УТВЕРЖДАЮ
Директор ИППИ РАН
д.ф.-м.н., профессор РАН
_____ А. Н. Соболевский
«__» апреля 2019 г.

Отзыв ведущей организации

на диссертацию С. О. Горчинского «Вычеты и символы в K-теории и группы Чжоу», представленную на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Теория мотивов за последние несколько десятилетий прошла впечатляющий путь от мечты Гротендика об универсальной теории когомологий до доказательства гипотезы Блоха–Като об изоморфизме норменного вычета. Как это обычно бывает со сложными и глубокими теориями, чем больше результатов доказано, тем больше новых интересных и трудных вопросов возникает перед исследователями. В диссертации С.О. Горчинского разрабатываются новые методы в теории мотивов, а также получены разнообразные приложения к теории алгебраических многообразий и вычетам для алгебраических К-групп.

Диссертация состоит из введения, 5 глав и библиографии. Общий объем диссертации 246 страниц. Во введении приводятся мотивировки, излагается история изучаемых в диссертации вопросов, а также приведены основные результаты диссертации. В первой главе собраны предварительные сведения, а также приведены основные определения и обозначения, которые используются в дальнейшем.

Вторая глава посвящена мотивам Чжоу и К-мотивам. Предложен удобный критерий для того, что морфизм мотивов $M \to N$ происходит из изоморфизма $M \oplus M(Y) \cong N \oplus P$, где $M(Y)$ обозначает мотив многообразия Y. Это довольно техническое утверждение позволяет доказать несколько полезных фактов о группах Чжоу мотивов, прежде всего результат о том, когда мотив многообразия можно получить при помощи подкруток Лефшеца мотивов многообразий меньшей размерности. В частности, соображения размерности позволяют построить над алгебраически замкнутым полем аналог примера Суона, показывающего, что оценку из теоремы Форстера–Суона нельзя улучшить.

Также в главе 2 доказан следующий важный результат: если у трехмерного гладкого проективного многообразия нуль-циклы представимы, то мотив Чжоу этого многообразия раскладывается в прямую сумму степеней мотивов Лефшеца и прямых слагаемых в мотивах кривых, подкрученных на степени мотивов Лефшеца.

Далее полученные результаты парименяются для изучения мотивов Чжоу лефшецего типа и K-мотивов единичного типа. Во-первых, получен критерий того, что мотив поверхности имеет лефшецев тип. Во-вторых, этот критерий используется для построения так называемого геометрического фантома: это нетривиальная триангулированная подкатегория в производной категории когерентных пучков на проективном гладком ногообразии, у которой K-группа тривиальна. В приведенном примере построена фантомная подкатегория в категории когерентных пучков на четырехмерном многообразии. Наконец, при незначительных ограничениях на харатеристику основного поля доказано, что мотив многообразия размерности не больше трех с полным исключительным набором имеет лефшецев тип.

Глава три посвящена полярному комплексу для локально свободных пучков на алгебраическом многообразии. Вначале дается определение полярного комплекса и проверяется его корректность. Основной результат о полярном комплексе — это теорема сравнения: гомологии полярного комплекса расслоения выражаются через когомологии Зарисского этого расслоения, подкрученного на канонический пучок. В последней части этой главы исследуются связи полярного комплекса с модулями циклов Роста, отображением класса цикла из групп Чжоу в когомологии пучков дифференциальных форм, а также с комплексом Кузена.

В главе 4 доказываются основные технические результаты диссертации об итерированных рядах Лорана. Для их исследования используется изощренная техника толстых инд-конусов, то есть инд-аффинных схем специального вида. В качестве приложения этой техники дается полное описание гомоморфизмов между алгебрами итерированных рядов Лорана. В частности, дано описание обратимых эндоморфизмов таких алгебр.

В главе 5 доказывается главный результат диссертации. Сперва определяется многомерный символ Конту-Каррера и доказывается, что явная формула для этого многомерного символа задает ряд с целыми коэффициентами. Для доказательства используется техника толстых инд-конусов. Далее доказывается универсальное свойство для символа Конту-Каррера, из которого выводится, что этот символ совпадает с композицией граничных отображений для K-групп от алгебры итерированных рядов Лорана. При этом доказан новый, оригинальный результат о связи между касательным пространством к K-группам Милнора и дифференциальными формами. Этот результат представляет независимый интерес в алгебраической K-теории.

Замечания. Диссертация содержит ряд опечаток и неточностей. Например, определение мотивов Чжоу, которое приведено в начале первой главы, не слишком удачно, потому что возникают сложности с тем, чтобы определить прямую сумму мотивов, но, к сожалению, об этих сложностях автор умалчивает. В теореме 2.1.32 есть опечатка в основной формуле: вместо $P \otimes \mathbb{L}$ должно быть $P \otimes \mathbb{L}^2$. В автореферате эта формула приведена правильно. На стр. 39 и после в некоторых местах не уточнено, что рассматриваются этальные когомологии, а не когомологии Зарисского.

Вышесказанное нисколько не уменьшает научную ценность работы. Все результаты являются новыми, интересными и важными.

Заключение. Диссертация С.О Горчинского посвящена различным вопросам алгебраической геометрии и теории чисел, в которых удалось продвинуться благодаря тонким мотивным и K-теорным методам. Автору диссертации удалось достичь сразу нескольких амбициозных целей. Прежде всего стоит отметить оригинальную конструкцию геометрического фантома и решение проблемы целочисленности для многомерного символа Конту-Каррера. Кроме того, автором разработны мощные теоретические инструменты: полярный комплекс и теория толстых инд-конусов.

Результаты диссертации опубликованы в 11 статьях в ведущих рецензируемых изданиях из списка ВАК, и прошли апробацию на множестве авторитетных отечественных и международных семинарах и конференциях. Все результаты снабжены подробными и полными доказательствами. Результаты изложены четко, полно и строго. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации могут быть рекомендованы для использования в работе специалистов по алгебраической геометрии, работающих, например, в МИАН, ИППИ РАН, ПОМИ РАН, на матфаке НИУ ВШЭ, матмехе СПбГУ.

На основании вышеизложенного можно заключить, что диссертация С.О. Горчинского «Вычеты и символы в K-теории и группы Чжоу» удовлетворяет всем требованиям ВАК и паспорту специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел, а ее автор, Горчинский Сергей Олегович, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико–математических наук.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании семинара лаборатории 13 федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук (ИППИ РАН) 3 апреля 2019 г.

С.н.с. лаборатории 13,
секретарь семинара лаборатории 13,
кандидат физико-математических наук С.Ю. Рыбаков

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук (ИППИ РАН),
127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, д.19 стр. 1.
Телефон: +7 (495) 650-42-25
Факс: +7 (495) 650-05-79
Эл. почта: director@iitp.ru