ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации

ГАБДУЛЛИНА МИХАИЛА РАШИДОВИЧА

«Суммы характеров: оценки и приложения»

на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация состоит из четырех независимых глав.

В первой главе рассматриваются оценки сумм характеров по параллелепипедам в конечных полях порядка p^2 и p^3. В 2010 году С.В. Конягин получил нетривиальную оценку такой суммы для произвольного конечного поля при условии, что каждое ребро параллелепипеда больше чем $p^{1/4+\varepsilon}$. Эта оценка является прямым обобщением знаменитой оценки Берджеса. В теореме, доказанной диссертантом для случаев $n = 2, 3$, есть условие, что объем параллелепипеда должен быть не меньше $p^{n(1/4+\varepsilon)}$. Это усиливает теорему Конягина в том отношении, что позволяет рассматривать параллелепипеды с малыми ребрами, лишь бы общий объем был достаточно большим. Подобные теоремы доказывались и ранее, например Чанг в 2008 году, но в диссертации существенно улучшен показатель степени: 1/4 против 2/5 у Чанг. Очевидным развитием этой темы является распространение полученной оценки на случай конечных полей порядка p^4 и выше, но тут дело упирается, по-видимому, в существенное усложнение доказательства. Хочется надеяться, что в будущем эти трудности будут преодолены.

Во второй главе рассматриваются нижние оценки винеровской нормы функций в $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Z}_p^d$. Для характеристических функций множеств в $\mathbb{Z}_p$ такие оценки были получены С.В. Конягиным и И.Д. Шкредовым в 2015-2016 годах. Диссертант распространяет эти результаты на более широкий класс функций, а затем, привлекая вероятностные и геометрические соображения, получает также оценки в многомерном случае. Точнее, в многомерном случае доказаны две теоремы, для функций с «малой» и «большой» мощностью носителя, соответственно. При этом теоремы для $\mathbb{Z}_p^d$ сформулированы так, что не зависят от конкретного результата в случае $\mathbb{Z}_p$, и при улучшении последнего автоматически дадут лучший результат в многомерном случае.

В третьей главе рассматривается задача о пропущенных цифрах в конечном поле. А именно, исследуется количество квадратов среди элементов поля, коэффициенты в разложении которых по базису принадлежат специальным множествам. Рассмотрен как случай, когда специальные множества одинаковы для всех координат, так и более общий случай, когда все специальные множества различны. В первом случае известен результат, полученный Шаркози с соавторами в 2015 году, а во втором случае — недавний результат Шпарлинского с соавторами. В своей работе диссертант существенно усиливает оба этих результата.

В четвертой главе рассмотрена задача об оценке сверху мощности множества A в $\mathbb{Z}_m$ такого, что $A - A$ не содержит квадратичных вычетов по модулю m, где m — некоторое бесквадратное число. Эта задача ранее рассматривалась Матолчи и Ружей, и диссертант усиливает их результаты. Основная оценка, полученная диссертантом, содержит множитель, зависящий от числа делителей m, но (в отличие от результата Матолчи и Ружи) не содержит никакого ограничения на эти делители. Из этой оценки с приложением методов теории графов выводится оценка мощности

множества A, уже зависящая только от m и улучшающая оценку Матолчи и Ружи. Заслуживает упоминания и оценка мощности множества A для почти всех модулей m, также выведенная диссертантом из основного результата. Доказательства утверждений этой главы отличаются особенной прозрачностью и лаконичностью.

Из вышеизложенного следует, что как тема выполненной работы, так и каждая из ее подтем, несомненно являются актуальными, а полученные в диссертации результаты — новыми. Доказательства полученных результатов являются полными и корректными. Диссертация соответствует критериям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» (п.9 Положения, утвержденного постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842). Работа в целом является достаточно завершенной, при этом она хорошо оформлена: в тексте постоянно встречаются краткие вставки, поясняющие существо дела, что очень облегчает чтение и понимание работы. Основные результаты диссертации опубликованы в центральных математических журналах, также по ним были сделаны доклады на нескольких международных конференциях. Автореферат соответствует содержанию диссертации.

Нужно отметить практически полную несвязанность глав диссертации между собой. Исходя из названия работы, в приложениях ожидается использование именно полученных диссертантом оценок, чтобы показать как они «играют» и позволяют получить продвижение в тех или иных задачах. На самом деле оказывается, что общим в рассматриваемых задачах является лишь сам факт использования характеров. Это обстоятельство нельзя назвать недостатком работы, а скорее ее особенностью, где-то даже свидетельствующей о разносторонности научных интересов диссертанта.

По моему мнению диссертант заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Доцент кафедры высшей математики
геодезического факультета федерального
государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего
образования «Московский государственный
университет геодезии и картографии»,
кандидат физико-математических наук
(научная специальность 01.01.06) Чанга Марис Евгеньевич

105064, Москва, Гороховский пер., 4
тел.: 8(499)261-92-40
e-mail: maris_changa@mail.ru

16 сентября 2019 года

Подпись к.ф.-м.н. Чанги М.Е.
удостоверяю
Ученый Секретарь МИИГАиК
«16» 09 2019 г.