ОТЗЫВ
официального оппонента

на диссертацию А.С. Трушечкина «Свойства моделей необратимой квантовой динамики и квантовой криптографии», представленную на соискание степени доктора физико-математических наук по научной специальности 01.01.03 – математическая физика.

Диссертация А.С. Трушечкина посвящена различным аспектам необратимой динамики в квантовых системах. Необратимая динамика в классических и квантовых динамических системах, её свойства и механизмы её возникновения – фундаментальная тема в математической физике, сохраняющая свою актуальность. Также некоторые темы, затронутые в диссертации (например, свойства уравнения Горини–Коссаковски–Сударшана–Линдблада в теории открытых квантовых систем, квантовое управление, квантовая криптография) имеют и практические приложения, что также говорит в пользу актуальности тематики.

Первая глава посвящена свойствам квантовых кинетических уравнений, задаваемых генератором Горини–Коссаковски–Сударшана–Линдблада (ГКСЛ). Это общий вид ограниченного генератора квантовой динамической полугруппы. Доказываются свойства введённого соискателем функционала производства энтропии и на основе этого выводится способ нахождения стационарных состояний определённого класса уравнения ГКСЛ, приводятся примеры. В частности, рассматриваются система из двух кубитов, взаимодействующих между собой и с резервуарами, находящимися при разных температурах. Соответствующее уравнение ГКСЛ получается довольно громоздким, так что нахождение стационарного решения и стационарного теплового потока непосредственным образом не приводит к успеху (получающиеся выражения чрезвычайно громоздки, что делает практически невозможной работу с ними), тогда как применение разработанного соискателем аппарата, связанного со свойствами функционала производства энтропии, позволяет прийти к компактным выражениям. Основные результаты этой главы – теоремы о неотрицательности функционала производства энтропии, адиабатического вклада в производство энтропии (в окрестности стационарного состояния или, при дополнительных предположениях, для любого квантового состояния) и теорема с необходимым и достаточным условием того, что заданное квантовое состояние (оператор плотности) является стационарным решением уравнения ГКСЛ, при определённых условиях на это уравнение.

Во второй главе изучается свободная динамика квантовой частицы на плоском торе в квазиклассическом пределе, т.е. при постоянной Планка, стремящейся к нулю, когда время также масштабируется в зависимости от постоянной Планка. Начальное состояние имеет вид когерентного состояния, т.е. квадратично интегрируемой на торе функции, локализованной и в координатном, и в импульсном представлениях. Результаты формулируются в терминах предельных распределений Хусими в фазовом пространстве, или, иными словами, в терминах квазиклассических мер. Впервые получено полное семейство квазиклассичских мер, связанных с эволюцией когерентного состояния на торе. Затем изучается влияние дополнительного сглаживания по времени, в результате которого исчезают специфически квантовые явления возрождения волновых пакетов, связанные с интерференцией, и пространственная плотность распределения в ряде случаев оказывается равномерной.

Третья глава посвящена оптимальному управлению кубитом, динамика которого описывается гамильтонианом Ландау–Зинера, зависящим от времени. Задача заключается в максимизации вероятности неадиабатического перехода с одного зависящего от времени уровня энергии на другой. Управление осуществляется посредством неселективных измерений фон Неймана, т.е. мгновенных воздействий на

систему определённого вида, задача заключается в поиске оптимальных моментов для заданного конечного числа измерений. Также на эту задачу можно посмотреть как на задачу оптимального приближения к квантовому эффекту Зенона. Сложность задачи заключается в том, что она имеет множество локальных максимумов, что затрудняет не только аналитическое решение этой задачи, но и численное. Для решения данной задачи использован метод динамического программирования, который в ряде позволяет свести задачу многомерной оптимизации к совокупности задач одномерной оптимизации. Несмотря на то что рассматривается только частная модель, предлагаемый метод, основанный на динамическом программировании, достаточно универсален и применим и к другим задачам управления квантовыми системами посредством измерений, причем как с отсутствием обратной связи (что рассматривается в данной главе), так и при её наличии. Специфика модели Ландау–Зинера заключается в этой главе в рассмотрении двух противоположных предельных случаев: адиабатического и ультрадиабатического. Для анализа задачи в этих предельных случаях, помимо метода динамического программирования, были использованы свойства функций параболического цилиндра. В адиабатическом пределе максимальное значение целевой функции (вероятности перехода) удаётся найти аналитически.

Четвёртая глава посвящена вопросу существования решений кинетических уравнений в виде эмпирических мер, т.е. мер в виде сумм мер Дирака. А именно, в этой главе изучается кинетическое уравнение Больцмана–Энскога. В идеале кинетические уравнения должны выводиться через предел микроскопической динамики, в данном случае динамики твёрдых шаров, при числе частиц (твёрдых шаров), стремящемся к бесконечности. Однако для уравнения Больцмана–Энскога строгий математический вывод отсутствует, существует лишь вывод Н.Н. Боголюбова на физическом уровне строгости. Однако, как открыто тем же Н.Н. Боголюбовым, уравнение Больцмана–Энскога содержит решения в виде сумм мер Дирака (или дельта-функций), отвечающие динамике конечного числа твёрдых шаров. Этот факт особенно интересен тем, что динамика конечного числа твёрдых шаров (микроскопическая динамика) обратима по времени, тогда как кинетические уравнения Больцмана и Больцмана–Энскога описывают, как казалось, только необратимую динамику газа из бесконечного числа частиц. Однако, как оказывается, уравнение Больцмана–Энскога может описывать и обратимую динамику. Обратимость или необратимость динамики, задаваемой этим уравнением, зависит от того, какой класс решений мы рассматриваем: решения в виде регулярных или в виде сингулярных мер. К сожалению, вывод о существовании решений в виде эмпирических мер Н.Н. Боголюбов выполнил на физическом уровне строгости, тогда как прямая подстановка дельта-функций в это нелинейное уравнение приводит к формально некорректному произведению дельта-функций. В диссертации рассматривается несколько способов формального доказательства этого факта. Один способ основан на введении регуляризации для дельта-функций и интеграла столкновений. Другой способ связан с представлением решений в виде рядов теории возмущений, каждый член ряда представляется графически в виде дерева истории столкновений. Он также требует введение регуляризации в определении членов ряда.

Пятая глава посвящена теориям возмущений в рамках теории открытых квантовых систем, которые обычно не рассматриваются в математической литературе, но важны в физике, в частности, в теории переноса энергии возбуждения в искусственных и естественных (биологических) молекулярных системах. В данной главе выводятся формулы зависимости от времени внедиагональных элементов матрицы плотности в рамках теории Фёрстера и модифицированной теории Редфилда. Данная глава выполнена на «физическом» уровне строгости. Достоверность результатов в ней обеспечивается следованием систематическому методу проекционных операторов Цванцига и сравнением результатов вычислений по

выведенным формулам с численно точной (но вычислительно затратной и потому непригодной для больших систем) цепочкой уравнений.

Заключительная шестая глава посвящена квантовой криптографии – разделу квантовой теории информации и математической физики, в которой изучаются способы создания двумя удалёнными сторонами секретного ключа на основе кодирования информации в квантовые состояния. По используемым методам эта глава схожа с первой главой: в обеих главах одну из ключевых ролей играет квантовая относительная энтропия (выпуклый функционал) и её минимизация при линейных ограничениях. Основной математический результат этой главы состоит в аналитическом решении задачи такого типа.

Результаты диссертации вносят значительный вклад в развитие математической теории квантовых необратимых процессов, в ней получены яркие интересные результаты. Внутреннее единство диссертации обеспечивается тем, что все полученные в ней результаты связаны с различными моделями необратимой квантовой динамики. Можно отметить большой объём проделанной работы. Диссертация выполнена на высоком научном уровне и представляет собой завершённое и профессионально зрелое произведение. Она написана подробно, хорошим языком и аккуратно оформлена. Все результаты диссертации являются новыми, достаточно обоснованными и достоверными. Они опубликованы в центральных российских и международных тематических журналах, которые индексируются базами данных Web of Science и Scopus, некоторые принадлежат квартили Q1 и активно цитируются исследователями из разных стран. Результаты докладывались на большом количестве семинаров, на российских и международных конференциях по математической физике. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации могут использоваться специалистами, работающими в области математической физики и квантовых технологий в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН, Московском, Санкт-Петербургском и Новосибирском государственных университетах, Высшей школе экономики и в других российских и зарубежных научных организациях и высших учебных заведениях. Также результаты диссертации могут быть включены в специальные курсы для студентов и аспирантов физико-математических специальностей.

В качестве замечания и предложения по дальнейшему развитию результатов можно выделить следующее: в третьей главе, посвященной квантовому управлению посредством измерений, рассмотрена только одна модель измерений – измерения фон Неймана. Это мгновенное измерение, в результате которого состояние системы проецируется на определённое подпространство. Однако в ряде случаев более реалистичной моделью измерений может служить уравнение квантовой фильтрации Белавкина, обобщающее уравнение Шрёдингера и описывающее непрерывное измерение произвольной интенсивности. Также в этой главе рассмотрено управление без обратной связи, тогда как квантовое управление с обратной связью широко изучается в настоящее время как в теоретических, так и в экспериментальных работах. Впрочем, данное замечание не умаляет достоинств диссертации.

Всё вышесказанное позволяет заключить, что диссертация «Свойства моделей необратимой квантовой динамики и квантовой криптографии», представленная на соискание степени доктора физико-математических наук, является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение в области математической физики. Таким образом, диссертация полностью удовлетворяет пп.9–14 Положения о порядке присуждения учёных степеней, а её автор А.С. Трушечкин заслуживает присуждения

ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Василий Никитич Колокольцов, 23.12.2019

доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.03),
главный научный сотрудник
Международной лаборатории стохастического анализа
и его приложений ФГАОУ ВО
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

101000 г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20
тел. (495) 771-32-32 доб. 15270
e-mail: vkolokoltsov@hse.ru

Подпись Колокольцова В.Н. заверяю
Макаренкий С.Э.