ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ О ДИССЕРТАЦИИ М. Р. ГАБДУЛЛИНА

"Суммы характеров: оценки и приложения"

на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

по специальности 01.01.06– математическая логика, алгебра и теория чисел

Работа М. Р. Габдуллина посвящена актуальным вопросам аналитической теории чисел, связанным с оценками сумм мультипликативных и аддитивных характеров и их приложениями. Диссертант изучает задачи, которыми занимались такие известные математики, как Грин, Карацуба, Модуи, Ружи, Шаркози, Шоэн, Шкредов, Шпарлинский, Чанг, Эльсхольц.

Диссертация М. Р. Габдуллина состоит из четырех глав.

Знаменитая теорема Берджеса дает нетривиальную оценку сумм мультипликативных характеров в поле простого порядка p по отрезкам длины не менее $p^{1/4+\epsilon}$, $\epsilon > 0$. При перенесении этого результата на конечные поля порядка p^r (обычно простое p предполагается большим, а натуральное r фиксированным) естественно рассматривать содержащиеся в поле r-мерные параллелепипеды размера больше $p^{r(1/4+\epsilon)}$. Чанг получила нетривиальные оценки сумм характеров для параллелепипедов размера больше $p^{r(2/5+\epsilon)}$, а я–для параллелепипедов, у которых все ребра больше $p^{1/4+\epsilon}$. М. Р. Габдуллин установил нетривиальные оценки сумм характеров для параллелепипедов размера больше в $p^{r(1/4+\epsilon)}$ в случае $r = 2, 3$. Доказательство потребовало преодоления ряда технических трудностей.

Оценка L- нормы преобразования Фурье характеристических функций подмножества поля $\mathbb{F}_p$ простого порядка p (или, равносильно, суммы аддитивных характеров) вызывает большой интерес специалистов. Она рассматривалась в работах Сандерса, Шоэна, а также в наших статьях совместно с Грином и Шкредовым. М. Р. Габдуллин перенес многие из ранее полученных результатов в этом направлении на подмножества конечномерного

линейного пространства над $\mathbb{F}_p$. Для этого он установил лемму о пересечении произвольного подмножества такого пространства с подпространством меньшей размерности. Доказательство леммы основано на красивом использовании вероятностного метода.

В третьей главе рассматривается следующая задача. Пусть множество $A \subset \mathbb{F}_{p^r}$ образовано элементами конечного поля, коэффициенты при разложении которых по некоторому базису принадлежат заданному подмножеству поля $\mathbb{F}_p$. Указать достаточные условия на это подмножество и r, гарантирующие существование квадрата в A. Задача была инициирована несколько лет назад в работе Дартыжа, Модуи и Шаркози. Вскоре Диетман, Эльсхольц и Шпарлинский усилили их результаты. Диссертант усилил результаты обеих работ.

В четвертой главе изучаются условия на натуральное число m и размер подмножества A кольца $\mathbb{Z}_m$ вычетов по модулю m, гарантирующие существование ненулевого квадрата в $\mathbb{Z}_m$ во множестве разностей $A - A$. М. Р. Габдуллин существенно усилил ряд результатов, полученных Матолши и Ружи. В частности, диссертант показал, что для почти всех m множество $A - A$ содержит ненулевой квадрат, если $|A| > m^{1/2+\epsilon}$, а $m > m(\epsilon)$.

Отметим, что и в третьей, и в четвертой главах М. Р. Габдуллин значительно продвинулся в исследовании рассмотренных им задач за счет того, что он предложил эффективный способ их сведения к специальным суммам характеров и хорошо оценил эти суммы.

Таким образом, основными результатами диссертации М. Р. Габдуллина можно считать следующие:

1) получены нетривиальные оценки сумм характеров по параллелепипедам размера больше $p^{r(1/4+\epsilon)}$ в случае $r = 2, 3$;

2) многие оценки L- нормы преобразования Фурье характеристических функций подмножества поля $\mathbb{F}_p$ простого порядка p перенесены на подмножества конечномерных линейных пространств над $\mathbb{F}_p$;

3) доказано, что множество $A \subset \mathbb{F}_{p^r}$, образованное элементами конечного поля, коэффициенты при разложении которых по некоторому базису принадлежат заданному подмножеству поля $\mathbb{F}_p$, содержит квадраты, при достаточно слабых условиях на размер этого подмножества;

4) показано, что для почти всех m и множества вычетов $A \subset \mathbb{Z}_m$ множество $A - A$ содержит ненулевой квадрат, если $|A| > m^{1/2+\epsilon}$, а $m > m(\epsilon)$.

Результаты показывают, что автор овладел основными методами исследования изучаемых им проблем, а также может предлагать новые подходы к их исследованию.

Результаты диссертации опубликованы в четырех журнальных статьях, неоднократно докладывались на семинарах и на отечественных и международных конференциях.

Считаю, что работа М. Р. Габдуллина удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.06 (математическая логика, алгебра и теория чисел), а ее автор безусловно заслуживает присуждения ему искомой степени.

научный руководитель
Главный научный сотрудник отдела теории чисел МИАН
академик РАН С. В. Конягин

"07" июня 2019 г.

Подпись Конягина С.В. заверяю:
Зав. отделом кадров МИАН
ОТДЕЛ КАДРОВ
Высоцкая В.И.