ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук Зеленова Евгения Игоревича на тему: «Некоторые вопросы p-адической математической физики» по специальности 01.01.03 – «математическая физика»

Диссертация Е.И. Зеленова «Некоторые вопросы p-адической математической физики» посвящена исследованию таких вопросов p-адической математической физики как описание квантовой динамики одномерной p-адической квантовой системы, соответствующей классической механике с двумерным симплектическим фазовым пространством над полем p-адических чисел. Исследуется модель, в которой гильбертово пространство квантовой системы реализуется как пространство квадратично интегрируемых комплекснозначных функций на одномерном пространстве p-адических чисел Q_p.

P-адический анализ стал интенсивно развиваться в работах академика В.С. Владимирова и его научной школы, сотрудником которой является диссертант. Развитие неархимедова анализа послужил толчком к возникновению и эффекттивному применению p-адических динамических систем и p-адических квантовых систем в математической физике и, в частности, в математической биологии. Методы p-адического анализа эффективно используются в математической физике при описании спиновых стекол, при описании свойств белковых молекул, при описании объектов, имеющих фрактальную структуру вполне несвязного континуума. P-адический анализ в теории полугрупп, интегродифференциальных операторов и квантовой теории развивается в работах многих российских и зарубежных исследователей. Методы p-адического анализа эффективно применяются в построении теории спиновых стекол. Применения методов p-адического анализа в математической

теории белка и аминокислот развивается в работах специалистов по математическим методам в биологии. Теория p-адических случайных процессов и p-адического броуновского движения развивается как самостоятельное математическое направление, так и как аппарат математической теории белковых структур. За прошедшее получили развитие время различные теоретические аспекты направления p-адического анализа и его применения. Диссертация Е.И. Зеленова посвящена построению теории квантовых систем и динамических систем на p-адическом пространстве. Работа представляет собой систематическое исследование квантовой теории и статистической механики на p-адических пространствах.

Перечисленные выше некоторые из аспектов развития p-адического анализа обосновывают актуальность темы исследования. В диссертации Е.И. Зеленова развивается единый подход к широкому кругу вопросов – построению теории квантования классических систем на p-адическом симплектическом пространстве, стандартной квантовой теории систем с p-адическим координатным пространством, развитию теории иерархических динамических систем с p-адическим фазовым пространством и теории p-адических случайных процессов.

В диссертации выявлен ряд особенностей, порождаемых структурой p-адических полей $\mathbb{Q}_p$, и определяющих отличие квантовых систем с p-адическим конфигурационным пространством и динамических систем с p-адическим фазовым пространством от соответствующих систем в вещественном конфигурационном или фазовом пространстве.

Охарактеризуем результаты диссертации по главам.

В главе 1 построен p-адический гауссовский канал на пространстве состояний квантовой системы и доказано свойство аддитивности полученного канала.

В главе 2 изучается представление Вейля симплектической группы дву-

мерного симплектического пространства над полем $\mathbb{Q}_p$ в гильбертовом пространстве состояний 1-мерной p-адической квантовой системы. Установлена связь группы симплектических преобразований с индексом Маслова тройки самодвойственных решеток в симплектическом пространстве.

В третьей главе диссертации исследуются p-адические аналоги квантования Конна, соответствующие операторы симметрии и квантовый дифференциал. Получены условия конечномерности образа и компактности оператора квантового дифференциала.

В 4-й главе диссертации исследуются свойства операторов координаты и импульса в p-адической квантовой механике. При построении квантовой теории систем с p-адическим конфигурационным пространством преодолены трудности, возникающие при описании представлений операторов координаты и импульса, связанные с тем, что спектр самосопряженных операторов лежит на вещественной прямой, а параметр координаты принимает значение в поле $\mathbb{Q}_p$. В диссертации рассматривается стандартная статистическая модель квантовой механики системы с p-адическим конфигурационным пространством, в которой с каждой такой системой связывается комплексное сепарабельное гильбертово пространство, состояния системы описываются операторами плотности в этом пространстве, наблюдаемым соответствуют самосопряженные операторы, распределение вероятности значений наблюдаемой для системы в заданном состоянии дается формулой Борна-фон-Неймана. Новизна рассматриваемой модели состоит в следующем. В вещественной одномерной квантовой теории гамильтоновых систем фазовым пространством классической системы является двумерное вещественное симплектическое многообразие и наблюдаемые координаты и импульса принимают вещественные значения также, как и спектры соответствующих им самосопряженных операторов. Но в p-адической одномерной квантовой теории фазовым пространством классической системы является двумерное p-

адическое симплектическое пространство, наблюдаемые координаты и импульса принимают значения в поле $\mathbb{Q}_p$, а спектр самосопряженных операторов является вещественным.

Эта трудность преодолена – на гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{Q}_p)$ комплекснозначных квадратично интегрируемых по мере Хаара функций на поле $\mathbb{Q}_p$ получено представление Вейля канонических коммутационных соотношений над двумерным симплектическим пространством посредством унитарных операторов. В этом представлении сильно непрерывная унитарная группа сдвигов p-адического аргумента порождает проекторнозначную меру оператора импульса. Самосопряженные операторы координаты и импульса, вещественный спектр которых составляют определяемые параметром p канторовы множества, определяются как интегралы по проекторнозначной мере.

В 5-й главе исследована связь вещественной и p-адической квантовых теорий. С каждым из расширений (вещественным или p-адическим) фазового пространства классической системы (двумерного симплектического пространства над полем рациональных чисел) связано представление коммутационных соотношений. Показано, что минимальные алгебры коммутационных соотношений вещественных и p-адических квантовых систем пересекаются по конечному числу образующих.

В 6-й главе диссертации исследуется проблема декогеренции в рамках адельного подхода к вещественным и p-адическим квантовым системам, который реализуется как тензорное произведение полученных представлений Картье по всем p и вещественного представления. Адельное представление коммутационных соотношений представляет единый подход к вещественным и p-адическим квантовым системам. Получен эффект адельной декогеренции при специальном "диагональном"вложении поля рациональных чисел в кольцо аделей.

Качественным эффектом отличия динамических систем с p-адическим фа-

зовым пространством от соответствующих систем в вещественном фазовом пространстве, найденным в диссертации, является обоснование свойств медленной релаксации, присущих динамике белковых (биологических) систем. Этот эффект исследован в 7-й главе диссертации В диссертации исследованы особенности иерархических динамических систем с дискретным временем на ультраметрических фазовых пространствах. В частности, динамические системы, порождаемые аналитическими автоморфизмами p-адических аналитических компактных многообразий. Установлено, что следствием свойства иерархичности таких динамических систем является отсутствие свойства перемешиваемости и, как следствие, явление медленной релаксации.

В 8-й главе проведен анализ сходимости по распределению последовательности сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с значениями в поле $\mathbb{Q}_p$. Установлено, что для ограниченных случайных величин имеет место следующая предельная теорема – если выпуклая оболочка носителя распределения содержит точку 0, то последовательность сумм независимых одинаково распределенных случайных величин сходится к равномерному распределению на выпуклой оболочке носителя исходного распределения. Если же условие на расположение носителя распределения относительно точки 0 нарушено, то установлена расходимость последовательности сумм независимых одинаково распределенных случайных величин по распределению и дано описание множества ее частичных пределов и сходящихся подпоследовательностей. Установлена оценка экспоненциальной скорости сходимости последовательности плотностей распределения сумм к плотности предельного распределения. Отметим, что близкие результаты о сходимости последовательности сумм независимых p-адических случайных величин рассматривались в работах Б.М. Клосса (в более общей ситуации случайных величин, принимающих значения в произвольной абелевой компактной группе), С. Эванса и других авторов. В теореме 8.3 установлена оценка скорости

сходимости к предельному распределению. Замечу, что в следствии из теоремы 8.3 была допущена арифметическая ошибка в преобразовании неравенств. Эта неточность не является существенной поскольку утверждение следствия далее нигде не используется.

В 9-й главе исследуются аппроксимации p-адического винеровского процесса посредством последовательностей однопараметрических семейств случайных величин со значениями в группе p-адических чисел, индексируемых целыми p-адическими числами. Получено разложение p-адического винеровского процесса в ряд по базису Ван дер Пута на пространстве p-адически непрерывных функций $C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p)$. Исследованы качественные свойства меры Винера на пространстве $C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p)$, порождаемой p-адическим винеровским процессом. Установлено свойство липшицевости и нигде не дифференцируемости траекторий винеровского процесса почти наверное. Тем самым обнаружено качественное отличие свойств траекторий p-адического и вещественного винеровских процессов, поскольку в вещественном случае из равномерной липшицевости следует дифференцируемость почти всюду, а для функций из пространства $C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p)$ связи между липшицевостью и дифференцируемостью отсутствуют. Полученные в 9-й главе свойства p-адического винеровского процесса представляют интерес для построения p-адической стохастической теории.

В качестве пожеланий дальнейшего развития диссертационной работы можно предложить изучение квантового стохастического исчисления в p-адическом анализе. Хотелось бы также выяснить некоторые вопросы, затронутые в диссертации. Представляет интерес исследование теории p-адических случайных величин и случайных процессов, связанное с аппроксимациями вещественнозначных вероятностных распределений распределениями рациональнозначными. В каких ситуациях такие аппроксимациии позволяют получить в пределе однозначные характеристики p-адических случайных вели-

каких случаях различные аппроксимации приводят к различнымпредельным характеристикам?

Возникает вопрос о роли выбора вложения поля рациональных чисел в кольцо аделей при описании явления декогеренции в главе 6. К каким эффектам может привести использование других вложений или некоторых статистических смесей различных вложений?

В рецензируемой диссертационной работе имеют место некоторые стилистические и редакционные недостатки. Имеются опечатки как орфографического, так и арифметического характера, которые не заслуживают значительного внимания.

В диссертации встречается неаккуратное использование не определенных терминов. Например, на стр. 81, теорема 5.3, утверждение 3) – "операторы представления коммутируют в любом когерентном состоянии". Хотя понятно, о чем идет речь, но нет определения для коммутатора (коммутации) двух операторов в состоянии.

Стоит отметить в качестве недостатка и некоторую неполноту изложения. Например, при описании адельного подхода к описанию квантовой динамики в главе 6 было бы уместно привести определение кольца аделей.

В диссертации встречается дублирование обозначений разных объектов одинаковыми символами. Например, символ F обозначает как двумерное симплектическое пространство над полем $\mathbb{Q}_p$ (стр. 21 и далее), так и оператор симметрии, используемый в определении квантового дифференциала (стр. 58-63). Также Δ обозначает одновременно и симплектическую форму (стр. 21), и бесконечное дерево Брюа-Титса (стр. 57).

Указанные замечания нисколько не снижают значимости диссертационного исследования и не меняют положительной оценки диссертации.

Результаты диссертационной работы представляют собой научное достижение в теории p-адического анализа и развитии его применений в кванто-

вой теории, теории случайных процессов и математической биологии. Тема диссертации является актуальной, методы исследования – современными, результаты – новыми. Диссертация отвечает требованиям, установленным ВАК к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.03 – «математическая физика».

Таким образом, соискатель Зеленов Евгений Игоревич заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – «математическая физика».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

САКБАЕВ Всеволод Жанович 24.10.2018

Контактные данные: тел.: 7(495)4088172, e-mail: fumi2003@mail.ru Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Адрес места работы: 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, Московский физико-технический институт, кафедра высшей математики Тел.: +7(495)4084554; e-mail: rector@mipt.ru

Подпись сотрудника Московского физико-технического института (государственного университета) В. Ж. Сакбаева удостоверяю:

Ученый секретарь Московского физико-технического института (государственного университета) Ю.И. Скалько

25.11.2018