РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОГРАММНЫХ СИСТЕМ ИМЕНИ А.К. АЙЛАМАЗЯНА

На правах рукописи
УДК 517.977

Подобряев Алексей Владимирович

Симметрии и оптимальный синтез в левоинвариантных задачах оптимального управления

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Переславль-Залесский — 2019 г.

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте программных систем им. А. К. Айламазяна Российской академии наук

Научный руководитель:
САЧКОВ Юрий Леонидович — доктор физико-математических наук, доцент, руководитель исследовательского центра процессов управления Института программных систем имени А. К. Айламазяна Российской академии наук (специальность — 01.01.02)

Официальные оппоненты:
КУШНЕР Алексей Гурьевич — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией 06 ФГБУН Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук (специальность — 01.01.04, 01.01.02);

МАНИТА Лариса Анатольевна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Департамента прикладной математики Московского института электроники и математики им. А.Н. Тихонова НИУ ВШЭ (специальность — 01.01.02).

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Защита диссертации состоится «09» апреля 2020 года в 15-00 на заседании Диссертационного совета Д 002.022.02 в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-ый этаж, конференц-зал.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова РАН и на сайте
`http://www.mi-ras.ru/dis/ref19/podobriaev/dis.pdf`.

Автореферат разослан « » 20 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 002.022.02
доктор физико-математических наук,
профессор Ю. Н. Дрожжинов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Левоинвариантные управляемые системы на группах Ли изучаются с 1970-х годов. Эти исследования начались с работы Р. В. Брокетта[1], который рассматривал некоторые прикладные задачи, пространство состояний которых реализовывалось матричными группами Ли. В. Джарджевич и Х. Дж. Суссман[2] изучали вопросы управляемости и установили основные свойства орбит и множеств достижимости.

Построение оптимального синтеза в управляемых системах эквивалентно параметризации экстремальных траекторий и указанию времени и точек потери оптимальности (времени разреза и точек разреза). Для левоинвариантных систем на группах Ли это достаточно сделать для траекторий, выходящих из единичного элемента группы. В основополагающей книге В. Джарджевича[3] описан гамильтонов формализм, восходящий к А. Пуанкаре, и сформулирован принцип максимума Понтрягина для левоинвариантных систем. Это позволяет получить дифференциальные уравнения, описывающие экстремали. При этом отдельного изучения требуют вопросы интегрируемости и дальнейшего исследования траекторий на оптимальность. Последнее зачастую оказывается возможным благодаря симметриям задачи. Для этого описываются точки Максвелла, происходящие из симметрий задачи. Первое время Максвелла дает верхнюю оценку на время разреза. Остановимся подробнее на сделанном в этом направлении.

Отметим важный класс задач — субримановы задачи, которые характеризуются наличием неголономных связей и линейностью по управлению. Управляемость таких систем следует из результатов П. К. Рашевского[4] и В. Чжоу[5], а существование оптимального решения — из теоремы Филиппова[6].

Имеется целый ряд непосредственно формулируемых экстремальных задач, которые могут быть поставлены как субримановы задачи и исследованы с привлечением геометрической теории управления. Одним из способов исследования субримановых многообразий является нильпотентная аппроксимация Митчелла-Громова[7], при которой изучение окрестности регулярной точки сводится к левоинвариантной субримановой задаче на стратифицированной нильпотентной группе Ли. В этом ряду простейшей задачей является классическая изопериметрическая задача Дидоны, которая формулируется как левоинвариантная субриманова задача на нильпотентной группе Гейзенберга. Эта задача, рассмотренная А. М. Верши-

[1] R. W. Brockett. System theory on group manifolds and coset spaces // SIAM J.Control. 10 (1972) pp. 265–284.

[2] V. Jurdjevic, H. J. Sussmann. Control systems on Lie groups // J. Diff. Equat. 12 (1972) pp. 313–329.

[3] V. Jurdjevic. Geometric control theory. Cambridge University Press (1997).

[4] П. К. Рашевский. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-мат. 3, 2 (1938) с. 83–94.

[5] W. L. Chow. Uber system van linearen partiellen differentialgleichungenerster ordnung // Math. Annalen. 117 (1939) pp. 98–105.

[6] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит (2005).

[7] M. Gromov. Carnot-Carathéodory spaces seen from within. Sub-Riemannian Geometry, Progr. Math. 144. Birkhäuser, Basel (1996) pp. 79–323.

ком и В. Я. Гершковичем[8], служит краеугольным камнем субримановой геометрии. Субримановы задачи гейзенбергова типа изучались в работе К. Аутенрида и М. Годой Молина[9]. Для свободной нильпотентной субримановой задачи с вектором роста $(3, 6)$ полное решение получено О. Мясниченко[10], а также А. Монтанари, Д. Морбиделли[11]. Гипотеза о структуре множества разреза в общем случае свободной двуступенной нильпотентной группы Ли выдвинута Л. Рицци и У. Серресом[12]. Обобщенная задача Дидоны, формулируемая как субриманова задача на группе Картана, исследована Ю. Л. Сачковым[13,14,15], им получено описание точек Максвелла, возникающих из-за симметрии задачи, т.е. точек пересечения различных экстремальных траекторий с одинаковыми значениями функционала качества. Это описание позволяет получить верхние оценки времени разреза. Субриманова задача на группе Энгеля полностью решена в серии работ А. А. Ардентова и Ю. Л. Сачкова[16,17,18,19], получено описание множества разреза. В нильпотентной субримановой задаче с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$ анормальные траектории исследованы Е. Ф. Сачковой [20,21].

Ряд ненильпотентных субримановых задач малой размерности также хорошо изучен. Классификация левоинвариантных субримановых структур на трехмерных группах Ли получена А. А. Аграчевым и Д. Барилари[22]. Лишь некоторые из соответствующих субримановых задач решены полностью, т.е. описано множество разреза и построен оптимальный синтез. Симметричные субримановы задачи на группах $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, SU_2, а также $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ и SO_3, т.е. группах собственных движений

[8] А. М. Вершик, В. Я. Гершкович. Неголономные динамические системы и геометрия распределений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы — 7, 8. М.: ВИНИТИ (1986).

[9] C. Autenried, M. Godoy Molina. The subRiemannian cut locus of H-type groups // Math. Nachr. 289, 1 (2016) pp. 4–12.

[10] O. Myasnichenko. Nilpotent (3, 6) sub-Riemannian problem // Journal of Dynamical and Control Systems. 8, 4 (2002) pp. 573–597.

[11] A. Montanari, D. Morbidelli. On the subRiemannian cut locus in a model of free two-step Carnot group // Calc. Var. Partial Differential Equations. 56, 2 (2017) p. 36.

[12] L. Rizzi, U. Serres. On the cut locus of free, step two Carnot groups // Proc. Amer. Math. Soc. 145, 12 (2017) pp. 5341–5357.

[13] Ю. Л. Сачков. Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны // Матем. сб. 197, 2 (2006) с. 95–116.

[14] Ю. Л. Сачков. Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Матем. сб. 197, 4 (2006) с. 123–150.

[15] Ю. Л. Сачков. Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Матем. сб. 197, 6 (2006) с. 111–160.

[16] А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков. Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Матем. сб. 202, 11 (2011) с. 31–54.

[17] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group // Journal of Mathematical Sciences. 195, 3 (2013) pp. 369–390.

[18] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group // ESAIM: COCV. 21, 4 (2015) pp. 958–988.

[19] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov. Maxwell Strata and Cut Locus in Sub-Riemannian Problem on Engel group // Regular and Chaotic Dynamics. 22, 8 (2017) pp. 909–936.

[20] Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова. Вырожденные анормальные траектории в субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8) // Дифференциальные уравнения. 53, 3 (2017) с. 362–374.

[21] Е. Ф. Сачкова. Невырожденные анормальные управления в субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8) // Программные системы: теория и приложения. 8, 4 (2017) с. 179–195.

[22] A. A. Agrachev, D. Barilari. Sub-Riemannian structures in 3D Lie groups // Journal of Dynamical and Control Systems. 18, 1 (2012) pp. 21–44.

плоскости Лобачевского и сферы, полностью изучены в работах В. Н. Берестовского и И. А. Зубаревой[23,24,25], и независимо — У. Боскаином и Ф. Росси[26]. Ими получены параметризация субримановых геодезических, множество разреза, уравнения для времени разреза. Изучение других субримановых структур на группе SO_3 начато в работе И. Ю. Бесчастного и Ю. Л. Сачкова[27], в ней дана параметризация геодезических, получены описание периодических геодезических, оценки на время разреза и диаметр субримановой метрики. Среди трехмерных унимодулярных групп Ли имеются также группа SE_2 собственных движений плоскости и группа SH_2 гиперболических движений плоскости. Соответствующие субримановы задачи полностью решены в работах Ю. Л. Сачкова, И. Моисеева[28,29,30] и Я. А. Бутта, Ю. Л. Сачкова и А. И. Бгатти[31,32], соответственно.

Задачи более высокой размерности только начинают исследоваться. В задаче о качении сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания Ю. Л. Сачковым и А. П. Маштаковым[33,34] получены параметризация экстремальных траекторий и верхние оценки времени разреза. В субримановой задаче на группе SO_3 А. П. Маштаковым и А. Ю. Поповым в специальном случае получены формулы для управления[35]. Классификация субримановых структур энгелева типа была получена И. Бесчастным и А. Медведевым[36].

Во всех перечисленных выше задачах решение было получено исходя из параметризации субримановых геодезических и дальнейшего их исследования на оптимальность с использованием симметрий задачи. Отметим два существенных

[23]В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева. Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SO(3)$ // Сиб. матем. журн. 56, 4 (2015) с. 762–774.

[24]В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева. Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SL(2)$ // Сиб. матем. журн. 57, 3 (2016) с. 527–542.

[25]В. Н. Берестовский. (Локально) кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SO_0(2,1)$ // Алгебра и анализ. 27, 1 (2015) с. 3–22.

[26]U. Boscain, F. Rossi. Invariant Carnot-Caratheodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$ and lens spaces // SIAM Journal on Control and Optimization. 47 (2008) pp. 1851–1878.

[27]И. Ю. Бесчастный, Ю. Л. Сачков. Геодезические в субримановой задаче на группе SO(3) // Матем. сб. 207, 7 (2016) с. 29–56.

[28]I. Moiseev, Yu. L. Sachkov. Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. 16 (2010) pp. 380–399.

[29]Yu. L. Sachkov. Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. 16 (2010) pp. 1018–1039.

[30]Yu. L. Sachkov. Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. 17 (2011) pp. 293–321.

[31]Ya. A. Butt, Yu. L. Sachkov, A. I. Bhatti. Maxwell strata and conjugate points in the sub-Riemannian problem on the Lie group SH(2) // Journal of Dynamical and Control Systems. 22, 4 (2016) pp. 747–770.

[32]Ya. A. Butt, Yu. L. Sachkov, A. I. Bhatti. Cut Locus and Optimal Synthesis in Sub-Riemannian Problem on the Lie Group SH(2) // Journal of Dynamical and Control Systems. 23, 1 (2017) pp. 155–196.

[33]Ю. Л. Сачков. Симметрии и страты Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости // Матем. сб. 201, 7 (2010) с. 99–120.

[34]А. П. Маштаков, Ю. Л. Сачков. Экстремальные траектории и асимптотика времени Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости // Матем. сб. 202, 9 (2011) с. 97–120.

[35]A. P. Mashtakov, A. Yu. Popov. Extremal Controls in the Sub-Riemannian Problem on the Group of Motions of Euclidean Space // Regul. Chaotic Dyn. 22, 8 (2017) pp. 949–954.

[36]I. Beschastnyi, A. Medvedev. Left-invariant Sub-Riemannian Engel structures: abnormal geodesics and integrability // arXiv 1611.03634 (2016).

ограничения этого метода.

Первое заключается в том, что явная параметризация экстремальных траекторий, как правило, невозможна. Л. В. Локуциевский и Ю. Л. Сачков[37] показали, что в субримановых задачах на свободных нильпотентных группах Ли глубины 4 и больше гамильтонова система принципа максимума Понтрягина неинтегрируема по Лиувиллю.

Другим ограничением метода является то, что причиной потери оптимальности могут быть не только симметрии задачи. Именно это происходит в классической задаче Эйлера об эластиках, которая формулируется как левоинвариантная задача на группе SE_2, аффинная по управлению. В этой задаче Ю. Л. Сачковым[38,39] исследованы сопряженные точки, получено описание множества Максвелла, т.е. исследована локальная оптимальность эйлеровых эластик и получены оценки на время потери оптимальности. А. А. Ардентов[40] численно исследовал точки потери оптимальности, не происходящие из симметрий.

Под римановой задачей понимается задача поиска кратчайших на римановом многообразии. Множество разреза (множество точек, в которых геодезические перестают быть кратчайшими) содержит базовую информацию о топологической структуре риманова многообразия. Хорошо известны[41] множества разреза для стандартных римановых метрик на сферах, проективных пространствах, торах и квадриках в $\mathbb{R}^3$, для квадрик больших размерностей результат не известен. Некоторые общие свойства множеств разреза известны. В частности, множество разреза является замыканием множества Максвелла (см. книгу В. Клингенберга[42]). В то же время множество разреза может быть устроено достаточно сложно. М. А. Бухнер[43] доказал, что для аналитичной римановой метрики множество разреза субаналитично. Он же описал локальную структуру множества разреза метрик общего положения для многообразий размерности до шести[44].

Риманову задачу на группе SO_3 начал изучать еще Л. Эйлер, который вывел уравнения моментов для свободного вращения закрепленного в точке твердого тела.

---

[37] Л. В. Локуциевский, Ю. Л. Сачков. Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше // Матем. сб. 209, 5 (2018) с. 74–119.

[38] Yu. L. Sachkov. Maxwell strata in Euler's elastic problem // Journal of Dynamical and Control Systems. 14, 2 (2008) pp. 169–234.

[39] Yu. L. Sachkov. Conjugate points in the Euler elastic problem // Journal of Dynamical and Control Systems. 14, 3 (2008) pp. 409–439.

[40] А. А. Ардентов. Кратные решения в задаче Эйлера об эластиках // Автомат. и телемех. 79, 7 (2018) с. 22–40.

[41] M. Berger. A panoramic view of Riemannian geometry. Springer (2002).

[42] W. Klingenberg. Riemannian geometry. Walter de Gruyter & Co, Berlin (1995).

[43] M. A. Buchner. Simplicial structure of the real analytic cut locus // Proc. Amer. Math. Soc. 64, 1 (1977) pp. 118–121.

[44] M. A. Buchner. The structure of the cut locus in dimensions less than or equal to 6 // Invent. Math. 43, 3 (1977) pp. 199–231.

В серии работ Т. Сакаи и М. Такеучи[45,46,47,48] для компактных симметрических однородных пространств множество разреза описано в алгебраических терминах систем корней. Этот результат полностью укладывается в парадигму, состоящую в том, что геометрические инварианты симметрических пространств определяются алгебраической структурой[41].

Для слабосимметрических пространств никакие общие факты о множествах разреза неизвестны. В качестве простейших примеров слабосимметрических пространств рассмотрим однородные пространства (А. Сельберг[49])

$$(\mathrm{SO}_3 \times \mathrm{SO}_2)/\mathrm{SO}_2, \qquad (\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_2)/\mathrm{SO}_2,$$

где стабилизатор вложен в прямое произведение антидиагональным образом. Левоинвариантные римановы метрики на этих однородных пространствах можно рассматривать как осесимметричные левоинвариантные римановы метрики (т.е. метрики с двумя совпадающими собственными значениями) на группах собственных движений сферы и плоскости Лобачевского, соответственно. В работе Л. Бейтса и Ф. Фассо[50] изучена локальная оптимальность геодизических на группе SO_3 для метрики с двумя совпадающими собственными значениями, другими словами, описаны сопряженные точки. Глобальная оптимальность геодезических ранее не исследовалась.

Отметим, что множество разреза на группе SU_2 для римановой метрики с собственными значениями $I_1 = I_2 < I_3$ получено Т. Сакаи[51], в случае $I_1 = I_2 > I_3$ имеется гипотеза М. Берже[41] о множестве разреза. Общий случай $I_1 < I_2 < I_3$ не исследован.

Цель работы. В левоинвариантных задачах оптимального управления на группах Ли для исследования экстремальных траекторий на оптимальность получить общую конструкцию, позволяющую строить симметрии экспоненциального отображения из симметрий сопряженной подсистемы принципа максимума Понтрягина. Получить этим методом описание кратчайших в осесимметричных римановых задачах на группах собственных движений сферы и плоскости Лобачевского. В частности, описать время и множество разреза, построить оптимальный синтез. На основе полученных результатов вычислить некоторые важные геометрические характеристики (диаметр, радиус инъективности) рассматриваемых

[45] T. Sakai. On the structure of cut loci in compact Riemannian symmetric spaces // Math. Ann. 235 (1978) pp. 129–148.

[46] T. Sakai. Cut loci of compact symmetric spaces. Mimimal submanifolds and geodesics. Kaigai Pub. Ltd. Tokyo (1978).

[47] M. Takeuchi. On conjugate loci and cut loci of compact symmetric space, I // Tsukuba J. Math. 2 (1978) pp. 35–68.

[48] M. Takeuchi. On conjugate loci and cut loci of compact symmetric space, II // Tsukuba J. Math. 3 (1979) pp. 1–29.

[49] A. Selberg. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series // J. Indian Math. Soc. (N.S.) 20 (1956) pp. 47–87.

[50] L. Bates, F. Fassò. The Conjugate Locus for the Euler Top. I. The Axisymmetric Case // International Mathematical Forum. 43, 2 (2007) pp. 2109–2139.

[51] T. Sakai. Cut loci of Berger's sphere // Hokkaido Mathematical Journal. 10 (1981) pp. 143–155.

групп.

Общие методы исследования. Использованы методы геометрической теории управления, симплектической геометрии, теории групп и алгебр Ли.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. Основные результаты, выносимые на защиту, следующие:

1. Для левоинвариантных задач оптимального управления на группах Ли получены достаточные условия существования продолжения симметрии сопряженной подсистемы принципа максимума Понтрягина до симметрии экспоненциального отображения и построено такое продолжение.

2. Для римановых метрик с двумя совпадающими собственными значениями на группах SO_3, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ получено множество разреза и время разреза. То есть построен оптимальный синтез в соответствующей римановой задаче.

3. Доказана гипотеза М. Берже о множестве разреза для осесимметричных метрик на группе SU_2.

4. Найдены диаметры римановых метрик с двумя совпадающими собственными значениями на группах SO_3 и SU_2.

5. Найден радиус инъективности римановой метрики с двумя совпадающими собственными значениями на группе $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Результаты полезны специалистам по геометрической теории управления, неголономной механике, римановой геометрии, спектральной геометрии.

Апробация работы. Результаты, включенные в диссертацию, докладывались на семинарах:

1. семинар отдела дифференциальных уравнений Математического института имени В. А. Стеклова (2015, 2017),

2. семинар по геометрической теории управления под руководством М. И. Зеликина и Л. В. Локуциевского кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (2015, 2016, 2018),

3. семинар А. Т. Фоменко кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (2017),

4. семинар Лаборатории №6 ИПУ РАН (2019),

5. семинар кафедры теории динамических систем механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (2019),

6. семинар лаборатории геометрической теории управления Института математики имени С. Л. Соболева СО РАН (2019),

7. семинар Исследовательского центра процессов управления Института программных систем имени А. К. Айламазяна РАН (2014–2019).

Кроме того, результаты докладывались на следующих конференциях:

1. международная школа-конференция «Управление и оптимизация неголономных систем» (Переславль-Залесский, 2013),

2. конференция «Geometry & Control» (Москва, МИАН, 2014),

3. конференция «Geometric Analysis and Control Theory» (Новосибирск, 2016),

4. Зимняя геометрическая школа (Переславль-Залесский, 2018),

5. конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам DIFF2018 (Суздаль, 2018),

6. конференция «Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics» (Чебоксары, 2019),

7. Всероссийское совещание по проблемам управления (Москва, ИПУ РАН, 2019).

Научные исследования по теме диссертации были поддержаны грантом 17-11-01387 Российского научного фонда.

Публикации. Все результаты диссертации опубликованы в семи работах [1–7], список которых приводится в конце автореферата, в журналах, входящих в международные базы цитирования.

Личный вклад. Все результаты диссертации получены автором самостоятельно. В работах, выполненных в соавторстве [1–3], научному руководителю Ю. Л. Сачкову принадлежит постановка задачи и общее руководство работой. Все утверждения получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Диссертационная работа изложена на 116 страницах. Библиография включает 73 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Нумерация теорем, рисунков и формул соответствует их нумерации в тексте диссертации.

Введение посвящено истории рассматриваемых вопросов, а также краткому изложению результатов работы.

В **главе 1** описан общий метод решения левоинвариантных задач оптимального управления на группах Ли.

Рассмотрим семейство левоинвариантных векторных полей F_u, аналитически зависящих от параметра $u \in U \subset \mathbb{R}^n$. Пусть имеется левоинвариантная аналитическая функция $\varphi : G \times U \to \mathbb{R}$, точка $q_1 \in G$ и фиксированное время $t_1 > 0$. Требуется найти управление $u \in L^\infty([0, t_1], U)$ и липшицеву кривую $q_u : [0, t_1] \to G$ такие, что

$$\dot{q}_u(t) = F_{u(t)}(q_u(t)), \qquad q_u(0) = \mathrm{id}, \qquad q_u(t_1) = q_1 \in G,$$
$$\int_0^{t_1} \varphi(q_u(t), u(t))dt \to \min. \tag{1.1}$$

Обозначим H — максимизированный гамильтониан принципа максимума Понтрягина в нормальном случае, а $\vec{H}$ — соответствующее гамильтоново векторное поле. Напомним, что *нормальными экстремалями траекториями* называются образы фазовых кривых гамильтонова векторного поля $\vec{H}$ при естественной проекции $\pi : T^*G \to G$. Предполагается, что выполнено усиленное условие Лежандра, следовательно, малые дуги экстремальных траекторий оптимальны.

Построение оптимального синтеза эквивалентно параметризации экстремальных траекторий, описанию *времени разреза* (времени потери оптимальности экстремальных траекторий) и *точек разреза* (точек потери оптимальности). *Множеством разреза* называется совокупность точек разреза экстремальных траекторий, выходящих из единицы группы. Ключевую роль в оценке времени разреза играют точки Максвелла.

Определение 1.1. *Точкой Максвелла задачи оптимального управления* (1.1) называется точка, в которую приходят две различные экстремальные траектории с одинаковыми значениями функционала качества и времени. Это время называется *временем Максвелла.*

Известно[14], что после точки Максвелла экстремальная траектория не может быть оптимальной. То есть время Максвелла доставляет верхнюю оценку времени разреза. Поэтому точки Максвеллла играют важную роль в исследовании оптимальности экстремальных траекторий.

Естественной причиной возникновения точек Максвелла являются симметрии задачи. Дадим соответствующие определения.

Определение 1.2. *Экспоненциальным отображением задачи оптимального управления* (1.1) называется отображение

$$\mathrm{Exp} : \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+ \to G, \qquad \mathrm{Exp}\,(p, t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\mathrm{id}, p), \qquad (p, t) \in \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+,$$

где $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли группы Ли G, а $e^{t\vec{H}}$ — поток гамильтонова векторного поля $\vec{H}$.

Определение 1.3. *Симметрией экспоненциального отображения* называется пара диффеоморфизмов

$$s : \mathcal{W} \times \mathbb{R}_+ \to \mathcal{W} \times \mathbb{R}_+, \quad S : G \to G \quad \text{таких, что} \quad \operatorname{Exp} \circ s = S \circ \operatorname{Exp},$$

где $\mathcal{W}$ — открытое плотное подмножество $\mathfrak{g}^*$.

Рассмотрим тривиализацию кокасательного расслоения с помощью левых сдвигов:

$$\Psi : G \times \mathfrak{g}^* \to T^*G, \quad \lambda = \Psi(g,p) = dL^*_{g^{-1}}(p) \in T^*_gG, \quad p \in \mathfrak{g}^* = T^*_{\mathrm{id}}G.$$

где $L_g : G \to G$ — левый сдвиг на элемент $g \in G$.

Гамильтониан H левоинвариантен, поэтому $H \in C^\omega(\mathfrak{g}^*)$. Гамильтоново векторное поле представляется в виде суммы *вертикальной* и *горизонтальной частей*[6]:

$$\begin{gathered} \vec{H}(\Psi(g,p)) = d_{(g,p)}\Psi(\vec{H}_{\mathrm{hor}}(g,p) + \vec{H}_{\mathrm{vert}}(p)), \\ \vec{H}_{\mathrm{hor}}(g,p) = dL_g d_p H, \qquad \vec{H}_{\mathrm{vert}}(p) = (\operatorname{ad}^* d_p H)p, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где $d_pH \in T^*_p\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ — дифференциал H в точке p.

Гамильтонова система $\dot\lambda = \vec{H}(\lambda)$ является треугольной (ее вертикальная часть не зависит от переменных состояния). Поэтому естественно рассматривать симметрии экспоненциального отображения, которые индуцируются симметриями вертикальной части гамильтоновой системы.

Получены достаточные условия существования продолжения симметрии вертикальной части гамильтоновой системы до симметрии экспоненциального отображения.

Теорема 1.1. *Пусть G есть связная группа Ли, $H : T^*G \to \mathbb{R}$ есть аналитический левоинвариантный гамильтониан, а оператор $\sigma^* : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ таков, что σ^* сохраняет гамильтониан H и выполнено одно из двух условий:*
(а) *$\sigma^*(\vec{H}_{\mathrm{vert}}) = \vec{H}_{\mathrm{vert}}$ и σ является автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$;*
(б) *$\sigma^*(\vec{H}_{\mathrm{vert}}) = -\vec{H}_{\mathrm{vert}}$, σ является антиавтоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и стабилизатор общего положения копприсоединенного представления связен и имеет размерность не более одного.*
Тогда пара диффеоморфизмов (s, S^{-1}) является симметрией экспоненциального отображения, где

$$s(p,t) = \begin{cases} (\sigma^* p, t), & \text{в случае (а)}, \\ (\sigma^* e^{t\vec{H}_{\mathrm{vert}}} p, t), & \text{в случае (б)}, \end{cases}$$

а $S : G \to G$ есть (анти)автоморфизм группы Ли такой, что $d_{\mathrm{id}}S = \sigma$.

В **главе 2** рассматривается серия римановых задач на группах собственных движений сферы (SO_3) и плоскости Лобачевского ($\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$). Под римановой задачей понимается задача поиска кратчайших левоинвариантной римановой метрики. Всякая левоинвариантная риманова метрика на трехмерном однородном

пространстве определяется тремя собственными значениями $I_1, I_2, I_3 > 0$. Рассматриваются римановы метрики с двумя совпадающими собственными значениями $I_1 = I_2$.

Другими словами, рассматриваются левоинвариантные римановы метрики на слабосимметрических[49] однородных пространствах

$$(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_2)/\mathrm{SO}_2, \qquad (\mathrm{SO}_3 \times \mathrm{SO}_2)/\mathrm{SO}_2,$$

где стабилизатор вложен в прямое произведение антидиагональным образом.

Получено полное решение рассматриваемой серии римановых задач, т.е. получен оптимальный синтез в виде параметризации геодезических, описания множества разреза и времени разреза.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\eta = \kappa\frac{I_1}{I_3} - 1$ есть параметр, измеряющий сплюснутость малых сфер рассматриваемой метрики, где $\kappa = \pm 1$ есть кривизна поверхности, группа собственных движений которой рассматривается. Заметим, что $\eta \in (-\infty, -1)$ для группы $\mathrm{PSL}_2(R)$, и $\eta \in (-1, +\infty)$ для группы SO_3. Оказывается, что перестройки топологического типа множества разреза (зависящего от параметра $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$) возникают в симметричных точках относительно точки -1. При стремлении параметра η к точке -1 с разных сторон в пределе получаются множества разреза для соответствующих субримановых задач на группах $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ и SO_3, соответственно.

Множество разреза допускает следующее геометрическое описание.

Теорема 2.1. *Множество разреза левоинвариантной римановой метрики на группах* SO_3 *или* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ *с собственными значениями* $I_1 = I_2$, $I_3 > 0$ *есть:*
(1) *множество P центральных симметрий сферы/плоскости Лобачевского, если* $2I_1 \geqslant I_3$, *что эквивалетно* $\eta \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$;
(2) *объединение множества P и отрезка J_η, состоящего из поворотов сферы/плоскости Лобачевского вокруг фиксированной точки $x_0 \in X$ на углы $\pm\varphi$, где $\varphi \in [2\kappa\pi(1+\eta), \pi]$, если $2I_1 < I_3$, что эквивалентно $\eta \in (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \{-1\}$.*

Замечание. Множество центральных симметрий плоскости Лобачевского гомеоморфно плоскости, а множество центральных симметрий сферы — проективной плоскости. Поэтому $P \backsimeq \mathbb{R}^2$ для случая группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, и $P \backsimeq \mathbb{R}P^2$ в случае группы SO_3.

Замечание. В случае групы SO_3 римановы геодезические можно интерпретировать как траектории свободного движения закрепленного в точке твердого тела с моментами инерции I_1, I_2, I_3. Такое твердое тело имеется, если из отрезков длин I_1, I_2, I_3 можно составить треугольник[52]. Дополнительная компонента множества разреза J_η возникает, когда такого твердого тела не существует.

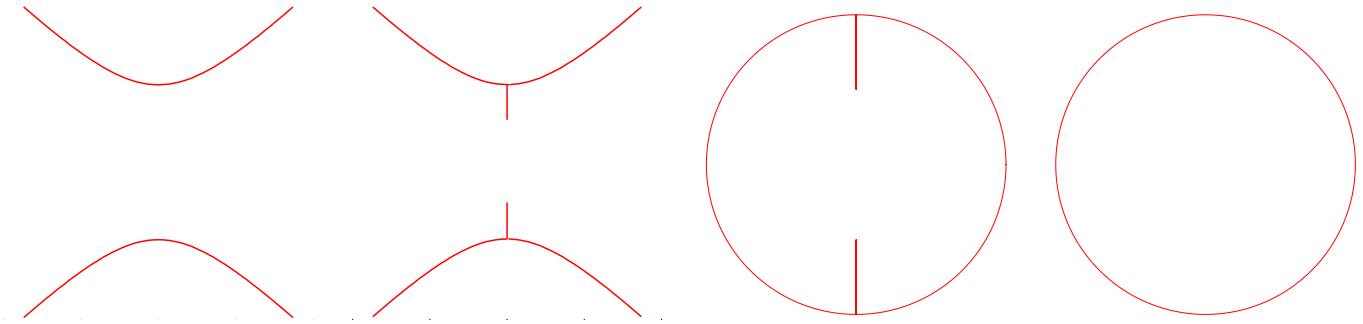
[52] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. М.: Физматлит (2004).

Для наглядного представления множеств разреза рассмотрим следующие группы, двулистно накрывающие группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ и SO_3, соответственно:

$$\mathrm{SU}_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \,\middle|\, z, w \in \mathbb{C},\ z\bar{z} - w\bar{w} = 1 \right\},$$

$$\mathrm{SU}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \,\middle|\, z, w \in \mathbb{C},\ z\bar{z} + w\bar{w} = 1 \right\}.$$

Пусть $z = q_0 + iq_3$, а $w = q_1 + iq_2$. Тогда в трехмерном пространстве с координатами (q_1, q_2, q_3) группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ будет изображаться областью $q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 \leqslant 1$, а группа SO_3 — областью $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \leqslant 1$. При этом противоположные точки на границах этих областей должны быть отождествлены. Множество разреза, зависящее от параметра η, является поверхностью вращения (вокруг вертикальной оси) фигур, показанных на рисунке 2.1. Единичный элемент группы находится в центре.



$\eta \leqslant -\frac{3}{2}$ $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ | $-\frac{3}{2} < \eta < -1$ $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ | $-1 < \eta < -\frac{1}{2}$ SO_3 | $-\frac{1}{2} \leqslant \eta$ SO_3

Рис. 2.1. Множество разреза

На рисунках 2.2 и 2.3 изображены эквидистантные волновые фронты, выпущенные из единицы группы, для случая $2I_1 < I_3$. Волновые фронты имеют особенности на множестве разреза.

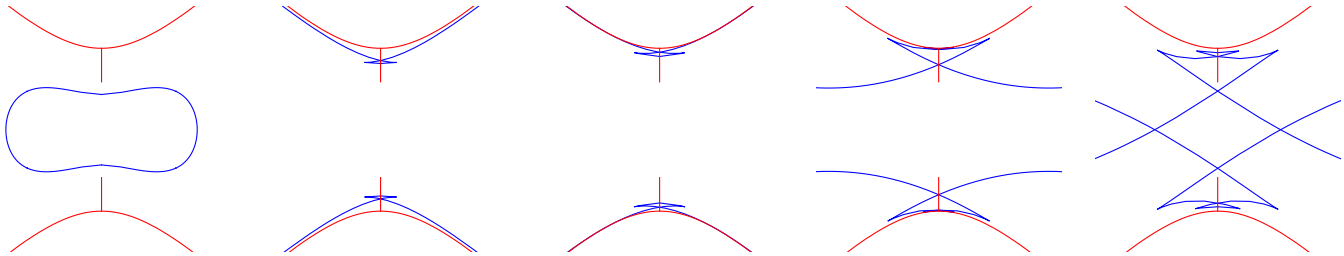


Рис. 2.2. Эквидистантный волновой фронт для группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Каждая геодезическая, выходящая из единицы группы, задается своим начальным импульсом $p \in \mathfrak{g}^*$ и представляется в виде произведения двух однопараметрических подгрупп:

$$q(t) = \exp\left(\frac{tp}{I_1}\right) \exp\left(\frac{t\eta p_3 e_3}{I_1}\right), \tag{2.2}$$

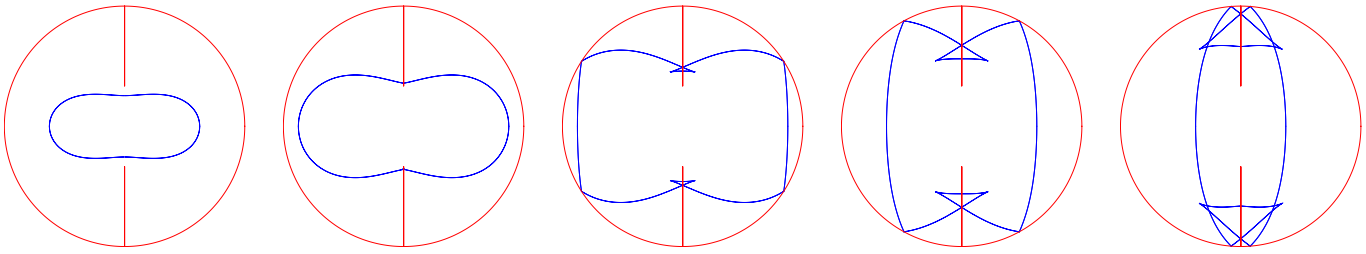


Рис. 2.3. Эквидистантный волновой фронт для группы SO_3.

где $e_1, e_2, e_3 \in \mathfrak{g}$ — собственные векторы метрики с собственными значениями $I_1 = I_2, I_3$, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ отождествляется с $\mathfrak{g}^*$ с помощью формы Киллинга Kil, $p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 \in \mathfrak{g}^*$, а $\exp : \mathfrak{g} \to G$ есть экспоненциальное отображения из алгебры Ли в группу Ли.

Для описания времени разреза как функции начального импульса геодезической введем следующие обозначения. Пусть $|p| = \sqrt{|\operatorname{Kil}(p)|}$. Пусть $t_0(p)$ — первый положительный корень следующего уравнения (зависящего от параметров η и p):

$$C(t,p)\cos\left(\frac{t\eta p_3}{2I_1}\right) - S(t,p)\sin\left(\frac{t\eta p_3}{2I_1}\right) = 0,$$

где

$$\begin{array}{lllllll} C(t,p) & = & \cos\left(\frac{t|p|}{2I_1}\right), & S(t,p) & = & \frac{p_3}{|p|}\sin\left(\frac{t|p|}{2I_1}\right), & \text{если} \quad \operatorname{Kil}(p) < 0, \\ C(t,p) & = & \operatorname{ch}\left(\frac{t|p|}{2I_1}\right), & S(t,p) & = & \frac{p_3}{|p|}\operatorname{sh}\left(\frac{t|p|}{2I_1}\right), & \text{если} \quad \operatorname{Kil}(p) > 0, \\ C(t,p) & = & 1, & S(t,p) & = & \frac{tp_3}{2I_1}, & \text{если} \quad \operatorname{Kil}(p) = 0. \end{array}$$

Если у такого уравнения нет положительных корней, то положим $t_0(p) = +\infty$. Заметим, что если $G = \mathrm{SO}_3$, то форма Киллинга отрицательно определена. Если $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, то форма Киллинга имеет сигнатуру $(++-)$.

Пусть $\mathcal{K} = \{p \in \mathfrak{g}^* \mid p_3^2 - K(\eta)(p_1^2 + p_2^2) = 0\} \subset \mathfrak{g}^*$ конус, где

$$K(\eta) = \begin{cases} \frac{9}{9-4\eta^2}, & \text{если} \quad \eta < -1, \\ \frac{1}{4\eta^2-1}, & \text{если} \quad \eta > -1. \end{cases}$$

Теорема 2.2. (1) *При $2I_1 \geqslant I_3$ время разреза равно $t_0(p)$.*
(2) *При $2I_1 < I_3$ если p лежит внутри конуса $\mathcal{K}$, то время разреза равно $\frac{2I_1\pi}{|p|}$, а если p лежит вне конуса $\mathcal{K}$, то время разреза равно $t_0(p)$. На самом конусе $\mathcal{K}$ эти значения совпадают.*
(3) *Геодезическая с начальным импульсом p не имеет точек разреза только в случае $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ и $p_3 = 0$ (тогда $t_0(p) = +\infty$).*

На группе G имеется следующая субриманова структура. Рассмотрим плоскость $\operatorname{span}\{e_1, e_2\} \subset \mathfrak{g}$ и ограничение формы Киллинга на нее. С помощью левых сдвигов получим распределение двумерных плоскостей в касательном расслоении TG и квадратичную форму на нем. Задача поиска субримановых кратчайших для группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ была решена В. Н. Берестовским и И. А. Зубаревой[24,25].

Для группы SO_3 ответ получен У. Боскаином и Ф. Росси[26], а полное доказательство приведено в работе В. Н. Берестовского и И. А. Зубаревой[23]. Заметим, что расслоение единичных касательных векторов на X является конфигурационным пространством мобильного робота. Поэтому кратчайшие субримановой метрики моделируют энергооптимальное движение мобильного робота, имеющего две степени свободы.

Оказывается, что риманова задача аппроксимирует субриманову при $I_3 \to +\infty$ (эквивалентно $\eta \to -1$) в следующем смысле.

Теорема 2.3. *Параметризация геодезических, сопряженное время, множество сопряженных точек, время разреза и замыкание множества разреза в субримановых задачах на* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ *и* SO_3 *получаются из тех же объектов римановой задачи переходом к пределу* $\eta \to -1-0$ *и* $\eta \to -1+0$, *соответственно.*

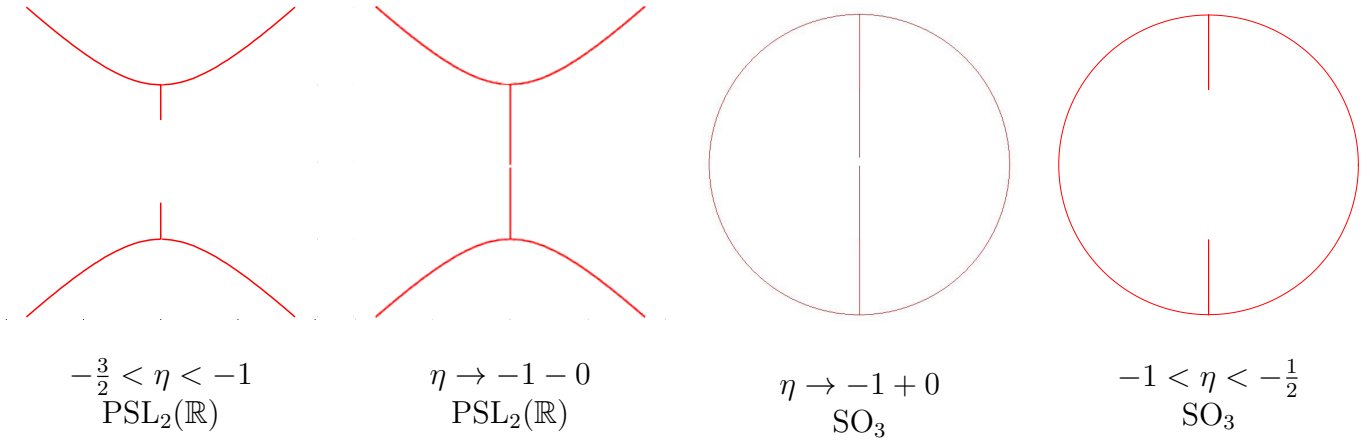


Рис. 2.4. Множества разреза в римановом и субримановом случаях.

При $\eta \to -1$ отрезки J_η сходятся к окружности всех поворотов вокруг фиксированной точки пространства X. Эта окружность является «локальной» компонентой множества разреза субримановой метрики. «Глобальная» компонента множества разреза субримановой метрики остается той же, что и в римановом случае (множество центральных симметрий P). Множества разреза в римановом и субримановом случаях представлены на рисунке 2.4 (поверхности вращения).

Глава 3 посвящена доказательству теорем 2.1–2.3 в части группы SO_3. Здесь же получено время разреза и множество разреза для аналогичной римановой задачи на группе SU_2. Напомним, что группа SU_2, снабженная осесимметричной левоинвариантной римановой метрикой, называется *сферой Берже.*

Теорема 3.6. *Множество разреза для левоинвариантной римановой задачи на группе* SU_2 *(с двумя совпадающими собственными значениями метрики) является*
(1) *(гипотеза М. Берже*[41]*) отрезком*

$$T_\eta := \{-\cos(\pi\eta\bar{p}_3) - \sin(\pi\eta\bar{p}_3)k \in \mathbb{H} \mid \bar{p}_3 \in [-1,1]\}$$

при $-1 < \eta \leqslant 0$ *(если* $\eta = 0$*, то отрезок* T_η *становится точкой* $\{-1\}$*),*
(2) *(Т. Сакаи*[51]*) диском*

$$D_\eta := \{q_0(p, \tau_3(\bar{p}_3)) + q_1(p, \tau_3(\bar{p}_3))i + q_2(p, \tau_3(\bar{p}_3))j \in \mathbb{H} \mid p \in \mathcal{C}\},$$

ограниченным окружностью сопряженных точек

$$S_\eta := \{\cos \tau_{\text{conj}}(0) + \sin \tau_{\text{conj}}(0)(i \cos \varphi + j \sin \varphi) \in \mathbb{H} \mid \varphi \in [0, 2\pi]\},$$

при $\eta > 0$.

Обозначим через $g(I_1, I_2, I_3)$ левоинвариантную риманову метрику с собственными значениями I_1, I_2, I_3 на группе G, а через $\operatorname{diam}_{g(I_1,I_2,I_3)} G$ ее диаметр. Диаметр, наряду с другими геометрическими характеристиками многообразия (кривизной, объемом), доставляет оценки и асимптотику ненулевых элементов спектра оператора Лапласа-Бельтрами[53], требуемого для изучения уравнения теплопроводности, уравнения Шредингера или волнового уравнения. Полученые результаты о времени разреза позволили вычислить диаметр рассматриваемых римановых метрик на группах SO_3 и SU_2.

Теоремы 3.7, 3.8.

$$\operatorname{diam}_{g(I_1,I_1,I_3)} \mathrm{SO}_3 = \begin{cases} 2\pi\sqrt{I_1}\sqrt{1+\frac{1}{4\eta}}, & \text{если } \eta \in (-1, -\frac{1}{2}), \\ \pi\sqrt{I_3}, & \text{если } \eta \in [-\frac{1}{2}, 0], \\ \pi\sqrt{I_1}, & \text{если } \eta \in (0, +\infty). \end{cases}$$

$$\operatorname{diam}_{g(I_1,I_1,I_3)} \mathrm{SU}_2 = \begin{cases} 2\pi\sqrt{I_1}, & \text{если } \eta \in (-1, 0], \\ 2\pi\sqrt{I_3}, & \text{если } \eta \in (0, 1], \\ \frac{\pi I_1}{\sqrt{I_1 - I_3}}, & \text{если } \eta \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Получен пример трехмерной сферы, диаметр которой не реализуется расстояние между парой антиподальных точек, т.е. дан отрицательный ответ на вопрос Ю. Г. Никонорова[54]. В качестве такой сферы можно взять сферу Берже при $\eta > 1$ (эквивалентно $2I_3 < I_1$).

Глава 4 содержит детали доказательства теорем 2.1–2.3 для группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Попутно получены аналогичные результаты для группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Теорема 4.3. *Множество разреза в левоинвариантной римановой задаче на группе* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$
(1) *при* $\eta \leqslant -\frac{3}{2}$ *является плоскостью*

$$H := \{q \in \mathrm{SU}_{1,1} \mid q_3 = 0\},$$

[53] E. A. Lauret. The smallest Laplace eigenvalue of homogeneous 3-spheres // Bull. London Math. Soc. 51, 1 (2019) pp. 49–69.

[54] Ю. Г. Никоноров. О геодезическом диаметре поверхностей с ин-волютивной изометрией // Труды Рубцовского индустриального института. 9 (2001) с. 62–65.

которая при проекции на группу собственных движений плоскости Лобачевского переходит в плоскость гиперболических движений, задающихся пучками сверхпараллельных прямых, симметричных относительно диаметра круга модели Пуанкаре;
(2) *при* $\eta > -\frac{3}{2}$ *есть стратифицированное многообразие*

$$H \cup T_\eta,$$

где $T_\eta = \{q = \pm(\cos(2\pi\bar{p}_3) + \sin(2\pi\bar{p}_3)k) \mid \bar{p}_3 \in [1, -\frac{2}{\eta}]\}$ *— отрезок, проектирующийся в отрезок, состоящий из некоторых поворотов вокруг центра модели Пуанкаре в круге.*

Полученные результаты позволили вычислить радиус инъективности рассматриваемых метрик.

Следствие 4.4. *Радиус инъективности симметричной левоинваринтной метрики на группе* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ *равен*
(1) $\pi\sqrt{I_1}\sqrt{-\frac{1}{1+\eta}}$ *при* $\eta \leqslant -2$;
(2) $\pi\sqrt{I_1}\sqrt{-\frac{\eta+4}{\eta}}$ *при* $-2 < \eta \leqslant \frac{-3-\sqrt{73}}{8}$;
(3) $2\pi\sqrt{I_1}\sqrt{-(1+\eta)}$ *при* $\frac{-3-\sqrt{73}}{8} < \eta < -1$.

Благодарности. Автор глубоко признателен своему научному руководителю Ю. Л. Сачкову за постоянное и пристальное внимание к работе.

Автор благодарен А.А. Аграчеву, А.А. Ардентову, В.Н. Берестовскому, И.Ю. Бесчастному, Э.Лаурету, Л.В. Локуциевскому, А.П. Маштакову, Ю.Г. Никонорову за полезные обсуждения.

Публикации автора по теме диссертации

[1] A. V. Podobryaev, Yu. L. Sachkov, "Cut locus of a left invariant Riemannian metric on SO(3) in the axisymmetric case", *Journal of Geometry and Physics*, **110** (2016), 436–453.

[2] А. В. Подобряев, Ю. Л. Сачков, "Левоинвариантные симметричные римановы задачи на группах собственных движений плоскости Лобачевского и сферы", *Доклады Академии Наук*, **473**:6 (2017), 640–642.

[3] A. V. Podobryaev, Yu. L. Sachkov, "Symmetric Riemannian problem on the group of proper isometries of hyperbolic plane", *Journal of Dynamical and Control Systems*, **24**:3 (2018), 391–423.

[4] А. В. Подобряев, "Диаметр сферы Берже", *Математические заметки*, **103**:5 (2018), 779–784.

[5] A. V. Podobryaev, "Antipodal Points and Diameter of a Sphere", *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, **14**:4 (2018), 579–581.

[6] A. V. Podobryaev, "Symmetric extremal trajectories in left-invariant optimal control problems", *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, **15**:4 (2019).

[7] А. В. Подобряев, "Симметрии в левоинвариантных задачах оптимального управления", *Математический сборник*, **211**:2 (2019), arXiv: 1807.09145.

Подписано в печать 21.11.2019 г.
Тираж 100 экз.
Отпечатано в ИПС им. А. К. Айламазяна РАН
152021, Ярославская область, Переславский район, с. Веськово, ул. Петра Первого, д.4 «а».