1590

ОТЗЫВ

официального оппонента Шабата Георгия Борисовича

на диссертацию С.О. Горчинского "Вычеты и символы в K-теории и группы Чжоу" представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по научной специальности 01.01.06 – алгебра, логика и теория чисел.

В течение многих десятилетий и объекты алгебраической геометрии, и методы их исследования беспрестанно эволюционируют. Наблюдаются два встречных процесса: с одной стороны, возрастает абстракция (так, начиная с этальных топологий, возникших в 1960-х, алгебраическая геометрия занимается уже не только множествами с дополнительными структурами), а с другой – достигаются концептуальные упрощения. Эти упрощения возникают и в результате соединения ранее разрозненных понятий (очевидный пример чему доставляют восходящие к 19-му веку примеры приложений геометрических конструкций к теории чисел), и в результате освоения идей, возникших в других разделах математики.

Развитие и обобщение теорий когомологий алгебраических многообразий ярко иллюстрируют оба процесса. Современный этап развития этих теорий начинается с подмеченного А. Вейлем в 1940-х годах сходства между количествами точек диагональных гиперповерхностей над конечными полями и формулой Лефшеца для числа неподвижных точек эндоморфизма компактного многообразия; Вейль сформулировал аксиомы несуществующей тогда теории когомологий, которая объяснила бы эти явления. Такая теория (ℓ-адических когомологий) была построена А. Гротендиком двумя десятилетиями спустя. Однако, хотя П. Делинь в 1970-е установил все предсказанные Вейлем свойства этой теории, проблема не была закрыта – по крайней мере с точки зрения Гротендика. Во-первых, доказательство Делиня пошло не по намеченному Гротендиком пути, основанном на *стандартных гипотезах* об алгебраических циклах – эти гипотезы в основном остаются открытыми и сегодня. Во-вторых, математики получили не одну теорию когомологий, а много: помимо теории ℓ-адических когомологий, было в разное время

построено несколько других. Это привело Гротендика к идее обобщающей теории *мотивов* алгебраических многообразий; построение такой теории находится в настоящее время в состоянии бурного развития, и именно к этому направлению относится диссертация С.О. Горчинского.

Математические понятия, разрабатываемые и исследуемые в диссертации, трудны и высокотехничны (список литературы содержит 149 наименований). Принципиальная установка диссертанта, просматриваемая и в тексте диссертации, и в публикациях полная разработка фундаментальных теорий, обобщающих классические. Среди классических понятий, обобщённых в диссертации – вычеты, символы Гильберта и законы взаимности, проблема Кузена.

Существенная часть диссертации посвящена сравнению мотивов Чжоу, основанных на сопоставлении многообразию групп циклов его прямых произведений с другими многообразиями, и K-теоретических мотивов, построенных по группам Гротендика K_0 векторных расслоений – последние кратко называются K-мотивами. Соответствующие категории мотивов не связаны естественными функторами, и диссертант сосредотачивается на логических связях между указанными мотивами. Анализируется возможность выражения мотивов данного многообразия через мотивы многообразий меньшей размерности, в частности, через тензорные степени так называемого мотива Лефшеца (приведённого мотива проективной прямой, который в контексте K-мотивов изоморфен мотиву точки).

Перечислим центральные результаты диссертации.

1. Доказано, что рациональный мотив Чжоу гладких проективных трёхмерных многообразий с представимыми нуль-циклами раскладывается в прямую сумму прямых слагаемых в рациональных мотивах Чжоу кривых, подкрученных на степени мотива Лефшеца. Найден критерий того, что мотив Чжоу поверхности имеет лефшецев тип. Доказана лефшецевость мотивов Чжоу гладких трёхмерных многообразий, K-мотив которых имеет единичный тип.

2. В нулевой характеристике определён полярный комплекс алгебраического многообразия с коэффициентами в произвольном векторном расслоении; в случае гладкого многообразия доказано, что этот комплекс локально ацикличен в топологии Зарисского.

Доказано, что когомологии этого комплекса канонически изоморфны когомологиям исходного векторного расслоения, подкрученного на канонический пучок.

3. Построена теория *толстых инд-конусов* и развито её приложение к теории алгебр итерированных рядов Лорана; описаны непрерывные морфизмы этих алгебр. Получен критерий обратимости эндоморфизмов этих алгебр и найдена явная формула для обратного автоморфизма, являющаяся новой даже в одномерном случае.

4. Доказано, что многомерный символ Конту-Каррера, заданный естественной формулой для $\mathbb{Q}$-алгебр, однозначно продолжается до преобразования функторов на категории всех колец, причём это продолжение полилинейно и удовлетворяет соотношению Стейнберга. Доказана целочисленность коэффициентов в явной формуле этого символа для $\mathbb{Q}$-алгебр. Установлена связь между касательным пространством к K-группам Милнора и абсолютными кэлеровыми дифференциалами при условии слабой 5-стабильности. Доказано универсальное свойство n-мерного символа Конту-Каррера, утверждающее, что он порождает группу морфизмов групповых функторов из n-кратной группы петель $L^n K^{\mathrm{M}}_{n\,|\,|}$ группы Милнора в $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$; это универсальное свойство является новым даже в одномерном случае. Установлено, что многомерный символ Конту-Каррера совпадает с композицией граничных отображений для алгебраических K-групп.

Помимо приведённых результатов, диссертация содержит большое количество технически более сложных утверждений. Многие из них связываются с интересными проблемами и гипотезами.

В диссертации используются разнообразные методы алгебраической геометрии, гомологической алгебры, алгебраической K-теории и теории многомерных локальных полей. В работе гармонично сочетаются весьма абстрактные рассмотрения и интересные явные формулы. Главным результатом работы автор справедливо считает теорему 5.4.1, дающую принципиально новое концептуальное описание многомерного символа Конту-Каррера. Главы 3 и 4 представляют собой отдельные исследования, несомненно представляющие самостоятельный интерес; так, в главе 4 по существу разработано новое направление бесконечномерной аффинной геометрии.

Все приведенные результаты диссертации являются новыми. Они тщательно обоснованы и своевременно опубликованы в известных изданиях.

В целом диссертация является законченным и профессионально зрелым произведением, вносящим значительный вклад в один из самых актуальных разделов современной математики, в котором работают весьма многие сильнейшие специалисты. Автор выработал собственный стиль исследований, в котором на основе прекрасного знания современной литературы разрабатываются собственные теории, и при этом сохраняются их глубокие связи с классическими результатами.

Диссертация оформлена аккуратно и логически безупречно. Имеются лишь незначительные стилистические претензии к тексту: так, на стр. 4 имеется опечатка "Следующими по сложности являЕтся мотивы Артина", на стр. 5 автореферата говорится о "словаре МЕЖДУ вещественными и комплексными многообразиями". Автореферат соответствует содержанию диссертации.

Исходя из вышесказанного, я считаю, что диссертация С.О. Горчинского соответствует паспорту научной специальности 01.01.06 – алгебра, логика и теория чисел, отвечает требованиям пп. 9-14 Положения о присуждении учёных степеней, утверждённого постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 г. N 842, а её автор заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук
(специальность – 01.01.06)
профессор кафедры математики,
логики и интеллектуальных систем
в гуманитарной сфере
Института Лингвистики РГГУ

3 апреля 2019

Г.Б.Шабат
Москва 125267, Миусская пл.
д. 6, корп. 2, каб. 213
8(495) 250 63 29
e-mail: shabat@mccme.ru

Проректор по научной работе

О.В. Павленко

Начальник Управления по научной работе

_____ Н.А. Борисов