В диссертационный совет Д 002.022.02
на базе Математического института
им. В.А. Стеклова РАН

от Магазинова Александра Николаевича,
к.ф.-м.н., научного сотрудника
факультета математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»

Адрес места работы:
119048, г. Москва, ул. Усачева, д. 6

Контактный телефон (рабочий):
+7-495-772-9590, доб. 12746

E-mail: amagazinov@hse.ru

Отзыв на автореферат диссертации Е.И. Зеленова «Некоторые вопросы p-адической математической физики»

Введение

Данный текст представляет собой **отрицательный отзыв** на автореферат диссертации Е.И. Зеленова «Некоторые вопросы p-адической математической физики». Достоинства данной работы, скорее всего, будут озвучены на заседании диссертационного совета. Поэтому данный отзыв посвящен исключительно недостаткам рассматриваемого автореферата.

Отзыв устроен следующим образом. Будут кратко перечислены основные недостатки автореферата. Затем, в разделах 1–5 настоящего отзыва, данные недостатки будут освещены подробнее. Прочие недостатки автореферата перечисляются в разделе 6. Раздел 7 представляет собой формальный вывод о соответствии диссертационной работы требованиям Положения о присуждении ученых степеней.

Нумерация основных результатов диссертации в данном отзыве соответствует порядку их перечисления в разделе автореферата «Основные результаты».

По мнению автора настоящего отзыва, основные недостатки работы диссертанта таковы:

1. Основной результат 8 частично неверен. В остальной части он не является новым.
2. Основной результат 9 тривиален и не имеет научной значимости.
3. Автореферат не отвечает на вопрос о теоретической и практической ценности результатов диссертации. Имеются все основания сомневаться, что такая ценность есть.
4. Автореферат лишь частично отражает актуальность темы диссертации. Актуальность именно тех «некоторых вопросов», которым посвящена диссертация, сомнительна.

5. Основные результаты 2, 4, 8, 9, кроме специальности 01.01.03 — «Математическая физика», имеют непосредственное отношение и к другим специальностям. Результаты диссертации должны быть оценены также и специалистами по соответствующим разделам математики; в противном случае положительная оценка диссертации невозможна.

1 Основной результат 8

В автореферате результат сформулирован следующим образом:

> Исследована скорость сходимости суммы независимых одинаково распределенных случайных величин со сначениями в поле p-адических чисел. Доказан экспоненциальный характер сходимости для величин с локально постоянной плотностью. Показатель экспоненты есть третья степень от параметра постоянности плотности.

Результат неверен в части асимптотики показателя экспоненты. Неравенство для показателя экспоненты приведено в диссертации сразу после формулировки Теоремы 8.3. Воспроизведем это неравенство, исправляя допущенную диссертантом опечатку (см. замечание ниже).

$$\sup_{x\in\mathbb{Q}_p}\left|p_{S_n}(x)-\frac{1}{D}h(0,D)(x)\right|\le\left(\frac{D}{\Delta}-1\right)e^{-\lambda_\xi n},$$
$$\text{где}\qquad \lambda_\xi\ge\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta}{D}\right)^3 \tag{1}$$

Приведем простой контрпример. Определим семейство функций $\alpha^\varepsilon:\mathbb{Q}_p\to[0,+\infty)$ для $\varepsilon\in(0,p)$ следующим образом:

$$\alpha^\varepsilon(x):=(p-\varepsilon)h(0,1/p)(x)+\varepsilon h(1,1/p)(x).$$

Заметим, что $\int_{\mathbb{Q}_p}\alpha^\varepsilon(x)\,d\mathbb{P}(x)=1$. Поэтому для каждого $\varepsilon\in(0,p)$ можно построить такую последовательность независимых случайных величин $\{\xi_i^\varepsilon\}$, что

$$p_{\xi_i^\varepsilon}(x)=\alpha^\varepsilon(x).$$

(Разумеется, требуется совершить некоторые технические действия, но они весьма стандартны и не отличаются от метода построения вещественных случайных величин с заданным распределением.)

Легко видеть, что для любого $\varepsilon\in(0,p)$ имеем

$$D(\xi^\varepsilon)=1,\qquad \Delta(\xi^\varepsilon)=1/p.$$

Таким образом, неравенство (1) влечет сходимость

$$p_{S_n^\varepsilon}(0)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1\quad\text{равномерно по }\varepsilon. \tag{2}$$

В свою очередь, (2), очевидно, неверно в силу того, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}p_{S_n^\varepsilon}(0)=p.$$

Действительно, при фиксированном n и $\varepsilon \to 0$ типичной является следующая ситуация: все члены суммы $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\varepsilon}$ принадлежат шару $B(0, 1/p)$.

Данная ошибка обусловлена ошибочностью второго утверждения Леммы 8.2, «доказательству» которого посвящено единственное предложение:

> Поскольку функция концентрации принимает дискретные значения, равные степеням числа p, получаем второе утверждение Леммы.

Результат не является новым в части установления сходимости распределения суммы независимых случайных величин и оценок данной сходимости. Рассмотрим такой вопрос.

(*) Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — независимые случайные величины в группе $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Как ведет себя случайная величина $\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n$?

Теоремы 8.1 и 8.2 при $D = 1$ несложно свести к вопросу (*) для каждого $m = p^k$, $k = 1, 2, \ldots$; это стандартное упражнение по теории меры в духе теоремы об ограниченной сходимости. Редукция Теорем 8.3 и 8.4 к вопросу (*) для $m = D/\Delta$ тривиальна.

После указанной редукции Теоремы 8.1–8.4 оказываются частными случаями формулы (7) из работы [4]. Методы, примененные в диссертации и в работе [4], в сущности, абсолютно одинаковы.

Повторение результатов статьи 67-летней давности известными методами, разумеется, не может считаться достижением, соответствующим уровню докторской диссертации.

Замечание. В формуле (1) исправляется опечатка, допущенная в строке 6 на стр. 115 диссертации. Индекс p, превращающий вещественную абсолютную величину в p-адическую норму, не нужен. Более того, он делает формулу в диссертации бессмысленной, если, например, $p_{S_n}(x)$ иррационально. Эквивалентная формула без опечатки — с абсолютной величиной — находится в строках 10–12 на стр. 121 диссертации.

2 Основной результат 9

В автореферате результат сформулирован следующим образом:

> Дано определение p-адического винеровского процесса и построена его явная реализация с использованием базиса Ван дер Пута в пространстве непрерывных p-адичнозначных функций. Доказано, что траектории этого процесса есть липшицевы функции. Построена мера Винера на пространстве траекторий, описан носитель меры и получен аналог пространства Кэмерона–Мартина.

У данного результата отсутствует научная значимость. Рассматриваемый объект (случайная 1-липшицева функция $W : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$, удовлетворяющая условию $W(0) = 0$ и выбираемая равномерно по мере Хаара на пространстве таких функций) — весьма прост. Он рассматривался и до работ диссертанта (что и отражено ссылкой [66] в диссертации). Как показывает тривиальный аргумент (через разложение по базису ван дер Пута), приведенный диссертантом, данный объект удовлетворяет некоторому p-адическому аналогу обычного определения винеровского процесса.

Какова польза от рассмотрения данного объекта как винеровского процесса, неясно. Ни текст автореферата, ни текст диссертации этого не поясняют.

Автор отзыва отмечает, что, как и всякий простой объект, «p-адический винеровский процесс» можно назвать еще многими именами, например, случайной поверхностью над p-адическим деревом в градиентной модели Ландау–Гинзбурга. Однако смысл придумывания различных названий одному и тому же объекту совершенно неочевиден.

3 Теоретическая и практическая ценность

Процитируем полностью раздел автореферата с аналогичным названием.

> Результаты диссертации расширяют круг моделей в рамках стандартной статистической квантовой теории. В частности, в рамках стандартной квантовой теории информации предложен новый тип бесконечномерных каналов — p-адические бозонные каналы. В рамках предлагаемого подхода рассматривается новый класс моделей — p-адические квантовые и классические модели. Данные модели находят применения при описании сложных систем типа турбулентности, спиновых стекол или динамики белковых молекул.

При чтении данного текста сразу возникают следующие замечания:

1. Утверждение о применении обсуждаемых моделей выглядит явно преувеличенным. В автореферате отсутствуют конкретные библиографические ссылки с цитированием конкретных результатов. В частности, работы В.А. Аветисова и соавторов (ссылки [4–6] в разделе автореферата «Список литературы») из всех работ диссертанта цитируют только книгу Владимирова–Воловича–Зеленова, причем в контексте, слабо связанном с тематикой рассматриваемой диссертации.

2. «Расширение круга моделей» не имеет никакой самостоятельной ценности. Ценность предлагаемых моделей можно и нужно подтверждать цитированием конкретных работ. Желательно, чтобы в цитируемых работах можно было найти текст, аналогичный одному из следующих:

   - «Используя модель, предложенную в (работе диссертанта), мы решаем следующую задачу: (формулировка)».
   - «Представляет интерес вопрос о существовании моделей в рамках стандартной статистической квантовой теории со свойствами: (свойства, которым удовлетворяют модели, вводимые в диссертации)».

   Подобных ссылок автореферат не содержит.

3. Основные результаты 4, 8, 9 имеют весьма косвенное отношение к квантовой теории. Вопрос об их теоретической и практической ценности проигнорирован. Речь идет о 43 страницах (93–135) из 115 (21–135) содержательной части диссертации.

Таким образом, автор отзыва приходит к однозначному выводу — **теоретическая и практическая ценность диссертации, как минимум, сомнительна.**

4 Актуальность темы

Раздел автореферата с аналогичным названием целиком посвящен актуальности такой тематики исследований, как p-адическая математическая физика. Тем не менее, диссертация посвящена ряду весьма специальных вопросов, а не p-адической математической физике в целом. Поэтому весьма желательно, чтобы автореферат отвечал и на вопрос: «Насколько актуальными являются именно те специальные вопросы p-адической математической физики, которым посвящена диссертация?» В представленном автореферате ответа на данный вопрос нет.

Таким образом, **актуальность темы диссертации (в узком смысле) сомнительна.**

5 Необходимость оценки диссертации специалистами по другим разделам математики

Основной результат 2. Частью этого результата является Теорема 2.3 диссертации. Доказательство данной теоремы намекает, что результат, в гораздо более общем виде, может быть известен специалистам по алгебре, мнение которых, в данном случае, может оказаться весьма полезным.

Основной результат 4. Результат посвящен вопросам теории p-адических динамических систем. Для оценки данного результата совершенно необходимо мнение специалистов по динамическим системам. В частности, важно ответить на вопрос, насколько глубока и содержательна построенная диссертантом теория.

Основные результаты 8 и 9. Для оценки данных результатов совершенно необходимо мнение специалистов по теории вероятностей и случайным процессам (в случае, если доводы разделов 1 и 2 настоящего отзыва недостаточны).

6 Прочие недостатки

1. Доказательства, приводимые в диссертации, вполне элементары и не имеют самостоятельной ценности. На это намекает содержание раздела «Методы исследования». Ознакомление с текстом диссертации делает данный факт очевидным.

2. Теорема 2.3 диссертации утверждает, что равенство индексов Маслова влечет симплектическую эквивалентность троек решеток. Данная теорема формулируется не для всех троек, а для троек с очень сильным дополнительным условием: попарные расстояния между решетками тройки равны 2. На это обстоятельство указано в разделе «Содержание работы», но не указано в разделе «Основные результаты». Тем самым автореферат создает искаженное впечатление об общности результата.

3. Посвящая раздел «Актуальность темы» p-адической математической физике в целом, диссертант по какой-то причине концентрируется на деятельности сравнительно небольшого числа исследователей. Тем не менее, спектр работ по данной тематике гораздо шире, например, [1, 2, 3, 5, 6].

4. Статьи 15–17 в списке публикаций диссертанта опубликованы в журнале «p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications». В редакционный совет данного журнала входит сам диссертант. С одной стороны, это не является формальным препятствием для защиты. С другой стороны, гораздо более корректной считается практика публикации в полностью независимых журналах.

5. Публикации 10, 11, 17 выполнены диссертантом в соавторстве. К сожалению, автореферат не отражает роль диссертанта и соавторов в данных публикациях.

7 Вывод

В автореферате перечислены 9 основных результатов диссертации. По мнению автора данного отзыва, 2 из них не имеют научной ценности. Научная ценность остальных семи результатов, по меньшей мере, сомнительна и авторефератом не подтверждается.

Таким образом, представленный автореферат свидетельствует о том, что **диссертация Е.И. Зеленова «Некоторые вопросы p-адической математической физики» не соответствует критериям п. 9 Положения о присуждении ученых степеней.**

Поэтому автор отзыва просит диссертационный совет **не присуждать Е.И. Зеленову ученую степень доктора физико-математических наук.**

Список литературы

[1] Albeverio, S., and Karwowski, W. A random walk on p-adics — the generator and its spectrum. Stochastic processes and their Applications 53.1 (1994): 1–22.

[2] Barnaby, N., Biswas, T., and Cline, J.M. p-adic Inflation. Journal of High Energy Physics 2007.04.

[3] Brekke, L., and Freund, P.G.O. p-Adic numbers in physics. Physics Reports 233.1 (1993): 1–66.

[4] Dvoretzky, A., and Wolfowitz, J. Sums of random integers reduced modulo m. Duke Mathematical Journal 18.2 (1951): 501–507.

[5] Yang, H. Stress tensors in p-adic string theory and truncated OSFT. Journal of High Energy Physics 2002.11.

[6] Zúñiga–Galindo, W.A. Non-Archimedean reaction-ultradiffusion equations and complex hierarchic systems. Nonlinearity 31.6 (2018): 2590–2616.

А.Н. Магазинов,

19 сентября 2018 г.

Подпись заверяю

Специалист по кадрам

Захарова М.А.

19.09.2018