ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Д.В.Миллионщикова

КОГОМОЛОГИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ГРАДУИРОВАННЫХ АЛГЕБР ЛИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности
01.01.04 - геометрия и топология

В диссертации Д.В.Миллионщикова рассмотрен широкий круг вопросов теории когомологий узких положительно градуированных алгебр Ли в неразрывной связи с задачами топологии (теории ниль- и солвмногообразий), теории интегрируемых систем и теории деформаций алгебр Ли. Диссертационная работа является новым этапом в развитии теории и приложений алгебр Ли конечного роста.

В 1968 г. произошло одно из самых заметных событий в теории алгебр Ли – была опубликована найденная В.Г.Кацем классификация простых бесконечномерных алгебр Ли конечного роста, то есть таких градуированных алгебр Ли, у которых размерность однородного подпространства растет не быстрее степени его номера. Эта классификация является непосредственным обобщением классификации Картана–Вейля простых комплексных алгебр Ли. Она привела к многочисленным приложениям в теоретической физике, теории интегрируемых систем, комбинаторике, теории когомологий алгебр Ли, теории представлений.

В свою очередь понятие роста восходит к понятию размерности Гельфанда–Кириллова, введенному этими авторами в 1966 г., и позволившему им высказать, возможно, первую классификационную гипотезу для бесконечномерных алгебр Ли: тело отношений универсальной обертывающей алгебры определяется с точностью до изоморфизма двумя целыми числами: размерностями Гельфанда–Кириллова самого тела и его центра. В некоторых случаях эта гипотеза была доказана в той же работе, что характерно – в первую очередь для нильпотентных алгебр Ли, которые являются одним из основных объектов и данной диссертации.

В работах 1997, 1999 гг. Зельманов и Шалев поставили задачу классификации положительно градуированных алгебр Ли. При этом естественно возникли "узкие" алгебры Ли, то есть положительно градуированные алгебры Ли, у которых однородные подпространства не более, чем двумерны. В частности, это алгебры роста 1. Эти алгебры Ли являются основным предметом изучения в диссертации. При этом автор занимается не только классификационной задачей: большое внимание уделено приложениям к задачам топологии, теории интегрируемых систем и теории деформаций алгебр Ли. Следует отметить, что рассмотренный в диссертации класс алгебр Ли в большей мере ориентирован на приложения в топологии, чем, скажем, алгебры Каца–Муди.

Таким образом предмет диссертации характеризуется прочной связью с классическими задачами теории бесконечномерных алгебр Ли, новизной постановок

задач, методов и приложений. Актуальность исследований, представленных в диссертации Д.В.Миллионщикова, не вызывает сомнений.

Диссертация состоит из введения, восьми глав, двух приложений и заключения.

Во введении дан обзор ранее известных результатов, формулируются основные результаты диссертации, обосновывается актуальность темы диссертации.

В первой главе приводятся необходимые предварительные сведения, определения и основные примеры, среди которых, в частности, положительная часть алгебры Витта, первая и вторая алгебры Вернь. Эти примеры не случайны: они являются результатом классификации Зельманова– Шалева положительно градуированных алгебр максимального класса.

Во второй главе вычисляются когомологии первой и второй алгебр Вернь, найдены базисные коциклы и выведены формулы для их произведений. Вычислены производящие ряды для чисел Бетти, ответ дан в форме бесконечных произведений. С помощью спектральной последовательности Фейгина–Фукса вычислены когомологии первой алгебры Вернь и вторые когомологии факторов положительной части алгебры Витта с коэффициентами в присоединенном представлении. Поясним, что среди этих когомологий находятся те, которые управляют деформациями соответствующих алгебр Ли. К этому вопросу автор обращается в главе 6.

В третьей главе дается главное топологическое приложение теории когомологий положительно градуированных алгебр Ли. В ней определяются когомологии Морса-Новикова гладкого солвмногообразия (фактора разрешимой группы Ли по ее кокомпактной решетке) и дается критерий их нетривиальности (теорема 3.3.14). Эти результаты основаны на теореме Хаттори об изоморфизме когомологий солвмногообразия и когомологий алгебры Ли соответствующей разрешимой группы с вещественными коэффициентами. Вариантами этой теоремы являются теоремы Номидзу (для нильпотентных групп и нильмногообразий) и Мостова (для когомологий с коэффициентами в модуле).

Четвертая глава посвящена классификации узких по Зельманову и Шалеву естественно градуированных алгебр Ли ширины $3/2$ и является одной из ключевых глав диссертации. Напомним, узкими в работах Зельманова и Шалева названы положительно градуированные алгебры Ли ширины не более 2. Конечномерные алгебры Ли этого класса называются алгебрами Карно. Под названием однородных алгебр Ли они исследовались в работах Вершика и Гершковича. Алгебры Карно, связанные с первой алгеброй Вернь, называются филиформными алгебрами. Классификация узких алгебр не известна, как не известны и общие подходы к решению этой проблемы. Диссертанту удалось продвинуться в решении этой проблемы и классифицировать естественно градуированные алгебры Ли ширины $3/2$. Две основные теоремы этой главы и диссертации в целом – это теорема 4.5.1, дающая классификацию алгебр Карно, и теорема 4.6.1, дающая классификацию бесконечномерных алгебр Ли ширины $3/2$. В первом случае приведена классификационная таблица, содержащая, в частности, филиформные алгебры, и некоторые конечномерные алгебры, связанные

с алгебрами полиномиальных петель над $\mathfrak{sl}(2)$. Во втором случае классификационный список содержит алгебры полиномиальных петель над $\mathfrak{sl}(2)$, первую алгебру Вернь и некоторые их центральные расширения.

Из результатов диссертации следует, что задача классификации N-градуированных алгебр Ли медленного роста является более сложной, чем задача классификации простых Z-градуированных алгебр Ли конечного роста. Например, список Каца содержит счетное число различных алгебр Ли, а список естественно градуированных алгебр Ли, порожденных двумя образующими, уже содержит несчетное семейство попарно неизоморфных алгебр Ли медленного линейного роста.

В главе 5 исследуются характеристические алгебры Ли некоторых гиперболических уравнений в частных производных и их связь с узкими естественно градуированными алгебрами Ли. Характеристической алгеброй гиперболического уравнения в частных производных с двумя переменными называется алгебра Ли, порожденная двумя полными дифференцированиями по этим переменным (или дифференцированиями в силу уравнения). Понятие характеристической алгебры уравнения введено А.Б.Шабатом в 1980 г. и широко применялось к исследованию интегрируемости и классификационным задачам теории интегрируемых систем (Жибер, Лезнов, Хабибуллин и др.). Существует три интегрируемых гиперболических уравнения с двумя переменными – это уравнения Лиувилля, sin-Гордон и Цицейки. Характеристическая алгебра первого из них – это двумерная разрешимая алгебра Ли (она же алгебра Ли группы линейных преобразований прямой). Характеристические алгебры двух остальных вычислены Д.В.Миллионщиковым и представлены в 5-й главе диссертации. Основными результатами являются теорема 5.2.1, в которой утверждается, что характеристическая алгебра Ли уравнения sin-Гордон изоморфна неотрицательной части алгебры петель со значениями в $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$, а также теорема 5.3.1, утверждающая, что характеристическая алгебра Ли уравнения Цицейки изоморфна неотрицательной части скрученной алгебры петель со значениями в $\mathfrak{sl}(3;\mathbb{C})$. Показано, также, что эти алгебры Ли являются узкими, а их коммутанты – узкими и естественно градуированными. Ранее вычисление характеристических алгебр уравнений sin-Гордон и Цицейки предпринималось уфимской школой (Жибер, Хабибуллин, Муртазина, Сакиева), но связь с алгебрами петель была ими упущена. Полученный результат можно интерпретировать как неожиданную связь между интегрируемостью уравнения и ростом его характеристической алгебры.

Глава 6 посвящена теории деформаций положительно градуированных алгебр Ли. Известно, что они управляются вторыми когомологиями алгебры Ли с коэффициентами в присоединенном представлении (для некоторых алгебр вычисление этих когомологий проделано в главе 2 диссертации). В главе 6, в частности, рассматриваются фильтрованные деформации первой алгебры Вернь. Формальные ряды для этих деформаций написаны ею же. Теорема 6.2.9 диссертации утверждает, что ряд определяет деформацию первой алгебры Вернь

тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют бесконечной системе квадратичных уравнений. Указана явная форма этих уравнений. Полученные результаты применяются для описания аффинного многообразия филиформных алгебр Ли данной размерности. Полученное описание является наиболее интересным известным мне геометрическим приложением теории деформаций алгебр Ли. В главе 6 рассматриваются деформации фактор-алгебры положительной части алгебры Витта по идеалу ее нижнего центрального ряда. Теорема 6.4.1 утверждает, что для факторов по достаточно далеким членам центрального ряда существует биекция между пространством модулей фильтрованных деформаций этой алгебры Ли и взвешенным проективным пространством размерности 4.

В главе 7 обосновываются сложные технические методы подсчета когомологий положительной части алгебры Витта с коэффициентами в произвольном модуле. Далее, в главе 8, эти методы применяются в доказательстве гипотезы Бухштабера. Один из результатов главы 7 относится к числу основных, вынесенных на защиту – это явная формула для особых векторов одной из серий модулей Верма над алгеброй Вирасоро. Этот результат важен как по причине того, что в задаче о нахождении явных формул для особых векторов, поставленной Фейгиным и Фуксом, давно не было продвижений, так и потому, что он существенно упрощает доказательство свойств свободной резольвенты Роча-Кариди-Валлаха-Фейгина-Фукса.

Глава 8 посвящена доказательству гипотезы В.М.Бухштабера что алгебра когомологий неотрицательной части алгебры Витта порождается при помощи итерированных нетривиальных высших произведений Масси двумя базисными 1-коциклами. Доказательство гипотезы (см. теорему 8.3.1) – один из основных результатов диссертации. Используется подход Бабенко-Тайманова к определению произведений Масси и техника Ретаха, Фейгина и Фукса вычисления когомологий алгебры Ли неотрицательной части алгебры Витта с коэффициентами в ее градуированном ленточном модуле. Важную роль в доказательстве играет построенный автором градуированный модуль (ранее неизвестный специалистам) и явные формулы для дифференциалов резольвенты Роча-Кариди-Валлаха-Фейгина-Фукса.

В приложении А собраны разнообразные таблицы, необходимые для работы с диссертацией. В частности, классификационный список, полученный в главе 4 (базисы и структурные константы всех алгебр Карно ширины $3/2$, разбитые на группы), приведен в параграфе А.1. Отметим, что в тексте 4-й главы автор неточно ссылается на приложения А.1 и А.2, как на приложения 1 и 2 соответственно, что создает некоторые неудобства.

В приложении В дано доказательство формулы Бенуа–Сент-Обана для особых векторов; ее полное доказательство непросто извлечь из известных ссылок. Эта формула играет существенную роль в доказательстве гипотезы Бухштабера.

В заключении еще раз перечислены основные результаты диссертации и кратко обсуждаются возможные направления продолжения исследований, нерешенные вопросы и задачи.

В диссертации имеются в небольшом количестве мелкие дефекты, в том числе опечатки и одна неудачная внутренняя ссылка, которые никак не влияют на общую положительную оценку работы.

В целом в диссертации выделен и исследован класс узких по Зельманову–Шалеву положительно градуированных алгебр Ли, а именно алгебр Ли ширины 3/2, для которых автору удалось дать эффективное решение задачи классификации, показать значение этого класса алгебр в теории интегрируемых гиперболических уравнений с двумя переменными и одной неизвестной, дать многочисленные приложения к теории ниль- и солвмногообразий, а также к теории деформаций алгебр Ли. Работа посвящена актуальным проблемам, существующим в этих областях. Ее характерной особенностью является единство алгебраических и топологических постановок задач. По ширине охвата материала и разнообразию поставленных задач, а также в связи с решением давно стоящих проблем, таких как гипотеза Бухштабера, работу можно характеризовать как новый этап в теории бесконечномерных градуированных алгебр Ли, а ее автора как эксперта в данной области.

Основные результаты диссертации своевременно и полно опубликованы и многократно докладывались на заседаниях ведущих научно-исследовательских семинаров страны и международных конференциях. Шестнадцать из восемнадцати статей, в которых изложены основные результаты диссертации, написаны Д.В.Миллионщиковым без соавторов. Изложение материала четкое. Доказательства основных результатов достаточно полные. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в научно-исследовательских институтах и высших учебных заведениях, в том числе в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Физическом институте им. П.Н.Лебедева РАН, МГУ им. М.В.Ломоносова, СПбГУ, НГУ и других высших учебных заведениях и научных центрах.

Считаю, что диссертационная работа "Когомологии положительно градуированных алгебр Ли и их приложения" полностью отвечает требованиям, предъявляемым ВАК к диссертациям, представленным на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология, а её автор — Дмитрий Владимирович Миллионщиков безусловно заслуживает присуждения степени доктора физико-математических наук.

Ведущий научный сотрудник
Отдела геометрии и топологии
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН,
д.ф.-м.н. по специальности 01.01.04 О.К.Шейнман
e-mail: sheinman@mi-ras.ru
телефон: +7(916)5912196

17 сентября 2019 года.

Подпись Шейнмана О.К. заверяю
Гл. специалист отдела кадров МИАН