Российская Академия наук

Математический институт им. В. А. Стеклова

На правах рукописи
УДК 512.7

Шрамов Константин Александрович

Конечные группы автоморфизмов алгебраических и комплексных многообразий

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена в отделе алгебраической геометрии Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Официальные оппоненты:
ПАНИН Иван Александрович — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник лаборатории алгебры и теории чисел ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (специальность 01.01.06)
ТАНКЕЕВ Сергей Геннадьевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры "Функциональный анализ и его приложения" Института прикладной математики, физики и информатики ФГБОУ ВО Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых (специальность 01.01.06)
ШАБАТ Георгий Борисович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, логики и интеллектуальных систем в гуманитарной сфере Института лингвистики ФГБОУ ВО "Российский государственный гуманитарный университет" (РГГУ) (специальность 01.01.06)

Ведущая организация:
ФГБУН Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук (ИППИ РАН)

Защита диссертации состоится " 25 " февраля 2021 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-й этаж, конференц-зал.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова РАН и на сайте
`http://www.mi-ras.ru/dis/ref20/shramov/dis.pdf`

Автореферат разослан " " декабря 2020 г.
Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.022.03 при МИАН,
д. ф.-м. н. профессор  М. А. Королев

Актуальность темы

Часто оказывается, что некоторые бесконечные группы демонстрируют хорошее поведение на уровне конечных подгрупп. Поразительный пример такой ситуации дает теорема, доказанная в 1878 году К. Жорданом[1]; более современные изложения этой теоремы можно найти в книге Ч. Кёртиса и И. Рейнера[2], а также в работах Э. Брейара и Б. Грина[3]. Теорема Жордана утверждает существование константы $J = J(n)$ со следующим свойством: любая конечная подгруппа в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ содержит нормальную абелеву подгруппу индекса не больше J. Вдохновившись этой теоремой, В. Л. Попов[4] предложил рассматривать аналогичное свойство для произвольных групп. А именно, группа Γ называется *жордановой* (в этом случае также говорят, что она имеет *свойство Жордана*), если существует такая константа J, что любая конечная подгруппа в Γ содержит нормальную абелеву подгруппу индекса не больше J.

Свойство Жордана можно неформально воспринимать как ограниченность сложности конечных подгрупп данной группы, если считать, что абелевы группы устроены просто, а сложность определяется структурой фактора по нормальной абелевой подгруппе. Этой интерпретацией объясняется интерес к свойству Жордана в контексте классификации конечных подгрупп в важных с геометрической точки зрения бесконечных группах.

Результат К. Жордана показывает, что группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ жорданова. То же относится к произвольной линейной алгебраической группе, так как ее можно реализовать как подгруппу в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ при подходящем n;

---

[1] C. Jordan, *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique*, J. Reine Angew. Math. **84** (1878), 89–215.

[2] Ch. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XI. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1962.

[3] E. Breuillard, *An exposition of Jordan's original proof of his theorem on finite subgroups of* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, e-print (2011). `http://www.math.u-psud.fr/~breuilla/Jordan.pdf`. E. Breuillard, B. Green, *Approximate groups III: the unitary case.* Turkish J. Math. **36** (2012), no. 2, 199–215.

[4] V. Popov, *On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties*, In *Peter Russell's Festschrift, Proceedings of the conference on Affine Algebraic Geometry held in Professor Russell's honour, 1–5 June 2009, McGill Univ., Montreal.*, vol. *54* of *Centre de Recherches Mathématiques CRM Proc. and Lect. Notes*, 289–311, 2011.

также легко видеть, что поле $\mathbb{C}$ здесь можно заменить на произвольное поле характеристики 0. Ж.-П. Серр[5] заметил, что в некоторых случаях это свойство выполняется и для групп бирациональных автоморфизмов. А именно, он установил, что свойством Жордана обладает группа бирациональных автоморфизмов проективной плоскости (так называемая *группа Кремоны*) над полем характеристики 0. Ю. Г. Зархин[6] построил пример комплексной проективной поверхности, группа бирациональных автоморфизмов которой не жорданова; эта поверхность бирациональна произведению $E \times \mathbb{P}^1$, где E — эллиптическая кривая. С другой стороны, В. Л. Попов доказал, что других комплексных алгебраических поверхностей с нежордановыми группами бирациональных автоморфизмов не существует.

Группы автоморфизмов, обладающие свойством Жордана, изучались в нескольких разных контекстах. Ю. Г. Прохоров и К. А. Шрамов[7] доказали, что это свойство выполнено для групп бирациональных автоморфизмов рационально связных многообразий, а также для некоторых других многообразий произвольной размерности. На момент доказательства часть их результатов зависела от гипотезы об ограниченности терминальных многообразий Фано, которая была недавно доказана в более общем виде К. Биркаром[8]. Также Ю. Г. Прохоров и К. А. Шрамов[9] классифицировали жордановы группы бирациональных автоморфизмов для трехмерных алгебраических многообразий и доказали жордановость групп автоморфизмов трехмерных компактных мойшезоновых многообразий. Свойсто Жордана для групп бирациональных автоморфизмов расслоений на коники изучалось Т. М. Бандман и Ю. Г. Зархиным[10].

---

[5] J.-P. Serre, *A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank* 2 *over an arbitrary field*, Mosc. Math. J., **9** (2009), no. 1, 193–208.

[6] Yu. Zarhin, *Theta groups and products of abelian and rational varieties*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **57** (2014), no. 1, 299–304.

[7] Yu. Prokhorov, C. Shramov, *Jordan property for Cremona groups*, Amer. J. Math., **138** (2016), no .2, 403–418. Yu. Prokhorov, C. Shramov, *Jordan property for groups of birational selfmaps*, Compositio Math., **150** (2014), no. 12, 2054–2072.

[8] C. Birkar, *Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties*, arXiv:1609.05543 (2016).

[9] Yu. Prokhorov, C. Shramov, *Finite groups of birational selfmaps of threefolds*, Math. Res. Lett., **25** (2018), no. 3, 957–972. Ю. Г. Прохоров, К. А. Шрамов, *Группы автоморфизмов трехмерных мойшезоновых многообразий*, Матем. заметки, **106** (2019), no. 4, 636–640.

[10] T. Bandman, Yu. Zarhin, *Jordan groups, conic bundles and abelian varieties*, Alg. Geom. **4**

Ш. Менг и Д.-Ч. Жанг[11] доказали, что группа автоморфизмов любого проективного многообразия над полем характеристики 0 жорданова. Дж. Х. Ким[12] обобщил это утверждение на случай кэлеровых многообразий. Т. М. Бандман и Ю. Г. Зархин[13] доказали свойство Жордана для групп автоморфизмов квазипроективных поверхностей. Другие результаты в этом направлении можно найти в работах В. Л. Попова[14]. Отметим, над полем $\Bbbk$ положительной характеристики свойство Жордана не выполняется уже для группы $\mathrm{GL}_2(\Bbbk)$; существуют его обобщения, которые выполняются для всех алгебраических групп над полями положительной характеристики[15], но мы не будем обсуждать их в рамках этой диссертации.

Э. Жис спросил (следуя более раннему, но более частному вопросу В. Фейта), является ли жордановой группа диффеоморфизмов произвольного компактного гладкого многообразия. Б. Чикос, Л. Пыбер и Э. Жабо[16], следуя методу Ю. Г. Зархина, построили пример, из которого следует отрицательный ответ на этот вопрос; в некомпактном случае подобный пример был приведен В. Л. Поповым[17]. Тем не менее, группы диффеоморфизмов часто оказываются жордановыми[18]. И. Мундет

(2017), no. 2, 229–246.

[11]Sh. Meng, D.-Q. Zhang, *Jordan property for non-linear algebraic groups and projective varieties*, Amer. J. Math., **140** (2018), no. 4, 1133–1145.

[12]J. H. Kim, *Jordan property and automorphism groups of normal compact Kähler varieties*, Commun. Contemp. Math., **20** (2018), no. 3, 1750024.

[13]T. Bandman, Yu. Zarhin, *Jordan groups and algebraic surfaces*, Transform. Groups **20** (2015), no. 2, 327–334.

[14]V. Popov, *Jordan groups and automorphism groups of algebraic varieties*, In *Automorphisms in birational and affine geometry. Levico Terme, Italy, October 2012*, vol. **79** of *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 185–213, 2014. V. Popov, *The Jordan property for Lie groups and automorphism groups of complex spaces*, Math. Notes, **103** (2018), no. 5–6, 811–819.

[15]R. Brauer, W. Feit, *An analogue of Jordan's theorem in characteristic p*. Ann. of Math. (2), **84** (1966), 119–131. M. Larsen, R. Pink, *Finite subgroups of algebraic groups*, J. Amer. Math. Soc., **24** (2011), no. 4, 1105–1158. F. Hu, *Jordan property for algebraic groups and automorphism groups of projective varieties in arbitrary characteristic*, arXiv:1804.10946 (2018).

[16]B. Csikós, L. Pyber, E. Szabó, *Diffeomorphism groups of compact* 4*-manifolds are not always Jordan*, arXiv:1411.7524 (2014).

[17]В. Л. Попов, *Конечные подгруппы групп диффеоморфизмов*, Тр. МИАН, **289** (2015), 235–241.

[18]B. Zimmermann, *On finite groups acting on spheres and finite subgroups of orthogonal groups*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **9** (2012), no. 1–12. A. Guazzi, B. Zimmermann, *On finite simple groups acting on homology spheres*, Monatsh. Math., **169** (2013), no. 3–4, 371–381. I. Mundet i Riera, *Finite group actions on manifolds without odd cohomology*, arXiv:1310.6565

и Риера[19] получил аналогичные результаты для групп симплектоморфизмов. Ш. Е[20] показал, что в отдельных случаях свойство Жордана выполняется даже для групп гомеоморфизмов.

Кроме свойства Жордана, можно рассматривать и другие ограничения на конечные подгруппы данной группы. Будем говорить, что группа Γ имеет *ограниченные конечные подгруппы*, если найдется такая константа $B = B(\Gamma)$, что любая конечная подгруппа в Γ имеет порядок не больше B. Интересный пример бесконечной группы с ограниченными конечными подгруппами дает классическая теорема, доказанная Г. Минковским[21] в 1887 году: этим свойством обладают группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$. Ю. Г. Прохоров и К. А. Шрамов показали, что группа бирациональных автоморфизмов любого многообразия, определенного над числовым полем, имеет ограниченные конечные подгруппы.

В случае, когда классификация конечных подгрупп некоторой бесконечной группы Γ интересна, но слишком трудоемка или даже невозможна, свойство Жордана для группы Γ можно рассматривать как свидетельство того, что такая гипотетическая классификация в принципе могла бы существовать. Такая ситуация типична для групп бирациональных автоморфизмов алгебраических многообразий (и для групп бимероморфных автоморфизмов компактных комплексных многообразий). В качестве примера можно рассмотреть группы Кремоны ранга n, то есть группы бирациональных автоморфизмов $\mathbb{P}^n$ над полем характеристики 0 (которые также часто называют кремоновыми преобразованиями), при различных натуральных n.

Группа Кремоны ранга 1 над полем $\Bbbk$ совпадает с группой $\mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$. Это линейная алгебраическая группа, и на большинство осмысленных

(2013). B. Zimmermann, *On Jordan type bounds for finite groups acting on compact 3-manifolds*, Arch. Math., **103** (2014), no. 2, 195–200. I. Mundet i Riera, *Finite group actions on homology spheres and manifolds with nonzero Euler characteristic*, arXiv:1403.0383 (2014). I. Mundet i Riera, A. Turull, *Boosting an analogue of Jordan's theorem for finite groups*, Adv. Math., **272** (2015), 820–836. I. Mundet i Riera, *Finite group actions on 4-manifolds with nonzero Euler characteristic*, Math. Z., **282** (2016), no. 1–2, 25–42.

[19] I. Mundet i Riera, *Finite groups acting symplectically on $T^2 \times S^2$*, Trans. Am. Math. Soc., **369** (2017), no. 6, 4457–4483. I. Mundet i Riera, *Finite subgroups of Ham and Symp*, Math. Ann., **370** (2018), no. 1–2, 331–380.

[20] Sh. Ye, *Symmetries of flat manifolds, Jordan property and the general Zimmer program*, J. Lond. Math. Soc. (2), **100** (2019), no. 3, 1065–1080.

[21] H. Minkowski, *Zur Theorie der positiven quadratischen Formen*, J. Reine Angew. Math., **101** (1887), 196–202.

вопросов про нее можно получить ответ. В частности, классификация конечных подгрупп в этой группе известна с давних времен (по крайней мере со времен Ф. Клейна, а при некотором желании предварительные результаты в этом направлении можно отыскать и у древних греков). Группа Кремоны ранга 2 (которую часто называют просто группой Кремоны без указания на ранг) устроена намного более сложно. Она бесконечномерна и обладает нетривиальными теоретико-групповыми свойствами[22]. Эта группа является объектом изучения бирациональной геометрии с конца 19 века до наших дней. Она была введена Л. Кремоной[23] в 1863 году. Точнее говоря, Л. Кремона впервые начал обсуждать вопрос о существовании бирациональных преобразований плоскости, заданных многочленами произвольной степени; при этом отдельные конструкции бирациональных преобразований рассматривались и ранее некоторыми математиками начиная с Ж.-В. Понселе и Я. Штейнера. Описание группы Кремоны в терминах образующих было дано в работах М. Нётера[24], Я. Розанеса[25] и Г. Кастельнуово[26]. В русскоязычной литературе группа Кремоны впервые обсуждается, видимо, К. А. Андреевым[27]. В частности, там можно найти изложение первого (неполного) доказательства теоремы об образующих этой группы, полученного в статьях М. Нётера и Я. Розанеса, а также великолепный обзор геометрических конструкций, связанных с квадратичными кремоновыми преобразованиями. Из других работ о группе Кремоны на русском языке, написанных в начале 20 века, можно отметить работы Б. К. Млодзеевского[28] о выражении бирациональных автоморфизмов плоскости через квадратичные преобразования. Многие интересные результаты о группе Кремоны, получен-

[22]S. Cantat, S. Lamy, *Normal subgroups in the Cremona group*, Acta Math., **210** (2013), no. 1, 31–94.

[23]L. Cremona, *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*, Giornale di matematiche di Battaglini, **1**, 305–311.

[24]M. Noether, *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, Math. Ann., **3** (1870), no. 2, 161–227.

[25]J. Rosanes, *Ueber diejenigen rationalen Substitutionen, welche eine rationale Umkehrung zulassen*, J. Reine Angew. Math. **73** (1871), 97–110.

[26]G. Castelnuovo, *Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano*, Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino XXXVI, **13** (1901), 861–874.

[27]К. А. Андреевъ, *О геометрическихъ соотвѣтствіяхъ въ примѣненіи къ вопросу о построеніи кривыхъ линій*, Матем. сб., 9:2 (1879), 193–287.

[28]Б. К. Млодзѣевскій, *Къ теоремѣ о разложимости Кремоновыхъ преобразованій на плоскости*, Матем. сб., **29** (1915), no. 3, 269–275. Б. К. Млодзеевский, *К теории Кремоновых преобразований*, Матем. сб., **31** (1922), no. 1, 7–34.

ные на раннем этапе, приведены в книге Х. Хадсон[29], а представление о современном состоянии дел можно получить из обзоров Ж. Дезерти[30] и С. Канта[31].

Одним из наиболее значительных результатов о группе Кремоны ранга 2 является классификация ее конечных подгрупп, полученная И. В. Долгачёвым и В. А. Исковских[32] в 2009 году. Можно сказать, что эта работа задала стандарт современным исследованиям конечных подгрупп в группах бирациональных автоморфизмов. В то же время основной ее результат настолько громоздок, что иногда вместо его непосредственного применения удобнее заново разобрать нужные для каких-либо приложений частные случаи. Это позволяет предположить, насколько сложной оказалась бы классификация конечных подгрупп в группе Кремоны ранга 3, если бы она нам была доступна. Впрочем, эта классификация в данный момент неизвестна, и вряд ли может быть получена в обозримом будущем, не только по причине отсутствия подходящих методов исследования многомерных многообразий, но в большей степени по причине отсутствия адекватной терминологии для ее формулировки. На настоящий момент известны только частичные классификационные результаты, относящиеся к конечным подгруппам специальных типов в группе Кремоны ранга 3. Например, Ю. Г. Прохоров[33] классифицировал ее простые конечные подгруппы, а также p-элементарные конечные подгруппы для всех простых чисел p, кроме небольшого количества исключений. Классификационные результаты о конечных под-

[29]H. Hudson, *Cremona transformations in plane and space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

[30]J. Déserti, *Some properties of the Cremona group*. Ensaios Matemáticos, **21**. Sociedade Brasileira de Matemtica, Rio de Janeiro, 2012.

[31]S. Cantat, *The Cremona group in two variables*, European Congress of Mathematics, 211–225, Eur. Math. Soc., Zurich, 2013. S. Cantat, *The Cremona group*, Algebraic geometry: Salt Lake City 2015, 101–142, Proc. Sympos. Pure Math., 97.1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018.

[32]I. Dolgachev, V. Iskovskikh, *Finite subgroups of the plane Cremona group*, In *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, volume **269** of *Progr. Math.*, 443–548. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.

[33]Yu. Prokhorov, *Simple finite subgroups of the Cremona group of rank* 3, J. Algebraic Geom. **21** (2012), no. 3, 563–600. Yu. Prokhorov, *p-elementary subgroups of the Cremona group of rank* 3, Classification of algebraic varieties, 327–338, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zurich, 2011. Yu. Prokhorov, 2-*elementary subgroups of the space Cremona group*, Automorphisms in birational and affine geometry, 215–229, Springer Proc. Math. Stat., **79**, Springer, Cham, 2014.

группах в группах Кремоны ранга больше 3 в литературе практически отсутствуют.

Группы бимероморфных автоморфизмов компактных комплексных многообразий изучены намного меньше, чем группы бирациональных автоморфизмов алгебраических многообразий. Одной из важных задач в настоящий момент является перенесение известных результатов о группах бирациональных автоморфизмов на этот случай. Известно, что группа автоморфизмов любого компактного кэлерова многообразия жорданова. В то же время для произвольных компактных комплексных многообразий жордановость группы автоморфизмов не доказана. Группы бимероморфных автоморфизмов мало исследованы даже для компактных комплексных поверхностей. Также представляется интересным и важным исследование с точки зрения свойства Жордана групп автоморфизмов и бимероморфных автоморфизмов, действующих послойно относительно какого-нибудь естественного расслоения, например, максимального рационально связного расслоения, плюриканонического расслоения, алгебраической редукции или отображения Альбанезе.

Непосредственным обобщением проективного пространства являются так называемые многообразия Севери–Брауэра. Напомним, что многообразием Севери–Брауэра размерности n над полем $\Bbbk$ называется многообразие, которое становится изоморфным n-мерному проективному пространству после перехода к алгебраическому замыканию поля $\Bbbk$. Такие многообразия находятся во взаимно-однозначном соответствии с центральными простыми алгебрами размерности $(n+1)^2$ над $\Bbbk$. Они обладают многими интересными геометрическими свойствами. Например, многообразие Севери–Брауэра над полем $\Bbbk$ изоморфно проективному пространству тогда и только тогда, когда оно имеет $\Bbbk$-точку.

Группы автоморфизмов многообразий Севери–Брауэра можно описать в терминах соответствующих центральных простых алгебр, что было сделано еще Ф. Шатле[34]. Что касается группы бирациональных автоморфизмов, про нее кое-что известно в случае поверхностей. А именно, пусть $\Bbbk$ — поле характеристики нуль (более точно, можно предполагать, что либо поле $\Bbbk$ совершенно, либо его характеристика отлич-

[34]F. Châtelet, *Variations sur un thème de H. Poincaré*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), **61** (1944), 249–300.

на от 2 и 3). Пусть S является *нетривиальной* поверхностью Севери–Брауэра над $\Bbbk$, то есть поверхностью Севери–Брауэра, не изоморфной $\mathbb{P}^2$. В этом случае из работ Ф. В. Вайнштейна[35] и В. А. Исковских[36] известны образующие в группе $\mathrm{Bir}(S)$ бирациональных автоморфизмов поверхности S. Более того, соотношения между этими образующими описаны В. А. Исковских и С. Л. Трегубом[37]. Это можно воспринимать как аналог классической теоремы М. Нётера, описывающей образующие в группе $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ над алгебраически замкнутым полем, и результатов о соотношениях между этими образующими. С другой стороны, до настоящего момента не предпринималось систематических попыток изучения конечных подгрупп в группах бирациональных автоморфизмов поверхностей Севери–Брауэра по образцу работы И. В. Долгачёва и В. А. Исковских. Как и в их случае, можно предположить, что полная классификация таких подгрупп будет довольно громоздкой; по этой причине представляют интерес приближения к классификации, например, явная оценка на индексы максимальных абелевых подгрупп в конечных группах, действующих бирациональными автоморфизмами на поверхностях Севери–Брауэра.

Помимо ситуации, когда группа автоморфизмов какого-либо геометрического объекта бесконечна, но обладает хорошими свойствами на уровне конечных подгрупп (например, свойством Жордана или свойством ограниченности конечных подгрупп), интересны случаи, когда вся группа автоморфизмов конечна. Классическая теорема Х. Мацумуры и П. Монского[38] утверждает, что группа автоморфизмов гладкой гиперповерхности степени $d \geqslant 3$ в $\mathbb{P}^n$ конечна при $(n, d) \neq (3, 4)$. О. Бенуа[39] обобщил эту теорему на случай гладких полных пересечений. Естественным обобщением полных пересечений являются взвешенные полные пе-

[35] F. Weinstein, *On birational automorphisms of Severi–Brauer surfaces*, Prepr. Rep. Math. Univ. Stockholm, 1989. F. Weinstein, *On birational automorphisms of Severi–Brauer surfaces*, arXiv:1907.08115 (2019).

[36] В. А. Исковских, *Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори*, УМН, **51** (1996), no. 4, 3–72.

[37] В. А. Исковских, С. Л. Трегуб, *О бирациональных автоморфизмах рациональных поверхностей*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **55** (1991), no. 2, 254–281.

[38] H. Matsumura, P. Monsky, *On the automorphisms of hypersurfaces*, J. Math. Kyoto Univ., **3** (1963/1964), 347–361.

[39] O. Benoist, *Séparation et propriété de Deligne–Mumford des champs de modules d'intersections complètes lisses*, J. Lond. Math. Soc. (2), **87** (2013), no. 1, 138–156.

ресечения во взвешенных проективных пространствах; их определения и основные свойства изложены в обзорах И. В. Долгачёва[40] и А. Иано-Флетчера[41]. Группы автоморфизмов гладких взвешенных полных пересечений имеют свойства, во многом похожие на свойства групп автоморфизмов обычных полных пересечений. Несмотря на это, нам неизвестны попытки их систематического изучения.

Цель работы

— Изучение групп автоморфизмов и бимероморфных автоморфизмов компактных комплексных поверхностей, а также некоторых их подгрупп, с точки зрения свойства Жордана и ограниченности конечных подгрупп. Изучение групп автоморфизмов компактных комплексных поверхностей со структурой эллиптического расслоения. Доказательство конечности образа группы автоморфизмов компактной комплексной поверхности кодаировой размерности 1 в группе автоморфизмов базы ее плюриканонического расслоения. Получение ответа на вопрос об ограниченности конечных подгрупп в группе автоморфизмов компактной комплексной поверхности кодаировой размерности 0 и алгебраической размерности 1, действующей послойно относительно алгебраической редукции, а также в образе группы автоморфизмов такой поверхности в группе автоморфизмов базы алгебраической редукции. Классификация компактных комплексных поверхностей неотрицательной кодаировой размерности, группы бимероморфных автоморфизмов которых имеют неограниченные конечные подгруппы. Доказательство свойства Жордана для групп автоморфизмов компактных комплексных поверхностей. Классификация компактных комплексных поверхностей с нежордановыми группами бимероморфных автоморфизмов.

— Изучение групп, послойно действующих на компактных комплексных многообразиях со структурой расслоения на коники. Обоб-

[40] I. Dolgachev, *Weighted projective varieties*, Lecture Notes in Math., **956**, 34–71. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[41] A. Iano-Fletcher, *Working with weighted complete intersections*, Explicit birational geometry of 3-folds, 101–173, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

щение на этот случай результатов об ограниченности конечных подгрупп, доказанных в алгебраическом контексте Т. М. Бандман и Ю. Г. Зархиным.

— Классификация трехмерных алгебраических многообразий с нежордановыми группами бирациональных автоморфизмов.

— Получение оценки на константу Жордана для групп бирациональных автоморфизмов нетривиальных поверхностей Севери–Брауэра над полем характеристики 0.

— Классификация гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 с бесконечными группами автоморфизмов.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

1. Для компактной комплексной поверхности S кодаировой размерности 1 с плюриканоническим расслоением $\phi\colon S \to C$ доказана конечность образа группы автоморфизмов S в группе автоморфизмов кривой C. Классифицированы компактные комплексные поверхности, группы бимероморфных автоморфизмов которых имеют ограниченные конечные подгруппы. Для компактных поверхностей S кодаировой размерности 0 и поверхностей Хопфа полностью изучен вопрос об ограниченности группы послойных автоморфизмов относительно алгебраической редукции $\phi\colon S \to C$, а также образа группы автоморфизмов в группе автоморфизмов C.

2. Доказано, что группа автоморфизмов любой компактной комплексной поверхности жорданова. Для компактных комплексных поверхностей кодаировой размерности 0 получена универсальная (не зависящая от поверхности) оценка для константы Жордана группы автоморфизмов. Показано, что группа бимероморфных автоморфизмов компактной комплексной поверхности жорданова за исключением случая, когда поверхность бимероморфна произведению $\mathbb{P}^1$ на эллиптическую кривую.

3. Доказано, что если компактное комплексное многообразие X со структурой $\mathbb{P}^1$-расслоения над комплексным тором Y не бимероморфно проективизации векторного расслоения ранга 2 на Y, то группа бимероморфных автоморфизмов X сильно жорданова. Классифицированы все трехмерные алгебраические многообразия, группа бирациональных автоморфизмов которых не обладает свойством Жордана.

4. Доказано, что константа Жордана для группы бирациональных автоморфизмов любой нетривиальной поверхности Севери–Брауэра S над полем характеристики 0 равна либо 1, либо 3. Другими словами, всякая конечная подгруппа в $\mathrm{Bir}(S)$ бирациональных автоморфизмов S либо абелева, либо содержит нормальную абелеву подгруппу индекса 3. Доказано, что любая неабелева конечная подгруппа в $\mathrm{Bir}(S)$ сопряжена подгруппе в $\mathrm{Aut}(S)$.

5. Доказано, что группа автоморфизмов гладкого хорошо сформированного взвешенного полного пересечения X конечна, если X не является эллиптической кривой, поверхностью $K3$, а также не изоморфно проективному пространству и квадрике. Получена оценка на максимальный вес взвешенного проективного пространства, содержащего гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано, не являющееся пересечением с линейным конусом.

Методы исследования

В работе используются методы программы минимальных моделей, теории компактных комплексных поверхностей, теории многообразий Фано и теории центральных простых алгебр.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в алгебраической геометрии и теории комплексных многообразий.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались автором на семинаре отдела алгебры и отдела алгебраической геометрии (семинар И. Р. Шафаревича) и семинаре В. А. Исковских Математического института им. В. А. Стеклова, семинаре Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, семинаре по многомерному комплексному анализу (МГУ), коллоквиуме Исследовательской лаборатории им. П. Л. Чебышёва (Санкт-Петербург), семинаре "Edge seminar" университета Эдинбурга (Великобритания), семинарах по геометрии университетов Глазго, Лафборо, Ливерпуля, Манчестера, Ноттингема и Шеффилда (Великобритания), семинарах по алгебраической геометрии университетов Цюриха и Базеля (Швейцария), семинаре по алгебраической геометрии Центра базовой науки (Поханг, Южная Корея), а также на международных конференциях, в число которых входят:

— международная конференция "Groups of Automorphisms in Birational and Affine Geometry", 29 октября – 3 ноября 2012, Левико Терме, Италия,

— международная конференция, посвященная 60-летию В. С. Куликова, 3–7 декабря 2012, МИАН, Москва,

— однодневная международная конференция "One Day Workshop on Algebraic Geometry", 10 мая 2013, Тайбэй, Тайвань,

— летняя школа-конференция по проблемам алгебраической геометрии и комплексного анализа, 20–25 мая 2013, ЯГПУ, Ярославль,

— международная конференция "Workshop in Algebraic Geometry", 22–24 мая 2013, Имперский колледж, Лондон, Великобритания,

— международная конференция "Алгебраическая геометрия, алгебра и теория чисел", посвященная 90-летию И. Р. Шафаревича, 3–5 июня 2013, МИАН, Москва,

— международная конференция "Edge days 2014", 6–8 июня 2014, Университет Эдинбурга, Великобритания,

— международная конференция "Symposium on Geometry Over Non-closed Fields", 17–23 апреля 2016, Эльмау, Германия,

— международная конференция "Edge days 2016", 3–5 июня 2016, Университет Эдинбурга, Великобритания,

— международная конференция “Rationality problem and selfmaps”, 19–22 июля 2016, RIMS, Киото, Япония,

— международная конференция по алгебраической геометрии, комплексному анализу и компьютерной алгебре, 3–9 августа 2016, САФУ, Коряжма,

— международная конференция “Dynamics in Siberia”, 28 февраля – 4 марта 2017, ИМ СО РАН, Новосибирск,

— международная конференция “Recent developments in rationality questions”, 24–28 апреля 2017, Институт Э. Шредингера, Вена, Австрия,

— мемориальная конференция “Алгебраическая геометрия, алгебра и теория чисел”, посвященная И. Р. Шафаревичу, 5–6 июня 2017, МИАН, Москва,

— международная конференция “Simons conference in mathematics and physical sciences”, 21–25 августа 2017, Нью-Йорк, США,

— международная конференция по алгебраической геометрии, комплексному анализу и компьютерной алгебре, 25–30 августа 2017, САФУ, Коряжма,

— международная конференция “International conference on algebraic geometry”, 8–10 декабря 2017, Университет Циньхуа, Пекин, Китай,

— международная конференция “Dynamics in Siberia”, 26 февраля – 3 марта 2018, ИМ СО РАН, Новосибирск,

— международная конференция “Subgroups of Cremona Groups”, 17–23 июня 2018, Обервольфах, Германия,

— международная конференция “Computational mathematics and algebraic geometry”, 8–10 августа 2018, Университет И. Кеплера, Линц, Австрия,

— международная конференция “Dynamics in Siberia”, 25 февраля – 2 марта 2019, ИМ СО РАН, Новосибирск,

— международная конференция “Kodaira Workshop”, 15–16 марта 2019, Университет Лафборо, Великобритания,

— международная конференция “Birational geometry, Kähler–Einstein metrics and degenerations”, 8–13 апреля 2019, НИУ ВШЭ, Москва,

— школа-конференция “Faces of algebraic geometry”, 17–19 апреля 2019, LUMS, Лахор, Пакистан,

— международная конференция “Algebraic Geometry International Conference”, 3–7 июня 2019, KIAS, Сеул, Южная Корея,

— международная конференция “Birational geometry, Kähler–Einstein metrics and degenerations”, 10–14 июня 2019, Шанхай, Китай,

— мемориальная конференция “Birational Geometry and Fano varieties”, посвященная В. А. Исковских, 24–28 июня 2019, МИАН, Москва,

— международная конференция “Birational geometry, Kähler–Einstein metrics and degenerations”, 18–22 ноября 2019, POSTECH, Поханг, Южная Корея,

— международная конференция “Dynamics in Siberia”, 24–29 февраля 2020, ИМ СО РАН, Новосибирск.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 15 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 6 глав, разбитых на разделы, и списка литературы.

Содержание работы

Во введении приводится краткий обзор ранее известных результатов и результатов диссертации.

В первой главе собраны вспомогательные сведения, которые будут использоваться в остальных частях диссертации. Наиболее существенные факты из этой главы стандартны и хорошо известны.

В разделе 1.1 формулируется свойство Жордана и приводится обзор основных результатов о жордановых группах геометрического происхождения. К ним относятся классическая теорема К. Жордана о группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, результаты Ю. Г. Прохорова и К. А. Шрамова о жордановости групп бирациональных автоморфизмов рационально связных и неунилинейчатых многообразий, а также результаты о жордановости групп диффеоморфизмов, в основном принадлежащие И. Мундету и Риере и Б. Циммерману. Особую роль для исследований, представленных в диссертации, играет классификация жордановых групп бира-

циональных автоморфизмов алгебраических поверхностей, полученная В. Л. Поповым с использованием конструкции Ю. Г. Зархина.

Теорема 1.1.4. *Пусть X — алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Тогда группа бирациональных автоморфизмов X не является жордановой в том и только том случае, когда X бирационально эквивалентна произведению $E \times \mathbb{P}^1$, где E — эллиптическая кривая.*

В разделе 1.2 вводится свойство ограниченности конечных подгрупп и приводятся примеры групп, обладающих этим свойством. К ним относится, в частности, группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ и группы бирациональных автоморфизмов алгебраических многообразий над числовыми полями. В разделе 1.3 собраны теоретико-групповые утверждения, относящиеся к свойству Жордана. В числе прочего там обсуждается поведение свойства Жордана в точных последовательностях групп, а также рассматриваются отдельные случаи, в которых можно проверить жордановость факторгрупп. В разделе 1.4 собраны вспомогательные сведения о структуре некоторых конечно порожденных групп, в том числе дискретных групп Гейзенберга; эти группы в дальнейшем будут возникать в качестве фундаментальных групп компактных комплексных поверхностей определенных типов. В разделе 1.5 мы фиксируем терминологию, обозначения и соглашения, относящиеся к комплексным многообразиям. В разделе 1.6 мы напоминаем основные факты, относящиеся к минимальным компактным комплексным поверхностям и бимероморфным отображениям между ними. В числе прочего, мы приводим классификацию Кодаиры–Энриквеса минимальных компактных комплексных поверхностей. В разделе 1.7 мы напоминаем нужные нам факты об автоморфизмах комплексных пространств и их поведении вблизи неподвижных точек. В частности, обсуждается точность представления конечных и некоторых бесконечных групп автоморфизмов в касательном пространстве в неподвижной точке. В разделе 1.8 собраны общие утверждения о структуре групп автоморфизмов компактных комплексных многообразий некоторых важных типов, в том числе комплексных торов, а также комплексных поверхностей $K3$ и Энриквеса. Также в этом разделе формулируются два результата И. Мундета и Риеры, которыми мы будем пользоваться при изучении групп автоморфизмов компактных комплексных многообразий, но которые при этом выполняются даже

для групп диффеоморфизмов произвольных гладких компактных вещественных многообразий.

Во второй главе мы изучаем группы автоморфизмов компактных комплексных поверхностей, имеющих структуру эллиптического расслоения.

В разделе 2.1 формулируются основные результаты главы. Важным классом эллиптических поверхностей являются компактные комплексные поверхности кодаировой размерности 1; в этом случае плюриканоническое отображение является эллиптическим расслоением. Первый из результатов второй главы — утверждение о конечности образа группы автоморфизмов компактной комплексной поверхности кодаировой размерности 1 в группе автоморфизмов базы ее плюриканонического расслоения.

Теорема 2.1.1. *Пусть S — минимальная компактная комплексная поверхность кодаировой размерности* 1*, а $\phi\colon S \to C$ — ее плюриканоническое расслоение. Тогда образ группы* $\mathrm{Aut}(S)$ *в* $\mathrm{Aut}(C)$ *конечен.*

Второй результат использует в своем доказательстве теорему 2.1.1; он состоит в классификации компактных комплексных поверхностей неотрицательной кодаировой размерности, группы бимероморфных автоморфизмов которых имеют неограниченные конечные подгруппы.

Теорема 2.1.2. *Пусть S — компактная комплексная поверхность неотрицательной кодаировой размерности. Предположим, что группа* $\mathrm{Bim}(S)$ *бимероморфных автоморфизмов поверхности S имеет неограниченные конечные подгруппы. Тогда S бимероморфна поверхности одного из следующих типов:*

- *комплексный тор;*
- *биэллиптическая поверхность;*
- *поверхность Кодаиры;*
- *поверхность кодаировой размерности* 1*.*

Более того, в первых трех случаях группа $\mathrm{Bim}(S)$ *всегда имеет неограниченные конечные подгруппы. В последнем случае группа* $\mathrm{Bim}(S)$ *имеет ограниченные конечные подгруппы тогда и только тогда, когда это*

выполнено для ее подгруппы, состоящей из отображений, послойных относительно плюриканонического расслоения на S.

В отличие от поверхностей кодаировой размерности 1, на которых всегда есть естественная структура эллиптического расслоения, компактные комплексные поверхности неположительной кодаировой размерности такой структуры могут не иметь. Тем не менее те из них, на которых есть структура эллиптического расслоения, эквивариантная относительно группы бимероморфных автоморфизмов, представляют очевидный интерес. Подобная структура возникает из двух основных конструкций: на поверхностях алгебраической размерности 1 она дается алгебраической редукцией, а на биэллиптических поверхностях в качестве такого расслоения можно взять отображение Альбанезе. Третий результат этой главы дает ответ на вопрос об ограниченности конечных подгрупп в группе послойных автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S)_\phi$ и в образе Δ группы $\mathrm{Aut}(S)$ в группе автоморфизмов базы эллиптического расслоения для минимальных компактных компактных поверхностей S с естественным эллиптическим расслоением $\phi\colon S \to C$ из нескольких естественных классов, в том числе для всех минимальных компактных комплексных поверхностей кодаировой размерности 0 и алгебраической размерности 1, а также для поверхностей Хопфа (имеющих отрицательную кодаирову размерность) и биэллиптических поверхностей (имеющих алгебраическую размерность 2).

Теорема 2.1.4.

(i) Пусть S является либо (первичной или вторичной) поверхностью Хопфа, либо (первичной или вторичной) поверхностью Кодаиры, либо комплексным тором, либо биэллиптической поверхностью. Тогда группа автоморфизмов S имеет неограниченные конечные подгруппы.

(ii) Пусть S является первичной поверхностью Хопфа алгебраической размерности 1, или двумерным комплексным тором алгебраической размерности 1, и пусть ϕ — алгебраическая редукция S. Тогда обе группы $\mathrm{Aut}(S)_\phi$ и Δ имеют неограниченные конечные подгруппы.

(iii) Пусть S является вторичной поверхностью Хопфа алгебраической размерности 1, и пусть ϕ — алгебраическая редукция S. То-

гда группа $\mathrm{Aut}(S)_\phi$ *имеет неограниченные конечные подгруппы. Группа* Δ *конечна в том и только том случае, когда* ϕ *имеет не меньше трех кратных слоев; в остальных случаях* Δ *имеет неограниченные конечные подгруппы.*

(iv) Пусть S *является (первичной или вторичной) поверхностью Кодаиры, и пусть* ϕ *— алгебраическая редукция* S*. Тогда группа* $\mathrm{Aut}(S)_\phi$ *имеет неограниченные конечные подгруппы, а группа* Δ *конечна.*

(v) Пусть S *является комплексной поверхностью* $K3$ *алгебраической размерности* 1*, и пусть* ϕ *— алгебраическая редукция* S*. Тогда группа* $\mathrm{Aut}(S)_\phi$ *имеет неограниченные конечные подгруппы, а группа* Δ *конечна.*

(vi) Пусть S *является биэллиптической поверхностью, и пусть* ϕ *— ее отображение Альбанезе. Тогда группа* $\mathrm{Aut}(S)_\phi$ *конечна, а группа* Δ *имеет неограниченные конечные подгруппы.*

В разделе 2.2 изучаются вырожденные слои плюриканонического отображения компактной комплексной поверхности кодаировой размерности 1 и доказывается теорема 2.1.1. В разделе 2.3 изучаются группы автоморфизмов эллиптических поверхностей Хопфа. В разделе 2.4 изучаются группы автоморфизмов поверхностей Кодаиры; отметим, что эти поверхности всегда имеют алгебраическую размерность 1, и поэтому на них всегда есть структура эллиптического расслоения. В разделе 2.5 рассматриваются группы автоморфизмов эллиптических комплексных поверхностей $K3$, комплексных торов и биэллиптических поверхностей, и завершается доказательство теоремы 2.1.4. В разделе 2.6 из предыдущих результатов выводится теорема 2.1.2.

В третьей главе мы изучаем группы автоморфизмов и бимероморфных автоморфизмов компактных комплексных поверхностей с точки зрения свойства Жордана.

В разделе 3.1 формулируются результаты главы, переносящие на случай компактных комплексных поверхностей теорему Ш. Менга и Д.-Ч. Жанга и теорему 1.1.4.

Теорема 3.1.1. *Пусть* S *— компактная комплексная поверхность. Тогда группа автоморфизмов* S *жорданова.*

Теорема 3.1.2. *Пусть S — компактная комплексная поверхность. Тогда группа бимероморфных автоморфизмов S не является жордановой в том и только том случае, когда S бимероморфна произведению $E \times \mathbb{P}^1$, где E — эллиптическая кривая.*

Для доказательства теорем 3.1.1 и 3.1.2 мы используем классификацию Кодаиры–Энриквеса, применяя разные подходы для разных классов поверхностей. В разделе 3.2 доказывается жордановость групп автоморфизмов поверхностей Хопфа. В разделе 3.3 с использованием сведений из раздела 1.4 доказывается жордановость групп автоморфизмов поверхностей Инуэ; на основании классификационного результата, полученного Ф. Богомоловым и А.-Д. Телеманом, а также результатов И. Мундета и Риеры о диффеоморфизмах гладких компактных многообразий с ненулевой топологической эйлеровой характеристикой, из жордановости групп автоморфизмов поверхностей Хопфа и Инуэ выводится жордановость групп автоморфизмов всех поверхностей класса VII. В разделе 3.4 с использованием сведений из раздела 1.4 доказывается жордановость групп автоморфизмов поверхностей Кодаиры. В разделе 3.5 изучаются группы автоморфизмов компактных комплексных поверхностей неотрицательной кодаировой размерности и доказываются теоремы 3.1.1 и 3.1.2.

В четвертой главе изучаются группы, послойно действующие на компактных комплексных многообразиях со структурой расслоения на коники. При этом мы обобщаем результаты, доказанные в алгебраическом контексте Т. М. Бандман и Ю. Г. Зархиным. Кроме того, используя подход, аналогичный применявшемуся этими авторами, мы классифицируем трехмерные алгебраические многообразия, группа бирациональных автоморфизмов которых не обладает свойством Жордана, обобщая таким образом теорему 1.1.4.

В разделе 4.1 сформулированы основные результаты главы.

Теорема 4.1.3. *Пусть $\phi\colon X \to Y$ — собственное сюръективное отображение комплексных многообразий, типичный слой которого изоморфен $\mathbb{P}^1$. Предположим, что на X не существует дивизора, чей индекс пересечения с типичным слоем ϕ равен 1. Пусть G — конечная группа, действующая на X бимероморфными отображениями, причем это действие послойно относительно ϕ. Тогда G либо тривиальна, либо изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, либо изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Теорема 4.1.4. *Пусть X — трехмерное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Тогда группа $\mathrm{Bir}(X)$ не является жордановой в том и только том случае, когда X бирационально эквивалентно либо произведению $E \times \mathbb{P}^2$, где E — эллиптическая кривая, либо произведению $S \times \mathbb{P}^1$, где S — одна из следующих поверхностей:*

- *абелева поверхность;*
- *биэллиптическая поверхность;*
- *поверхность кодаировой размерности 1, якобиево расслоение плюриканонического расслоения которой локально тривиально (в топологии Зарисского).*

В разделе 4.2 собраны вспомогательные результаты о комплексных многообразиях и расслоениях на них, которые используются в доказательстве теоремы 4.1.3 и ее следствий. В разделе 4.3 изучаются неподвижные точки послойных бимероморфных отображений и доказывается теорема 4.1.3. В разделе 4.4 мы применяем предыдущие результаты к изучению групп бимероморфных отображений компактных комплексных многообразий со структурой расслоения на коники. В разделе 4.5 с использованием теоремы 2.1.2 доказывается теорема 4.1.4.

В пятой главе изучаются группы бирациональных автоморфизмов поверхностей Севери–Брауэра. Связывает эту главу с предыдущими частями диссертации то, что мы подходим к изучению групп бирациональных автоморфизмов с точки зрения свойства Жордана.

В разделе 5.1 мы напоминаем уже известные утверждения о конечных группах, действующих бирациональными автоморфизмами на поверхностях Севери–Брауэра, и формулируем основные результаты главы.

Теорема 5.1.2. *Пусть S — нетривиальная поверхность Севери–Брауэра над полем $\Bbbk$ характеристики 0, и пусть G — конечная подгруппа в $\mathrm{Bir}(S)$. Выполнены следующие утверждения.*

(i) Группа G имеет нечетный порядок.

(ii) Группа G либо является абелевой, либо содержит нормальную абелеву подгруппу индекса 3.

(iii) Если поле $\Bbbk$ *содержит все корни из* 1, *то* G *является абелевой* 3*-группой порядка не более* 27.

Теорему 5.1.2(ii) можно переформулировать как утверждение о том, что константа Жордана группы бирациональных автоморфизмов нетривиальной поверхности Севери–Брауэра над полем $\Bbbk$ характеристики 0 равна либо 1, либо 3. Это иллюстрирует поразительное отличие между бирациональной геометрией нетривиальных поверхностей Севери–Брауэра и проективной плоскости, так как в последнем случае соответствующая константа Жордана может быть намного больше. Например, если поле определения алгебраически замкнуто, то, согласно результату Е. А. Ясинского[42], константа Жордана группы бирациональных автоморфизмов $\mathbb{P}^2$ равна 7200. Более того, согласно результату Ж.-П. Серра, мультипликативный аналог этой константы для $\mathbb{P}^2$ равен $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ в случае алгебраически замкнутого поля, в то время как по теореме 5.1.2(ii) такая же константа для нетривиальной поверхности Севери–Брауэра тоже равна либо 1, либо 3. Можно ожидать, что теорема 5.1.2 позволит получить полную классификацию конечных групп, действующих бирациональными автоморфизмами на нетривиальных поверхностях Севери–Брауэра над полями характеристики 0, аналогичную тому, что было сделано для конечных подгрупп в группе Кремоны в работе И. В. Долгачёва и В. А. Исковских.

В разделе 5.2 изучаются поверхности, которые могут быть бирациональны нетривиальной поверхности Севери–Брауэра. В разделе 5.3 изучаются конечные группы, которые действуют на поверхностях, бирациональных нетривиальной поверхности Севери–Брауэра. В разделе 5.4 доказывается теорема 5.1.2. В разделе 5.5 приводятся интересные с нашей точки зрения примеры конечных групп, действующих на нетривиальных поверхностях Севери–Брауэра. Один из этих примеров показывает, что оценка из теоремы 5.1.2(ii) точна для некоторых из таких поверхностей.

В шестой главе изучаются взвешенные полные пересечения и группы их автоморфизмов. Нас в первую очередь интересуют случаи, когда группа автоморфизмов оказывается конечной.

[42] E. Yasinsky, *The Jordan constant for Cremona group of rank* 2, Bull. Korean Math. Soc., **54** (2017), no. 5, 1859–1871.

В разделе 6.1 мы напоминаем формулировки теорем Мацумуры–Монского и Бенуа, и формулируем наш основной результат.

Теорема 6.1.3. *Пусть X — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение размерности n над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Предположим, что либо $n \geqslant 3$, либо канонический класс многообразия X тривиален. Тогда группа $\mathrm{Aut}(X)$ конечна, за исключением случаев, когда X изоморфно $\mathbb{P}^n$ или гиперповерхности степени 2 в $\mathbb{P}^{n+1}$.*

Теорема 6.1.3 в основном следует из результатов Х. Фленнера[43]. Тем не менее, некоторые случаи не покрываются его результатами, так что их приходится классифицировать и рассматривать отдельно.

В разделе 6.2 мы напоминаем определение и основные свойства взвешенных полных пересечений; результаты этого раздела хорошо известны. В разделе 6.3 мы показываем, что гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение является квазигладким; это утверждение окажется полезным для дальнейших рассмотрений, так как многие свойства взвешенных полных пересечений были установлены именно в предположении квазигладкости, в то время как гладким взвешенным полным пересечениям в ставшей к настоящему моменту стандартной литературе уделялось меньше внимания.

В разделе 6.4 получено ограничение на веса взвешенного проективного пространства, содержащего гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано.

Теорема 6.4.1. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$, $N \geqslant 2$, — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение мультистепени $(d_1, \dots, d_k)$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Предположим, что X не является пересечением с линейным конусом. Если X — многообразие Фано, то при любом $0 \leqslant i \leqslant N$ выполнено $a_i \leqslant N$, и при любом $1 \leqslant j \leqslant k$ выполнено $d_j \leqslant N(N+1)$. Если X — многообразие Калаби–Яу, то при любом $0 \leqslant i \leqslant N$ выполнено $a_i \leqslant N+1$, и при любом $1 \leqslant j \leqslant k$ выполнено $d_j \leqslant (N+1)^2$.*

Несмотря на ее вспомогательный характер, теорему 6.4.1 можно от-

[43] H. Flenner, *Divisorenklassengruppen quasihomogener Singularitäten*, J. Reine Angew. Math. **328** (1981), 128–160.

нести к основным результатам диссертации. Насколько нам известно, в литературе нет других результатов, дающих явные оценки на веса и степени для гладких взвешенных полных пересечений Фано или Калаби–Яу; в частности, теорема 6.4.1 дает единственный известный нам подход к явной класссификации взвешенных полных пересечений Фано в размерностях выше 3 (то есть в тех размерностях, где неизвестна классификация *всех* гладких многообразий Фано). Доказательство теоремы 6.4.1 состоит в получении необходимых условий на веса и степени гладких взвешенных полных пересечений, большинство из которых являются линейными неравенствами, и дальнейшем исследовании этой системы условий методом множителей Лагранжа.

В разделе 6.5 приведена классификация гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений Фано и Калаби–Яу размерности не выше 2, которая может быть получена с использованием теоремы 6.4.1. Одна из целей получения этой классификации — явное описание тех гладких взвешенных полных пересечений, которые не удовлетворяют условиям теоремы 6.1.3. Отметим, что эти исключения образуют конечное число деформационных семейств. В разделе 6.6 приводится хорошо известное специалистам обобщение теоремы о линейной нормальности (обычных) полных пересечений на случай взвешенных полных пересечений. А именно, мы показываем, что у данного многообразия размерности не меньше 3 существует не более одного вложения в качестве квазигладкого хорошо сформированного взвешенного полного пересечения, не являющегося пересечением с линейным конусом, см. предложение 6.6.5. В разделе 6.7 мы доказываем теорему 6.1.3, опираясь на результаты Х. Фленнера и утверждения из раздела 6.5. Также мы доказываем ее уточнение (см. следствие 6.1.4), используя результаты раздела 6.6.

Работы автора по теме диссертации

1. В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов, *Автоморфизмы взвешенных полных пересечений*, Тр. МИАН, **307** (2019), 217–229.

2. В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов, *Взвешенные полные пересечения Фано большой коразмерности*, Сибирский математический журнал, **61** (2020), no. 2, 377–384.

3. В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов, *Двойные квадрики с большими группами автоморфизмов*, Тр. МИАН, **294** (2016), 167–190.

4. Ю. Г. Прохоров, К. А. Шрамов, *Ограниченные группы автоморфизмов компактных комплексных поверхностей*, Матем. сб., **211** (2020), no. 9, 105–118.

5. К. А. Шрамов, *Бирациональные автоморфизмы поверхностей Севери–Брауэра*, Матем. сб., **211**(2020), no. 3, 169–184.

6. Yu. Prokhorov, C. Shramov, *Automorphism groups of compact complex surfaces*, IMRN (2020). Опубликовано электронно: `https://doi.org/10.1093/imrn/rnz124`

7. Yu. Prokhorov, C. Shramov, *Automorphism groups of Inoue and Kodaira surfaces*, Asian Journal of Mathematics, **24** (2020), no. 2, 355–368.

8. Yu. Prokhorov, C. Shramov, *Finite groups of birational selfmaps of threefolds*, Math. Res. Lett., **25** (2018), no. 3, 957–972.

9. Yu. Prokhorov, C. Shramov, *Jordan constant for Cremona group of rank* 3, Mosc. Math. J., **17** (2017), no. 3, 457–509.

10. Yu. Prokhorov, C. Shramov, *p-subgroups in the space Cremona group*, Math. Nachr., **291** (2018), no. 8–9, 1374–1389.

11. V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Bounds for smooth Fano weighted complete intersections*, CNTP, **14** (2020), no. 3, 511–553.

12. V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Hodge level for weighted complete intersections*, Collect. Math., **71** (2020), no. 3, 549–574.

13. V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Nef partitions for codimension* 2 *weighted complete intersections*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5), **19** (2019), no. 3, 827–845.

14. C. Shramov, *Fiberwise bimeromorphic maps of conic bundles*, Int. J. Math., **30** (2019), no. 11, 1950059, 12 pp.

15. C. Shramov, *Finite groups acting on elliptic surfaces*, Eur. J. Math. (2019). Опубликовано электронно: https://doi.org/10.1007/s40879-019-00383-y