Отзыв официального оппонента на диссертационную работу Габдуллина Михаила Рашидовича «Суммы характеров: оценки и приложения» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертационная работа относится к аналитической теории чисел. Характеры в теорию чисел ввёл П. Г. Лежён-Дирихле более 150 лет тому назад для доказательства свой знаменитой теоремы о простых числах в арифметической прогрессии. В значительной степени именно с этой работы Дирихле начинается история аналитической теории чисел, методы которой относятся к одной из вершин современной математики.

Теория характеров была предметом научного интереса многих классиков математики. Среди отечественных корифеев науки упомянем прежде всего И. М. Виноградова, Ю. В. Линника, Н. Г. Чудакова и др., которые внесли существенный вклад в эту теорию.

Диссертационная работа посвящена оценкам сумм значений характеров по некоторым множествам в конечных полях и целых числах. Необходимость получения оценок подобных сумм возникает в различных задачах аналитической теории чисел, а сами оценки имеют различные приложения и применения. Поэтому **актуальность** данного научного исследования не вызывает сомнения.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 64 наименований (6 статей автора, из них в журналах Web of Science, Scopus — 4) и содержит 84 страницы текста.

Во **Введении** автор обосновывает актуальность исследования, формулирует цель, научную новизну, теоретическую и практическую ценность, описывает используемые методы, приводит сведения об апробации, даёт краткое описание содержания и формулировки основных результатов.

В **первой главе** изучается задача оценки сумм значений характеров $\chi(\cdot)$ в конечном поле $\mathbb{F}_{p^n}$ при $n = 2, 3$ по множествам вида

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \omega_i \, : \, N_i + 1 \leqslant x_i \leqslant N_i + H_i, \;\; 1 \leqslant i \leqslant n \right\},$$

где $\omega_1, ..., \omega_n$ — базис поля над $\mathbb{Z}_p$.

Основной результат этой главы представляет из себя некоторое обобщение знаменитого неравенства Берджесса и состоит в следующем.

Если $|B| \geqslant p^{n(1/4+\varepsilon)}$ *и* $\chi|_{\mathbb{F}_p}$ *— нетривиальный характер, то*

$$\left| \sum_{x \in B} \chi(x) \right| \ll_\varepsilon |B| p^{-\varepsilon^2/12}.$$

Этот результат представляет из себя усиление теорем Чанг и Конягина, поскольку в условии накладываются ограничения на размер $|B|$, а не на каждое H_j в отдельности.

Вторая глава посвящена нижним оценкам величины

$$\|f\|_1 = \sum_{\gamma \in \widehat{G}} |\widehat{f}(\gamma)|,$$

где $f : G \to \mathbb{C}$ — некоторая функция на конечной абелевой группе G, а $\widehat{f}$ ее (конечное) преобразование Фурье. Здесь получен ряд теорем, обобщающих результаты Конягина, Шкредова и Сандерса (эти авторы в качестве f рассматривали только характеристические функции множеств и целозначные функции). Диссертантом получено несколько новых утверждений для случая $G = \mathbb{Z}_p$, а также их многомерные обобщения на случай $G = \mathbb{Z}_p^d$.

В **третьей главе** исследуются множества с «пропущенными» цифрами. Пусть $a_1, ..., a_r$ — базис $\mathbb{F}_{p^r}$ над $\mathbb{F}_p$ и $\mathcal{D} \subset \mathbb{F}_p$. Рассматриваются множества вида $W_{\mathcal{D}} = \{a_1 x_1 + ... + a_r x_r : x_j \in \mathcal{D}\}$. Пусть Q — множество квадратов из поля $\mathbb{F}_{p^r}$. В работе доказываются оценки для абсолютной величины разности $|W_{\mathcal{D}} \cap Q| - |W_{\mathcal{D}}|/2$, которые обеспечивают, в частности, существование квадратов в редких множествах. Полученные результаты оказываются сильнее недавних теорем Шаркози, Мадуи и Дартиг. Кроме этого, рассматривается более общая задача, когда множество $W_{\mathcal{D}}$ заменяется на множество вида $W = \{a_1 x_1 + ... + a_r x_r : x_j \in D_j\}$, где

$D_1, ..., D_r$ суть подмножества $\mathbb{F}_p$, и доказывается аналог недавней теоремы Дитмана, Элсхольца и Шпарлинского.

Основным результатом **четвертой главы** является следующее утверждение.

Для бесквадратного m и множества $A \subset \mathbb{Z}_m$, такого что $A - A$ не содержит квадратичных вычетов, выполняется $|A| \leqslant m^{1/2}(3n)^{1.5n}$, где n обозначает количество нечетных простых делителей m.

Этот результат усиливает теорему Ружи и Матолчи.

Результаты работы являются новыми и интересными, их формулировки и доказательства изложены четко и ясно. Работа представляет из себя проведенное на высоком математическом уровне законченное исследование в области аналитической теории чисел (точнее, теории тригонометрических сумм и их приложений).

Основные научные результаты исследования представлены в 6 публикациях, в том числе 4 в изданиях индексируемых в Web of Science, Scopus.

Автореферат диссертации и опубликованные работы с достаточной полнотой отражают содержание диссертации.

Диссертация Габдулина М. Р. является завершенным самостоятельным научно-квалификационным исследованием, в котором решена важная научная проблема, имеющая большое теоретическое и практическое значение.

Представленные материалы свидетельствуют о высоком научном и общекультурном уровне соискателя, о владении им методами научного анализа и способностью развивать и применять сложные теоретико-числовые методы в научных исследованиях.

Все вышесказанное позволяет сделать вывод о том, что поставленная в исследовании цель достигнута.

Соответствие содержания диссертации указанной специальности. Представленная М. Р. Габдулиным диссертация «Суммы характеров: оценки и приложения» соответствует заявленной специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Диссертация Габдуллина Михаила Рашидовича «Суммы характеров: оценки и приложения» отвечает требованиям пунктов 9, 10, 11, 13, 14 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических

наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой алгебры,
математического анализа и геометрии
Тульского государственного педагогического
университета им. Л. Н. Толстого
специальность — 01.01.06
300026, Тула, пр. Ленина 125
тел. 8(4872) 35-14-88
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Н. М. Добровольский

Подпись Добровольского Н. М.
Заверяю. Начальник отдела
делопроизводства и связи