ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию
Зеленова Евгения Игоревича
на тему "Некоторые вопросы *p*-адической математической физики",
представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Нельзя сказать, что p-адическая математическая физика является резонансной темой современной физики. Более того, само название этой темы, вполне утвердившееся в математической среде во многом благодаря вышедшей в 1994 году и ставшей уже классической монографии Владимирова В. С., Воловича И. В. и Зеленова Е. И. "p-Адический анализ и математическая физика", распространено среди физиков не так широко, как среди математиков. И тому есть историческая причина. Уравнения p-адической математической физики, как мне представляется, были введены авторами монографии как математически формальные аналоги дифференциальных уравнений математической физики, построенные, однако, для псевдо-дифференциального оператора над полем p-адических чисел (известного, как оператор Владимирова). Так возникли p-адическая механика и квантовая механика, p-адическая теория динамических систем, теория p-адических случайных процессов и т.д. Диссертация Зеленова Е И. остается приверженной духу этих построений, но дополняет их рядом новых утверждений, представляющих, в своей совокупности, существенное развитие нескольких разделов p-адической математической физики.

Следует, все-таки, заметить, что p-адическая математическая физика занимает особое место в математической физике. Она продолжает оставаться областью, безусловно представляющей общематематический интерес, однако физическая интерпретация уравнений p-адической математической физики остается не всегда проясненной. Понятно, что на практике, там, где можно использовать традиционную математическую физику, она и используется. Вместе с тем, в последние десятилетия теоретическая физика все чаще выходит на объекты, традиционное описание которых формально остается конечно возможным, но практически бесполезным. Наиболее контрастно это проявляется при изучении многочастичных систем, свойства которых никак не характеризуются усредненными по системе величинами. Спиновые стекла яркий тому пример. Базовая в теории спиновых стекол модель нарушения репличной симметрии вынуждена использовать конструкции, в большей степени характерные для p-адической математической физики, чем для вещественной математической физики. Еще более впечатляющие примеры возникают там, где сложные системы оказываются организованными иерархически явно. В современных научных исследованиях такие объекты появляются все чаще и чаще, например, там, где физическая теория пытается

осознать особенности структурной и функциональной организации живых систем. Здесь имеется уже несколько p-адических (ультраметрических) моделей – модели динамики и функции белков, модели иерархической укладки ДНК в ядре клетки, модели иерархической сети нейронов мозга. Потребность в описании иерархически организованных систем возникает не только в "туманной" биологии, но и в вполне банальной полимерной физике – при описании, например, так называемой складчатой (фрактальной) полимерной глобулы. Особенно интригующими выглядят ультраметрические мотивы, недавно обнаруженные в статистических распределениях редких событий, которые, заметим, совершенно типичны для наблюдаемых в сложных системах. Сталкиваясь с системами подобного сорта, физическая теория оказывается перед выбором – остаться верной традиционному вещественному формализму, в рамках которого интерпретация физических наблюдаемых очевидна, но математическое описание оказывается безнадежным, или пытаться применить "нетрадиционный" формализм, в рамках которого аналитическая сторона дела выглядит много проще, но интерпретация физических наблюдаемых требует нетривиальных усилий. В этом контексте, актуальность развития p-адической математической физики, как инструмента построения физических моделей сложных систем, не вызывает сомнений. Тема диссертации Зеленова Е. И. актуальна не только в общематематическом контексте, но и в контексте современных междисциплинарных трендов развития теоретический физики.

Наибольшее место в диссертационной работе Зеленова Е. И. отведено p-адической квантовой механике. Им сформулирован и исследован ряд нетривиальных задач, относящихся к конструкции квантовой-механики с комплекснозначными волновыми функциями p-адического аргумента и ее свойствам. Столь же оригинальны рассмотрения, относящиеся к неприводимым представлениям и линейным бозонным каналам в p-адической квантовой теории, к построению p-адического индекса Маслова, p-адического аналога квантового дифференциала и связи p-адических и вещественных квантовых теорий.

Позволю себе допустить, что при всей кажущейся "абстрактности" p-адической квантовой механики, результаты именно этой части могут оказаться фундаментальными для понимания причин проявления ультраметрических структур в массивах данных, полученных из наблюдений за сложными системами.

Еще одна часть диссертации посвящена иерархическим динамическим системам, где, в частности, показано, что такие системы не обладают свойством перемешиваемости. Отсюда, например, становится понятным почему в иерархически организованных системах динамические процессы протекают, как правило, аномально медленно, и почему такое поведение является вполне универсальным. Еще одна интрига может заключаться в том, что отсутствие динамической перемешиваемости может приводить к локализации, которая в ряде сложных систем действительно наблюдаются.

Наконец, третья часть диссертации Зеленова Е. И. посвящена распределениям p-адических случайных величин и p-адическому броуновскому движению. В этой части диссертант построил аналог центральной предельной теоремы для случайных p-адических величин, которая, на мой взгляд, имеет фундаментальное значение для всех моделей, формулируемых в терминах ультраметрического случайного блуждания. Высокую теоретическою значимость имеют и результаты, полученные диссертантом в заключительном разделе диссертации, в котором построен p-адический винеровский процесс, приведен пример его реализации и определена p-адическая мера Винера.

Перейдем к рассмотрению содержания диссертации. Диссертация объемом 145 страниц состоит из Введения, 9-ти глав и списка литературы, состоящего из 90 наименований.

Во **Введении** диссертантом приведен обзор известных результатов, относящихся к изучаемой теме, представлена литература по теме диссертационного исследования, обоснована актуальность темы, сформулированы цели исследования и основные результаты исследования, дано описание структуры диссертации и приведены ее основные утверждения.

Первые **6 глав** посвящены p-адической модели квантовой механике. В **главе 1** изложена конструкция p-адического бозонного канала, построенного с использованием канонических коммутационных соотношений в форме Вейля. В **главе 2** дано определение p-адического индекса Маслова, рассмотрена унитарная динамика одномерной p-адической квантовой системы и показана ее тесная связь с действием симплектической группы на дереве Брюа-Титса. **Глава 3** посвящена p-адическому квантовому дифференциалу. Предложена отличная от известных конструкция фредгольмова модуля и, в частности, показано, что квантовый дифференциал от локально-постоянной функции является оператором конечного ранга. В **главе 4** рассмотрен вариант p-адической квантовой механики, в которой волновые функции являются функциями p-адического аргумента, принимающими значения в поле комплексных чисел. Исследованы спектральные свойства оператора координат и оператора импульса в этом случае и доказано, что спектры этих операторов есть канторово множество на вещественной прямой. В **главе 5** ставится и исследуется вопрос об унификации p-адической и вещественной квантовых теорий. Показывается, что алгебры коммутационных соотношений p-адической и вещественной квантовых механик пересекаются на конечном множестве образующих. В этой же главе диссертант ставит весьма интересный вопрос. Если результатом эксперимента является конечная последовательность рациональных чисел, то можно ли по каким-то ее свойствам определить, является система квантовой или классической? И такое свойство удается найти. В **главе 6** строится и изучается адельное обобщение коммутационных соотношений p-адической квантовой механики и показывается, что в

этом случае ограничение вакуумного состояния на рациональные числа приводит к коллапсу волновой функции и система приобретает классические свойства.

В **главе 7** строится качественная теория p-адических динамических систем. Предложено определение иерархической динамической системы и показано, что такие системы не обладают свойством перемешиваемости.

Глава 8 посвящена доказательству предельной теоремы для p-адических случайных величин. Исследована скорость сходимости суммы независимых одинаково распределенных p-адических случайных величин и доказан экспоненциальный характер сходимости таких сумм с показателем, равным третьей степени от параметра постоянной плотности. Приведена оценка вероятности больших уклонений.

Наконец, в **главе 9** рассмотрен p-адический винеровский процесс. Дано определение винеровского процесса и построена его явная реализация. Построена p-адическая мера Винера.

В целом, диссертация показывает, что Зеленову Е. И. несомненно удалось внести значительный вклад в развитие ряда разделов p-адической математической физики, получив при этом важные конкретные результаты.

Конструкция и доказательства диссертационной работы несомненно показывают высокий уровень технический подготовленности диссертанта и не менее высокий уровень его общематематической культуры. Диссертация изложена ясным языком и хорошо оформлена.

Из замечаний могу указать лишь на незначительное количество опечаток в тексте (например, стр. 81, 99 и 101), которые, впрочем, очевидны и не приводят к непониманию. Еще одно замечание - отсутствие в диссертации выделенного заключения, в котором были бы оценены дальнейшие перспективы развития направлений, представленных в диссертации. Все эти замечания, однако, нисколько не снижают высокой оценки самой диссертации.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в различных разделах математики, в частности, в математической физике и теории чисел. Вместе с тем, считаю возможным предположить высокий потенциал практической ценности данной диссертационной работы, который, на мой взгляд, может, прежде всего, проявиться в тех областях естествознания, где существует потребность в математически обоснованных моделях сложных систем.

Основные результаты диссертации новы, получены ее автором лично и обоснованы тщательными и подробными доказательствами. Список публикаций по теме диссертации насчитывает 17 наименований, большая часть из которых – публикации в центральных российских и зарубежных изданиях.

Результаты диссертации были представлены на 26-ти научных конференциях и семинарах как в России, так и за рубежом. Они вызвали значительный интерес специалистов и получили достаточное признание.

Полученные результаты могут быть использованы специалистами в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском Отделении Математического института РАН, Институте химической физики им. Н. Н. Семенова РАН, Физическом институте им. П. Н. Лебедева, других ведущих академических институтов, а также в Московском, Новосибирском, Санкт-Петербургском государственных университетах, Высшей школе экономике, и других высших учебных заведениях.

Диссертационная работа Е. И. Зеленова "Некоторые вопросы p-адической математической физики" соответствует специальности 01.01.03 – "математическая физика", по которой она представлена к защите. Автореферат подробно и полностью отражает содержание диссертации.

Диссертация Зеленова Е. И. "Некоторые вопросы p-адической математической физики", представленная на соискание ученой степени доктора наук является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение, что соответствует требованиям п. 7 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ от 30.01.2002 г. № 74 (с изменениями, внесенными Постановлением Правительства РФ от 20.06.2011 г. № 475), а ее автор, Зеленов Евгений Игоревич, заслуживает присуждения искомой ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03–математическая физика.

Официальный оппонент
Заведующий лабораторией теории сложных систем
Федерального государственного бюджетного учреждения
науки Институт химической физики им. Н. Н. Семенова
Российской академии наук,
доктор физико-математических наук (специальность
01.04.17)
10 октября 2018 г. (В. А. Аветисов)

Москва, Ленинский пр-кт 38 корп 2
тел . (495) 9397227
email: vladik.avetisov@gmail.com

Собственноручную подпись
сотрудника Аветисова В.А.
удостоверяю
Секретарь

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт химической физики им. Н.Н. Семенова Российской академии наук