Отзыв официального оппонента на диссертацию
Городкова Дениса Александровича
«Комбинаторное вычисление первого класса Понтрягина и приложения»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация Дениса Александровича Городкова посвящена вычислению характеристических классов комбинаторных многообразий.

Задача о вычислении характеристических классов многообразий относится к классическим вопросам топологии. Так, задача вычисления классов Штифеля–Уитни касательного расслоения гладкого многообразия была решена Уитни в 1940 г. и Гальпериным и Толедо в 1972 г.; в их работе для каждого гладкого многообразия и его гладкой триангуляции K был явно построен цикл, представляющий класс гомологий, двойственный по Пуанкаре i-му классу Штифеля–Уитни; он оказывается равен сумме по модулю 2 всех $(n-i)$-мерных симплексов барицентрического подразделения K'.

Еще одним семейством характеристических классов векторных расслоений являются классы Понтрягина $p_i \in H^{4i}(M, \mathbb{Z})$. Исходно они были определены Л. С. Понтрягиным в терминах наборов векторных полей на многообразии M; для римановых многообразий их можно записать в дифференциально-геометрических терминах как интегралы свёрток тензора кривизны на M. В классе кусочно линейных многообразий можно определить рациональные классы Понтрягина; как было показано В. А. Рохлиным и А. С. Шварцем и независимо Р. Томом, они инвариантны относительно кусочно-линейных гомеоморфизмов. Гораздо более сильный результат о топологической инвариантности рациональных классов Понтрягина был получен С. П. Новиковым. В 1975 году А. М. Габриэлов, И. М. Гельфанд и М. В. Лосик предложили формулу для первого класса Понтрягина триангулированного гладкого многообразия в терминах связностей на симплексах максимальной размерности. Однако эта формула, во-первых, не применима для произвольных комбинаторных многообразий, а во-вторых, даже для триангуляций гладких многообразий практически неприменима для явных вычислений.

Алгоритм подсчета первого класса Понтрягина произвольного комбинаторного многообразия, применимый на практике, был предложен в 2004 году А. А. Гайфуллиным. Им было описано множество всех локальных формул для первого класса Понтрягина $p_1(M)$. В этом алгоритме к комбинаторному многообразию применяется последовательность определенных перестроек, так называемых бизвездных преобразований, при которых коэффициенты при симплексах в цике, представляющем первый рациональный класс Понтрягина, меняются контролируемым образом. В работе Гайфуллина 2010 г. (Труды МИАН, том 268) был описан алгоритм для представления цикла в графе бизвездных преобразований двумерных комбинаторных сфер в виде линейной комбинации элементарных циклов. Однако в этом алгоритме были пропущены некоторые случаи. Эта неточность была устранена Д. А. Городковым в первой главе его диссертации.

Во второй главе диссертации явно вычисляются класс Понтрягина для 8-мерных комбинаторных многообразий Брема–Кюнеля с 15 вершинами. У.Бремом и В. Кюнелем в 1992 году было построено три кусочно линейно гомеоморфных между собой комбинаторных многообразия, не гомеоморфных сфере, и была выдвинута гипотеза, что они являются триангуляциями кватернионной проективной плоскости $\mathbb{H}P^2$. С помощью вычисления первого рационального класса Понтрягина этого многообразия автору удается доказать эту гипотезу. Интересно, что комбинаторные многообразия Брема–Кюнеля доставляют примеры минимальных триангуляций многообразий, не гомеоморфных сферам; тем самым построена минимальная триангуля-

ция кватернионной проективной плоскости.

Для проведения вычислений автор диссертации использовал систему компьютерной алгебры GAP. Описание программы приведено в разделе 2.3.1 диссертации.

Третья глава диссертации посвящена предъявлению канонического выбора локальной комбинаторной формулы для первого рационального класса Понтрягина произвольного комбинаторного многообразия M^n. Для этого явно описывается некоторая функция f на множестве ориентированных трехмерных симплициальных сфер, а цикл $f_{\#}(M^n)$, представляющий класс $p_1(M^n)$, получается по формуле

$$f_{\#}(M^n) = \sum_{\sigma \in M^n, \dim \sigma = n-4} f(\operatorname{link} \sigma)\sigma.$$

Диссертация хорошо и ясно написана. У меня имеется лишь несколько легко устранимых замечаний редакционного характера к тексту диссертации, серьёзных недостатков по существу я не обнаружил. Пожалуй, в качестве единственного существенного недостатка я бы указал отсутствие в свободном доступе (скажем, на домашней странице автора) написанной им программы для вычисления первого класса Понтрягина. Однако это ни в коей мере не снижает научной значимости работы.

Резюмируя, можно сказать, что в диссертации Д. А. Городкова получены ответы на ряд весьма естественных и актуальных, но в то же время крайне нетривиальных вопросов алгебраической топологии. При этом автор демонстрирует владение широким арсеналом методов алгебраической и комбинаторной топологии и гомологической алгебры, а также умение проводить трудоёмкие компьютерные вычисления для комбинаторных объектов.

Все результаты диссертации являются новыми, изложены с полными доказательствами и своевременно опубликованы в ведущих математических журналах. Они прошли апробацию на ряде научных семинаров в России и за рубежом, а также всероссийских и международных конференциях. Автореферат диссертации полно и правильно отражает ее содержание.

На основании вышесказанного заключаю, что диссертационная работа «Комбинаторное вычисление первого класса Понтрягина и приложения» представляет собой законченное научное исследование, удовлетворяющее всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор Городков Денис Александрович заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология.

10 февраля 2021 г.

Доцент факультета математики,
н.с. Лаборатории алгебраической геометрии
и её приложений НИУ ВШЭ
к.ф.-м.н. (01.01.06), Ph.D.

Е. Ю. Смирнов

Москва, 119048, ул. Усачева, 6
тел. +7 (499) 783-37-48 доб. 12742
e-mail esmirnov@hse.ru

Подпись заверяю
Специалист по
кадровому делопроизводству
Отдела по кадровому администрированию
Управления персонала
Мерзлякова Ж. В.
10.02.2021