ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА НА ДИССЕРТАЦИЮ Д.В. МИЛЛИОНЩИКОВА

"КОГОМОЛОГИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ГРАДУИРОВАННЫХ АЛГЕБР ЛИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология

Представленная диссертационная работа Д.В. Миллионщикова, посвящена положительно градуированным алгебрам Ли и их приложениям в геометрии и топологии. Заметим, что такие алгебры Ли играют важную роль в различных разделах математики, кроме собственно алгебры, геометрии и топологии: в частности, в диссертации в терминах полученной классификации алгебр специального типа описаны характеристические алгебры некоторых возникающих в дифференциальной геометрии интегрируемых систем.

Конечномерные положительно градуированные алгебры Ли являются нильпотентными. Для геометров нильпотентные алгебры Ли, допускающие рациональные структурные константы, интересны и важны тем, что с их помощью строится важный класс многообразий, называемых нильмногообразиями. Они являются фактор-пространствами G/Γ соответствующих односвязных нильпотентных групп Ли G по кокомпактным решеткам Γ. С помощью таких многообразий получены ответы на многие вопросы геометрии и топологии, в основном за счет примеров с нетривиальными свойствами (например, известный пример Терстона симплектического, но некэлерова многообразия). В последние десятилетия инвариантная геометрия на нильмногообразиях продолжает интенсивно развиваться: изучаются различные левоинвариантные римановы метрики,

симплектические, комплексные и другие геометрические структуры, например, солитоны Риччи на нильмногообразиях. В такой ситуации геометрическая задача может быть переформулирована в терминах соответствующей алгебры Ли и она решается алгебраическими методами. Как известно, когомологии де Рама $H^*(G/\Gamma, \mathbb{R})$ нильмногообразия G/Γ могут быть вычислены как когомологии $H^*(\mathfrak{g})$ соответствующей нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Некоторые нильмногообразия допускают левоинвариантную симплектическую структуру, некоторые обладают левоинвариантной комплексной структурой, но ни одно нильмногообразие (за исключением тора) не допускает кэлеровой структуры. Существует несколько способов доказать невозможность существования кэлеровой структуры на нильмногообразии, но наиболее простой состоит в предъявлении нетривиального произведения Масси в когомологиях. Преимущество данного метода заключается в том, что нетривиальные произведения Масси являются устойчивыми (в естественном смысле) относительно симплектических раздутий, что позволяет сильно расширить запас примеров неформальных симплектических многообразий, в том числе и односвязных. В совместной работе И.К. Бабенко и оппонента было построено семейство нильмногообразий, которые использовались для построения односвязных примеров симплектических неформальных многообразий. Эти многообразия являются конечномерными факторами положительной части W^+ алгебры Витта. Нетривиальные произведения Масси легко находятся уже во вторых когомологиях $H^2(W^+)$, что сразу доказывает неформальность всех нильмногообразий данного семейства. Из теоремы Гончаровой следует, что умножение в $H^*(W^+)$ тривиально, а значит можно рассматривать разнообразные высшие произведения Масси. С другой стороны в 1978 г. в работе Бухштабера и Шокурова было показано, что универсальная обертывающая положительной части алгебры Витта изоморфна тензорному произведению алгебра Ландвебера–Новикова и поля рациональных чисел. Бухштабер в 1978 г. выдвинул

очень интересную гипотезу, что все когомологии $H^*(W^+)$ могут быть последовательно порождены при помощи нетривиальных произведений Масси, в которых участвуют только два базисных одномерных коцикла. Частные результаты, касающиеся этой гипотезы, были получены Ретахом, Фейгиным и Фуксом в 1988 г. Гипотеза Бухштабера доказывается в данной диссертации. Важность данного результата обуславливается и уже отмеченной связью между W^+ и алгеброй Ландвебера–Новикова S в теории комплексных кобордизмах.

Заметим, что одна и та же алгебра Ли может быть снабжена разными градуировками, в частности, размерности однородных компонент могут быть разными у разных градуировок. Среди всех классов эквивалентности градуировок выделяется один класс (если он существует), который называется естественной градуировкой. Про-нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется естественно градуируемой, если она изоморфна своей ассоциированной градуированной алгебре Ли $\mathrm{gr}\mathfrak{g}$ относительно фильтрации идеалами нижнего центрального ряда. Соответствующая градуировка называется естественной градуировкой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Конечномерные естественно градуированные алгебры, следуя Громову, называются алгебрами Карно и являются одними из основных объектов субримановой геометрии и геометрической теории оптимального управления.

Выделим следующие основные результаты диссертации:

1) Найдены явные формулы для серии $S_{2,q}(t)$ особых векторов модулей Верма над алгеброй Вирасоро, которые дают возможность вычислять когомологии положительной части алгебры Витта W^+ с коэффициентами в произвольном модуле над W^+. С их помощью доказана уже упомянутая гипотеза Бухштабера о том, что когомологии положительной части алгебры Витта порождаются итерированными нетривиальными высшими произведениями Масси двух одномерных классов когомологий.

2) Классифицированы положительно градуированные алгебры Ли

$\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$, удовлетворяющие условиям

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}, \dim \mathfrak{g}_i + \dim \mathfrak{g}_{i+1} \leq 3, i \in \mathbb{N}.$$

Алгебры Ли такого класса не могут содержать собственные идеалы бесконечной коразмерности, тем самым эта задача может быть рассмотрена как важный шаг в направлении программы Зельманова и Шалева по классификации узких положительно градуированных алгебр Ли.

Доказано, что две алгебры Ли из полученного списка бесконечномерных естественно градуированных алгебр Ли изоморфны характеристическим алгебрам Ли уравнений синус-Гордона и Цицейки соответственно.

3) Для компактного солвмногообразия G/Γ с вполне разрешимой группой Ли G доказано, что его когомологии Морса-Новикова (когомологии комплекса дифференциальных форм с дифференциалом $d + \omega\wedge$) нетривиальны тогда и только тогда, когда когомологический класс формы ω принадлежит некоторому конечному подмножеству в $H^1(G/\Gamma, \mathbb{C})$ (множеству подскоков когомологий Морса-Новикова).

Также в диссертации найдены когомологии нескольких важных примеров узких положительно градуированных бесконечномерных алгебр Ли из классификационного списка Зельманова-Шалева-Фиаловски алгебр Ли максимального класса. В качестве приложений явно найдены уравнения, задающие многообразие алгебр Ли максимального класса (многообразие филиформных алгебр Ли), изучено пространство модулей фильтрованных деформаций конечномерного фактора $W^+/(W^+)^n$ положительной части W^+ алгебры Витта.

Диссертация написана на высоком уровне.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Основные положения диссертации содержатся в 18 опубликованных работах автора в ведущих российских и зарубежных журналах, содержащихся в списке рекомендованных ВАК изданий. Все полученные в диссертации результаты докладывались на многих престижных международных конференциях и научных семинарах ведущих мировых мате-

матических центров в России и за рубежом и прошли апробацию. Все результаты, полученные автором, являются новыми, получены автором самостоятельно и снабжены подробными доказательствами. Результаты диссертации могут найти применения в исследованиях по геометрии, топологии, теории групп и алгебр Ли в ведущих мировых научных центрах по математике: МИАН им. В.А. Стеклова РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова, СПбГУ, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, НГУ и др.

Диссертация Д.В. Миллионщикова «Когомологии положительно градуированных алгебр Ли и их приложения» является завершенным научным исследованием и полностью удовлетворяет всем требованиям ВАК и паспорту специальности 01.01.04 – геометрия и топология, а ее автор, Дмитрий Владимирович Миллионщиков, безусловно заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук.

08 сентября 2019 г.

Главный научный сотрудник,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
тел.: (+7-383)-329-75-91
факс: (+7-383)-333-25-98
e-mail: taimanov@math.nsc.ru

Академик РАН, профессор,
доктор физико-математических наук,
специальность 01.01.04 – геометрия и топология И.А. Тайманов

Подпись И.А. Тайманова заверяю
зав. орготделом
ИМ СО РАН Н.З. Киндалева