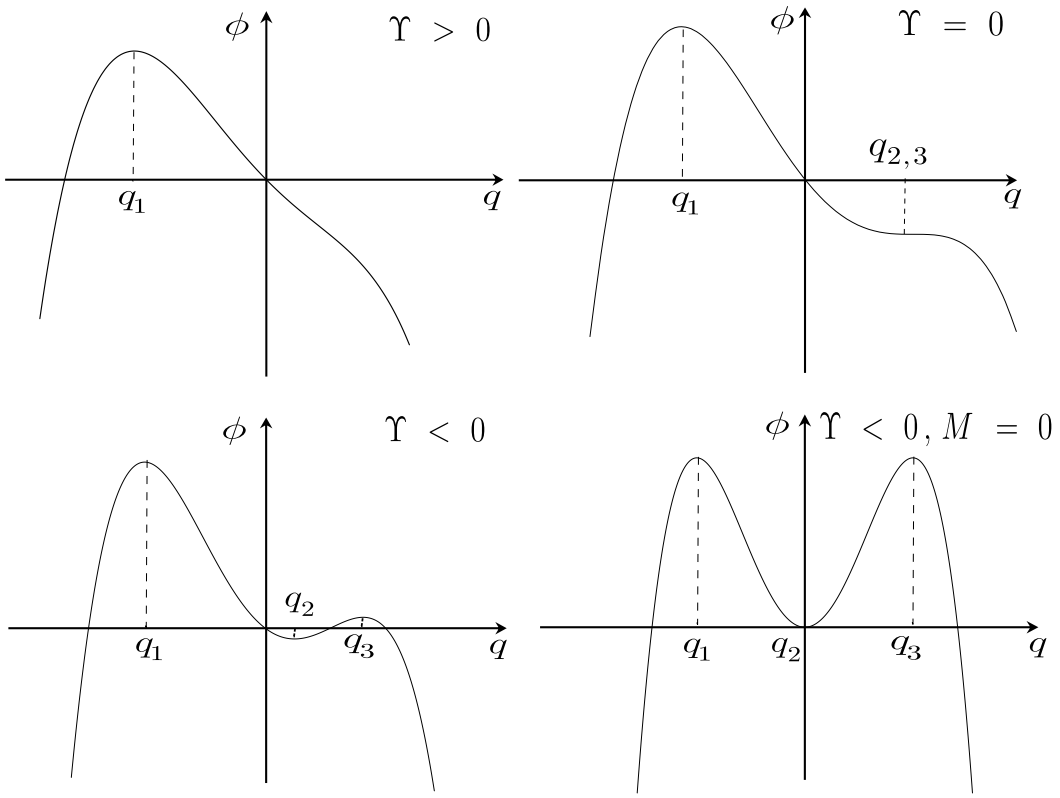


Рис. 2.2: Качественное поведение вспомогательной функции $\phi(q)$ при $\Lambda > 0$ при различных значения параметра Υ.

если выполнено одно из условий:

$$\begin{array}{llll} \Lambda > 0, & \forall\Upsilon, & M < 0, & Q \neq 0; \\ \Lambda > 0, & \Upsilon < 0, & M = 0, & Q \neq 0; \\ \Lambda > 0, & \Upsilon < 0, & M > 0, & 3Q^2 < -\phi_3; \\ \Lambda > 0, & \Upsilon < 0, & M > 0, & 3Q^2 > -\phi_2; \\ \Lambda > 0, & \Upsilon = 0, & M > 0, & 3Q^2 \neq -\phi_2; \\ \Lambda > 0, & \Upsilon > 0, & M > 0, & Q \neq 0. \end{array} \tag{2.74}$$

Диаграмма Картера-Пенроуза S7 состоит из четырех блоков. В данном случае граница не содержит горизонтов и состоит из левой и правой времениподобных сингулярностей, а также пространственноподобной бесконечности прошлого и будущего.

Три горизонта. При выполнении условий:

$$\Lambda > 0, \qquad \Upsilon < 0, \qquad M > 0, \qquad -\phi_3 < 3Q^2 < -\phi_2 \tag{2.75}$$

конформный множитель имеет три простых нуля на положительной полуоси. Диаграмма Картера-Пенроуза S2 состоит из восьми конформных блоков и содержит две времениподобные сингулярности. Ее граница слева и справа, а также сверху и снизу содержит отрезки, соответствующие горизонтам, вдоль которых необходимо либо провести склейку одинаковых фундаментальных областей, либо отождествить граничные точки соответствующих горизонтов слева и справа, а также сверху и снизу.

Два горизонта с двойным локальным минимумом. Пусть выполнены условия:

$$\Lambda > 0, \qquad \Upsilon < 0, \qquad M > 0, \qquad 3Q^2 = -\phi_2. \tag{2.76}$$

Тогда конформный множитель имеет два нуля, меньший из которых представляет собой нуль второго порядка. Диаграмма Картера–Пенроуза имеет вид S8. Она состоит из шести конформных блоков: четырех статических и двух однородных. Граница в данном случае также содержит горизонты.

Два горизонта с двойным локальным максимумом. При ограничениях:

$$\Lambda > 0, \qquad \Upsilon < 0, \qquad M > 0, \qquad 3Q^2 = -\phi_3 \tag{2.77}$$

конформный множитель имеет два нуля, больший из которых имеет второй порядок. Диаграмма Картера–Пенроуза в данном случае имеет вид S3. Она, как и в предыдущем случае, состоит из шести конформных блоков, но в этом случае четыре блока являются однородными, а два — статическими.

Горизонт третьего порядка. При условиях:

$$\Lambda > 0, \qquad \Upsilon = 0, \qquad M > 0, \qquad 3Q^2 = -\phi_2 \tag{2.78}$$

конформный множитель имеет нуль третьего порядка. Соответствующая диаграмма Картера–Пенроуза S6 содержит две времениподобные сингулярности и состоит из четырех блоков, причем точка, по которой склеены все четыре блока, является геодезически полной. Последнее связано с наличием у конформного множителя $\Phi(q)$ нуля третьего порядка.

Данная диаграмма интересна с физической точки зрения, поскольку она описывает изменение топологии пространственных сечений во времени. Дей-

ствительно, рассмотрим пространственное сечение, не проходящее через центральную точку диаграммы. Тогда оно представляет собой интервал конечной длины с сингулярными концами, на которых двумерная кривизна обращается в бесконечность. Пространственное сечение, проходящее через центральную точку представляет собой объединение двух полубесконечных интервалов, поскольку центральная точка геодезически полна и находиться на пространственной бесконечности. Мы можем ввести на диаграмме глобальный эволюционный параметр T, изменяющийся вдоль вертикальной оси (рисунок 2.3). Тогда для некоторого значения параметра T пространственное сечение является объединением двух полубесконечных интервалов. При остальных значениях параметра T оно представляет собой интервал конечной длины. Этот пример показывает, что изменение топологии пространства возможно на классическом уровне.

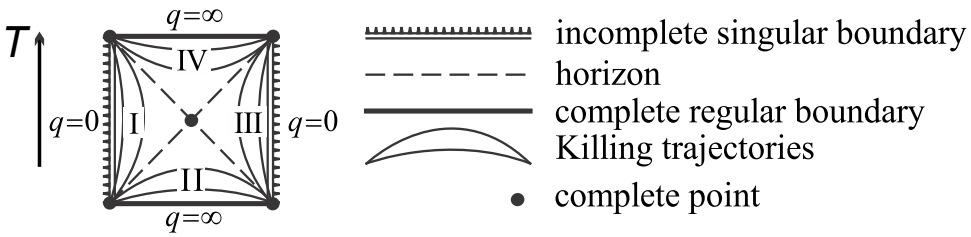


Рис. 2.3: Диаграмма Картера-Пенроуза для решения, описывающего изменение топологии пространственных сечений во времени.

В результате, при положительной космологической постоянной, $\Lambda > 0$, мы получили 5 различных глобальных сферически симметричных решений с сигнатурой $(+---)$, среди которых имеется не изученное ранее глобальное решение с интересными физическими свойствами. Перейдем к рассмотрению случая отрицательной космологической постоянной.

Сигнатура $(+---)$. Случай $\Lambda < 0$

При отрицательных значениях космологической постоянной, $\Lambda < 0$, асимптотическое поведение вспомогательной функции и ее нули определяются, как и в случае $\Lambda > 0$, соотношениями (2.66) и уравнением (2.67), соответственно. Параметр Υ определяется равенством (2.68), из которого следует, что $\Upsilon > 0$ при всех значениях $\Lambda < 0$ и M. При $M \geq 0$ уравнение (2.67) имеет единственный неотрицательный корень $q_4 \geq 0$. В точке $q = q_4$ вспомогательная функция

$\phi(q)$ достигает минимума. Качественное поведение вспомогательной функции приведено на рисунке 2.4.

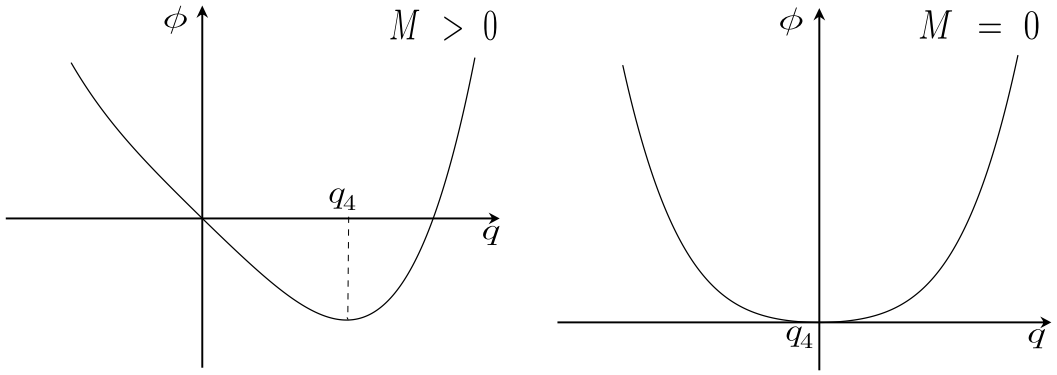


Рис. 2.4: Качественное поведение вспомогательной функции $\phi(q)$ при $\Lambda < 0$.

Для классификации глобальных сферически симметричных решений при $\Lambda < 0$, введем обозначение: $\phi(q_4) =: \phi_4$. Перечислим все глобальные решения, возникающие в данном случае.

Времениподобная сингулярность с двумя горизонтами. При ограничениях:

$$\Lambda < 0, \qquad M > 0, \qquad 3Q^2 < -\phi_4 \tag{2.79}$$

конформный множитель имеет два простых нуля. Соответствующая диаграмма Картера–Пенроуза S11 состоит из шести конформных блоков. В отличие от решения Рейсснера–Нордстрёма с двумя горизонтами левая и правая полные границы времениподобны. Последнее связано с различным поведением конформного множителя на бесконечности при $\Lambda = 0$ и $\Lambda < 0$. Верхняя и нижняя границы диаграммы содержат горизонты.

Двойной горизонт. Если выполнены условия:

$$\Lambda < 0, \qquad M > 0, \qquad 3Q^2 = -\phi_4 \tag{2.80}$$

конформный множитель имеет нуль второго порядка. Возникающая здесь диаграмма Картера–Пенроуза имеет вид S4. Она отличается от случая экстремальной черной дыры тем, что содержит полную времениподобную границу.

Голая сингулярность с времениподобной границей. При выполне-

нии условий:

$$\begin{aligned} &\Lambda < 0, \qquad M \leq 0, \qquad Q \neq 0, \\ &\Lambda < 0, \qquad M > 0, \qquad 3Q^2 > -\phi_4 \end{aligned} \tag{2.81}$$

конформный множитель не имеет нулей. Соответствующая диаграмма Картера–Пенроуза S9 не содержит горизонтов и состоит из двух статических блоков, каждый из которых представляется в виде линзы.

В итоге мы получили 11 глобальных сферически симметричных решений в теории с сигнатурой метрики $(+---)$. С физической точки зрения эти решения соответствуют заряженным черным дырам.

2.2.2. Физический смысл констант Q и P

Приведем физическую интерпретацию постоянных интегрирования Q и P, входящих в общее решение уравнений Максвелла (1.22). Будем считать, что $\Lambda = 0$. Тогда при $q \to \infty$ конформный множитель имеет асимптотику: $\Phi \approx 1$. Метрика пространства-времени (2.58), при этом, стремиться к метрике Минковского, записанной в сферических координатах:

$$ds^2 = d\tau^2 - dq^2 - q^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{2.82}$$

При этом переменная q является пространственноподобной и может быть интерпретирована как “радиальная” координата. Для наглядности мы будем использовать обозначение: $r := q$.

В плоском пространстве-времени напряженности электрического и магнитного полей выражаются через напряженности тензора электромагнитного поля по формулам [4, 18]:

$$E_{\tilde{\alpha}} = \widehat{F}_{\tilde{\alpha}0}, \qquad H_{\tilde{\alpha}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}\widehat{F}^{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}, \qquad \tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma} = 1,2,3, \tag{2.83}$$

где $\varepsilon_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}$ – полностью антисимметричный тензор 3 ранга, заданный на пространственных сечениях $\tau = \mathsf{const}$. Аналогичные формулы справедливы и в случае искривленного пространства-времени [14]. С учетом сказанного, при $r \to \infty$ для ненулевых компонент напряженностей электрического и магнитного полей

получим:

$$E_r = \frac{2Q}{r^2}, \qquad H_r = \frac{2P}{r^2}. \tag{2.84}$$

Здесь мы воспользовались формулой:

$$\varepsilon_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}} = \sqrt{|\tilde{g}|}\hat{\varepsilon}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}, \tag{2.85}$$

где

$$\tilde{g} = \frac{r^4 \sin^2\theta}{\Phi} \tag{2.86}$$

– определитель евклидовой части метрики (2.58), $\hat{\varepsilon}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}$ – полностью антисимметричная тензорная плотность 3 ранга, ненулевые компоненты которой равны по модулю единице.

Таким образом, при достаточно больших значениях r наблюдатель, измеряющий силу Лоренца, действующую на движущиеся заряженные частицы, обнаружит присутствие радиальных электрического и магнитного полей. При этом их напряженности подчиняются закону (2.84), который в случае плоского пространства-времени, с точностью до постоянного множителя, описывает поля точечного электрического заряда и магнитного монополя [13, 35, 60]. Отсюда можно заключить, что константы Q и P, возникающие в результате интегрирования уравнений Максвелла (1.15), в сферически симметричном случае имеют смысл электрического и магнитного зарядов, соответственно.

2.2.3. Сигнатура $(-+++)$. Сферически симметричные решения

Рассмотрим случай $m > 0$. Тогда сигнатура четырехмерной метрики $\widehat{g}_{ij}$ равна $(-+++)$. В этом случае конформный множитель имеет вид (2.59) с точностью до замены $Q^2 \to -Q^2$ и $\Lambda \to -\Lambda$. Вспомогательная функция $\phi(q)$ отличается от (2.63) только знаком перед космологической постоянной. Следовательно, для анализа качественного поведения $\phi(q)$ мы можем пользоваться графиками, представленными на рисунках 2.2–2.4. При этом необходимо провести замену $\Lambda \to -\Lambda$. Параметр Υ, определяющий экстремумы $\phi(q)$, в данном случае дается формулой:

$$\Upsilon := \frac{1}{8\Lambda^3} + \frac{9M^2}{16\Lambda^2} \tag{2.87}$$

и отличается от (2.68) только знаком перед первым слагаемым.

Анализ нулей конформного множителя проводится аналогично случаю с сигнатурой $(+---)$. Только теперь для анализа нулей конформного множителя мы должны сдвинуть график вспомогательной функции $\phi(q)$ не вверх, а вниз на величину $3Q^2$. Рассмотрим отдельно случаи $\Lambda = 0$, $\Lambda > 0$ и $\Lambda < 0$.

Сигнатура $(-+++)$. Случай $\Lambda = 0$

В случае нулевой космологической постоянной, $\Lambda = 0$, нули конформного множителя определяются квадратным уравнением:

$$q^2 - 2Mq - Q^2 = 0, \tag{2.88}$$

корни которого равны

$$q_\pm = M \pm \sqrt{M^2 + Q^2}. \tag{2.89}$$

Следовательно, при всех $Q \neq 0$ конформный множитель имеет один отрицательный, $q_- < 0$, и один положительный, $q_+ > 0$, корень. Это означает, что при всех значениях параметра M глобальное решение содержит один горизонт. Соответствующая диаграмма Картера-Пенроуза имеет вид S12. Она совпадает с диаграммой Картера-Пенроуза для черной дыры Шварцшильда.

Сигнатура $(-+++)$. Случай $\Lambda > 0$

В случае ненулевой космологической постоянной вспомогательная функция $\phi(q)$ с точностью до замены $\Lambda \to -\Lambda$ имеет вид (2.63). Ее график при $\Lambda > 0$ изображен на рисунке 2.4. Для анализа нулей конформного множителя мы должны сдвинуть график $\phi(q)$ вниз на величину $3Q^2$. Тогда для всех значений параметров:

$$\Lambda > 0, \qquad \forall \Upsilon, \qquad \forall M, \qquad Q \neq 0 \tag{2.90}$$

конформный множитель имеет один простой нуль. Диаграмма Картера-Пенроуза имеет вид S16 на рисунке 2.1.

Сигнатура $(-+++)$. Случай $\Lambda < 0$

При отрицательной космологической постоянной графики вспомогательной функции представлены на рисунке 2.2. Здесь мы получим три различных глобальных решения.

Пространственноподобная сингулярность. Пусть выполнены условия:

$$\begin{array}{lllll} \Lambda < 0, & \Upsilon > 0, & M > 0, & & Q \neq 0; \\ \Lambda < 0, & \Upsilon < 0, & M > 0, & \phi_3 \leq 0, & Q \neq 0; \\ \Lambda < 0, & \Upsilon < 0, & M > 0, & \phi_3 > 0, & 3Q^2 > \phi_3; \\ \Lambda < 0, & \forall\Upsilon, & M < 0, & & 3Q^2 > \phi_1. \end{array} \tag{2.91}$$

Тогда конформный множитель не имеет нулей. Глобальное решение описывает пространственноподобную сингулярность без горизонта. Соответствующая диаграмма Картера-Пенроуза S14 представлена на рисунке 2.1.

Пространственноподобная сингулярность с двумя горизонтами. При выполнении условий:

$$\begin{array}{lllll} \Lambda < 0, & \Upsilon < 0, & M \geq 0, & \phi_3 > 0, & 0 < 3Q^2 < \phi_3; \\ \Lambda < 0, & \forall\Upsilon, & M < 0, & & 0 < 3Q^2 < \phi_1 \end{array} \tag{2.92}$$

конформный множитель имеет два простых нуля. Соответствующее глобальное решение содержит два горизонта и пространственноподобную сингулярность при $q = 0$. Максимально продолженная вдоль геодезических лоренцева поверхность $\mathbb{U}$ в данном случае представлена диаграммой S13 на рисунке 2.1, которую либо необходимо периодически продолжить в пространственноподобном направлении, либо отождествить противоположенные горизонты. Это решение описывает черные и белые дыры, периодически расположенные вдоль пространственноподобного направления.

Пространственноподобная сингулярность с двойным горизонтом. Если выполнены условия:

$$\begin{array}{lllll} \Lambda < 0, & \Upsilon < 0, & M \geq 0, & \phi_3 > 0, & 3Q^2 = \phi_3; \\ \Lambda < 0, & \forall\Upsilon, & M < 0, & & 3Q^2 = \phi_1 \end{array} \tag{2.93}$$

конформный множитель имеет один нуль второго порядка при $q > 0$. Глобальное решение представлено диаграммой S15 на рисунке 2.1, которую необходимо периодически продолжить вдоль пространственноподобного направления. Существует также отраженная во времени диаграмма. Данное решение описывает набор черных и белых (после временного отражения) дыр.

В результате, мы получили 5 дополнительных глобальных сферически симметричных решений S12–S16 с сигнатурой метрики $(-+++)$. Эти решения содержат пространственноподобные сингулярности, соответствующие черным и белым дырам.

2.3. Глобальные планарные решения $K^{(h)} = 0$

При $K^{(h)} = 0$ риманова поверхность $\mathbb{V}$ представляет собой либо евклидову плоскость, либо цилиндр, либо тор. В случае если $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ имеется спонтанное появление $\mathbb{ISO}(2)$–симметрии. Это означает, что на уравнениях Эйнштейна метрика пространства-времени становиться инвариантной относительно действия группы преобразований $\mathbb{ISO}(2)$. Глобальные решения, при этом, имеют вид: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{R}^2$.

2.3.1. Сигнатура $(+--)$. Планарные решения

Рассмотрим случай $m < 0$. Тогда сигнатура четырехмерной метрики равна $(+--)$. В координатах Шварцшильда метрика пространства-времени запишется в виде:

$$ds^2 = \Phi(q)d\zeta^2 - \frac{dq^2}{\Phi(q)} - q^2 d\Omega_p^2, \tag{2.94}$$

где

$$\Phi(q) = -\frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3} + \frac{Q^2}{q^2}, \qquad d\Omega_p^2 := dy^2 + dz^2. \tag{2.95}$$

Для построения диаграмм Картера-Пенроуза проанализируем нули и асимптотики конформного множителя (2.95). При $Q \neq 0$ конформный множитель имеет полюс второго порядка Q^2/q^2 в нуле и следующую асимптотику на бесконечности:

$$\Phi \approx -\frac{\Lambda q^2}{3}, \qquad q \to \infty. \tag{2.96}$$

Поскольку конформный множитель (2.95) инвариантен относительно замены $(q, M) \to (-q, -M)$, мы можем ограничиться случаем $M \geq 0$. При этом, к отрицательным значениям параметра M мы легко перейдем, совершив преобразование $q \to -q$. Во всех случаях нас будет интересовать поведение конформного множителя только на положительной полуоси $q > 0$. Рассмотрим отдельно случаи $\Lambda = 0$ и $\Lambda \neq 0$.

Сигнатура $(+---)$. Случай $\Lambda = 0$

Конформный множитель в этом случае можно записать в виде:

$$\Phi(q) = \frac{Q^2 - 2Mq}{q^2}. \tag{2.97}$$

При $M > 0$ он имеет один нуль первого порядка на положительной полуоси:

$$q = \frac{Q^2}{2M}. \tag{2.98}$$

Следовательно, при нулевой космологической постоянной, $\Lambda = 0$, существуют два глобальных решения с сигнатурой $(+---)$.

Времениподобная сингулярность с одним горизонтом. При выполнении условий:

$$\Lambda = 0, \qquad M > 0 \tag{2.99}$$

конформный множитель $\Phi(q)$ имеет нуль первого порядка на положительной полуоси. Соответствующая диаграмма Картера-Пенроуза P1 представлена на рисунке 2.5. Она отличается от диаграмм, построенных ранее в сферически симметричном случае. Диаграмма P1 представляет собой диаграмму для черной дыры Шварцшильда S12, повернутую на $\pi/2$.

Голая сингулярность. При условиях:

$$\Lambda = 0, \qquad M \leq 0 \tag{2.100}$$

конформный множитель не имеет нулей. В этом случае глобальное решение описывается диаграммой S5, которая уже встречалась ранее в сферически симметричном случае.

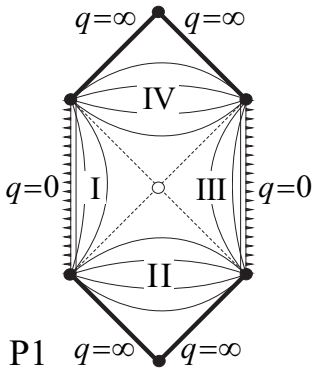


Рис. 2.5: Диаграмма Картера-Пенроуза для глобального планарного решения при $\Lambda = 0$ и $M > 0$.

Сигнатура $(+---)$. Случай $\Lambda \neq 0$

Для анализа нулей конформного множителя в случае ненулевой космологической постоянной введем вспомогательную функцию:

$$\Phi(q) =: \frac{\phi(q) + 3Q^2}{3q^2}, \tag{2.101}$$

где

$$\phi(q) = -\Lambda q^2 - 6Mq. \tag{2.102}$$

Количество и тип нулей конформного множителя совпадают с количеством и типом нулей его числителя $\phi(q) + 3Q^2$. Следовательно, исследуя вспомогательную функцию на нули и экстремумы и сдвигая ее график вверх на величину $3Q^2$, мы сможем качественно определить количество и тип нулей $\Phi(q)$. Графики вспомогательной функции $\phi(q)$ приведены на рисунке 2.6.

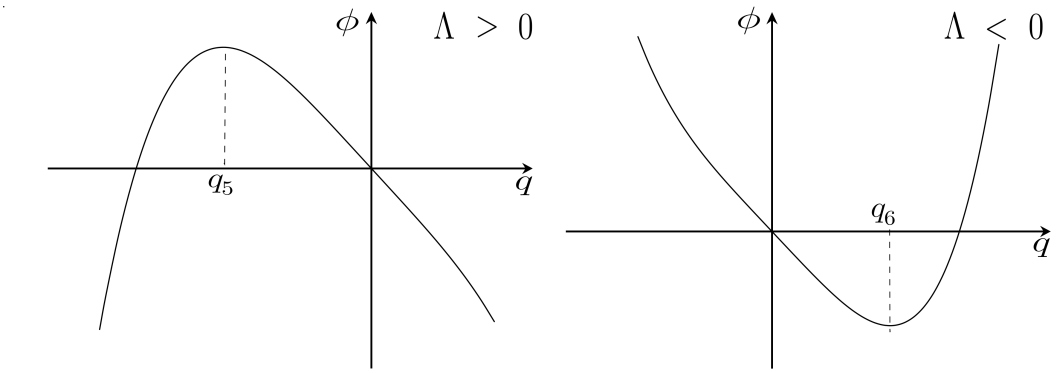


Рис. 2.6: Качественное поведение вспомогательной функции $\phi(q)$ при $\Lambda \neq 0$.

Вспомогательная функция (2.102) имеет два вещественных корня:

$$q = 0, \quad q = \sqrt[3]{-\frac{6M}{\Lambda}}. \tag{2.103}$$

Экстремумы вспомогательной функции определяются уравнением:

$$\phi'(q) = -4\Lambda q^3 - 6M = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad q = \sqrt[3]{-\frac{3M}{2\Lambda}}. \tag{2.104}$$

При отрицательных значениях космологической постоянной вспомогательная функция имеет локальный максимум в точке q_5, а при положительных значениях космологической постоянной – локальный минимум в точке q_6. Максимальное и минимальное значение вспомогательной функции даются формулой:

$$\phi_{5,6} := \phi(q_{5,6}) = \frac{9}{2} M \sqrt[3]{\frac{3M}{2\Lambda}}. \tag{2.105}$$

Следовательно, $\phi_5 > 0$ при $\Lambda > 0$ и $\phi_6 < 0$ при $\Lambda < 0$. В зависимости от соотношений между постоянными Λ, M и Q мы получим 4 различных глобальных планарных решения с сигнатурой $(+---)$. Соответствующие диаграммы Картера-Пенроуза уже были построены в сферически симметричном случае. При этом, возникающие здесь глобальные решения следует отличать от сферически симметричных решений, описываемых теми же диаграммами Картера-Пенроуза. Действительно, в рассматриваемом случае риманова поверхность $\mathbb{V}$ представляет собой не сферу $\mathbb{S}^2$, как в сферически симметричном случае, а евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$.

Времениподобная сингулярность. При выполнении условий:

$$\begin{aligned} &\Lambda < 0, \qquad M > 0, \qquad 3Q^2 > -\phi_6; \\ &\Lambda < 0, \qquad M \leq 0, \qquad Q \neq 0 \end{aligned} \tag{2.106}$$

конформный множитель не имеет нулей на положительной полуоси $q > 0$. Соответствующая лоренцева поверхность $\mathbb{U}$ представлена диаграммой Картера-Пенроуза S9 на рисунке 2.1. Эта диаграмма уже возникала в сферически симметричном случае, но теперь глобальные решения имеют вид: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{R}^2$.

Времениподобная сингулярность с двумя горизонтами. При огра-

ничениях:

$$\Lambda < 0, \qquad M > 0, \qquad 0 < 3Q^2 < -\phi_6 \tag{2.107}$$

конформный множитель $\Phi(q)$ имеет два простых нуля. Глобальное решение представлено диаграммой S11 на рисунке 2.1.

Времениподобная сингулярность с двойным горизонтом. При условиях:

$$\Lambda < 0, \qquad M > 0, \qquad 3Q^2 = -\phi_6 \tag{2.108}$$

конформный множитель имеет нуль второго порядка на положительной полуоси $q > 0$. Диаграмма Картера-Пенроуза S10 представлена на рисунке 2.1.

Времениподобная сингулярность с одним горизонтом. При следующих значениях параметров:

$$\Lambda > 0, \qquad \forall M \qquad Q \neq 0 \tag{2.109}$$

конформный множитель имеет один простой нуль на положительной полуоси. Глобальное решение описывается диаграммой S7, представленной на рисунке 2.1.

В итоге, мы получили 6 глобальных планарных решений с сигнатурой $(+---)$, представленных диаграммами P1, S5, S7, S9, S10, S11. Среди них 5 решений описываются теми же диаграммами Картера-Пенроуза, что и в сферически-симметричном случае. Тем не менее, глобальные планарные решения отличаются от глобальных сферически симметричных решений видом сомножителя $\mathbb{V}$ в сплетенном произведении.

Заметим, что в качестве римановой поверхности $\mathbb{V}$ мы можем выбрать цилиндр или тор. Тогда глобальные решения будут описывать цилиндрические и тороидальные черные дыры, соответственно.

2.3.2. Сигнатура $(-+++)$. Планарные решения

Рассмотрим случай $m > 0$, соответствующий сигнатуре $(-+++)$. Конформный множитель имеет вид (2.95) с точностью до замены $Q^2 \to -Q^2$ и $\Lambda \to -\Lambda$. Всего мы получим 6 глобальных решений.

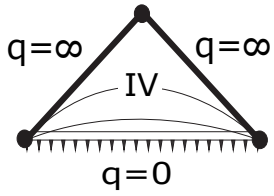
Сигнатура $(-+++)$**. Случай** $\Lambda = 0$

В данном случае конформный множитель имеет вид (2.97). При этом необходимо провести замену $Q^2 \to -Q^2$. Его нули, с точностью до указанной замены, даются формулой (2.98). Следовательно, при нулевой космологической постоянной мы получим два различных глобальных решения.

Голая сингулярность. При выполнении условий:

$$\Lambda = 0, \qquad M \geq 0 \tag{2.110}$$

конформный множитель не имеет нулей на положительной полуоси $q > 0$. Глобальное решение описывается диаграммой P2, представленной на рисунке 2.7. В данном случае глобальное решение содержит пространственноподобную сингулярность. Диаграмма P2 представляет собой диаграмму S5, повернутую на $\pi/2$.



P2

Рис. 2.7: Диаграмма Картера-Пенроуза для глобального планарного решения при $\Lambda = 0$ и $M \geq 0$. Сигнатура $(-+++)$.

Пространственноподобная сингулярность с одним горизонтом. При условиях:

$$\Lambda = 0, \qquad M < 0 \tag{2.111}$$

конформный множитель имеет один нуль первого порядка. Соответствующая диаграмма Картера-Пенроуза совпадает с диаграммой S12 для решения Шварцшильда.

Сигнатура $(-+++)$**. Случай** $\Lambda \neq 0$

При отличных от нуля значениях космологической постоянной вспомогательная функция имеет вид (2.102) с точностью до замены $\Lambda \to -\Lambda$. Ее качественное поведение представлено на рисунке 2.6. Чтобы определить нули

конформного множителя, мы должны сдвинуть график $\phi(q)$ вниз на величину $3Q^2$. В результате, мы получим 4 глобальных решения.

Пространственноподобная сингулярность. При выполнении условий:

$$\begin{aligned} &\Lambda < 0, \qquad M \geq 0, \qquad Q \neq 0; \\ &\Lambda < 0, \qquad M < 0, \qquad 3Q^2 > -\phi_5 \end{aligned} \tag{2.112}$$

конформный множитель не имеет нулей при $q > 0$. Мы получим диаграмму S14, представленную на рисунке 2.1.

Пространственноподобная сингулярность с двумя горизонтами. При условиях:

$$\Lambda < 0, \qquad M < 0, \qquad 0 < 3Q^2 < -\phi_5 \tag{2.113}$$

конформный множитель имеет два простых нуля. В данном случае глобальное решение представлено диаграммой S13.

Пространственноподобная сингулярность с двойным горизонтом. Пусть выполнены условия:

$$\Lambda < 0, \qquad M < 0, \qquad 3Q^2 = -\phi_5. \tag{2.114}$$

Тогда конформный множитель имеет нуль второго порядка при $q > 0$. Лоренцева поверхность $\mathbb{U}$ в данном случае представляется диаграммой S15.

Пространственноподобная сингулярность с одним горизонтом. Если выполнены условия:

$$\Lambda > 0, \qquad \forall M, \qquad Q \neq 0, \tag{2.115}$$

конформный множитель имеет один простой нуль. Соответствующая диаграмма Картера-Пенроуза совпадает с диаграммой S16 сферически симметричного случая.

В результате, мы построили 6 глобальных планарных решений с сигнатурой метрики $(-+{+}{+})$, представленные диаграммами P2, S12 - S16. Полученные здесь решения, как и в сферически симметричном случае с аналогичной сигнатурой, содержат пространственноподобные сингулярности.

2.4. Глобальные гиперболические решения $K^{(h)} = -1$

При отрицательных значениях гауссовой кривизны, $K^{(h)} = -1$, риманова поверхность $\mathbb{V}$ представляет собой плоскость Лобачевского $\mathbb{H}^2$ (верхняя пола двуполостного гиперболоида). Она является универсальным накрывающим пространством для замкнутых римановых поверхностей рода 2 и выше. Если $\mathbb{V} = \mathbb{H}^2$, то метрика становиться инвариантной относительно действия группы Лоренца $\mathbb{SO}(1,2)$. Глобальные решения в этом случае имеют вид: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{H}^2$.

В случае сигнатуры $(+---)$ метрику пространства-времени можно представить в координатах Шварцшильда (ζ, q, θ, ϕ) в виде:

$$ds^2 = \Phi(q)d\zeta^2 - \frac{dq^2}{\Phi(q)} - q^2 d\Omega^2_{\mathbb{H}}, \tag{2.116}$$

где

$$\Phi(q) = -1 - \frac{2M}{q} - \frac{\Lambda q^2}{3} + \frac{Q^2}{q^2}, \qquad d\Omega^2_{\mathbb{H}} := d\theta^2 + \mathrm{sh}^2\,\theta d\varphi^2. \tag{2.117}$$

Конформный множитель (2.117) можно получить из конформного множителя (2.59) сферически симметричного случая путем следующего преобразования:

$$\Phi \to -\Phi, \qquad M \to -M, \qquad Q^2 \to -Q^2, \qquad \Lambda \to -\Lambda. \tag{2.118}$$

Преобразование конформного множителя, $\Phi \to -\Phi$, соответствует повороту диаграммы Картера-Пенроуза на $\pi/2$. Преобразование $\left(Q^2, \Lambda\right) \to \left(-Q^2, -\Lambda\right)$ соответствует преобразованию сигнатуры $(+---) \to (-+++)$. Поскольку в сферически симметричном случае мы построили глобальные решения для всех значений параметра M и рассмотрели случаи обеих сигнатур, здесь мы получим 16 дополнительных глобальных решений. При этом каждое глобальное гиперболическое решение представляется диаграммой Картера-Пенроуза, получающейся из соответствующей диаграммы сферически симметричного случая (рисунок 2.1) с помощью поворота на $\pi/2$.

В результате мы получим 5 глобальных гиперболических решений с сигнатурой метрики $(+--\,-)$ и 11 решений с сигнатурой $(-+\,++)$, представленных диаграммами S12 - S16 и S1 - S11, соответственно, повернутыми на

$\pi/2$. С физической точки зрения глобальные гиперболические решения описывают кротовые норы, если поверхность $\mathbb{V}$ является замкнутой римановой поверхностью рода два и выше.

Глава 3

Случай (C). Лоренц-инвариантные решения

В данной главе мы рассмотрим случай (C), когда второе дилатонное поле в метрике сплетенного произведения (1.1) постоянно: $m = \mathsf{const}$. Мы покажем, что в рассматриваемом случае лоренцева поверхность $\mathbb{U}$ должна быть поверхностью постоянной кривизны. Следовательно, при $K^{(g)} = \pm 1$ она представляет собой однополостный гиперболоид, $\mathbb{U} = \mathbb{L}^2$, или его универсальную накрывающую. Глобальные решения в этом случае имеют вид произведения: $\mathbb{M} = \mathbb{L}^2 \times \mathbb{V}$. Мы также покажем, что второй сомножитель $\mathbb{V}$, представляющий собой максимально продолженную риманову поверхность, обладает одним вектором Киллинга. Вид поверхностей $\mathbb{V}$, которые будут построены ниже, зависит от соотношения между постоянными M, Q и Λ, где M – постоянная интегрирования уравнений Эйнштейна.

При $K^{(g)} = 0$ поверхность $\mathbb{U}$ представляет собой плоскость Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ или ее факторпространства. Возникающие при этом глобальные решения имеют вид: $\mathbb{R}^{1,1} \times \mathbb{V}$. Они также описаны явно и классифицированы в настоящем разделе. Как было показано в [43], поверхность $\mathbb{V}$ может иметь конические особенности и/или сингулярности кривизны вдоль края поверхности $\mathbb{V}$. С физической точки зрения этим сингулярностям соответствуют космические струны или сингулярные доменные стенки, которые эволюционируют во времени.

3.1. Локальное решение

Не ограничивая общности, мы зафиксируем $m = 1$, но допустим, что метрика $h_{\mu\nu}$ может быть как положительно, так и отрицательно определена. В обоих случаях сигнатура четырехмерной метрики будет лоренцевой: либо $(+---)$, либо $(+--+)$. Решение уравнений (1.35)–(1.38) проводится аналогично

случаю (B). При $m = 1$ эта система уравнений принимает вид:

$$R^{(h)} + \frac{\nabla^2 k}{k} - \frac{(\nabla k)^2}{2k^2} - 2\Lambda - \frac{2Q^2}{k^2} = 0, \tag{3.1}$$

$$R^{(g)} + \nabla^2 k - 2k\Lambda + \frac{2Q^2}{k} = 0, \tag{3.2}$$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu k - \frac{\nabla_\mu k \nabla_\nu k}{2k} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left[\nabla^2 k - \frac{(\nabla k)^2}{2k} \right] = 0. \tag{3.3}$$

Теорема 3.1.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.1 и* $m = \mathsf{const} \neq 0$. *Тогда для разрешимости уравнений Эйнштейна необходимо, чтобы лоренцева поверхность* $\mathbb{U}$ *являлась поверхностью постоянной кривизны.*

Доказательство. Как и в случае (B), в уравнение (3.2) входит сумма функций от разных аргументов: $R^{(g)} = R^{(g)}(x)$ и $k = k(y)$. Поэтому скалярная кривизна поверхности $\mathbb{U}$ должна быть постоянна, $R^{(g)} = -2K^{(g)} = \mathsf{const}$. □

Следовательно, при $K^{(g)} \neq 0$ поверхность $\mathbb{U}$ является однополостным гиперболоидом $\mathbb{L}^2$ или его универсальной накрывающей. Если $K^{(g)} = 0$, то поверхность $\mathbb{U}$ является плоскостью Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$. Это – очень важное следствие уравнений Эйнштейна, поскольку в рассматриваемом случае (C) при $K^{(g)} \neq 0$ все решения должны быть $\mathbb{SO}(1,2)$ инвариантны, где группа преобразований Лоренца $\mathbb{SO}(1,2)$ действует на однополостном гиперболоиде с координатами (x^0, x^1). Поэтому глобальные решения класса (C) названы лоренц-инвариантными. Если $K^{(g)} = 0$, то группой симметрии является группа Пуанкаре $\mathbb{ISO}(1,1)$. Мы видим, что симметрия метрики возникла из уравнений Эйнштейна, т.е. произошло спонтанное появление симметрии.

Теорема 3.1.1 позволяет представить уравнение (3.2) в виде:

$$\nabla^2 k - 2\left(k\Lambda + K^{(g)} - \frac{Q^2}{k} \right) = 0. \tag{3.4}$$

Как и в случае (B) можно показать, что система уравнений (3.1)–(3.3) зависима.

Лемма 3.1.1. *Уравнение (3.1) является следствием уравнений (3.3) и (3.4).*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2.1.1, поэтому мы его опустим.

Таким образом, нам достаточно решить только уравнения (3.3) и (3.4). Для этого фиксируем координаты на поверхности $\mathbb{V}$. Конформно евклидова метрика на поверхности $\mathbb{V}$ имеет вид:

$$h_{\mu\nu}dy^\mu dy^\nu = \Phi dz d\bar{z} = \Phi(d\sigma^2 + d\rho^2), \qquad \Phi \neq 0. \tag{3.5}$$

Здесь конформный множитель $\Phi(z, \bar{z})$ является функцией комплексных координат:

$$z := \sigma + i\rho, \qquad \bar{z} = \sigma - i\rho, \tag{3.6}$$

где $\sigma = y^2$, $\rho = y^3$. При этом метрика всего четырехмерного пространства-времени равна

$$ds^2 = kd\Omega^2_{\mathbb{L}} + \Phi dz d\bar{z}, \tag{3.7}$$

где $d\Omega^2_{\mathbb{L}}$ – метрика постоянной кривизны на однополостном гиперболоиде $\mathbb{L}^2$ при $K^{(g)} \neq 0$, заданная, например, в стереографических координатах:

$$d\Omega^2_{\mathbb{L}} = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = \frac{dt^2 - dx^2}{\left[1 + \frac{K^{(g)}}{4}(t^2 - x^2)\right]^2}, \tag{3.8}$$

где $(t, x) := (x^0, x^1)$. Не ограничивая общности, рассмотрим положительные $k > 0$. В противном случае можно просто переставить первые две координаты x^0 и x^1 на поверхности $\mathbb{U}$. Введем параметризацию:

$$k = q^2, \qquad q > 0.$$

Тогда уравнения (3.3) и (3.4) запишутся в виде:

$$\partial^2_{zz}q - \frac{\partial_z\Phi\partial_z q}{\Phi} = 0, \tag{3.9}$$

$$\partial^2_{\bar{z}\bar{z}}q - \frac{\partial_{\bar{z}}\Phi\partial_{\bar{z}}k}{\Phi} = 0, \tag{3.10}$$

$$2\frac{\partial_z\partial_{\bar{z}}q^2}{\Phi} - \left(K^{(g)} + \Lambda q^2 - \frac{Q^2}{q^2}\right) = 0. \tag{3.11}$$

Аналогично случаю (B) можно доказать, что решением уравнений (3.9) и (3.10) являются функции одного аргумента: $q = q(z \pm \bar{z})$ и $\Phi = \Phi(z \pm \bar{z})$, при этом

функция Φ определяется уравнением:

$$|\Phi| = |q'|, \tag{3.12}$$

где штрих обозначает дифференцирование по соответствующему аргументу. В аргументах $z \pm \bar{z}$ нижний и верхний знаки соответствуют положительно и отрицательно определенной римановой метрике на $\mathbb{V}$. Таким образом, функции q и Φ зависят либо от координаты σ, либо от $i\rho$. Благодаря вращательной $\mathbb{O}(2)$ симметрии конформно евклидовой метрики (3.5), оба выбора равнозначны. Поэтому, для определенности, мы предположим, что функции $q(\sigma)$ и $\Phi(\sigma)$ в обоих случаях зависят от σ. Множитель i в аргументе $i\rho$ не играет роли, т.к. в равенстве (3.12) стоят знаки модуля.

С учетом (3.12) уравнение (3.11) запишется в виде:

$$\frac{1}{2}(q^2)'' = \left(K^{(g)} + \Lambda q^2 - \frac{Q^2}{q^2}\right)\Phi, \tag{3.13}$$

где штрих обозначает дифференцирование по σ. Для его интегрирования, раскроем знаки модулей в уравнении (3.12).

Рассмотрим случай $\Phi q' > 0$. Тогда уравнение (3.13) с учетом (3.12) примет вид:

$$\frac{1}{2}(q^2)'' = \left(K^{(g)} + \Lambda q^2 - \frac{Q^2}{q^2}\right)q',$$

и его легко проинтегрировать:

$$q' = K^{(g)} - \frac{2M}{q} + \frac{Q^2}{q^2} + \frac{\Lambda q^2}{3}, \qquad M = \mathsf{const}. \tag{3.14}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае постоянную M нельзя интерпретировать как массу. Тем не менее, для упрощения анализа, мы используем старые обозначения. Сравнивая (3.14) с равенством (3.12) получаем выражение для конформного множителя:

$$\Phi(q) = K^{(g)} - \frac{2M}{q} + \frac{Q^2}{q^2} + \frac{\Lambda q^2}{3}. \tag{3.15}$$

Случай $\Phi q' < 0$ интегрируется аналогично. Окончательно, общее решение

вакуумных уравнений Эйнштейна в случае (C) имеет вид:

$$ds^2 = q^2 d\Omega_{\mathbb{L}}^2 + \Phi(q)(d\sigma^2 + d\rho^2), \tag{3.16}$$

где конформный множитель задан уравнением (3.15) и функция $q = q(\sigma)$ определяется уравнением (3.12). Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 3.1.2. *Существует система координат, в которой общее решение уравнений Эйнштейна (1.13) с электромагнитным полем (1.17) для метрики сплетенного произведения (1.1) при $k > 0$ и $m = \mathsf{const} \neq 0$ имеет вид:*

$$ds^2 = q^2 d\Omega_{\mathbb{L}}^2 + \Phi(q)(d\sigma^2 + d\rho^2), \quad \Phi(q) = K^{(g)} - \frac{2M}{q} + \frac{Q^2}{q^2} + \frac{\Lambda q^2}{3}, \tag{3.17}$$

где $d\Omega_{\mathbb{L}}^2$ – метрика на лоренцевой поверхности постоянной кривизны $\mathbb{U}$, $(\sigma, \rho) := (y^2, y^3)$ и $k =: q^2$. При этом функция $q = q(\sigma)$ зависит только от одной переменной и определяется дифференциальным уравнением:

$$|\Phi| = |q'|. \tag{3.18}$$

Таким образом, метрика на поверхности $\mathbb{V}$ имеет один вектор Киллинга ∂_ρ. Поэтому мы можем использовать технику [45] для построения глобальных решений уравнений Эйнштейна.

Выберем функцию $q(\sigma)$ в качестве одной из координат. Тогда метрику (3.16) локально можно записать в виде, напоминающем метрику Шварцшильда:

$$ds^2 = q^2 d\Omega_{\mathbb{L}}^2 + \frac{dq^2}{\Phi(q)} + \Phi(q) d\sigma^2. \tag{3.19}$$

Заметим, что выражение для конформного множителя (3.15) в случае (C) отличается от конформного множителя (2.39) в пространственно симметричном случае (B) только знаком космологической постоянной. Результирующая метрика (3.19) имеет три вектора Киллинга, соответствующих группе симметрии $\mathbb{SO}(1,2)$ однополостного гиперболоида постоянной кривизны $\mathbb{L}^2$, и один дополнительный вектор Киллинга ∂_ρ на поверхности $\mathbb{V}$. Утверждение о наличие дополнительного векторного поля Киллинга можно понимать, как обобщенную теорему Бирхгоффа.

Вычислим скалярную кривизну поверхности $\mathbb{V}$:

$$R^{(h)} = \frac{2}{3}\Lambda + \frac{4M}{q^3} + \frac{6Q^2}{q^4}.$$

Мы видим, что при $q = 0$ кривизна имеет особенность, если $M \neq 0$ и/или $Q \neq 0$, и, следовательно, продолжение поверхности $\mathbb{V}$ через нуль, $q = 0$, невозможно.

3.2. Глобальные лоренц-инвариантные решения $K^{(g)} = 1$

Перейдем к построению глобальных решений. Прежде всего отметим, что случаи $K^{(g)} = 1$ и $K^{(g)} = -1$ связаны между собой несущественной перестановкой первых двух координат $\tau \leftrightarrow \sigma$ и поэтому эквивалентны. Следовательно, не ограничивая общности, будем считать, что $K^{(g)} = 1$. Тогда выражение для конформного множителя Φ, с точностью до изменения знака космологической постоянной, имеет тот же вид, что в сферически симметричном случае. Метрику однополостного гиперболоида запишем в гиперболической полярной системе координат (θ, φ):

$$ds^2 = d\theta^2 - \operatorname{ch}^2\theta d\varphi^2. \tag{3.20}$$

Следовательно, четырехмерная метрика пространства-времени в координатах Шварцшильда имеет вид:

$$ds^2 = q^2(d\theta^2 - \operatorname{ch}^2\theta d\varphi^2) + \frac{dq^2}{\Phi(q)} + \Phi(q)d\rho^2, \tag{3.21}$$

где конформный множитель дается выражением

$$\Phi = 1 - \frac{2M}{q} + \frac{Q^2}{q^2} + \frac{\Lambda q^2}{3}. \tag{3.22}$$

На поверхности $\mathbb{V}$ метрика может быть как отрицательно ($\Phi < 0$), так и положительно ($\Phi > 0$) определена. Для отрицательно определенной метрики на $\mathbb{V}$ сигнатура метрики пространства-времени равна $(+ - --)$, и роль времени играет координата θ. Поэтому времениподобная координата принимает

значения на всей вещественной оси $\theta \in \mathbb{R}$, и трехмерные пространственные сечения $\theta = \mathsf{const}$ представляют собой произведения окружности $\varphi \in [0, 2\pi]$ и поверхности $\mathbb{V}$. Если в качестве $\mathbb{U}$ выбрать универсальную накрывающую однополостного гиперболоида $\mathbb{L}^2$, то трехмерное пространство будет иметь вид: $\mathbb{R} \times \mathbb{V}$. Эволюция этих пространств во времени длится вечно, и если поверхность $\mathbb{V}$ имеет сингулярность, то ей будет соответствовать сингулярная времениподобная поверхность в пространстве-времени.

Для положительно определенной метрики на $\mathbb{V}$ сигнатура четырехмерной метрики равна $(+ - ++)$, и времениподобной координатой является угол φ. Если $\mathbb{U} = \mathbb{L}^2$ – однополостный гиперболоид, то φ принимает значения на окружности: $\varphi \in [0, 2\pi]$, и трехмерное пространство представляет собой произведение прямой $\theta \in \mathbb{R}$ и поверхности $\mathbb{V}$. Соответствующее пространство-время содержит замкнутые времениподобные кривые (включая экстремали), если только в качестве поверхности $\mathbb{U}$ не выбрано универсальное накрывающее пространство для $\mathbb{L}^2$.

Отметим следующее важное обстоятельство. Допустим, что метрика (3.21) задана и набор постоянных M, Q и Λ фиксирован. Тогда, как будет показано ниже, одному и тому же набору постоянных M, Q и Λ в общем случае соответствует несколько глобальных решений причем разной сигнатуры.

Конформный множитель (3.22) отличается от конформного множителя (2.59) в сферически симметричном случае только знаком перед космологической постоянной. Следовательно, для его анализа мы можем воспользоваться результатами, полученными в случае (B). В случае ненулевой космологической постоянной, $\Lambda \neq 0$, для анализа нулей конформного множителя $\Phi(q)$ нам потребуется вспомогательная функция $\phi(q)$, которая отличается от (2.63) только знаком перед слагаемым с космологической постоянной. Параметр Υ, определяющий экстремумы $\phi(q)$ определяется формулой (2.87). Перейдем к построению и классификации глобальных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем в рассматриваемом случае (C). Поскольку метрика на $\mathbb{V}$ не зависит от координаты ρ, мы, для наглядности, отождествим точки ρ и $\rho + L$, где L – некоторая постоянная.

Случай $\Lambda = 0$

В случае нулевой космологической постоянной конформный множитель (3.22) принимает вид:

$$\Phi(q) = 1 - \frac{2M}{q} + \frac{Q^2}{q^2}, \qquad Q \neq 0, \qquad q > 0. \tag{3.23}$$

При $M < Q$ конформный множитель не имеет нулей. Соответствующая поверхность $\mathbb{V} = R1_{(++)}$ изображена на рисунке 3.1. Здесь нижний индекс обозначает сигнатуру метрики на римановой поверхности $\mathbb{V}$. Поскольку конформный множитель положителен, сигнатура метрики на римановой поверхности $\mathbb{V}$ равна $(++)$. Сигнатура четырехмерной метрики равна $(+ - ++)$. Эта поверхность представляет собой полубесконечный цилиндр. Она геодезически неполна при конечном значении σ_0, которое соответствует значению $q = 0$. Здесь двумерная кривизна обращается в бесконечность и поверхность не может быть продолжена. Длина окружности в сечении $\sigma = \mathsf{const}$ стремится к бесконечности при $\sigma \to \sigma_0$. При $q \to \infty$ поверхность геодезически полна и $\sigma = \infty$, причем кривизна стремиться к нулю, а длина окружности в сечении $\sigma = \mathsf{const}$ к некоторому конечному значению. Пространственные сечения пространства-времени $x^0 = \mathsf{const}$ имеют вид: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{V}$, если в качестве лоренцевой поверхности $\mathbb{U}$ выбран однополостный гиперболоид. Если $\mathbb{U}$ – универсальная накрывающая однополостного гиперболоида, то пространственные сечения являются произведением вещественной прямой и римановой поверхности: $\mathbb{R} \times \mathbb{V}$. Физически данное решение описывает бесконечную эволюцию доменной стенки сингулярной кривизны, расположенной в точке σ_0.

При $M = Q$ конформный множитель имеет один нуль второго порядка на положительной полуоси, расположенный в точке $\tilde{q}_{1,2} = M$. Имеется два глобальных решения, отвечающих интервалам $(0, \tilde{q}_{1,2})$ и $(\tilde{q}_{1,2}, \infty)$. Интервалу $q \in (0, \tilde{q}_{1,2})$ соответствует поверхность $\mathbb{V} = R2_{(++)}$, изображенная на рисунке 3.1. Она геодезически неполна при $q = 0$, где скалярная кривизна обращается в бесконечность. В отличие от предыдущего случая длина окружности в сечении $\sigma = \mathsf{const}$ стремиться к нулю при $q \to \tilde{q}_{1,2}$. Как и в предыдущем случае данное решение описывает бесконечную эволюцию доменной стенки сингулярности кривизны. Интервалу $q \in (\tilde{q}_{1,2}, \infty)$ соответствует поверхность $R3_{(++)}$. С

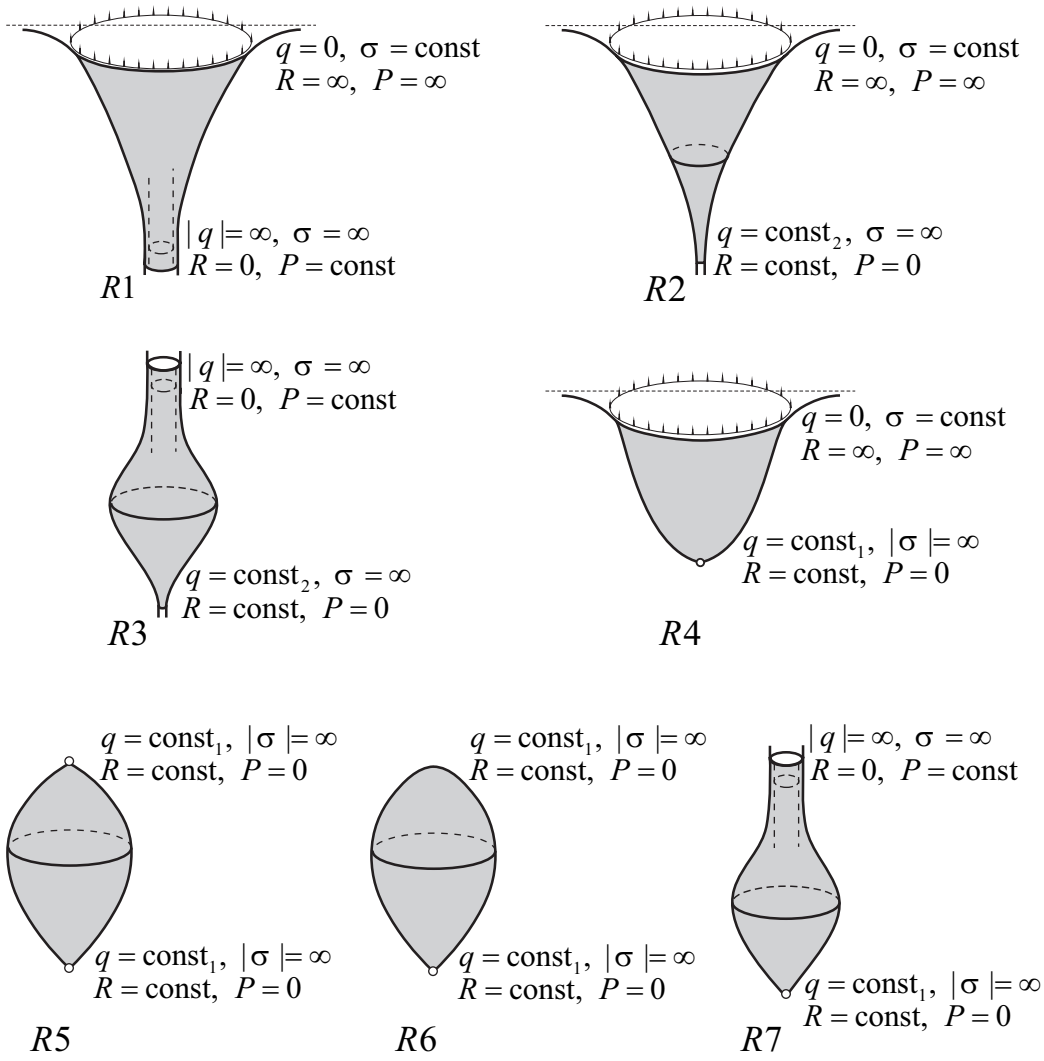


Рис. 3.1: Римановы поверхности $\mathbb{V}$ для случая $K^{(g)} = 1$ и $\Lambda = 0$. Запись $q = \mathsf{const}_{1,2}$ означает, что конформный множитель $\Phi(q)$ имеет в данной точке нуль первого или второго порядка, соответственно.

топологической точки зрения она представляет собой бесконечный цилиндр, не имеет особенностей и геодезически полна.

При $M > Q$ конформный множитель имеет два положительных простых нуля, расположенных в точках $\tilde{q}_{1,2} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$. Имеется три глобальных решения, соответствующих интервалам $(0, \tilde{q}_1)$, $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ и $(\tilde{q}_2, \infty)$. Интервалу $(0, \tilde{q}_1)$ соответствует поверхность $R4_{(++)}$. Она геодезически неполна в точке $q = 0$, где скалярная кривизна имеет особенность. Выколотая точка на рисунке изображает возможную коническую особенность при $q = \tilde{q}_1$, появление которой зависит от отождествления вдоль координаты ρ. С физической точки зрения при наличии конической особенности данное решение описывает бесконечную эволюцию космической струны, окруженной доменной стенкой

сингулярности кривизны.

Интервалу $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ соответствует риманова поверхность с отрицательно определенной метрикой, поскольку конформный множитель отрицателен. В зависимости от способа отождествления вдоль координаты ρ в данном случае возможны две поверхности: $\mathbb{V} = R5_{(--)}$ (две конические особенности в точках $\tilde{q}_1$ и $\tilde{q}_2$), $\mathbb{V} = R6_{(--)}$ (одна коническая особенность в точке $\tilde{q}_1$ или $\tilde{q}_2$). С физической точки зрения данные решения описывают бесконечную эволюцию двух или одной космических струн. Если лоренцева поверхность представляет собой однополостный гиперболоид, $\mathbb{U} = \mathbb{L}^2$, пространственные сечения компактны и космические струны представляют собой окружности. Если геодезические продолжены через конические особенности симметричным образом, то поверхности $\mathbb{V} = R5_{(--)}$ и $\mathbb{V} = R6_{(--)}$ геодезические полны.

При $q \in (\tilde{q}_2, \infty)$ риманова поверхность имеет вид $\mathbb{V} = R7_{(++)}$. Она, возможно, имеет коническую особенность при $q = \tilde{q}_2$ и геодезически полна. При наличии конической особенности данное решение описывает бесконечную эволюцию космической струны в точке $\tilde{q}_2$.

Случай $\Lambda > 0$

При положительной космологической постоянной, $\Lambda > 0$, параметр Υ всегда положителен, и, следовательно, вспомогательная функция $\phi(q)$ имеет всего один экстремум в точке q_4. При $M \geq 0$ экстремум расположен на положительной полуоси: $q_4 \geq 0$. При этом, в точке q_4 функция $\phi(q)$ достигает минимума: $\phi(q_4) =: \phi_4$. Качественное поведение $\phi(q)$ при $M \geq 0$ приведено на рисунке 2.4. Мы рассматриваем поведение конформного множителя только на положительной полуоси, $q > 0$. Отрицательные значения q отвечают случаю $M < 0$. Чтобы проанализировать случай $M < 0$, достаточно зеркально отразить график вспомогательной функции относительно вертикальной оси и рассмотреть ее поведение при положительных значениях q.

Перейдем к построению глобальных решений в рассматриваемом случае. Конформный множитель не имеет нулей и положителен при $q > 0$, если

$$\begin{aligned} &\Lambda > 0, \qquad M > 0, \qquad 3Q^2 > -\phi_4; \\ &\Lambda > 0, \qquad M \leqslant 0, \qquad\quad Q > 0. \end{aligned}$$

Соответствующая поверхность $\mathbb{V} = R11_{(++)}$ изображена на рисунке 3.2. Она геодезически неполна в точке $q = 0$, где скалярная кривизна сингулярна. При $q \to \infty$ длина окружности в сечении $\sigma =$ const стремиться к нулю, и геодезические полны. Данное решение описывает бесконечную эволюцию доменной стенки сингулярности кривизны, расположенную на конечном расстоянии.

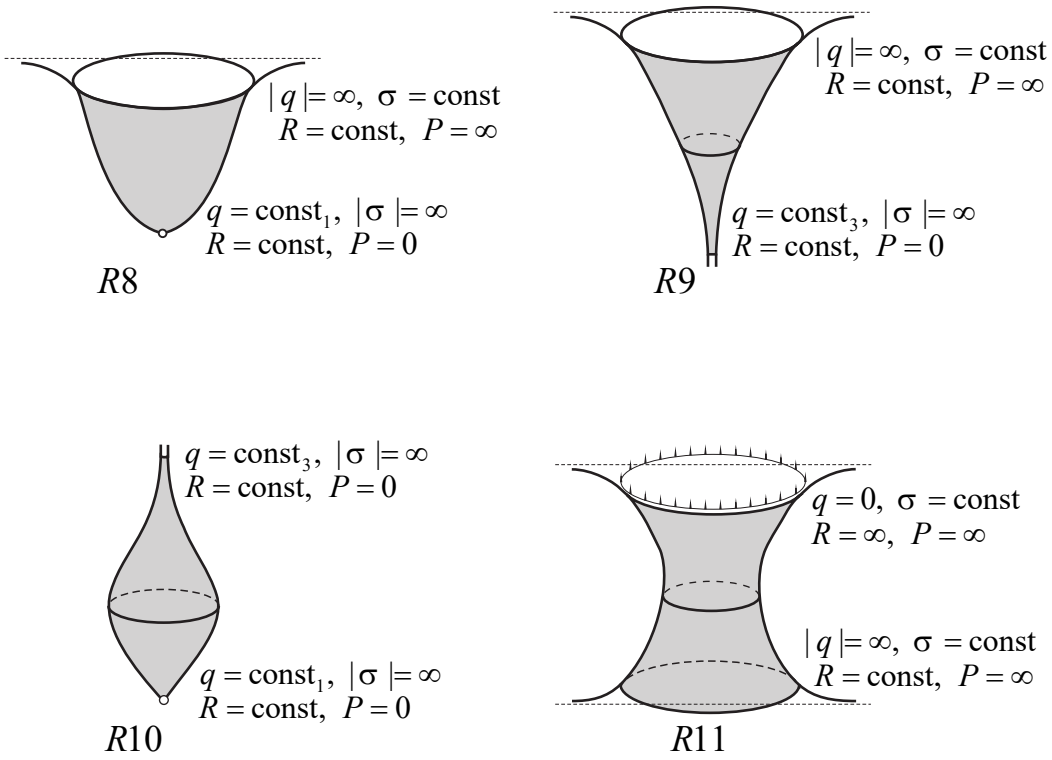


Рис. 3.2: Дополнительные римановы поверхности $\mathbb{V}$ в случае ненулевой космологической постоянной $\Lambda \neq 0$.

Конформный множитель $\Phi(q)$ в интервале $(0; \infty)$ имеет 1 нуль второго порядка в точке $\tilde{q}_{1,2}$, если

$$\Lambda > 0, \qquad M > 0, \qquad 3Q^2 = -\phi_4.$$

В интервале $(0, \tilde{q}_{1,2})$ конформный множитель положителен, и соответствующая поверхность имеет вид $\mathbb{V} = R2_{(++)}$. При $q \in (\tilde{q}_{1,2}, \infty)$ поверхность имеет вид $\mathbb{V} = R9_{(++)}$. Она геодезически полна и не имеет особенностей.

Конформный множитель $\Phi(q)$ при $q > 0$ имеет 2 простых нуля в точках $\tilde{q}_1$ и $\tilde{q}_2$, если

$$\Lambda > 0, \qquad M > 0, \qquad 3Q^2 < -\phi_4.$$

Интервалу $(0, \tilde{q}_1)$ соответствует поверхность $R4_{(++)}$. При $q \in (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ возможны

два случая: $\mathbb{V} = R5_{(--)}$ или $\mathbb{V} = R6_{(--)}$. Эти поверхности уже встречались ранее. Если $q \in (\tilde{q}_2, \infty)$, риманова поверхность имеет вид $\mathbb{V} = R8_{(++)}$. Топологически эта поверхность представляет собой плоскость с возможной конической особенностью. Вне конической особенности эта поверхность геодезически полна. С физической точки зрения данное решение описывает бесконечную эволюцию космической струны.

Случай $\Lambda < 0$

Рассмотрим случай отрицательной космологической постоянной. Анализ нулей конформного множителя проводиться аналогично сферически симметричному случаю. После замены $\Lambda \to -\Lambda$ все выкладки и формулы в точности повторяются. Качественное поведение вспомогательной функции $\phi(q)$ приведено на рисунке 2.2.

Выпишем условия, при которых конформный множитель $\Phi(q)$ в интервале $(0, \infty)$ имеет 1 простой нуль в точке $\tilde{q}_1$:

$$\begin{array}{llll} \Lambda < 0, & \forall \Upsilon, & M < 0, & Q \neq 0; \\ \Lambda < 0, & \Upsilon < 0, & M = 0, & Q \neq 0; \\ \Lambda < 0, & \Upsilon < 0, & M > 0, & 3Q^2 < -\phi_3; \\ \Lambda < 0, & \Upsilon < 0, & M > 0, & 3Q^2 > -\phi_2; \\ \Lambda < 0, & \Upsilon = 0, & M > 0, & 3Q^2 \neq -\phi_2; \\ \Lambda < 0, & \Upsilon > 0, & M > 0, & Q \neq 0. \end{array} \tag{3.24}$$

При $q \in (0, \tilde{q}_1)$ соответствующая поверхность имеет вид $\mathbb{V} = R4_{(++)}$. Если $q \in (\tilde{q}_1, \infty)$ риманова поверхность представляется в виде $R8_{(--)}$.

Пусть теперь выполнены условия:

$$\Lambda < 0, \qquad \Upsilon < 0, \qquad M > 0, \qquad -\phi_3 < 3Q^2 < -\phi_2. \tag{3.25}$$

Тогда конформный множитель $\Phi(q)$ при $q > 0$ имеет 3 простых нуля в точках $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ и $\tilde{q}_3$. Мы получаем 4 глобальных решения, которые уже встречались

ранее:

$$\begin{aligned} (0,\tilde{q}_1): &\qquad R4_{(++)},\\ (\tilde{q}_1,\tilde{q}_2): &\qquad R5_{(--)}, R6_{(--)},\\ (\tilde{q}_2,\tilde{q}_3): &\qquad R5_{(++)}, R6_{(++)},\\ (\tilde{q}_3,\infty): &\qquad R8_{(--)}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Если на постоянные наложены ограничения:

$$\Lambda<0, \qquad \Upsilon<0, \qquad M>0, \qquad 3Q^2=-\phi_2, \tag{3.27}$$

то конформный множитель $\Phi(q)$ при $q>0$ имеет 1 нуль второго порядка в точке $\tilde{q}_{1,2}$ локального минимума и 1 простой нуль в точке $\tilde{q}_3$. При $q\in(0,\tilde{q}_{1,2})$ и $q\in(\tilde{q}_3,\infty)$ риманова поверхность имеет вид $\mathbb{V}=R2_{(++)}$ и $\mathbb{V}=R8_{(--)}$. Если $q\in(\tilde{q}_{1,2},\tilde{q}_3)$ мы получим новую поверхность $\mathbb{V}=R10_{(++)}$. Она представляет собой плоскость с, возможно, одной конической особенностью. В случае конической особенности данное решение описывает бесконечную эволюцию космической струны. Отличительной чертой данного решения является то, что на геодезической бесконечности $q\to\tilde{q}_{1,2}$ длина окружности в сечении $\sigma=\mathsf{const}$ стремиться к нулю, $P\to 0$.

Выпишем теперь условия, при которых конформный множитель $\Phi(q)$ в интервале $(0;\infty)$ имеет 1 простой нуль в точке $\tilde{q}_1$ и 1 нуль второго порядка в точке $\tilde{q}_{2,3}$ локального максимума:

$$\Lambda<0, \qquad \Upsilon<0, \qquad M>0, \qquad 3Q^2=-\phi_3. \tag{3.28}$$

Глобальные решения в данном случае имеют вид:

$$\begin{aligned} (0,\tilde{q}_1): &\qquad R4_{(++)},\\ (\tilde{q}_1,\tilde{q}_{2,3}): &\qquad R10_{(--)},\\ (\tilde{q}_{2,3},\infty): &\qquad R9_{(--)}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Наконец, если выполнены условия:

$$\Lambda<0, \qquad \Upsilon=0, \qquad M>0, \qquad 3Q^2=-\phi_2, \tag{3.30}$$

конформный множитель $\Phi(q)$ при $q > 0$ имеет 1 нуль третьего порядка в точке $\tilde{q}_{1,2,3}$. Интервалу $(0, \tilde{q}_{1,2,3})$ соответствует глобальная поверхность $\mathbb{V} = R2_{(++)}$. При этом в точке $q = \tilde{q}_{1,2,3}$ двумерная скалярная кривизна обращается в нуль, $R = 0$. Интервалу $(\tilde{q}_{1,2,3}, \infty)$ соответствует поверхность $\mathbb{V} = R9_{(--)}$.

Таким образом, мы построили все глобальные лоренц-инвариантные решения при $K^{(g)} = 1$. Всего мы получили 11 топологически различных решений. Максимально продолженные римановы поверхности представлены диаграммами $R1$–$R11$. Среди них имеются интересные с физической точки зрения решения, описывающие космические струны и доменные стенки сингулярной кривизны.

3.3. Глобальные решения с плоскостью Минковского $K^{(g)} = 0$

В случае $K^{(g)} = 0$ геодезически полная лоренцева поверхность $\mathbb{U}$ представляет собой плоскость Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ или цилиндр, или тор, в зависимости от компактификации. Конформный множитель в этом случае принимает вид:

$$\Phi(q) = -\frac{2M}{q} + \frac{\Lambda q^2}{3} + \frac{Q^2}{q^2}. \tag{3.31}$$

Он отличается от конформного множителя (2.95), возникающего в случае планарных решений, только знаком перед космологической постоянной. Так же как и в предыдущем разделе вид максимально продолженной римановой поверхности $\mathbb{V}$ зависит от поведения конформного множителя (3.31). В зависимости от значений постоянных Λ, M и Q возникают различные глобальные поверхности $\mathbb{V}$. Рассмотрим отдельно случаи $\Lambda = 0$, $\Lambda > 0$ и $\Lambda < 0$.

Случай $\Lambda = 0$

Рассмотрим сначала случай нулевой космологической постоянной. Предположим, что выполнены следующие условия:

$$\Lambda = 0, \qquad M \leqslant 0, \qquad Q > 0.$$

Тогда конформный множитель положителен и не имеет нулей при $q > 0$. Максимально продолженная вдоль геодезических риманова поверхность имеет вид $\mathbb{V} = R2_{(++)}$. При этом в отличие от предыдущих случаев кривизна метрики стремиться к нулю при $q \to \infty$.

При выполнении условий:

$$\Lambda = 0, \qquad M > 0, \qquad Q > 0,$$

конформный множитель имеет 1 простой нуль в точке $\tilde{q}_1$. В случае $q \in (0, \tilde{q}_1)$ возникает поверхность $R4_{(++)}$. При $q \in (\tilde{q}_1, \infty)$ конформный множитель отрицателен, и мы получим поверхность $R10_{(--)}$. Топологически она представляет собой плоскость, на которой возможно расположена коническая сингулярность. При $q \to \infty$ кривизна двумерной метрики стремиться к нулю $R^{(h)} \to 0$.

Случай $\Lambda > 0$

При ненулевых значениях космологической постоянной, $\Lambda \neq 0$, вспомогательная функция $\phi(q)$ отличается от функции (2.102), соответствующей планарному случаю, только знаком космологической постоянной. Качественное поведение $\phi(q)$ с точностью до замены $\Lambda \to -\Lambda$ приведено на рисунке 2.6. Перечислим все глобальные решения в случае положительной космологической постоянной.

При выполнении условий:

$$\Lambda > 0, \qquad M = 0, \qquad Q \neq 0, \tag{3.32}$$

конформный множитель положителен и не имеет нулей при $q > 0$. Соответствующая глобальная поверхность имеет вид $R2_{(++)}$. При этом, в отличие от предыдущих случаев, скалярная кривизна стремиться к нулю при $q \to \infty$.

При следующих ограничениях на постоянные:

$$\begin{aligned} &\Lambda > 0, \qquad M \leqslant 0, \qquad Q > 0; \\ &\Lambda > 0, \qquad M > 0, \qquad 3Q^2 > -\phi_6, \end{aligned}$$

конформный множитель также не имеет нулей. Максимально продолженная

риманова поверхность имеет вид $R11_{(++)}$.

Пусть выполнены условия:

$$\Lambda > 0, \qquad M > 0, \qquad 3Q^2 < -\phi_6.$$

Тогда конформный множитель имеет два положительных простых нуля в точках $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$. Глобальные римановы поверхности в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} (0, \tilde{q}_1): &\qquad R4_{(++)}, \\ (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2): &\qquad R5_{(--)}, R6_{(--)}, \\ (\tilde{q}_2, \infty): &\qquad R8_{(--)}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Если выполнены условия

$$\Lambda > 0, \qquad M > 0, \qquad 3Q^2 = -\phi_6,$$

конформный множитель имеет один положительный нуль второго порядка в точке $\tilde{q}_{1,2}$. В данном случае имеется две максимально продолженные римановы поверхности:

$$\begin{aligned} (0, \tilde{q}_{1,2}): &\qquad R2_{(++)}, \\ (\tilde{q}_{1,2}, \infty): &\qquad R9_{(++)}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Скалярная кривизна метрики при этом стремится к нулю при $q \to \infty$, и стремиться к отличной от нуля постоянной при $q \to \tilde{q}_{1,2}$.

Случай $\Lambda < 0$

Рассмотрим случай отрицательной космологической постоянной. Заметим, что в данном случае выполнено условие $\Phi \to -q^2$ при $q \to \infty$. В итоге получим, что если на постоянные наложены ограничения:

$$\Lambda < 0, \qquad M \in \mathbb{R}, \qquad Q > 0,$$

то конформный множитель при $q > 0$ имеет 1 простой нуль в точке $\tilde{q}_1$. Имеется две поверхности:

$$\begin{aligned} (0, \tilde{q}_1): &\quad R4_{(++)}, \\ (\tilde{q}_1, \infty): &\quad R8_{(--)}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Мы получили 8 топологически различных глобальных решений с плоскостью Минковского. Максимально продолженные римановы поверхность представлены диаграммами $R2$, $R4$–$R6$ и $R8$–$R11$.

Таким образом, мы перечислили все глобальные решения вида $\mathbb{R}^{1,1} \times \mathbb{V}$. Возникающие здесь максимально продолженные римановы поверхности $\mathbb{V}$ уже встречались ранее в случае $K^{(h)} = 1$, когда четырехмерное пространство-время имело вид: $\mathbb{L}^2 \times \mathbb{V}$. Несмотря на то, что римановы поверхности $\mathbb{V}$ в указанных разделах одинаковы, глобальные решения отличаются первым сомножителем в сплетенном произведении и, следовательно, являются различными. Всего в случае (C) мы получили 19 топологически различных решений.

Отметим следующее интересное свойство полученных глобальных решений. Нули и особенности конформного множителя разбивают положительную полуось $q > 0$ на интервалы. Каждому интервалу соответствует своя максимально продолженная риманова поверхность $\mathbb{V}$. В результате каждой метрике, полученной при решении уравнений Эйнштейна, и фиксированному набору параметров Q, M и Λ соответствует не одно, а несколько глобальных решений.

Заключение

В работе мы изучили глобальную структуру точных решений уравнений общей теории относительности с электромагнитным полем и космологической постоянной для метрики сплетенного произведения двух поверхностей при различных значениях параметров M, Q и Λ. Константы M и Q изначально не входят в действие рассматриваемой модели, а возникают в результате интегрирования системы уравнений Эйнштейна-Максвелла. Вид глобальных решений зависит от соотношений между параметрами M, Q и Λ.

Мы предполагали, что максимально продолженное четырехмерное пространственно-временное многообразие имеет вид сплетенного произведения лоренцевой и римановой поверхностей $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$, соответственно: $\mathbb{M} = \mathbb{U} \times \mathbb{V}$. Мы показали, что если электромагнитный потенциал задан в виде (1.17), то хотя бы одна из поверхностей сплетенного произведения должна быть поверхностью постоянной кривизны (случаи (A), (B) и (C)). При этом никакая симметрия метрики заранее не предполагалась. В результате симметрия метрики возникала в качестве следствия уравнений общей теории относительности и требования максимального продолжения решения вдоль геодезических ("спонтанное появление симметрии"). Более того, мы показали, что в случае (B) лоренцева поверхность $\mathbb{U}$ обладает дополнительным векторным полем Киллинга. Тем самом, доказано обобщение теоремы Бирхгоффа на случай решений, инвариантных относительно групп симметрии $\mathbb{ISO}(2)$ и $\mathbb{SO}(1,2)$, а также присутствия электромагнитного поля. Также доказано наличие векторного поля Киллинга на римановой поверхности $\mathbb{V}$ в случае (C).

Мы построили глобальные решения во всех трех случаях: (A), (B) и (C). В случае (A) мы получили 4 топологически неэквивалентных глобальных решения с сигнатурой метрики $(+---)$. Здесь обе поверхности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ являются поверхностями постоянной кривизны и имеют ровно по 3 векторных поля Киллинга. Всего глобальные решения в случае (A) имеют по 6 векторных полей Киллинга и являются максимально симметричными решениями, представимыми в виде сплетенного произведения поверхностей.

В случае (B) мы построили 44 различных глобальных решений с пространственной симметрией с сигнатурой метрики $(+---)$ и $(-+++)$. В этом случае каждое глобальное решение имеет по 4 векторных поля Киллинга. Глобальные

решения представлены диаграммами Картера-Пенроуза для лоренцевой поверхности $\mathbb{U}$. Сюда включены важные с физической точки зрения сферически симметричные решения ($\mathbb{SO}(3)$–симметрия). Всего мы получили 16 глобальных сферически симметричных решений. Среди них имеется новое интересное сферически симметричное глобальное решение, описывающее изменение топологии пространственных сечений пространственно-временного многообразия с течением времени, причем в рамках классической модели гравитации. Наряду со сферически симметричными решениями здесь получены также планарные ($\mathbb{ISO}(2)$–симметрия) и гиперболические ($\mathbb{SO}(1,2)$–симметрия) решения.

В случае (C) мы получили 19 топологически различных глобальных решений, имеющих по 4 векторных поля Киллинга с сигнатурами $(+---)$ и $(+--+)$. Сюда включены лоренц-инвариантные решения ($\mathbb{SO}(1,2)$–симметрия) и решения с плоскостью Минковского ($\mathbb{ISO}(1,1)$–симметрия). Глобальные решения представлены диаграммами, изображающими римановы поверхности $\mathbb{V}$ с точностью до отождествления вдоль пространственной координаты. В данном случае глобальные решения имеют интересную физическую интерпретацию. Они описывают космические струны и доменные стенки сингулярностей кривизны. Интересным также является следующее обстоятельство: фиксированному набору значений M, Q и Λ в общем случае соответствует не одно, а несколько глобальных решений.

Список литературы

[1] Д. Е. Афанасьев. Глобальная структура сферически симметричных решений уравнений Эйнштейна с электромагнитным полем. *Математическая физика и приложения. Сборник статей. К 95-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Труды МИАН*, 306, МИАН, М., 2019, 16–27.

[2] В. А. Березин, А. Л. Смирнов. *О черных дырах и замаскированных черных дырах.* – М.: ИЯИ РАН, 2008.

[3] В. А. Березин. *Математические начала космологии.* – М.: ИЯИ РАН, 2009.

[4] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. *Введение в теорию квантовых полей.* – 4-е изд., испр. – М.: Наука, 1984.– 600 с.

[5] С. Вайнберг. *Гравитация и космология: Принципы и приложения Общей теории относительности.* пер. с англ. В. М. Дубовика и Э. А. Тагирова. Под ред. Я. А. Смородинского. – М.: Мир, 1975.

[6] В. С. Владимиров. *Уравнения математической физики.* – 4-е изд., – М.: Наука, 1981.– 512 с.

[7] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. *Уравнения математической физики:* Учебник для вузов. – 2-е изд., стереотип. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.– 400 с.

[8] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. *Современная геометрия: Методы и приложения.* – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1986.– 760 с.

[9] М. О. Катанаев. *Математические основы общей теории относительности. Часть 1* – М.: МИАН, 2017. – 312 с. – (Лекционные курсы НОЦ, ISSN 2226-8782; Вып. 28)

[10] М. О. Катанаев. *Математические основы общей теории относительности. Часть 2* – М.: МИАН, 2018. – 366 с. – (Лекционные курсы НОЦ, ISSN 2226-8782; Вып. 29)

[11] М. О. Катанаев. Геометрические методы в математической физике. Ver. 3, 2016. arXiv:1311.0733 [math-ph].

[12] Ш. Кобаяси, К. Номидзу. *Основы дифференциальной геометрии.* т. 1.: Пер. с англ. – М.: Наука, 1981.– 344 с.

[13] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Теоретическая физика:* Учеб. пособие. В

10 т. Т. II. *Теория поля.* – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

[14] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. *Гравитация.* Т.1–3. – М.: Мир, 1977.

[15] С. П. Новиков, И. А. Тайманов. *Современные геометрические структуры и поля.* – 2-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2014.– 584 с.

[16] И. Д. Новиков, В. П Фролов. *Физика черных дыр.* – М.:Наука, 1986. – 328 с.

[17] И. Г. Петровский. *Лекции об уравнениях с частными производными.* Изд. 3-е, доп. – М.: Гос. Изд. Физ.-мат. л-ры, 1961.

[18] В. А. Рубаков. *Классические калибровочные поля: Бозонные теории.* Учебное пособие. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: КомКнига, 2005. – 296 с.

[19] А. А. Славнов, Л. Д. Фадеев. *Введение в квантовую теорию калибровочных полей.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1988.– 272 с.

[20] К. В. Степаньянц. *Классическая теория поля.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.– 540 с.

[21] Р. М. Уолд. *Общая теория относительности.* – М.: Российский университет дружбы народов, 2008. – 694 с.

[22] В. А. Фок. *Теория пространства, времени и тяготения.* – М.: Гос. изд-во технико-теорет. л-ры, 1955. – 504 с.

[23] С. Хоккинг, Дж. Эллис. *Крупномасштабная структура пространства-времени.* пер. с англ. Э. А. Тагирова. Под ред. Я.А. Смородинского. – М.: Мир, 1977.

[24] D. E. Afanasev and M. O. Katanaev. Global properties of warped solutions in General Relativity with an electromagnetic field and a cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 100 (2):024052, 2019.

[25] D. E. Afanasev and M. O. Katanaev. Global properties of warped solutions in General Relativity with an electromagnetic field and a cosmological constant. II *Phys. Rev. D*, 101 (12):124025, 2020.

[26] D. E. Afanasev and M. O. Katanaev. On global properties of warped solutions in General Relativity with an electromagnetic field and a cosmological constant. *PoS, CORFU2019*, 201, 2020.

[27] A. Barnes. On Birkhoff's theorem in General Relativity. *Commun. Math. Phys.*, 33, 75–82, 1973.

[28] B. Bertotti. Uniform electromagnetic field in General Relativity. *Phys. Rev.*, 116, 1331–1333, 1959.

[29] G. D. Birkhoff. *Relativity and modern physics.* Cambridge, Harvard University Press, Cambridge, 1923.

[30] C. Bona. A new proof of the generalized Birkhoff theorem. *J. Math. Phys.*, 29, 1440-1441, 1988.

[31] D. R. Brill, J. Louko and P. Peldan. Thermodynamics of (3+1)–dimensional black holes with toroidal or higher genus horizons. *Phys. Rev. D*, 56, 3600—3610, 1997.

[32] D. R. Brill and S. A. Hayward Global structure of a black hole cosmos and its extremes. *Class. Quantum Grav.*, 11, 359—370, 1994.

[33] R.-G. Cai and Y.-Z. Zhang. Black plane solutions in four-dimensional spacetimes. *Phys. Rev. D*, 54, 4891-–4898, 1996.

[34] J. Carot and J. da Costa. On the geometry of warped spacetimes. *Class. Quantum Grav.*, 10, 461–482, 1993.

[35] B. Carter. Black hole equilibrium states. In C. DeWitt and B. C. DeWitt, editors, *Black Holes*, pages 58–214, New York, 1973. Gordon and Breach.

[36] H. Goenner. Einstein tensor and generalizations of Birkhoff's theorem. *Commun. Math. Phys.*, 16, 34–47, 1970.

[37] J. C. Graves and D. R. Brill Oscillatory character of Reissner–Nordström metric for an ideal charged wormhole. *Phys. Rev.*, 120, 1507—1513, 1960.

[38] J. B.Griffiths, J. Podolsky. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity.* Cambridge University Press, New York, 2009.

[39] G. T. Horowitz. Topology change in classical and quantum gravity. *Class. Quantum Grav.*, 8, 587-601, 1991.

[40] C-G. Huang and C-B. Liang. A torus-like black hole. *Phys. Lett. A*, 201, 27—32, 1995.

[41] W. Israel. Event horizons in static vacuum space-times. *Phys. Rev.*, 164, 1776-1779, 1967.

[42] W. Israel. Event horizons in static electrovac space-time. *Comm. Math. Phys.*, 8, 245—260, 1968.

[43] M. O. Katanaev, T. Klösch, and W. Kummer. Global properties of warped solutions in General Relativity. *Ann. Phys.*, 276:191–222, 1999.

[44] M. O. Katanaev. Global solutions in gravity. Lorentzian signature. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 228:158–183, 2000.

[45] M. O. Katanaev. Global solutions in gravity: Euclidean signature. In D.

Vassilevich D. Grumiller, A. Rebhan, editor, In "Fundumental Interactions. A Memorial Volume for Wolfgang Kummer", pages 249–266, Singapore, 2010. World Scientific. gr-qc/0808.1559.

[46] G. A. Korn and T. M. Korn. *Mathematical Handbook*. McGraw–Hill Book Company, New York – London, 1968.

[47] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, and E. Herlt. *Exact Solutions of the Einsteins Field Equations*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.

[48] M. D. Kruskal. Maximal extension of Schwarzschild metric. *Phys. Rev.*, 119(5):1743–1745, 1960.

[49] H. Nariai. On a new cosmological solution of Einstein's field equations of gravitation. *Sci. Rep. Tohoku Univ.*, 35, 62–67, 1951.

[50] G. Nordström. On the energy of the gravitational field in Einstein's theory. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, 20:1238–1245, 1918.

[51] H. Laue and M. Weiss. Maximally extended Reissner–Nordström manifold with cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 16, 3376—3379, 1977.

[52] J. P.S. Lemos. Two-dimensional black holes and planar General Relativity. *Class. Quantum Grav.*, 12, 1081—1086, 1995.

[53] J. P.S. Lemos. Three dimensional black holes and cylindrical General Relativity. *Phys. Lett. B*, 353, 46—51, 1995.

[54] R. B. Mann. Pair production of topological anti-de Sitter black holes. *Class. Quantum Grav.*, 14, L109—L114, 1997.

[55] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.* Number 103 in Pure Appl. Math. Academic Press, New York-London, 1983.

[56] J. F. Plebanski and S. Hacyan. Some exceptional electrovac type D metrics with cosmological constant. *J. Math. Phys.*, 20, 1004–1010, 1979.

[57] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Ann. Physik (Leipzig)*, 50:106–120, 1916.

[58] I. Robinson. A solution of the Maxwell–Einstein equations. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys.*, 7, 351–352, 1959.

[59] H.-J. Schmidt. The tetralogy of Birkhoff theorems. *Gen. Rel. Grav.*, 45:395–410, 2013.

[60] Yakov M. Shnir. *Magnetic Monopoles.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[61] W. L. Smith and R. B. Mann. Formation of topological black holes from

gravitational collapse. *Phys. Rev. D.*, 56, 4942—4947, 1997.

[62] O. Stoica. The geometry of warped product singularities. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14, 2017.

[63] G. Szekeres. On the singularities of a riemannian manifold. *Publ. Mat. Debrecen*, 7(1–4):285–301, 1960.

[64] L. Vanzo. Black holes with unusual topology. *Phys. Rev. D.*, 56, 6475—6483, 1997.

[65] M. Walker. Block Diagrams and the Extension of Timelike Two-Surfaces. *J. Math. Phys.*, 11, 2280, 1970.

[66] H. Weyl. Zur Gravitationstheorie. *Ann. Physik.*, 54(359), 117–145, 1917.