Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи



Храмцов Михаил Александрович

Голографическое описание топологических дефектов и термализация сильновзаимодействующих квантовых систем

01.04.02 Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена в отделе теоретической физики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель: **Арефьева Ирина Ярославна** — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник отдела теоретической физики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (специальность — 01.04.02, теоретическая физика)

Официальные оппоненты: **Белокуров Владимир Викторович** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики частиц и космологии Физического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова» (специальность – 01.04.02, теоретическая физика)

Фурсаев Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, ректор Государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования Московской области «Университет «Дубна»» (специальность – 01.04.02, теоретическая физика).

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук

Защита состоится 19 сентября 2019 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д. 002.022.02 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук и на сайте http://www.mi-ras.ru/dis/ref19/khramtsov/dis.pdf

Автореферат разослан “_____” мая 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Дрожжинов Ю.Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Современная квантово-полевая картина мира на основе стандартной модели физики элементарных частиц с высокой точностью описывает широчайший спектр явлений. Однако, имеется ряд проблем, систематическое теоретическое описание которых трудно осуществить в рамках традиционной квантовой теории поля в режиме слабой связи, когда можно было бы использовать методы теории возмущений. Исследования в рамках данной диссертации касаются двух из таких проблем.

Первой проблемой является описание неравновесного поведения квантовых систем в режиме сильной связи, в частности, термализация замкнутых квантовых систем. Процесс термализации составляет основу большого количества явлений в квантовых и классических системах в различных областях физики, в частности в образовании кварк-глюонной плазмы, физике холодных атомов и космологии ранней Вселенной. В работе [1] было установлено, что термализация замкнутых квантовых систем неразрывно связана с понятием квантового хаоса. До недавних времен не было подхода, позволявшего бы производить исследования общих закономерностей термализации, за пределами отдельно взятых квантовомеханических моделей.

Второй проблемой является информационный парадокс черных дыр и поиск его разрешения в квантовой гравитации [2]. Из-за того, что область под горизонтом событий черной дыры недоступна для внешних наблюдателей, обычными методами КТП нельзя проследить факт сохранения унитарности после испарения черной дыры. Информационный парадокс является более частной проблемой, чем термализация квантовых систем. Но эта проблема является крайне остро поставленной, поскольку она демон-

стрирует несогласованность квантовой теории поля с теорией гравитации на классическом уровне.

Голографический подход, который активно развивается последние двадцать лет, позволил связать аспекты этих двух проблем из, казалось бы, мало связанных областей физики между собой. Голографическая дуальность заключается в непертурбативном соответствии между физическими величинами в квантовой теории гравитации в $(d+1)$ мерном искривленном пространстве (балке) с величинами в квантовой теории поля в режиме сильной связи в плоской d-мерной границе означенного пространства. Первым и важнейшим примером голографического соответствия является соответствие AdS/CFT (анти-де Ситтер / конформная теория поля) [3–6], которое было открыто Малдасеной в работе [3]. В $\mathrm{AdS}_{d+1}/\mathrm{CFT}_d$ теории гравитации в пространстве AdS_{d+1} в режиме слабой связи ставится в соответствие конформная теория поля в режиме сильной связи на его d-мерной границе. Изначально [3] соответствие было сформулировано для теории суперструны типа IIB в пространстве $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ и $\mathcal{N} = 4$ калибровочной теории супер-Янга-Миллса. Константа связи теории со стороны гравитации пропорциональна обратному числу цветов N в теории на границе. Таким образом, квазиклассический предел на гравитационной стороне соответствует пределу больших N на границе (соответственно, квантовые поправки с гравитационной стороны соответствуют поправкам к пределу больших N на границе). Это порождает вычислительную парадигму, согласно которой классическая геометрия в балке определяет поведение квантовых наблюдаемых в пределе больших N на границе. Более конкретно, геометрия пространства-времени с асимптотикой AdS определяет квантовое состояние в теории на границе, а поведение корреляционных функций и других наблюдаемых в этом квантовом состоянии в ведущем порядке квазиклассического предела определяется геометрическими объектами в

балке. В частности, в работах [4, 5, 7–9] сформулированы и доказаны на примерах так называемые голографические "словари" (методы) для вычисления корреляционных функций в граничной теории, а в работах [10, 11] дается голографическое предписание для вычисления квантовой энтропии зацепленности. Эти методы и их обобщения оказались очень полезными инструментами для вычисления и анализа поведения величин в сильновзаимодействующих квантовых теориях поля и неравновесных системах, в частности столкновения тяжелых ионов и образования кварк-глюонной плазмы [12–14].

Применительно к состоянию в граничной теории поля при конечной температуре голографический подход предполагает рассмотрение геометрии пространства AdS с черной дырой (температура Хокинга которой совпадает с температурой граничной теории) [6, 15]. Поскольку решения уравнений Эйнштейна с AdS-асимптотикой, описывающие динамическое образование черной дыры, известны, голографический подход позволяет строить модели термализации путем вычисления величин в геометрии пространства-времени с образующейся черной дырой. Это главное обоснование связи термализации с гравитационной динамикой черных дыр, упомянутой ранее. Первые модели голографической термализации были предложены в работах [16, 17], и с тех пор этот метод изучения термализации в сильновзаимодействующих КТП является предметом активных исследований. Отдельно стоит отметить, что в работах [18–20] голографический подход был применен для установления универсальных закономерностей термализации, а в работах [21, 22] показана связь голографического описания термализации с областью под горизонтом черной дыры и потерей информации.

Особый интерес представляет применение голографического подхода в случае AdS_3/CFT_2-соответствии. Главной причиной этого является то,

что многие вычисления осуществимы с обеих сторон соответствия. Так, для двухмерной конформной теории поля разработано множество методов, использующих свойства алгебры Вирасоро. С другой стороны, работу на гравитационной стороне соответствия существенно упрощает тот факт, что гравитация в трехмерии является топологической теорией. Поэтому решения гравитационных уравнений с отрицательной космологической постоянной представляют собой глобальные топологические дефекты в AdS_3. Точнее говоря [23], они представимы в общей форме AdS'_3/Γ, где Γ – дискретная подгруппа группы изометрий $SL(2,\mathbb{R})^2$, а AdS'_3 – подмножество AdS_3, где Γ действует дискретно. Топологические дефекты в AdS_3, которые мы рассматриваем в данной диссертации, а именно точечные частицы [24–28] и черные дыры в AdS_3 [29], являются частными примерами таких решений. Геометрия пространства AdS_3 позволяет использовать единый формализм для описания топологических дефектов в AdS_3. Это показано в главе 3. Несмотря на то, что решения явно представимы в виде идентификаций, этот факт до сих пор не был использован для исследования термализации в граничной двухмерной CFT. Центральным результатом данной диссертации, является голографическое описание термализации в граничной теории после двух точечных возбуждений. В этих вычислениях ключевую роль играет формализм топологических идентификаций в AdS_3.

До сих пор мы обсуждали применение голографии в одном направлении – использование гравитационных моделей для описания квантовой теории поля в режиме сильной связи на границе. Однако голографический подход можно применять и в другую сторону – использовать поддающиеся детальному изучению полевые модели для исследования квантовой гравитации в балке. Считается, что такой подход может привести к решению информационного парадокса черных дыр [30]. Отметим, что AdS_3/CFT_2-соответствие также широко применяется для этих целей. Однако недавно

был открыт класс еще более удобных голографических квантовых моделей для решения этих задач.

Одна из таких моделей – модель Сачдева-Йе-Китаева (SYK) [31–34]. Это квантовомеханическая модель N майорановских фермионов в $(0+1)$-мерии со случайным взаимодействием, которая является точно решаемой в пределе больших N в режиме сильной связи. SYK была предложена Китаевым [32] как точно решаемая модель квантовой гравитации в пространстве AdS_2 и околоэкстремальных черных дыр [35]. Эта идея обосновывается тем, что модель SYK демонстрирует эффективную приблизительную конформную симметрию в режиме сильной связи, и что она имеет свойство максимального квантового хаоса в смысле ограничения MSS [36] в режиме сильной связи. Хотя точный голографический двойник теории еще не известен, исследования с помощью модели SYK уже позволили получить важные результаты, касающиеся физики черных дыр и кротовых нор [37–39]. Цель нашего исследования этой модели – проверить предположение о реплика-диагональности ведущей седловой точки в пределе больших N и выяснить, когда оно может нарушаться. Этот вопрос существенен для голографического описания модели как в пределе больших N, так и на уровне поправок.

Цели и задачи диссертации

В данной диссертации ставились следующие цели.

- Вычислить двухточечные корреляторы скалярного оператора на границе пространства AdS_3 с коническим дефектом путем решения уравнения скалярного поля в балке и использования голографического предписания GKPW [4, 5]. Провести сравнительный анализ результата вычисления с результатом вычисления в рамках геодезического приближения, полученного в работе [40].

- Обобщить геодезическое приближение на случай нестационарной топологической идентификации в балке. Провести соответствующее вычисление на примере движущейся массивной частицы.

- Описать голографический двойник пространства AdS_3 с черной дырой, которая образуется при столкновении двух частиц. Провести голографическую диагностику рождения черной дыры. Показать, что при рождении черной дыры BTZ после столкновения частиц в AdS_3 в теории на границе происходит процесс термализации. Вычислить и описать динамику энтропии зацепленности в таком процессе термализации.

- Рассмотреть вопрос существования реплика-недиагональных решений в модели SYK. Уточнить границы применимости реплика-диагонального приближения в модели SYK. Прояснить роль реплика-недиагональных решений в микроскопической физике самой модели SYK и ее гравитационного двойника.

Методы исследования

Основным методом, который используется в данной работе, является AdS/CFT-соответствие [3, 6]. В главе 1 оно используется в первоначальном варианте Габсера-Клебанова-Полякова/Виттена [4, 5]. В главах 1, 2, 3, а также в параграфе 4.7.2 диссертации используется геодезическое приближение [7] для вычисления корреляционных функций, и строятся его обобщения. В главах 2, 3 используется голографическое предписание Рю-Такаянаги [10, 11] для вычисления энтропии зацепленности и взаимной информации в граничной теории. Для описания топологических дефектов в пространстве-времени AdS_3 используются методы дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений, а также теории групп Ли, в

частности группы $SL(2,\mathbb{R})$. Топологические идентификации описываются с помощью теории действия группы $SL(2,\mathbb{R})$ на своем групповом многообразии. Со стороны теории поля на границе используются общие методы квантовой теории поля, а также методы конформной теории поля. Кроме них, в главе 4 применяются методы физики конденсированного состояния и теории спиновых стекол: метод реплик, анзац Паризи и динамическая теория среднего поля. В диссертации используются методы численного решения алгебраических уравнений, а также интегро-дифференциальных уравнений в главе 4.

Основные результаты и их новизна

На защиту выдвигаются следующие основные положения.

1. С помощью голографического подхода Габсера-Клебанова-Полякова/Виттена (GKPW) вычислена двухточечная корреляционная функция в теории, дуальной пространству AdS_3 с коническим дефектом. Построено решение задачи Дирихле для уравнения скалярного поля в этом пространстве. Показано, что в частном случае, когда пространство является орбифолдом, коррелятор совпадает с коррелятором в конформной теории поля. Произведен сравнительный анализ результата вычисления GKPW с коррелятором, получающимся в результате геодезического приближения, что позволило уточнить границы применимости последнего в случае присутствия топологических дефектов в гравитационном двойнике.

2. Построено обобщение голографического геодезического приближения в пространстве AdS_3 для вычисления корреляторов на случай наличия дефектов, которое применимо для произвольных временных интервалов и учитывает $i\epsilon$-предписание. Произведено вычисление двухточечного коррелятора по этому предписанию на примере случая массивной движущейся частицы в AdS_3.

3. Показано, что сталкивающиеся безмассовые частицы, образующие черную дыру в пространстве AdS_3, реализуют точно решаемую голографическую модель термализации замкнутой квантовой системы в результате эволюции неоднородного возбужденного начального состояния. Получены явные формулы, описывающее термализацию энтропии зацепленности в таком процессе. Проанализирована динамика зацепленности в сравнении с другими моделями термализации. Показано, что в неравновесном режиме при больших временах система теряет память о нарушении трансляционной симметрии в начальном состоянии, и что голографическое вычисление явно связывает эту потерю памяти с геометрией внутри черной дыры.

4. В модели термализации, дуальной образованию черной дыры при столкновении частиц, голографически вычислена взаимная информация и проанализирована ее динамика. В рамках геодезического приближения вычислены двухточечные корреляторы. Показано, что при учете наматывающихся геодезических они чувствительны к неравновесным эффектам поздних времен термализации всей системы в целом.

5. В модели Сачдева-Йе-Китаева (SYK) построены новые реплика-недиагональные решения уравнений седловой точки при больших N. В режиме сильной связи модели SYK получены аналитические реплика-недиагональные решения в пределе нулевого числа реплик. На этих решениях вычислена регуляризованная свободная энергия, и показано, что существуют реплика-недиагональные решения, для которых она ниже, чем у стандартного диагонального решения.

Все полученные результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость результатов

Исследования, проведенные в рамках настоящей работы, носят чисто теоретический характер. Тем не менее, методы и подходы, разработанные в

главах 1, 2, 3 имеют непосредственное применение к описанию неравновесных явлений, в частности термализации в замкнутых квантовых системах, что обсуждается в главе 3. Полученная модель термализации после т.н. билокального квенча (двух высокоэнергетических возбуждений) в двухмерной системе имеет динамику зацепленности, которая точно решаема, но при этом имеет богатую структуру. Наиболее интересным применением для данной модели может являться использование в качестве игрушечной модели столкновения тяжелых ионов. Актуальной является проблема теоретического описания экспериментально наблюдаемой кварк-глюонной плазмы, которая образуется и термализуется после столкновения двух тяжелых ионов. Модель, описанная в главе 3, может стать шагом к такому описанию, где тяжелые ионы представляются высокоэнергетическими возбуждениями, а термализация системы соответствует образованию кварк-глюонной плазмы [14]. Другими интересными возможными применениями модели билокального квенча являются экспериментальные исследования физики холодных атомов, а точно решаемая динамика зацепленности может быть очень полезной при потенциальном применении в области квантовой информации и квантовых вычислений. Стоит также заметить, что модели типа SYK, которая обсуждается в главе 4, также допускают экспериментальную реализацию, и результаты, полученные в главе 4, касаются величин, которые могут быть измерены экспериментально.

Другая сфера возможных применений открывается при рассмотрении голографического принципа в противоположном направлении – от игрушечных моделей КТП к гравитации. Модель билокального квенча демонстрирует некоторые новые свойства, которые связывают особенности неравновесного поведения квантовой зацепленности с геометрией пространства с образующейся черной дырой, включая регион под будущим горизонтом. Это подсказывает новые подходы к исследованию информа-

ционного парадокса черных дыр в динамическом контексте. Помимо этого, нами также были получены новые решения в модели SYK, которую можно использовать как игрушечную голографическую модель черной дыры, в главе 4. Новые седловые точки в модели при больших N непосредственно несут информацию о вкладах в функциональный интеграл дуальной теории, которые нужно учитывать для описания гравитации на квантовом уровне. В частности, в недавних работах [37–39] демонстрируется, что решения, подобные нашим, играют ключевую роль в описании хаотического поведения квантовой гравитации и потери информации в равновесном контексте. Таким образом, результаты, полученные в настоящей диссертации, также имеют непосредственное отношение к проблемам квантовой гравитации и черных дыр.

Публикации

Результаты, перечисленные выше, получены автором диссертации, являются новыми и опубликованы в 5 работах в международных рецензируемых журналах [41–45]:

1. I. Ya. Aref'eva and M. A. Khramtsov, "AdS/CFT prescription for angle-deficit space and winding geodesics," JHEP **1604**, 121 (2016) [arXiv:1601.02008 [hep-th]]

2. M. Khramtsov, "Holographic dictionary and defects in the bulk," EPJ Web Conf. **125**, 05010 (2016).

3. И. Я. Арефьева, М. А. Храмцов и М. Д. Тихановская, "Улучшенный метод изображений для голографического описания конических дефектов," ТМФ **189**, №2, 296 (2016) [Англ.: I. Ya. Aref'eva, M. A. Khramtsov and M. D. Tikhanovskaya, "Improved image method for a holographic description of conical defects," Theor. Math. Phys. **189**,

no. 2, 1660 (2016)] [arXiv:1604.08905 [hep-th]]

4. I. Ya. Aref'eva, M. A. Khramtsov and M. D. Tikhanovskaya, "Thermalization after holographic bilocal quench," JHEP **1709**, 115 (2017) [arXiv:1706.07390 [hep-th]]

5. I. Aref'eva, M. Khramtsov, M. Tikhanovskaya and I. Volovich, "On replica-nondiagonal large N saddles in the SYK model," EPJ Web Conf. **191**, 06007 (2018)

Апробация результатов

Результаты докладывались автором на семинарах отдела теоретической физики Математического института им. Стеклова РАН, на семинаре отдела квантовой теории поля Физического института им. Лебедева РАН, а также докладывались и были представлены на следующих международных конференциях:

1) Международная сессия-конференция Отделения ядерной физики отделения физических наук РАН, ОИЯИ, Дубна, Россия, 2016.

2) 19ая международная конференция по физике высоких энергий "Кварки 2016," Пушкин, Россия, 2016.

3) Конференция "Струны 2016," Университет Циньхуа, Пекин, Китай, 2016.

4) Международная конференция "Новые направления в математической и теоретической физике," Математический институт Стеклова, Москва, Россия, 2016.

5) Конференция "Струны 2017," Тэль-Авив, Израиль, 2017.

6) Международная конференция “КХД при ненулевой барионной плотности,” НИЦ “Курчатовский институт,” Москва, Россия, 2017.

7) Конференция “Струны 2018,” Окинавский институт науки и технологий, Окинава, Япония, 2018.

8) Международная школа по теоретической физике фонда “Базис” “Теория многих тел и квантовая информация,” Московская обл., Россия, 2018.

9) Международная конференция “Современная математическая физика. Владимиров-95,” Математический институт Стеклова, Москва, Россия, 2018.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, трех приложений и библиографии. Объем диссертации составляет 185 страниц, включая 108 рисунков. Библиография включает 182 наименования.

Благодарности

Прежде всего автор хотел бы выразить глубокую благодарность научному руководителю И. Я. Арефьевой за постановки интересных задач, сотрудничество в их решении и неоценимую помощь в постижении различных аспектов научной работы. Также автор хотел бы поблагодарить И. В. Воловича за плодотворное сотрудничество и дискуссии. Отдельную благодарность автор хотел бы выразить соавтору М. Д. Тихановской за многочисленные вдохновляющие дискуссии, длительное плодотворное сотрудничество и поддержку. Кроме того, автор искренне признателен заведующему отделом теоретической физики А. А. Славнову и сотрудникам отдела за

дружественную атмосферу, а также Д. С. Агееву, К. Булычевой, Х. Малдасене, А. Михайлову, Д. Стэнфорду, Т. Такаянаги и Ж. Янгу за полезные обсуждения по результатам данной работы.

Содержание диссертации

Во **Введении** определен круг задач, к которым относятся исследования в данной диссертации, основана их актуальность и описано состояние прогресса области на текущий момент. Кроме того, приведены конкретные цели и результаты данного исследования, а также объяснена их значимость и описана структура диссертации.

Глава 1. Голографическое предписание для пространства с дефицитом угла

Данная глава посвящена вычислению голографических коррелляторов в теории, дуальной пространству AdS_3 с коническим дефектом, и сравнительному анализу применимости двух различных голографических предписаний: предписания Габсера-Клебанова-Полякова/Виттена (GKPW) [4, 5] и геодезического приближения [7, 40].

Раздел 1.1 содержит введение в конкретную задачу, решаемую в главе.

Раздел 1.2 содержит краткое описание геометрии AdS_3 с массивной статической частицей, которая привносит дефицит угла. Геометрия такого пространства-времени описывается метрикой а так называемых глобальных координатах, которая имеет вид (мы полагаем радиус AdS равным 1):

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2\rho}\left(-dt^2 + d\rho^2 + \sin^2\rho\, d\vartheta^2\right), \tag{1}$$

где $\rho \in [0, \frac{\pi}{2})$ является голографической (радиальной) координатой, и $\vartheta \in [0, 2\pi A)$ является угловой координатой. В этих координатах граница

AdS достигается при $\rho = \frac{\pi}{2}$. Конический дефект параметризуется через параметр дефицита угла $A = 1 - 4G\mu$, где μ – масса частицы, и G – трехмерная гравитационная постоянная.

Для того, чтобы вычислить двухточечный коррелятор скалярного оператора через предписание GKPW, необходимо построить решение задачи Дирихле для уравнения движения скалярного поля в данной геометрии (1). Действие имеет вид

$$S = -\frac{1}{2}\int d^3x\sqrt{-g}\left((\partial\phi)^2 + m^2\phi^2\right). \tag{2}$$

Решение задачи Дирихле для скалярного поля с данным действием в пространстве с метрикой (1) в общем виде

$$\Phi(\rho, t, \vartheta) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{\mathcal{C}} d\omega\ \mathrm{e}^{-i\omega t + i\frac{l}{A}\vartheta}\varphi_0(\omega, l)R_{\omega,l}(\rho). \tag{3}$$

В этом уравнении φ_0 – фурье-образ от произвольной функции, задающей граничное условие на границе AdS_3, $R_{\omega,l}(\rho)$ – так называемый пропагатор балк-граница, который представляет собой ненормируемое решение радиального уравнения, которое регулярно в начале координат и имеет нормированную ведущую асимптотику вблизи границы вида $R_{\omega,l}(\rho) = \varepsilon^{2h_-} + \ldots$, где $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \rho$. Заметим, что $2h_+ = \Delta$ определяет конформную размерность оператора на границе $\mathcal{O}_\Delta$, и $h_+ + h_- = 1$. В терминах $\nu = h_+ - h_-$, мы имеем $\Delta = 1 + \nu$. Решение для R определено с точностью до вклада от произвольного числа нормируемых мод. Этот произвол выражается в произвольности выбора контура $\mathcal{C}$. Его итоговая роль состоит в определении $i\epsilon$-предписания для итогового коррелятора.

Далее в этом разделе кратко описывается лоренцево предписание GKPW в случае пустого пространства AdS_3. Мы также рассматриваем эффект от конического дефекта на теорию на границе с позиции асимптотических симметрий, а также разбираем геодезическое приближение для пространства с дефицитом угла в отношении с общим голографическим

словарем.

Раздел 1.3 посвящен вычислению двухточечных корреляторов с помощью предписания GKPW в двойнике AdS_3 с дефицитом угла. Общая постановка задачи для вычисления формулируется следующим образом.

Утверждение AdS/CFT-соответствия состоит в равенстве функциональных интегралов теории внутри пространства AdS и теории на его границе. В квазиклассическом пределе интеграл в балке вычисляется методом стационарной фазы через классическое действие на седловой точке. Таким образом, основное уравнение, определяющее голографическим образом корреляторы на границе, имеет вид:

$$\langle \mathrm{e}^{i\int dtd\vartheta\ \varphi_0\mathcal{O}_\Delta}\rangle_{\mathrm{CFT}} = \mathrm{e}^{iS_{on-shell}[\phi]}\big|_{\phi|_{\text{граница}}=\varphi_0}\,. \tag{4}$$

Слева стоит производящий функционал для корреляторов скалярного оператора $\mathcal{O}$ конформной размерности Δ в теории на границе с источником φ_0, а справа - классическое действие на решении задачи Дирихле для уравнения движения скалярного поля с граничным условием, определяемым φ_0.

Искомый двухточечный коррелятор получается варьированием по φ_0. Более конкретно, сначала вычисляется одноточечная функция, определяемая из формулы

$$\langle\mathcal{O}(t,\vartheta)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} i\frac{\varepsilon^{-\nu}}{\sqrt{-\eta}}\frac{\delta}{\delta\Phi(\rho,t,\vartheta)}\left[-\frac{i}{2}\int_C d^3x\sqrt{-g}\left((\partial\phi)^2+m^2\phi^2\right)\Big|_{\phi=\Phi}\right]_{\mathrm{subtr}} \tag{5}$$

где все расходимости вычтены из действия, и $\eta = \tan\rho \sim 1/\varepsilon$ – детерминант индуцированной метрики на сечениях постоянного ρ. Далее, двухточечный коррелятор получается из

$$\langle\mathcal{O}_\Delta(t,\vartheta)\mathcal{O}_\Delta(t',\vartheta')\rangle = \frac{i}{\sqrt{-\eta_0}}\frac{\delta}{\delta\varphi_0(t',\vartheta')}\langle\mathcal{O}_\Delta(t,\vartheta)\rangle\ ; \tag{6}$$

где η_0 – детерминант метрики на границе, который в нашем случае равен 1. Проводя вычисление для метрики (1), мы получаем итоговое выражение

для коррелятора Вайтмана в виде ряда:

$$\langle \mathcal{O}_{1+\nu}(t,\vartheta)\mathcal{O}_{1+\nu}(0,0)\rangle = \frac{2}{\pi(\nu-1)!^2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\nu)!}{n!}\frac{\left(n+\frac{|l|}{A}+\nu\right)!}{\left(n+\frac{|l|}{A}\right)!}\times$$
$$\times \quad \mathrm{e}^{-i(1+\nu+2n)(t-i\epsilon)-i\frac{|l|}{A}(t-i\epsilon)+i\frac{l}{A}\vartheta}. \qquad (7)$$

Эта формула является основным вычислительным результатом данной главы.

В разделе 1.4 изучается специальный случай, когда пространство является $\mathbb{Z}_r$–орбифолдом. В этом случае $A = 1/r$, где $r \in \mathbb{Z}$. При этом на границе сохраняется конформная симметрия. Ряд (7), который получается в результате вычисления GKPW, в этом случае можно явно просуммировать. Доказывается следующая формула:

$$\frac{2}{\pi(\nu-1)!^2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\nu)!}{n!}\frac{(n+r|l|+\nu)!}{(n+r|l|)!} \quad \times \quad \mathrm{e}^{-i(1+\nu+2n)t-i|l|rt+ilr\vartheta} = \qquad (8)$$
$$= \quad \frac{\nu^2}{2^\nu r\ \pi}\sum_{k=0}^{r-1}\left(\frac{1}{\cos t-\cos\left(\vartheta+2\pi\frac{k}{r}\right)}\right)^{\nu+1},$$

Из этой формулы следует, что результат вычисления GKPW в данном частном случае совпадает с двухточечным коррелятором в конформной теории поля на орбифолде, а также с результатом вычисления с использованием геодезического приближения.

В разделе 1.5 проводится сравнительный анализ пространственной и временной зависимостей корреляторов, полученных из предписания GKPW и геодезического приближения, в случае общего дефицита угла. В этом случае эти два предписания дают несколько различные результаты. Показано, что разница между двумя корреляторами наиболее велика в режиме больших пространственно-временных разделений конечных точек коррелятора, и она уменьшается с увеличением Δ.

В разделе 1.6 приводятся результаты главы и обсуждаются их интерпретация и открытые вопросы.

Глава 2. Улучшенный метод изображений для голографического описания конических дефектов

Данная глава посвящена обобщению геодезического приближения для вычисления голографических корреляторов в лоренцевой сигнатуре на случай движущихся топологических дефектов в балке.

Раздел 2.1 содержит конкретное введение в задачу, решаемую в главе. Рассматривается движущийся топологический дефект в пространстве AdS_3 в виде массивной движущейся частицы. Задача состоит в вычислении двухточечных корреляторов в теории, голографически дуальной пространству с такой геометрией, в рамках геодезического приближения. Поскольку топологический дефект индуцирует изометрию идентификации в глобальном AdS_3, вычисление корреляторов основывается на методе изображений, т.е. суммировании по орбите идентификации.

В разделе 2.2 мы вводим основные составляющие метода изображений. Метрика AdS_3 в глобальных координатах имеет вид

$$ds^2 = -\cosh^2\chi dt^2 + d\chi^2 + \sinh^2\chi d\varphi^2 .$$

Здесь t – это временная координата, χ – радиальная координата (случай $\chi \to \infty$ соответствует конформной границе), а φ – угловая координата. Движущаяся частица генерирует определенную топологическую идентификацию в форме клина. Изометрия этой идентификации опрелеояется параметрами: $\alpha = 2\pi(1-A) = 8\pi G\mu$ – параметр дефицита угла, определяемый массой частицы μ, и ξ – быстрота частицы. При $\xi = 0$ идентификация сводится к статическому дефициту угла в AdS_3, что рассматривалось в предыдущей главе. Мировая линия частицы (нос клина) состоит из фиксированных точек данной изометрии. Изометрия идентификации обозначается как $*$, а обратная ей изометрия обозначается как $\# = *^{-1}$.

Далее вводятся Θ-функции, которые из геометрических соображений

регулируют вклады в корреляторы от наматывающихся геодезических в зависимости от того, какие геодезические существуют. Также вводится отражающее отображение на границе, которое нужно для продолжения геодезического приближения во времениподобную область. Оно действует следующим образом: $R: a = (\varphi, t) \mapsto a^R = (\varphi + \pi, t + \pi)$. Это преобразование, которое мы называем преобразованием отражения, меняет причинную соотношение граничных точек, при условии, что мы делаем периодическое продолжение вдоль временного направления: под этим преобразованием времениподобный интервал ab становится пространственноподобным $a^R b$ и наоборот. Таким образом, оно позволяет вычислять вклад от времениподобно разделенных точек a и b, между которыми нет геодезических, через геодезическую между пространственно-подобно разделенными точками a^R и b.

В разделе 2.3 представлена формулировка обобщенного предписания для вычисления двухточечных голографических корреляторов через геодезический метод изображений. Общая формула для двухточечного коррелятора скалярного оператора с конформной размерностью Δ между точками a и b, имеет вид:

$$\begin{aligned} G^A_\Delta(t_a, \varphi_a; t_b, \varphi_b) &= G_{\Delta,0}(\varphi_a, t_a; \varphi_b, t_b)\, \Theta_0(\varphi_a, t_a; \varphi_b, t_b) \\ &+ \sum_n G^A_{\Delta,n}(\varphi_a, t_a; \varphi^*_{b,n}, t^*_{b,n})\, \Theta_+(\varphi_a, t_a; \varphi^*_{b,n}, t^*_{b,n}) \\ &+ \sum_n G^A_{\Delta,n}(\varphi_a, t_a; \varphi^\#_{b,n}, t^\#_{b,n})\, \Theta_-(\varphi_a, t_a; \varphi^\#_{b,n}, t^\#_{b,n})\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь индекс A обозначает коррелятор Вайтмана (W), причинную (c) или запаздывающую (ret) корреляционную функцию. Функции $G^A_{\Delta,n}$ выражены через $G^A_{\Delta,0}$, умноженную на перенормировочные множители, которые обсуждаются в Приложении А. Функция $G^A_{\Delta,0}$ определена следующим образом.

А. Если точки x и y разделены пространственноподобным интервалом

$$G^{W}_{\Delta,0}(\varphi_x,t_x;\varphi_y,t_y) = G^{c}_{\Delta,0}(\varphi_x,t_x;\varphi_y,t_y) = \mathrm{e}^{-\Delta\mathcal{L}_{\mathrm{ren}}(x,y)}\,,$$
$$G^{ret}_{\Delta,0}(\varphi_x,t_x;\varphi_y,t_y) = 0\,; \tag{10}$$

где $\mathcal{L}_{\mathrm{ren}}(x,y)$ – перенормированная длина геодезической между точками x и y. Схема перенормировки описана в Приложении А.

Б. Если точки x и y разделены времениподобным интервалом, то:

$$G^{W}_{\Delta,0}(\varphi_x,t_x;\varphi_y,t_y) = \mathrm{e}^{-\Delta\mathcal{L}_{\mathrm{ren}}(x^R,y)}\mathrm{e}^{-i\pi\Delta\ \mathrm{sgn}(t_x-t_y)}\,, \tag{11}$$
$$G^{c}_{\Delta,0}(\varphi_x,t_x;\varphi_y,t_y) = \mathrm{e}^{-\Delta\mathcal{L}_{\mathrm{ren}}(x^R,y)}\Big(\theta(t_x-t_y)e^{-i\,\pi\,\Delta\,\mathrm{sgn}(\sin(t_x-t_y))}$$
$$+\theta(t_y-t_x)e^{+i\pi\,\Delta\,\mathrm{sgn}(\sin(t_x-t_y))}\Big)\,,$$
$$G^{ret}_{\Delta,0}(\varphi_x,t_x;\varphi_y,t_y) = -\mathrm{e}^{-\Delta\mathcal{L}_{\mathrm{ren}}(x^R,y)}2^{\Delta-1}i\sin[\pi\Delta\mathrm{sgn}(\sin(t_x-t_y))]\theta(t_x-t_y)\,;$$

где $(\varphi_{x^R},t_{x^R}) = (\varphi_x+\pi,t_x+\pi)$ – точка a, к которой применено преобразование отражения R, сдвигающее координаты граничной точки на π.

Θ-функции в данном предписании обеспечивают ограничение количества членов в сумме по изображениям. Обращение причинного отношения преобразованием отражения гарантирует, что функция $G_{\Delta,0}$ определена корректно на всей границе цилиндра.

Мы демонстрируем результаты, которые дает данное предписание, на примерах AdS_3 со статическим и движущимся коническими дефектами.

В разделе 2.4 мы обсуждаем некоторые обобщения нашего метода изображений, в частности случай AdS_3 с несколькими частицами и предписание для голографической энтропии зацепленности.

В разделе 2.5 содержится обсуждение результатов.

Глава 3. Термализация после голографического билокального квенча

Данная глава посвящена голографическому описанию термализации двухмерной конформной теории поля после двух мгновенных точечных возбуждений в начальном состоянии. Глава использует результаты предыдущих глав.

Раздел 3.1 содержит конкретное введение в задачи, решаемые в главе. Основной общей целью данной главы является описание процесса термализации в двухмерной конформной теории поля после двух точечных возбуждений. С точки зрения голографии такому процессу дуален процесс образования черной дыры при столкновении двух безмассовых частиц в пространстве AdS_3. Задача состоит в голографическом вычислении и исследовании динамики квантовой зацепленности в процессе термализации, а также исследовании двухточечных корреляторов.

В разделе 3.2 сначала вводятся обозначения и базовые объекты, необходимые для описания гравитационного двойника рассматриваемому процессу термализации. Описывается геометрия пространства AdS_3 с двумя сталкивающимися безмассовыми точечными частицами, которые образуют черную дыру при столкновении. В данной главе используются две координатные карты. Глобальные координаты (χ, τ, ϕ) полностью покрывают пространство AdS_3 с двумя сталкивающимися частицами, они удобны для анализа поведения геодезических в данной задаче. Координаты BTZ (r, t, φ) покрывают только фундаментальную область идентификации, они удобны для голографического описания конформной теории поля на границе $r \to \infty$.

В разделе 3.3 в геометрии пространства, описанной в предыдущем разделе, исследуются геодезические с границы на границу, которые необходимы для голографических вычислений. Геодезические могут идти с границы

на границу напрямую, или они могут наматываться на один из дефектов, или на оба. Для ясности мы называем геодезические первого типа *базовыми* геодезическими, геодезические второго типа – *пересекающими* геодезическими (они пересекают клин идентификации), и геодезические третьего типа – *наматывающимися* геодезическими. В данной главе подробно разбирается поведение данных классов геодезических и соотношение их длин. Доказано три утверждения:

Утверждение 3.1. *Предположим, что точки a и b на границе разделены пространственно-подобным интервалом так, что либо $\varphi_a,\ \varphi_b \in (-\pi, 0)$, либо $\varphi_a,\ \varphi_b \in (0, \pi)$. Тогда между этими двумя точками всегда существует базовая геодезическая в любой момент времени для любых координат t_a, t_b.*

Утверждение 3.2. *Между точками, которые находятся с одной стороны от клина идентификации, не существует пересекающих геодезических.*

Утверждение 3.3. *Для конечных точек, расположенных следующим образом: $\varphi_a \in [-\pi, 0)$, $\varphi_b \in [0, \pi)$, и t_a, t_b выбранных так, что точки разделены пространственно-подобным интервалом, верны следующие утверждения:*

1. *Для $t_a = t_b = 0$ всегда существует пересекающая геодезическая;*
2. *При увеличении $t_a = t_b = t$, пересекающая геодезическая исчезает только после того, как соответствующая базовая геодезическая появляется;*
3. *В момент времени, когда пересекающая геодезическая исчезает, $\mathcal{L}_{crossing}(a,\ b) \geq \mathcal{L}_{direct}(a,\ b)$.*

Также вычисляются длины геодезических.

В разделе 3.4 результаты предыдущего раздела применяются к

пространству-времени, описанному в параграфе 3.2.2 в координатах BTZ с тем, чтобы осуществить голографическое вычисление энтропии зацепленности и взаимной информации. Для вычисления энтропии зацепленности подсистемы в CFT на границе, живущей на отрезке (a, b), используется голографическое предписание (H)RT [10, 11]:

$$S(a,\ b) = \frac{\mathcal{L}_{\min}(a,\ b)}{4G}\,. \tag{12}$$

Здесь $G = \frac{3}{2c}$ – это гравитационная постоянная, c – центральный заряд в CFT на границе, а $\mathcal{L}_{\min}(a,\ b)$ - длина минимальной геодезической между точками a и b на границе. Утверждения 3.1-3.3 полностью описывают динамику таких геодезических во времени. За нетривиальную неравновесную динамику отвечают пересекающие геодезические, тогда как базовые геодезические определяют значение энтропии зацепленности для подсистем, которые находятся в равновесии. Их утверждения 3.3 следует, что нетривиальная неравновесная динамика имеется только у подсистем на отрезках, которые содержат одно их двух возбуждений в начальный момент времени. Для таких подсистем энтропия зацепленности определяется формулой

$$S(a,\ b|t) = \min\{S_{\text{non-eq}}(a,\ b|t),\ S_{\text{eq}}(a,\ b)\}\,; \tag{13}$$

где $S_{\text{non-eq}}$ – это вклад в энтропию зацепленности от пересекающей геодезической. Он определяется формулой

$$S_{\text{non-eq}}(a,\ b|t) = \frac{c}{6}\log\Bigg[\frac{2}{\epsilon}\left(-1+\mathcal{E}^2+(1+\mathcal{E}^2)\cosh R\Delta\varphi+\mathcal{E}^2\cosh 2R\varphi_0+\right. \tag{14}$$
$$\left.\mathcal{E}^2\cosh 2Rt+4\mathcal{E}\cosh Rt\cosh R\varphi_0\left(\sinh R\frac{\Delta\varphi}{2}-\mathcal{E}\cosh R\frac{\Delta\varphi}{2}\right)-2\mathcal{E}\sinh R\Delta\varphi\right)\Bigg]\,.$$

где $\mathcal{E} = \coth\frac{\pi R}{2}$, $\Delta\varphi = \varphi_b - \varphi_a$, $\varphi_0 = \frac{1}{2}(\varphi_a + \varphi_b)$, R - радиус горизонта образующейся черной дыры, а ϵ - УФ-обрезание, имеющее смысл регуляризации длины геодезической вблизи границы. В свою очередь, равновесное значение энтропии зацепленности определяется длиной базовой геодезической,

и дается формулой

$$S_{\text{eq}}(a,\ b) = \frac{c}{3}\log\left(\frac{2}{\epsilon}\sinh\left(R\frac{(\varphi_b-\varphi_a)}{2}\right)\right); \tag{15}$$

при $\Delta\varphi < \pi$. Заметим, что температура конечного равновесного состояния связана с радиусом горизонта по формуле $T = \frac{R}{2\pi}$.

Явная формула (14) является одним из основных результатов данного исследования. Подробно анализируется эволюция энтропии зацепленности во времени. Показано, что эволюция энтропии зацепленности имеет следующие характерные режимы:

1. Квадратичный рост при ранних временах: $t < t_1 = \frac{\Delta\varphi}{2R}$

$$S_{\text{non-eq}}(a,\ b|t) = S_{\text{non-eq}}(a,\ b|0) + f(\varphi_a,\varphi_b)\ t^2 + O(t^4);$$

2. Промежуточный режим: $t_1 \le t < t_2$. В этом режиме энтропия интерполирует от квадратичного к линейному росту.

3. Линейный рост: $t_2 \le t < t_*$

$$\Delta S(t) = S_{\text{non-eq}} - S_{\text{eq}} = \frac{c}{3}R\ t + \frac{c}{3}\log\left(\frac{\coth\frac{\pi R}{2}}{8\sinh^2 R\frac{\Delta\varphi}{2}}\right) + O(\mathrm{e}^{-Rt}).$$

4. Насыщение происходит после термализации подсистемы $t \ge t_*$. Энтропия зацепленности достигает теплового равновесного значения. Время термализации t_* для произвольной подсистемы получено в виде явной формулы:

$$\cosh R\ t_*^{(a,b)} = \cosh R\varphi_0\left(\cosh R\frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{1}{\mathcal{E}}\sinh R\frac{\Delta\varphi}{2}\right) + \Big(\cosh^2 R\varphi_0\times \tag{16}$$

$$\left(\cosh R\frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{1}{\mathcal{E}}\sinh R\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2 - \cosh^2 R\varphi_0 - \sinh^2 R\frac{\Delta\varphi}{2} + \frac{1}{\mathcal{E}}\sinh R\Delta\varphi\Big)^{\frac{1}{2}};$$

Мы установили, что шкала времени t_2 связана с проникновением геодезических, вычисляющих энтропию зацепленности, под горизонт, и получили ограничение на нее. Также установлена связь линейного роста с этим явлением, а также с эффектом “цунами зацепленности”, связанным с потерей

памяти о начальном состоянии при термализации. Кроме того, в данном разделе вычисляется и изучается поведение взаимной информации двух отрезков в данном процессе термализации.

В разделе 3.5 вычисляются и исследуются двухточечные корреляционные функции в рамках геодезического приближения. Показано, что временная зависимость корреляторов при больших временах соответствует равновесным корреляторам.

В разделе 3.6 приводятся результаты главы и обсуждаются их интерпретация и открытые вопросы.

Приложение Б содержит явные формулы для параметризации геодезических в глобальных и BTZ координатах, координатные формулы для действия изометрий в глобальных координатах, а также сведения о лоренцевых корреляторах в теории при конечной температуре, дуальной черной дыре BTZ.

Глава 4. Реплика-недиагональные решения в модели Сачдева-Йе-Китаева

Данная глава посвящена исследованию реплика-недиагональных решений в модели SYK.

Раздел 4.1 содержит введение в конкретные задачи, решаемые в главе.

В разделе 4.2 вводится усредненная по беспорядку статистическая сумма для M реплик SYK:

$$\overline{Z(\beta)^M} = \int DGD\Sigma \, \mathrm{Pf}[\delta_{\alpha\beta}\partial_\tau - \hat{\Sigma}_{\alpha\beta}]^N \times \tag{17}$$
$$\exp\left[-\frac{N}{2}\int_0^\beta \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \left(\Sigma_{\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2)G_{\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2) - \frac{J^2}{q}G_{\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2)^q\right)\right],$$

где $\alpha, \beta = 1, \ldots, M$ - репличные индексы, G – билокальное поле, имеющее смысл фермионной двухточечной функции, а Σ – вспомогательное биле-

кальное поле[1], которое имеет смысл собственной энергии (среднего поля) фермиона. Эти билокальные поля должны удовлетворять свойству антисимметрии $G_{\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2) = -G_{\beta\alpha}(\tau_2,\tau_1)$; $\Sigma_{\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2) = -\Sigma_{\beta\alpha}(\tau_2,\tau_1)$. В настоящей главе исследуются седловые точки (17) для различных значений M. Они находятся из следующих уравнений Эйлера-Лагранжа для действия в (17):

$$\partial_\tau G_{\alpha\gamma}(\tau,\tau'') - \int d\tau' G_{\alpha\beta}(\tau,\tau')\Sigma_{\beta\gamma}(\tau',\tau'') = \delta_{\alpha\gamma}\delta(\tau-\tau''); \quad (18)$$

$$\Sigma_{\alpha\beta}(\tau,\tau') = J^2 G_{\alpha\beta}(\tau,\tau')^{q-1}. \quad (19)$$

В данном разделе также дается обзор свойств реплика-диагональной седловой точки в SYK. Обсуждается непертурбативный характер точных реплика-недиагональных седловых точек.

Раздел 4.3 посвящен квадратичному (свободному) варианту модели. В предположении реплика-симметричного анзаца $G_{\alpha\alpha} = G_0$ и $G_{\alpha\beta} = G_1$ для $\alpha \neq \beta$ получены аналитические точные реплика-недиагональные решения:

$$G_0^{(3,4)}(\omega) = \frac{-i\omega \pm i\,\mathrm{sgn}(\omega)\sqrt{4J^2+\omega^2}\left(1-\frac{2}{M}\right)}{2J^2}; \quad (20)$$

$$G_1^{(3,4)}(\omega) = \mp i\,\mathrm{sgn}(\omega)\frac{\sqrt{4J^2+\omega^2}}{J^2 M}; \quad (21)$$

(решения $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ являются реплика-диагональными). Обсуждаются свойства этих решений, в частности, вклад в репличную статистическую сумму. Показано, что при числе реплик $M > 1$ действие на реплика-недиагональных решениях выше, чем на стандартном реплика-диагональном решении, и таким образом такие решения дают экспоненциально подавленный вклад в функциональный интеграл при больших N.

Раздел 4.4 посвящен численному исследованию точных реплика-недиагональных решений во взаимодействующей версии модели с четы-

[1]Здесь и далее "шляпа" означает интегральный оператор, соответствующий ядру, определяемому билокальным полем.

рехфермионным взаимодействием. Приводится описание численного метода построения решений. На построенных решениях вычисляется действие и анализируется вклад этих решений в репличную статистическую сумму. Показано, что при $M > 1$ эти решения также дают подавленный вклад в репличную статсумму (17).

В разделе 4.5 мы переходим к построению и исследованию репликанедиагональных решений в пределе сильной связи модели SYK. Производится разделение переменных в уравнениях седловой точки следующим образом:

$$G_{\alpha\beta}(\tau,\tau') = g(\tau,\tau')P_{\alpha\beta}\,. \tag{22}$$

В предположении такого разделения переменных уравнения седловой точки в режиме сильной связи сводятся к паре уравнений:

$$\sum_{\beta} P_{\alpha\beta}P^{q-1}_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}\mathcal{C}\,. \tag{23}$$

$$J^2\int d\tau' g(\tau,\tau')g(\tau',\tau'')^{q-1} = -\frac{1}{\mathcal{C}}\,\delta(\tau-\tau'')\,, \tag{24}$$

где константа $\mathcal{C}$ связана с масштабным произволом в подстановке (22). Решение интегрального уравнения (24) известно. Таким образом, для построения решения остается решить алгебраическое уравнение (23) на матрицу P. Нам особенно интересны решения этого уравнения в пределе метода реплик $M \to 0$. Для построения таких решений, используется подход на основе анзаца Паризи. В этом пределе матрица P задается функцией $a(u)$ на отрезке $u \in [0,1]$. Выводятся общие выражения для редуцированных уравнений движения в пределе $M \to 0$:

$$\begin{aligned} &0 = a(u)[1-\langle a^{q-1}\rangle] + a^{q-1}(u)[1-\langle a\rangle] - \int_0^u [a(v)-a(u)][a^{q-1}(v)-a^{q-1}(u)]dv\,,\\ &\mathcal{C} = 1-\langle a^q\rangle\,, \end{aligned} \tag{25}$$

где введено усреднение $\int_0^1 a^p(v)\,dv \equiv \langle a^p\rangle$. Строятся простейшие решения

данных уравнений, когда $a(u) = \text{const}$.

Также в данном разделе обсуждаются вопросы вычисления свободной энергии и УФ-регуляризации расходимостей в пределе сильной связи. Принятая схема регуляризации заключается в обрезании УФ-мод в импульсном пространстве. Вклад в регуляризованную свободную энергию от реплика-недиагонального решения определяется формулой

$$\Delta F = -\frac{N}{2} \lim_{M\to 0} \frac{d_f}{M} \log\det[\mathcal{C}^{\frac{1}{q}-1} P^{\circ(q-1)}], \tag{26}$$

где $d_f \sim \beta J$ - обезразмеренный параметр обрезания. Показывается, что уже на простейшем постоянном реплика-симметричном решении регуляризованная свободная энергия ниже, чем на реплика-диагональном решении. Анализируется зависимость значения этой регуляризованной свободной энергии от кратности взаимодействия q.

В разделе 4.6 строятся более сложные решения в пределе сильной связи в пределе нулевого числа реплик, которые реализуются в рамках анзаца Паризи первого шага нарушения симметрии реплик. Также вычисляется их регуляризованная свободная энергия. Показано, что среди этих решений имеются такие, у которых регуляризованная свободная энергия

Раздел 4.7 посвящен интерпретациям некоторых решений, полученных в пределе сильной связи. Особенностью предела сильной связи является расширенная репараметризационная симметрия уравнений седловой точки относительно преобразований

$$G_{\alpha\beta}(\tau,\tau') = f'_\alpha(\tau)^{\Delta} f'_\beta(\tau')^{\Delta} G_{\alpha\beta}(f_\alpha(\tau), f_\beta(\tau'))\,; \tag{27}$$

$$\Sigma_{\alpha\beta}(\tau,\tau') = f'_\alpha(\tau)^{1-\Delta} f'_\beta(\tau')^{1-\Delta} \Sigma_{\alpha\beta}(f_\alpha(\tau), f_\beta(\tau'))\,, \tag{28}$$

где $\Delta = 1/q$, а $f_\alpha(\tau)$ – диффеоморфизм, который, вообще говоря, отличается для каждой реплики. Решения вида (22) нарушают эту симметрию до симметрии, в которой репараметризации совпадают во всех репликах. Действуя нарушенной симметрией, можно генерировать новые интересные

решения. В данном разделе показано, что так можно получить решение, которое демонстрирует динамику типа спинового стекла на некотором конечном (но сколь угодно большом) времени. С другой стороны, в случае двух реплик также можно получить решение, которое связано с термополевой двойкой в модели SYK и имеет прямую голографическую интерпретацию.

В разделе 4.8 приводятся результаты главы и обсуждаются их интерпретация и открытые вопросы.

Приложение В содержит сведения о матрицах Паризи и необходимые формулы и утверждения о них, используемые в тексте, а также общие формулы для классического действия.

В **Заключении** приводятся основные результаты данной работы по главам.

Список литературы

[1] M. Srednicki, "Chaos and quantum thermalization," Physical Review E, 50(2), p.888 (1994)

[2] S. W. Hawking, "Particle Creation by Black Holes," Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975)

[3] J. M. Maldacena, "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231-252 (1998).

[4] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, "Gauge theory correlators from noncritical string theory," Phys. Lett. **B428**, 105-114 (1998).

[5] E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253-291 (1998).

[6] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, "Large N field theories, string theory and gravity," Phys. Rept. **323**, 183 (2000).

[7] V. Balasubramanian and S. F. Ross, "Holographic particle detection," Phys. Rev. D **61**, 044007 (2000).

[8] T. Banks, M. R. Douglas, G. T. Horowitz and E. J. Martinec, "AdS dynamics from conformal field theory," hep-th/9808016.

[9] K. Skenderis and B. C. van Rees, "Real-time gauge/gravity duality: Prescription, Renormalization and Examples," JHEP **0905**, 085 (2009).

[10] S. Ryu and T. Takayanagi, "Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT," Phys. Rev. Lett. **96**, 181602 (2006).

[11] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, "A Covariant holographic entanglement entropy proposal," JHEP **0707**, 062 (2007).

[12] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal and U. A. Wiedemann, "Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions," book:Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2014.

[13] O. DeWolfe, S. S. Gubser, C. Rosen and D. Teaney, "Heavy ions and string theory," Prog. Part. Nucl. Phys. **75**, 86 (2014).

[14] И. Я. Арефьева, "Голографическое описание кварк-глюонной плазмы, образующейся при столкновениях тяжёлых ионов," УФН **57**, 527-555 (2014).

[15] E. Witten, "Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 505 (1998).

[16] U. H. Danielsson, E. Keski-Vakkuri and M. Kruczenski, "Black hole formation in AdS and thermalization on the boundary," JHEP **0002**, 039 (2000).

[17] S. B. Giddings and S. F. Ross, "D3-brane shells to black branes on the Coulomb branch," Phys. Rev. D **61**, 024036 (2000).

[18] H. Liu and S. J. Suh, "Entanglement Tsunami: Universal Scaling in Holographic Thermalization," Phys. Rev. Lett. **112**, 011601 (2014).

[19] Y. Z. Li, S. F. Wu, Y. Q. Wang and G. H. Yang, "Linear growth of entanglement entropy in holographic thermalization captured by horizon interiors and mutual information," JHEP **1309**, 057 (2013).

[20] V. E. Hubeny and H. Maxfield, "Holographic probes of collapsing black holes," JHEP **1403**, 097 (2014).

[21] V. Balasubramanian *et al.*, "Thermalization of the spectral function in strongly coupled two dimensional conformal field theories," JHEP **1304**, 069 (2013).

[22] T. Hartman and J. Maldacena, "Time Evolution of Entanglement Entropy from Black Hole Interiors," JHEP **1305**, 014 (2013).

[23] A. Maloney and E. Witten, "Quantum Gravity Partition Functions in Three Dimensions," JHEP **1002**, 029 (2010).

[24] S. Deser, R. Jackiw, and G. 't Hooft, "Three dimensional Einstein gravity: dynamics of flat space Ann. Phys. **152** (1984) 220.

[25] S. Deser and R. Jackiw, "Three-Dimensional Cosmological Gravity: Dynamics of Constant Curvature," Ann. Phys. **153** (1984) 405.

[26] S. Deser, R. Jackiw, "Classical and Quantum Scattering on a Cone," Commun.Math.Phys. 118 (1988) 495

[27] G. 't Hooft, "Quantization of point particles in (2+1)-dimensional gravity Class. Quant. Grav. **13** (1996) 1023.

[28] H. J. Matschull, "Black hole creation in (2+1)-dimensions," Class. Quant. Grav. **16**, 1069 (1999).

[29] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, "The Black hole in three-dimensional space-time," Phys. Rev. Lett. **69**, 1849 (1992).

[30] J. M. Maldacena, "Eternal black holes in anti-de Sitter," JHEP **0304**, 021 (2003).

[31] S. Sachdev and J. Ye, "Gapless spin fluid ground state in a random, quantum Heisenberg magnet," Phys. Rev. Lett. **70**, 3339 (1993).

[32] A. Kitaev, доклады в KITP в 2015: http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev/, http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev2/

[33] J. Maldacena and D. Stanford, "Remarks on the Sachdev-Ye-Kitaev model," Phys. Rev. D **94**, no. 10, 106002 (2016).

[34] A. Kitaev and S. J. Suh, "The soft mode in the Sachdev-Ye-Kitaev model and its gravity dual," JHEP **1805**, 183 (2018).

[35] J. Maldacena, D. Stanford and Z. Yang, "Conformal symmetry and its breaking in two dimensional Nearly Anti-de-Sitter space," PTEP **2016**, no. 12, 12C104 (2016).

[36] J. Maldacena, S. H. Shenker and D. Stanford, "A bound on chaos," JHEP **1608**, 106 (2016).

[37] J. S. Cotler *et al.*, "Black Holes and Random Matrices," JHEP **1705**, 118 (2017).

[38] J. Maldacena and X. L. Qi, "Eternal traversable wormhole," arXiv:1804.00491 [hep-th].

[39] P. Saad, S. H. Shenker and D. Stanford, "A semiclassical ramp in SYK and in gravity," arXiv:1806.06840 [hep-th].

[40] Д. С. Агеев, И. Я. Арефьева и М. Д. Тихановская, "(1+1)-корреляторы и движущиеся массивные дефекты," ТМФ **188**, no. 1, 85 (2016)

[41] I. Ya. Aref'eva and M. A. Khramtsov, "AdS/CFT prescription for angle-deficit space and winding geodesics," JHEP **1604**, 121 (2016).

[42] M. Khramtsov, "Holographic dictionary and defects in the bulk," EPJ Web Conf. **125**, 05010 (2016).

[43] И. Я. Арефьева, М. А. Храмцов и М. Д. Тихановская, "Улучшенный метод изображений для голографического описания конических дефектов," ТМФ **189**, №2, 296 (2016).

[44] I. Ya. Aref'eva, M. A. Khramtsov and M. D. Tikhanovskaya, "Thermalization after holographic bilocal quench," JHEP **1709**, 115 (2017).

[45] I. Ya. Aref'eva, M. A. Khramtsov, M. D. Tikhanovskaya and I. V. Volovich, "On replica-nondiagonal large N saddles in the SYK model EPJ Web of Conferences 191, 06007 (2018);

[46] I. Aref'eva, M. Khramtsov, M. Tikhanovskaya and I. Volovich, "Replica-nondiagonal solutions in the SYK model," arXiv:1811.04831 [hep-th].