"УТВЕРЖДАЮ"

Директор ИММ УрО РАН
д.ф.-м.н., член-корреспондент РАН

_____ Н.Ю. Лукоянов

"06" октября 2019 г.

ОТЗЫВ
ведущей организации – Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук» (ИММ УрО РАН)

на диссертацию Миллионщикова Дмитрия Владимировича

«Когомологии положительно градуированных алгебр Ли и их приложения»,

представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация посвящена когомологиям положительно градуированных алгебр Ли и их приложениям в геометрии, топологии и математической физике. Основное внимание уделено положительно градуированным алгебрам Ли с не более, чем двумерными однородными компонентами. Такие алгебры Ли, следуя терминологии Е.И. Зельманова и А. Шалева, называются в диссертации узкими. В диссертации Д.В. Миллионщикова разработаны новые методы в теории положительно градуированных и нильпотентных алгебр Ли в сочетании с разнообразными приложениями этой теории к важным и актуальным задачам геометрии, топологии и математической физики.

Диссертация Д.В. Миллионщикова состоит из введения, восьми глав, заключения, двух приложений, списка литературы из 171 наименования. Общий объем диссертации составляет 262 страницы.

Во введении приведена история изучаемых в диссертации вопросов, а также представлены мотивировки поставленных задач и список основных результатов диссертации. Обзор определений, ключевых примеров и известных результатов, которые используются в диссертации, выполнен в первой главе диссертации. Во второй главе вычисляются когомологии узких положительно градуированных алгебр Ли максимального класса при помощи точной последовательности Диксмье.

В третьей главе рассматриваются когомологии Морса-Новикова многообразия, определенные как когомологии стандартного комплекса де Рама многообразия с деформированным при помощи замкнутой 1-формы дифференциалом. В случае, когда многообразие является компактным солвмногообразием, показано, что его когомологии Морса-Новикова изоморфны когомологиями соответствующей разрешимой алгебры Ли (при некоторых дополнительных условиях на разрешимую алгебру Ли). Построена спектральная последовательность, с помощью которой описывается множество подскоков когомологий Морса-Новикова компактного солвмногообразия.

В четвертой главе строится классификация узких по Зельманову и Шалеву естественно градуированных алгебр Ли (конечномерные алгебры Ли данного класса называются в

современной литературе алгебрами Карно) ширины 3/2. В основе такой классификации лежит новый индуктивный метод построения естественно градуированных алгебр Ли.

В пятой главе диссертации обсуждаются характеристические алгебры Ли уравнения Клейна-Гордона. Показано, что коммутанты характеристических алгебр Ли одномерных интегрируемых уравнений синус-Гордона и Цицейки изоморфны положительным частям аффинных алгебр Каца-Муди ранга два, участвующим в классификационных теоремах четвертой главы.

Шестая глава посвящена изучению скобки Нийенхейса-Ричардсона и высших умножений Масси в когомологиях положительно градуированных алгебр Ли с коэффициентами в присоединенном представлении. В качестве приложения полученных результатов получено описание многообразия филиформных алгебр Ли фиксированной размерности.

Седьмая глав посвящена деталям построения резольвенты Роча-Кариди-Валлаха-Фейгина-Фукса. Полученные в диссертации явные формулы для особых векторов одной серии модулей Верма над алгеброй Вирасоро позволяют найти все дифференциалы резольвенты Роча-Кариди-Валлаха-Фейгина-Фукса.

В восьмой главе приведено доказательство гипотезы Бухштабера 1978 года о том, что элементы базиса когомологий положительной части алгебры Вирасоро можно последовательно выразить в виде итерированных нетривиальных произведений Масси одномерных коциклов. Основная решенная техническая сложность, решенная в диссертации, - это конструкция и доказательство нетривиальности произведений Масси, используемых в доказательстве и построенных при помощи специального узкого (ленточного) градуированного модуля над положительной частью W+ алгебры Витта. Ранее построенные Фейгиным, Фуксом и Ретахом произведения Масси являются тривиальными. Диссертация дает окончательный положительный ответ на гипотезу Бухштабера.

Диссертационная работа Д.В. Миллионщикова представляет собой квалифицированно написанную математическую работу, изложенную ясным и понятным языком, все ее утверждения снабжены полными и подробными доказательствами. Тем не менее, к тексту работы имеются следующие замечания. Во-первых, говоря про естественные градуировки, нужно говорить о них во множественном числе (стр.6). Фраза «просто положительно градуированные алгебры Ли» на стр.5 неудачна, ее стоило бы заменить на «положительно градуированные алгебры Ли». На стр.9 введения, по-видимому, пропущено «естественно градуированные», когда речь идет о филиформных алгебрах Ли, ведь в главе 4, этой неточности уже нет. Во-вторых, в ряде случаев одни и те же символы обозначают разные объекты в зависимости от главы, например, базисные векторы некоторых узких естественно градуированных алгебр Ли из глав 1, 4 и приложения А, обозначаются точно так же, как и векторы базисов модулей Верма в главах 7,8, а также в приложении В. Тем не менее, эти замечания касаются оформления текста, а не результатов диссертации, и они не влияют на высокую оценку представленной работы и полученных в ней результатов.

Заключение. В диссертации Д.В. Миллионщикова решен ряд трудных давно стоящих задач в области, лежащей на стыке геометрии, топологии, алгебры и теории интегрируемых систем. Разработан новый метод построения и классификации естественно градуированных алгебр Ли, который успешно применен для классификации под узких по Зельманову и Шалеву естественно градуированных алгебр Ли. Показано, что две бесконечномерные узкие естественно градуированные алгебры Ли из найденной классификации, являются положительными частями двух аффинных алгебр Ли ранга два, и они изоморфны характеристическим алгебрам Ли двух интегрируемых случаев уравнения Клейна-Гордона. Сочетая самые разные методы и подходы к вычислению когомологий положительно градуированных алгебр Ли, Миллионщиков Д.В. нашел когомологии нескольких важнейших примеров узких алгебр Ли максимального класса,

доказал давно стоящую гипотезу Бухштабера о структуре когомологий положительной части W+ алгебры Витта. Описано многообразие подскоков когомологий Морса-Новикова компактных солвмногообразий.

Диссертация является законченным научным исследованием в актуальной области геометрии, топологии, алгебры и их приложений к теории интегрируемых систем. Результаты диссертации могут быть рекомендованы для использования в научных учреждениях, занимающихся указанными вопросами. К их числу относятся Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, СПбГУ, НГУ и другие высшие учебные заведения и научные центры.

Автореферат отражает содержание диссертации правильно и полно. Полученные результаты и методы представленной диссертации являются новыми, важными и актуальными. Основные положения диссертации содержатся в 18 опубликованных работах автора в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК, также они прошли апробацию на многих авторитетных отечественных и зарубежных конференциях и семинарах.

На основании вышеизложенного можно заключить, что диссертация Д.В. Миллионщикова «Когомологии положительно градуированных алгебр Ли и их приложения» является завершенным научным исследованием и полностью удовлетворяет требованиям ВАК и паспорту специальности 01.01.04 – геометрия и топология, а ее автор, Дмитрий Владимирович Миллионщиков, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании отдела алгоритмической топологии Института математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН __5____сентября 2019 года.

Заведущий отделом алгоритмической топологии,

академик РАН, профессор С.В.Матвеев

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского Уральского отделения
Российской академии наук (ИММ УрО РАН)
Россия, 620990, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.
Телефон: +7 (343) 374 83 32
Факс: +7 (343) 374 25 81
Эл.почта: dir-info@imm.uran.ru
Сайт: www.imm.uran.ru