ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации А.С. Трушечкина «Свойства моделей необратимой квантовой динамики и квантовой криптографии» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика

В диссертации А.С. Трушечкина исследуются различные математические модели квантовой динамики, объединенные общей темой необратимости по времени и роста энтропии. Известно, что унитарная квантовая динамика, задаваемая уравнением Шрёдингера, обратима. В диссертации автор охватывает многие модели возникновения необратимой динамики: в результате взаимодействия квантовой системы с окружением, в результате проведения измерений над квантовой системой, в результате усреднения по времени быстро осциллирующих решений уравнения Шрёдингера. Диссертация состоит из шести глав, каждая из которых посвящена той или иной модели необратимой динамики.

В первой главе исследуются свойства решений основного уравнения динамики открытых квантовых систем (т.е. систем, взаимодействующих с окружением) – уравнения Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада (ГКСЛ). Впервые дается определение функционала производства энтропии на языке операторов. Доказывается теорема 1.4 о построении стационарных решений уравнения ГКСЛ при помощи этого функционала. В качестве примера строятся полные семейства стационарных решений для двух важных примеров, которые рассматривались до этого в литературе и для которых полные семейства стационарных решений не были известны.

Вторая глава посвящена свободной динамике квантовых волновых пакетов (квадратично интегрируемых функций специального вида) на плоском торе в квазиклассическом пределе. Описание динамики на коротких временах, конечно, не представляет трудности, но внимание многих исследователей сосредотачивается на динамике на масштабах времени за пределами так называемого времени Эренфеста, при котором квантовая динамика начинает существенно расходиться с классической. Формально это соответствует осуществлению одновременного предела постоянной Планка (малого параметра) к нулю, а времени – к бесконечности. За пределами времени Эренфеста квантовая динамика даже такой с виду простой системы становится довольно сложной: возникает сложная структура дробных и полных возрождений квантовых волновых пакетов. В физической литературе была исследована структура этих возрождений, но требовалось строгое математическое описание. Автор описывает квазиклассическую динамику волновых пакетов на всех масштабах времени при помощи формализма так называемых квазиклассических мер, теория которых активно развивается в рамках микролокального анализа. Впервые построено полное семейство квазиклассических мер для динамики волновых пакетов на торе (теоремы 2.1 и 2.2). Ценность этого результата состоит в том, что в настоящее время математики, исследующие квазиклассические меры, осуществляют дополнительное усреднение по времени, которое уничтожает упомянутые выше специфические квантовые черты динамики – возрождения волновых пакетов. Во второй главе получены результаты без усреднения по времени и лишь затем осуществляется усреднение (теорема 2.3). В результате такого усреднения возникает равномерное пространственное распределение, что соответствует диффузии, увеличению энтропии, хотя динамика рассматривается унитарная, обратимая.

В третьей главе изучается квантовая динамика в присутствии измерений, необратимо изменяющих состояние системы. Изучается задача оптимального управления в модели Ландау–Зинера посредством измерений. Задача интересна тем, что при бесконечно частых измерениях имеет место так называемый квантовый эффект

Зенона: система «замораживается» в начальном состоянии и динамики не происходит. В диссертации решается задача оптимального приближения к этому эффекту при конечном числе измерений. Интересно, что оптимальное решение соответствует сначала росту, а затем убыванию энтропии фон Неймана квантового состояния. Также интересно, что для решения этой задачи соискатель применил различные техники: асимптотические методы, свойства специальных функций (функций параболического цилиндра, обобщенных гипергеометрических функций), метод динамического программирования для решения задачи оптимального управления. Основные теоремы 3.2 и 3.3 этой главы посвящены двум противоположным предельным случаям. Продемонстрировано, что сочетание результатов этих теорем с численными методами позволяет эффективно находить оптимальное управление для произвольных значений параметров.

Особую роль в диссертации играет четвертая глава. В ней доказывается, что кинетическое уравнение Больцмана–Энскога для газа из твердых шаров имеет решения в виде эмпирических мер, или микроскопические решения, которые имеют вид сумм дельта-функций и соответствуют динамике конечного числа частиц. Эти решения были впервые открыты Н.Н. Боголюбовым, но обоснованы им только на «физическом» уровне строгости. Строгое обоснование наталкивается на трудности ввиду возникновения произведений дельта-функций при подстановке этих решений в уравнение. Тем не менее, соискателю удается строго доказать существование таких решений различными способами. В теореме 4.2 строгое обоснование существования таких решений дается через регуляризацию дельта-функций и интеграла столкновений уравнения. Также в этой главе кратко приводится изложение результатов автора, полученных совместно с итальянскими математиками, где обоснование существования таких решений дается через представление решений в виде ряда теории возмущений по числу столкновений шаров. Эти решения удивительны и интересны тем, что связывают обратимую микроскопическую динамику частиц с кинетическим уравнением, которое описывает, вообще говоря, необратимую динамику газа как целого. Поэтому строгое доказательство существования этих решений – важный результат. Он проливает новый свет на кинетические уравнения, их соотношение с динамикой частиц, соотношение между обратимой и необратимой динамикой и ставит новые вопросы. Если раньше считалось, что уравнение Больцмана–Энскога описывает необратимую динамику, то из этого результата следует, что обратимость или необратимость динамики, задаваемой этим уравнением, зависит от рассматриваемого класса решений.

Пятая глава снова посвящена динамике открытых квантовых систем. Рассматриваются режимы динамики открытых систем, которые пока что не получили строгого математического обоснования, но которые важны для описания переноса энергии в биологических системах. А именно, рассматриваются теории возмущений (так называемые теория Фёрстера и модифицированная теория Редфилда), отличающиеся от теорий пределов слабой связи, низкой плотности и других пределов, обычно рассматривающихся в математических работах. Автор продвигается в направлении строго обоснования областей применимости этих теорий и существенно развивает их, получив формулы для динамики всей матрицы плотности (а не только диагональной части, что было ранее) в рамках этих теорий.

Шестая глава посвящена квантовой криптографии – новому актуальному направлению в современной математической физике. Соискатель обосновывает, что она родственна тематике необратимой динамики в открытых квантовых системах и потому также соответствует теме диссертации. Глава посвящена задаче, важной для практического применения систем квантовой криптографии: получению оценок на достижимые скорости генерации секретного ключа для случая, когда два однофотонных детектора, необходимых в таких системах, имеют отличающиеся характеристики. Математически задача заключается в минимизации квантовой

относительной энтропии при линейных ограничениях на оператор плотности. Автор впервые решает эту задачу аналитически, что позволяет говорить о новом методе получения оценок на достижимые скорости генерации секретного ключа в квантовой криптографии. Результаты этой главы имеют как теоретическую, так и практическую значимость.

Таким образом, автор продемонстрировал владение многими методами математической физики, функционального анализа и других разделов математики. Сочетание различных методов позволило получить яркие результаты. Диссертация выполнена на очень высоком математическом уровне; текст свидетельствует о глубокой квалификации автора.

Заметно, что соискатель старается выбирать математические задачи, которые обсуждаются в современной научной литературе, а в некоторых случаях и сам предлагает научному сообществу интересные темы. Так, например, на статьи соискателя по микроскопическим решениям уравнения Больцмана–Энскога откликнулись итальянские математики, известные специалисты в области математического обоснования кинетических уравнений. Ознакомившись со статьями соискателя, они написали одну свою статью, посвященную микроскопическим решениям, и одну статью совместно с соискателем.

В диссертации подчеркивается связь различных глав друг с другом. Так, например, квантовая относительная энтропия и ее минимизация возникает в первой главе в качестве характеристики производства энтропии в открытых квантовых системах и в шестой главе в аналогичном качестве остатка информации после необратимой утечки части информации в окружение (подслушивающей стороне). Также автор указывает и на связь динамики открытых квантовых систем со второй главой, где свойство «уравновешивания» (стремления пространственного распределению к равномерному) появилось при обратимой унитарной динамике вследствие усреднения по времени.

В качестве пожелания можно посоветовать соискателю в развитие результатов второй главы рассмотреть динамику квантовых волновых пакетов на более сложных многообразиях.

Все результаты диссертации – новые, получены лично автором впервые, доказаны и, следовательно, достоверны. Результаты опубликованы в центральных российских и зарубежных журналах, индексируемых базами данных “Web of Science” и “Scopus”. Автореферат правильно и полно отражает основные результаты диссертации.

Диссертация является научно-квалификационной работой, в которой, на основании выполненных автором исследований, разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение. Диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук в Положении о присуждении ученых степеней, а ее автор безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Официальный оппонент:

Андрей Игоревич Шафаревич,

доктор физико-математических наук
(специальность ВАК: 01.01.03 – математическая физика),
член-корреспондент РАН, профессор,
декан механико-математического факультета
Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова

23.03.2020 г

Подпись заверяю специалист по кадрам Карапузова СА