Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
(ПОМИ РАН)

191023 Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27
тел. (812) 312-40-58, факс (812) 310-53-77
e-mail: admin@pdmi.ras.ru

ИНН 7825351570 КПП 784101001

27.02.2020 № 11102/33/02-2171

На _____ от _____

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

академик РАН

С. В. Кисляков

ОТЗЫВ

ведущей организации о диссертационной работе А. С. Трушечкина «Свойства моделей необратимой квантовой динамики и квантовой криптографии», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика

Центральная тема диссертации, которая проходит через все ее главы, – математические вопросы проблемы возрастания энтропии. Проблема возникновения необратимой динамики и роста энтропии была поставлена Л. Больцманом во второй половине XIX века и с тех пор является предметом рассмотрения физиков и математиков. В настоящее время она продолжает оставаться в центре внимания многих известных ученых. В ходе исследований этой темы возникли новые разделы математики и математической физики. Всё это доказывает актуальность выбранной тематики.

Автор диссертации сосредотачивает свое внимание на моделях необратимой динамики в квантовых системах. Квантовая динамика изолированной квантовой системы унитарна, что влечет за собой сохранение энтропии фон Неймана. Вместе с тем, многие наблюдаемые процессы характеризуются ростом энтропии. В диссертации рассматриваются различные модели возникновения необратимой динамики и роста энтропии в квантовых системах.

Один из подходов связан с моделями открытых квантовых систем, т.е. систем, не являющихся изолированными, а взаимодействующих с окружением (резервуаром). Моделям открытых квантовых систем посвящены главы 1 и 5 диссертации. Глава 1 посвящена основополагающему уравнению теории открытых квантовых систем – уравнению Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада (ГКСЛ). В этой главе вводится функционал производства энтропии как сумма приращений энтропий системы и резервуара. В теореме 1.1 доказывается, что этот функционал неотрицателен. Далее доказывается теорема 1.4 о связи этого функционала со стационарными решениями уравнения ГКСЛ, которая позволяет строить полные семейства стационарных решений уравнений ГКСЛ из некоторого класса. В частности, впервые найдено неравновесное стационарное решение для обсуждавшейся в литературе модели – двух двухуровневых систем (спинов, кубитов), взаимодействующих друг с другом и с резервуарами с разными температурами. Отсутствие аналитического вида стационарного решения для этой модели затрудняло ее исследование. Доказанная теорема, несомненно, будет полезной для получения аналитического вида стационарных состояний квантовых систем, необратимая динамика которых задается уравнением ГКСЛ.

Глава 2 посвящена вопросу, каким образом рост энтропии может быть объяснен исходя из унитарной динамики, без привлечения дополнительных воздействий со стороны окружения или измерительного прибора. Эта глава находится в общем русле исследований по слабому пределу, разрабатываемых В.В. Козловым, Д.В. Трещёвым и другими учеными. Рассматривается свободная динамика квантовой частицы на торе, но даже такая простая модель, оказывается, содержит в себе довольно богатые структуры. В этой главе в теоремах 2.1 2.2 построено полное семейство так называемых квазиклассических мер, связанных с динамикой когерентных квантовых состояний на торе. Явное построение полного семейства квазиклассических мер – сложная задача, обычно исследуются общие свойства этих мер, причем с дополнительным усреднением по времени. Поэтому этот результат важен не только в виду исследований необратимой динамики, но и в теории самих квазиклассических мер. Квазиклассические меры отражают различные этапы динамики этих состояний. Динамика является периодической, т.е. не проявляет свойств необратимости. В то же время, как показано в теореме 2.3, введение усреднения по времени позволяет получить стационарное равномерное пространственное распределение, которое обладает максимальной энтропией. Таким образом, исходя из результатов этой главы, можно заключить, что усреднение, выполняемое измерительным прибором, может приводить к эффектам, являющихся характеристикой необратимой динамики.

Другое объяснение возникновения необратимой динамики и роста энтропии в квантовых системах связано с квантовыми измерениями. Роль квантовых измерений в появлении необратимости выделяют, например, Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц в своем известном курсе теоретической физики. В главе 3 диссертации решается конкретная проблема, связанная с воздействием измерений на квантовую динамику: это задача оптимального выбора моментов измерений фиксированной наблюдаемой для максимизации вероятности желаемого квантового перехода. Эта задача решена для конкретной важной модели – модели Ландау–Зинера. Разработанный метод решения этой задачи, основанный на динамическом программировании, легко обобщается на

произвольные квантовые системы. Важность этого результата связана с бурным развитием технологий управления индивидуальными квантовыми системами, в том числе технологий управления посредством измерений.

В главе 4 исследуется вопрос о том, можно ли примирить обратимую и необратимую динамики в рамках одной модели. Неожиданно на него дается положительный ответ: показывается (теорема 4.2), что кинетическое уравнение Больцмана–Энскога для газа из твердых шаров, которое, как известно, описывает необратимую динамику, сопровождающуюся убыванием H-функции (энтропии, взятой с обратным знаком, и некоторой поправки к ней), имеет также и обратимые решения, связанные с точной динамикой конечного числа твердых шаров. Но эти решения имеют вид сумм дельта-функций. Они были открыты Н.Н. Боголюбовым, однако их формальная подстановка в уравнение приводит к математически неопределенным произведениям дельта-функций. Поэтому строгое доказательство их существования ждало своего часа. При помощи введения произвольной регуляризации дельта-функций, а также регуляризации интеграла столкновений этого уравнения автору диссертации удалось строго доказать существование обратимых решений. Также совместно с итальянскими математиками соискателем предложен и другой способ придания строго смысла этим решениям, который уже не требует их регуляризации.

Глава 5 посвящена более специфическим вопросам теории открытых квантовых систем. А именно, она посвящена немарковской динамике, которая не описывается уравнением ГКСЛ. Общепринятых немарковских квантовых кинетических уравнений пока что не существует, но есть частные модели немарковской динамики для определенных физических систем. В главе 5 соискатель решает актуальную задачу в области описания квантового переноса энергии в биологических системах и существенно расширяет области применимости широко используемых для этого приближений – теории Фёрстера и модифицированной теории Редфилда. Если ранее эти теории позволяли рассчитать динамику только диагональной части матрицы плотности, то в диссертации показано, как с их помощью можно рассчитать динамику всей матрицы плотности, т.е. всего состояния квантовой системы.

Особое место в диссертации занимает глава 6, посвященная квантовой криптографии. Это современная бурно развивающаяся область квантовой теории информации (раздела математической физики), имеющая практические применения. Автор диссертации обосновывает, что и эта область вкладывается в общую теорию необратимых квантовых процессов, поскольку и в ней присутствует необратимое рассеяние информации, возрастание энтропии, что связано с действием уже не пассивного окружения, а активной подслушивающей стороны. Теорема 6.1 решает важную для этой области практическую задачу: обоснование стойкости наиболее известного и широко распространенного протокола квантового распределения ключей BB84 при отличающихся эффективностях однофотонных детекторов. Последнее обстоятельство вносит в задачу асимметрию, что не позволяет применить существовавшие до этого методы. В то же время, на практике такая ситуация типична. В диссертации предложен новый метод, который позволил решить эту задачу. Метод основан на минимизации квантовой относительной энтропии когерентности при линейных ограничениях. Минимизация квантовой относительной энтропии роднит эту главу с первой главой, где рассматривается

необратимая динамика под воздействием пассивного окружения и где также возникает процесс стремления квантовой относительной энтропии к минимуму при линейных ограничениях (законах сохранения). Включение такой современной области исследований, как квантовая криптография, в контекст фундаментальной для математической физики проблемы необратимости можно отнести к достоинствам диссертационной работы.

Таким образом, диссертационная работа представляет собой цельное исследование, в котором автор подходит к фундаментальной теме возрастания энтропии в квантовых системах с различных сторон и получил целую серию замечательных результатов. Конечно, некоторые актуальные направления в этой области все же остались вне рассмотрения, что отмечает и сам автор: так, например, не рассматривается очень актуальный и активно развивающийся подход к росту энтропии и к термализации в квантовых системах, связанный с гипотезой о термализации собственных состояний. Было бы желательно расширить круг моделей, где метод функционала производства энтропии используется для построения явных решений уравнения ГКСЛ.

В диссертации присутствуют опечатки: так, например, в формуле (1.49) в самом конце главы 1 на с. 69 ε_a и ε_b необходимо заменить на E_A и E_B соответственно. Также в аргументе экспоненты в числителе второго слагаемого перед $E_B\Delta\beta$ должен стоять знак «плюс», а не «минус». Кроме того, желательно было избежать использования символов a и b и в качестве операторов уничтожения, и в качестве индексов в этом разделе диссертации. Впрочем, эта опечатка не влияет на справедливость других утверждений диссертации, в том числе основных положений, выносимых на защиту. В исходной статье соискателя, в которой впервые была выведена эта формула, она записана правильно. Указанные замечания не умаляют значимость полученных результатов. Нет никаких сомнений, что проблема возникновения необратимой динамики и дальше будет служить источником интересных задач и моделей в математической физике.

К несомненным достоинствам соискателя можно отнести способность реагировать на актуальные задачи, возникающие в математической физике, и решать их. Особенно об этом свидетельствуют результаты главы 1 (построение стационарных решений уравнения ГКСЛ для известных физических моделей), главы 5 (важные результаты, касающиеся моделирования квантовой динамики переноса энергии в биологических системах), главы 6 (решение практически важной задачи в квантовой криптографии). Это свидетельствует о научной зрелости и профессионализме соискателя.

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно, снабжены полными и подробными доказательствами. Результаты опубликованы в ведущих российских и зарубежных научных изданиях, индексируемых базами данных “Web of Science” и/или “Scopus” и докладывались на множестве российских и международных научных конференций по математике, математической физике и теоретической физике. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

На основании вышеизложенного можно заключить, что диссертация «Свойства моделей необратимой квантовой динамики и квантовой криптографии», представленная

на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение в области математических вопросов необратимой квантовой динамики.

Диссертация полностью удовлетворяет пп. 9–14 Положения о присуждении ученых степеней, а ее автор А.С. Трушечкин, несомненно, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

А.С. Трушечкин выступил с докладом по материалам диссертации на Петербургском семинаре по квантовой теории поля. Отзыв был заслушан, обсужден и единогласно утвержден на заседании лаборатории математических проблем физики ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН 27 февраля 2020 года, протокол №1.

Ведущий научный сотрудник
лаборатории математических проблем физики,
доктор физико-математических наук  Н.М. Боголюбов