ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ
на диссертационную работу Д. А. Городкова «Комбинаторное вычисление первого класса Понтрягина и приложения», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология

Проблема комбинаторного вычисления рациональных классов Понтрягина многообразия по его триангуляции находилась в центре внимания алгебраических топологов, начиная со второй половины 20-го века. Классические результаты в этой области были получены в работах В. А. Рохлина, А. С. Шварца, Р. Тома, А. М. Габриэлова, И. М. Гельфанда, М. В. Лосика, Р. Макферсона, Н. Левитта, К. Рурка, Дж. Чигера. В 2000-х годах мной был предложен новый полностью комбинаторный подход к этой проблеме на основе теории универсальных локальных формул и использовании бизвездных преобразований (движений Пахнера). Диссертация Д. А. Городкова посвящена дальнейшему развитию и углублению этого подхода и его приложениям к задаче о минимальных триангуляциях.

В диссертационной работе получены два очень важных новых результата.

1. Полностью завершено решение классической задачи о построении локальной комбинаторной формулы для первого рационального класса Понтрягина триангулированного многообразия. Локальной называется формула, задающая цикл, представляющий класс гомологий, двойственный первому классу Понтрягина триангулированного многообразия K, в виде

$$\sum_{\sigma\in K,\,\operatorname{codim}\sigma=4} f(\operatorname{link}\sigma)\sigma,$$

где f — функция на множестве классов изоморфизма трехмерных комбинаторных сфер, не зависящая от многообразия K.

Пригодная для практических вычислений явная формула для первого рационального класса многообразия в терминах комбинаторной схемы его кусочно линейной триангуляции была получена мной еще в 2004 году. Тем не менее, это нельзя было полностью считать решением указанной задачи, так как (а) была построена полностью явная формула, не являющаяся локальной, (б) было дано явное описание множества всех локальных комбинаторных формул для первого класса Понтрягина, — но при этом не было указано явного способа выбрать одну конкретную функцию f, дающую локальную комбинаторную формулу. Такой явный выбор конкретной функции f произведен в диссертации Д. А. Городкова на основе

принципиально нового метода, связанного с изучением перераспределения комбинаторной кривизны триангулированной двумерной сферы при бизвездных преобразованиях. Считаю этот результат ключевым для дальнейшего развития теории комбинаторного вычисления характеристических классов.

2. В качестве приложения теории локальных формул для классов Понтрягина решена задача о минимальной триангуляции кватернионной проективной плоскости, остававшаяся открытой в течение 30 лет. Классическая теорема Дж. Г. К. Уайтхеда утверждает, что всякое гладкое многообразие обладает C^1-гладкой триангуляцией. Тем не менее, специалистам хорошо известно, что явное построение триангуляции является сложной задачей даже для довольно простых гладких многообразий размерностей 4 и выше. В частности, первая явная триангуляция комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ была предъявлена В. Кюнелем лишь в 1973 году. Для кватернионной проективной плоскости $\mathbb{HP}^2$ ситуация оказалась еще более сложной. В конце 1980-х годов У. Брем и В. Кюнель построили 15-вершинный 8-мерный симплициальный комплекс M^8_{15}, высказали гипотезу, что этот симплициальный комплекс кусочно линейно гомеоморфен $\mathbb{HP}^2$, предъявили много аргументов в пользу этой гипотезы, но доказать ее так и не смогли. При этом они показали, что никакая триангуляция $\mathbb{HP}^2$ не может иметь менее 15 вершин, поэтому если комплекс M^8_{15} является триангуляцией кватернионной проективной плоскости, он автоматически является ее минимальной по числу вершин триангуляцией. При помощи результатов Дж. Илса и Н. Кёйпера о многообразиях «похожих на проективную плоскость» задача об установлении кусочно линейной гомеоморфности M^8_{15} и $\mathbb{HP}^2$ была сведена к задаче вычисления чисел Понтрягина триангулированного многообразия M^8_{15}. Последняя задача оставалась открытой с 1980-х годов и была решена Д. А. Городковым в качестве приложения явной формулы для первого класса Понтрягина. Таким образом, им была доказана гипотеза Брема–Кюнеля о том, что симплициальное многообразие M^8_{15} является кусочно линейной триангуляцией кватернионной проективной плоскости $\mathbb{HP}^2$. Отметим, что до этого результата не было явно построено ни одной триангуляции $\mathbb{HP}^2$.

Наряду с указанными двумя прорывными результатами, в диссертации получен ряд менее важных и более технических результатов, среди которых стоит отметить исправление ошибки в принадлежащем мне алгоритме разложения цикла в графе ориентированных двумерных симплициальных сфер и их бизвездных преобразований в сумму элементарных циклов.

В целом диссертация является законченным исследованием в области алгебраической топологии; в ней получены яркие новые результаты. Результаты диссертации опубликованы в трех

журнальных статьях, неоднократно докладывались на научно-исследовательских семинарах и международных конференциях.

Считаю, что работа Д. А. Городкова удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 (геометрия и топология) , а ее автор безусловно заслуживает присуждения ему этой ученой степени.

Научный руководитель,
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник МИАН А. А. Гайфуллин

05.11.2020 г.

Подпись Гайфуллина АА заверяю:
Зав. отделом кадров МИАН
Высоцкая В.И.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук * МОСКВА * ОТДЕЛ КАДРОВ