ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Горчинский Сергей Олегович

УДК: 512.7

ВЫЧЕТЫ И СИМВОЛЫ В K-ТЕОРИИ И ГРУППЫ ЧЖОУ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2018

Содержание

Введение 3

Глава 1. Предварительные сведения 25

1.1. Мотивы Чжоу и K-мотивы 25

1.2. Различные K-группы 32

1.3. Производные категории когерентных пучков 44

1.4. Логарифмические формы 52

1.5. Итерированные ряды Лорана 60

Глава 2. Мотивы Чжоу и их приложения 72

2.1. Мотивы Чжоу многообразий с представимыми нуль-циклами 72

2.2. Мотивы Чжоу лефшецева типа и K-мотивы единичного типа 90

2.3. Геометрические фантомные категории 96

2.4. Мотивы Чжоу трехмерных многообразий с единичным K-мотивом 103

Глава 3. Полярный комплекс для локально свободных пучков 110

3.1. Формулировка основного результата 110

3.2. Доказательство основного результата 114

3.3. Дополнительные свойства полярных цепей 134

Глава 4. Геометрический подход к итерированным рядам Лорана 140

4.1. Обозначения и терминология 140

4.2. Итерированная группа петель группы $\mathbb{G}_m$ 141

4.3. Вспомогательные результаты про инд-аффинные схемы 147

4.4. Геометрические свойства некоторых итерированных групп петель 162

4.5. Непрерывные гомоморфизмы между алгебрами итерированных рядов Лорана 175

Глава 5. Многомерный символ Конту-Каррера 197

5.1. Построение многомерного символа Конту-Каррера 197

5.2. Явные формулы для многомерного символа Конту-Каррера 213

5.3. Касательное пространство к K-группам Милнора 223

5.4. Универсальное свойство многомерного символа Конту-Каррера 231

Список работ, в которых опубликованы основные результаты диссертации 237

Список литературы 238

Введение

Актуальность темы. Теория мотивов гладких проективных алгебраических многообразий была задумана Гротендиком, ему же принадлежат первые шаги в становлении этой теории. Основы теории мотивов были изложены в статье Манина [95]. С тех пор теория мотивов интенсивно развивалась, особенно в контексте групп Чжоу и алгебраической K-теории, в работах многочисленных авторов: Блох, Делинь, Бейлинсон, Фридландер, Кольо-Телен, Суле, Суслин, Меркурьев, Панин, Яннсен, Вуазен, Рост и много других. Подробный обзор состояния теории мотивов до появления триангулированных категорий мотивов содержится в двухтомнике [65]. Настоящая революция в теории мотивов произошла в результате прорыва, совершенного Воеводским, создавшим триангулированную категорию мотивов и стабильную гомотопическую мотивную категорию. Кульминацией этого развития явилось полученное в циклах работ Воеводского и Роста доказательство знаменитой гипотезы об изоморфизме норменного вычета, высказанной в частном случае Милнором, а в общем случае Блохом и Като.

Мотив многообразия — это то общее, что стоит за его конкретными реализациями в виде различных когомологий этого многообразия, возможно, с дополнительными структурами, такими как структура Ходжа, представление группы Галуа и т.д. Терминологию можно отчасти объяснить тем, что мотив мелодии — это то общее, что стоит за конкретными реализациями мотива на различных музыкальных инструментах. При этом мотив многообразия понятие столь же абстрактное, сколь и мотив мелодии.

Теория мотивов является категорным подходом к описанию различных инвариантов алгебраических многообразий когомологического характера. Помимо когомологий Бетти или этальных когомологий к таким инвариантам относятся группы Чжоу, группы Гротендика векторных расслоений, группа Брауэра и множество других инвариантов. Часто описание мотива многообразия дает возможность проще и лучше понять структуру подобных инвариантов. В свою очередь, это помогает ответить на многие геометрические вопросы, связанные, например, с рациональностью многообразий, см. в этом направлении пионерскую работу Вуазен [145].

Тем не менее, мир мотивов до сих пор хранит в себе множество тайн и загадок. Это объясняется тем, что в описании групп Чжоу алгебраических многообразий на данный момент имеется несравнимо больше открытых вопросов, чем известных фактов. Каждое новое существенное утверждение о группах Чжоу и мотивах требует значительных усилий и не бывает простым.

Точное определение категории мотивов зависит от выбора так называемой глобальной теории пересечений, каждая из них приводит к своей категории мотивов. Среди различных категорий мотивов можно выделить категорию мотивов Чжоу, построенную по группам Чжоу, и категорию K-мотивов, построенную по группам Гротендика K_0 векторных расслоений. Мотив Чжоу гладкого проективного многообразия контролируется алгебраическими циклами, точнее, группами Чжоу его произведений с другими многообразиями. В то же время, K-мотив гладкого проективного многообразия контролируется векторными расслоениями, точнее, группами K_0 его произведений с другими многообразиями.

Один из главных принципов теории мотивов заключается в том, что мотивы многообразий можно раскладывать на меньшие части, из которых потом можно составлять мотивы других многообразий. Данный метод позволяет весьма плодотворно работать с когомологическими инвариантами многообразий. Ясно, что в таком контексте важно понимать условия, при которых мотив многообразия раскладывается на более простые части. К таким простейшим частям относятся мотив точки и мотив проективной прямой, точнее, приведенный мотив проективной прямой, называемый мотивом Лефшеца. Следующими по сложности является мотивы Артина, т.е. мотивы нульмерных многообразий (которые могут быть нетривиальны в случае не алгебраически замкнутого базового поля), мотивы кривых, поверхностей и т.д. Возникает вопрос о том, как установить, что мотив данного многообразия имеет лефшецев тип, т.е. состоит из тензорных степеней мотива Лефшеца. Помимо простых геометрических аспектов, такой вопрос имеет глубокую арифметическую природу, поскольку тесно связан с кручением в группах Чжоу, в том числе в группе нуль-циклов, над незамкнутыми полями. Например, мотив Чжоу коники имеет лефшецев тип тогда и только тогда, когда она имеет точку над базовым полем. Другой вопрос такого сорта заключается в том, как установить, что мотив данного многообразия состоит из мотивов многообразий меньшей размерности. Ряд результатов диссертации посвящен именно этим вопросам. Отметим, что данные результаты, а также развитые при их получении методы, нашли дальнейшее интенсивное развитие в серии работ Виала [138, 139, 140].

Кроме того, естественная проблема заключается в сравнении разных мотивов, в частности, мотива Чжоу и K-мотива, одного и того же проективного многообразия. Между категориями мотивов Чжоу и K-мотивов нет естественных функторов, что обуславливает нетривиальность данной проблемы. Заметим, что мотив Лефшеца в контексте K-мотивов изоморфен мотиву точки. Это отражает тот фундаментальный факт, что в некоммутативной геометрии нет теории весов. Возникает вопрос о равносильности того, что мотив Чжоу многообразия имеет лефшецев тип и того, что его K-мотив имеет единичный тип, т.е. равен

кратной прямой сумме единичного K-мотива точки с самим собой. В работе Бернардара и Табуады [10] был предложен пример, показывающий, что в общем случае данные условия не равносильны. С другой стороны, Виал [141] получил положительный ответ на этот вопрос для поверхностей, в случае, когда для них существует полный исключительный набор, при помощи тонкой техники работы с исключительными наборами на поверхностях, развитой в работах Перлинга [116] и Кузнецова [87]. В диссертации совершенно другими методами полностью исследуется случай произвольных трехмерных многообразий, при этом общий результат для поверхностей получается существенно более простым способом, чем в работе [141].

Важно отметить, что K-мотив многообразия определяется производной категорией когерентных пучков на данном многообразии и тесно связан с ее описанием, являясь тем самым важным объектом для рассмотрения в контексте некоммутативной геометрии. При изучении производных категорий алгебраических многообразий естественным образом возникает понятие допустимой подкатегории, дающее адекватный способ раскладывать производные категории на более простые части, подобно разложению мотивов. Для любой допустимой подкатегории корректно определен ее K-мотив. Важный вопрос заключается в исследовании того, насколько K-мотив "видит" исходную допустимую подкатегорию. Данная проблема играет значительную роль при поиске полных исключительных наборов на многообразиях, и долгое ответ на вопрос оставался для экспертов открытым. В частности, стоит вопрос о построении фантомов, т.е. нетривиальных допустимых подкатегорий с нулевым K-мотивом. В частности, для фантомов обращается в нуль их группа Гротендика. Рядом авторов были построены так называемые квазифантомы, т.е. допустимые подкатегории с конечной группой Гротендика, см. работы Бенинга–Граф фон Бетмера–Сосны [15], Алексеева–Орлова [1], Галкина–Шиндера [44]. В диссертации представлена первая известная конструкция фантома. Вскоре после того, как данный результат был опубликован, появилась работа Бенинга–граф фон Бетмера–Кацаркова–Сосны [16], в которой тоже был построен фантом, но совершенно другим методом. Недавно появилась еще одна конструкция фантома в работе Чо–Ли [28].

При построении различных теорий когомологий алгебраических многообразий один из возможных подходов заключается в следующей аналогии с сингулярными гомологиями вещественных многообразий, которая рассматривалась многими авторами, включая Арнольда, Виттена [148], Дональдсона–Томаса [35], Френкеля–Хесина [39] и Рослого–Хесина [76], [77].

Аналогия основана на словаре между вещественными и комплексными многообразиями, отправной точкой которого является соответствие между дифференциалом де Рама и

дифференциалом Дольбо. При этом когомологии де Рама плоских расслоений на вещественных многообразиях соответствуют когомологиям Дольбо голоморфных расслоений на комплексных многообразиях. Для вещественных многообразий теорема де Рама сравнивает когомологии де Рама и сингулярные когомологии. Применяя данный словарь, можно увидеть, что ориентированная сингулярная цепь соответствует комплексному подмногообразию с логарифмической мероморфной формой старшей степени на нем, или, обобщая, конечному набору таких данных. Такой объект называется полярной цепью. Взятие границы ориентированных сингулярных цепей соответствует рассмотрению вычета логарифмических форм. Возникающий при этом аналог сингулярного комплекса назван полярным комплексом. Теорема Стокса об интегралах гладких форм по ориентированным сингулярным цепям с краем соответствует теореме Коши об интегралах логарифмических форм и их вычетах. Частный случай этой теоремы для одномерной полярной цепи, представленной комплексной плоскостью с координатой z вместе с стандартной логарифмической формой dz/z, совпадает с теоремой Помпейю, утверждающей, что $(\pi z)^{-1}$ является фундаментальным решением для дифференциального оператора Коши–Римана $\partial/\bar{\partial}z$.

Естественный вопрос заключается в том, соответствует ли при данной аналогии теорема де Рама корректному математическому утверждению. Иными словами, вопрос заключается в описании гомологий полярного комплекса в терминах когомологий расслоений. В простейшем частном случае описание гомологий полярного комплекса приобретает следующую классическую интерпретацию: дивизор с комплексными коэффициентами на компактной римановой поверхности является вычетом логарифмической 1-формы тогда и только тогда, когда степень дивизора равна нулю. Данную степень, т.е. комплексное число, следует интерпретировать, как первые когомологии пучка голоморфных 1-форм. В многомерном случае в работе Рослого–Томаса–Хесина [80] было показано, что препятствия к тому, чтобы представить одну полярную цепь как вычет другой полярной цепи, лежат в когомологиях пучка голоморфных форм старшей степени в случае, когда полярные цепи рассматриваются на гладком проективном комплексном многообразии.

С другой стороны, мотивировкой для развития теории полярных гомологий является знаменитая теорема Виттена [147], утверждающая, что корреляторы в вещественной теории Черна–Саймонса тесно связаны с инвариантами узлов и зацеплений. Виттеном [148] было указано на возможность существования голоморфного аналога подобного явления. Это было доведено до точного результата в работах Рослого–Хесина [77], [78] в терминах зацеплений полярных циклов, т.е. полярных цепей с нулевой границей.

Заметим, что для построения ненулевых полярные циклов, надо располагать запасом ненулевых голоморфных форм старших степеней на подмногообразиях, которых часто может не быть. Однако если рассматривать формы с коэффициентами в расслоениях, то мир становится гораздо богаче. Например, на проективной прямой в проективном трехмерном пространстве нет регулярных дифференциальных 1-форм, в то время как на ней однозначно с точностью до константы определена регулярная дифференциальная 1-форма со значением в расслоении $\mathcal{O}(2)$, что дает полярный цикл. В работе Атьи [6] был определен индекс зацепления проективных прямых в проективном трехмерном пространстве, существование которого на самом деле обусловлено тем, что указанный выше полярный цикл является границей в полярном комплексе. Последнее обстоятельство связано с обращением в нуль вторых когомологий пучка $\mathcal{O}(2) \otimes \omega_{\mathbb{P}^3} \simeq \mathcal{O}(-2)$ на $\mathbb{P}^3$. В работе [6] было показано, что такой индекс зацепления, являющийся сечением естественно определенного линейного расслоения на конфигурационном пространстве пар прямых в $\mathbb{P}^3$, может быть использован для построения фунции Грина некоторого оператора Лапласа. Кроме того, было показано, что данное сечение голоморфно на пространстве пар непересекающихся прямых и имеет полюс первого порядка вдоль дискриминантного дивизора, образованного парами пересекающихся прямых. Отметим параллель с тем, что классический, вещественный индекс зацепления является локально постоянной функцией на конфигурационном пространстве, испытывающей скачок на границе.

Итак, видна необходимость построения полярных цепей с коэффициентами в векторном расслоении и в получении соответствующего аналога теоремы да Рама. С одной стороны, такая теорема должна давать препятствия для представления набора логарифмических форм на подмногообразиях с коэффициентами в расслоении как вычета другого набора такого же вида. С другой стороны, такая теорема дает новую интерпретацию когомологий расслоений в терминах логарифмических форм на подмногообразиях. Внутренняя сложность подобной теоремы обусловлена тем, что в случае нетривиального расслоения ее можно интерпретировать как утверждение о локальной точности комплекса Герстена для некоторого непостоянного модуля циклов Роста над многообразием, в то время как такая локальная точность известна лишь для постоянных модулей циклов Роста. Всем этим вопросам посвящена значительная часть диссертации. Отметим, что наши методы совершенно отличаются от методов из [80], где был рассмотрен случай тривиального расслоения.

Для комплексов Герстена многообразий, построенных по алгебраическим K-группам, определено отображение прямого образа относительно собственных морфизмов. В частности, это влечет за собой закон взаимности Вейля для кривых, а также многомерные законы

взаимности. Используя работу Томасона–Тробо [135], несложно показать, что имеется также обобщение законов взаимности на схему вида $X \otimes_k A$, где A является произвольной k-алгеброй (это было записано в работе Музыкантова–Йом Дина [104]). А именно, пусть F является полным флагом на неприводимом многообразии X над полем k, т.е. F является неуплотняемой цепочкой неприводимых подмногообразий $F = (F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_{n-1} \subset F_n = X)$, где $n = \dim(X)$. Граничные отображения для алгебраических K-групп вдоль флага $F \times_k A$ на $X \times_k A$ определяют символы

$$(\cdot, \ldots, \cdot)_F \ : \ K^M_{n+1}\big(k(X) \otimes_k A\big) \longrightarrow K_{n+1}\big(k(X) \otimes_k A\big) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \ldots \xrightarrow{\partial_2} K_1\big(k(F_0) \otimes_k A\big) \xrightarrow{\mathrm{Nm}} K_1(A) \xrightarrow{\det} A^* .$$

При этом закон взаимности заключается в том, что некоторое (конечное) произведение таких символов равно 1. Таким образом, для конкретного применения законов взаимности, нужно иметь формулу для символов $(\cdot, \ldots, \cdot)_F$.

Заметим, что определение данных символов формально локально, т.е. они пропускаются через вложение $k(X) \otimes_k A \to A((t_1)) \ldots ((t_n))$, заданное пополнением во флаге F, и композицию для рядов Лорана (для простоты мы будем предполагать, что флаг регулярен)

$$K^M_{n+1}\big(A((t_1)) \ldots ((t_n))\big) \longrightarrow K_{n+1}\big(A((t_1)) \ldots ((t_n))\big) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \ldots \xrightarrow{\partial_2} K_1(A) \xrightarrow{\det} A^* .$$

Мы видим, что важный вопрос заключается в нахождении явной формулы для данных символов, являющихся композицией граничных отображения для алгебраических K-групп колец итерированных рядов Лорана.

В одномерной ситуации такая формула была найдена Конту-Каррером [30], [31], см. также работу Делиня [34], и теперь называется символом Конту-Каррера. В двумерной ситуации аналогичные результаты были получены Осиповым и Жу [111]. В многомерной ситуации наличие явной формулы оставалось открытым вопросом, пока не были получены соответствующие входящие в диссертацию результаты.

Специалистам, занимающимся подобными адельными вопросами, хорошо известно, что обычно при обобщении с одномерного случая на многомерный сложность коренным образом возрастает, так как многие основные одномерные факты перестают быть верными в двумерной ситуации. В данном случае это связано со следующим обстоятельством. В одномерной ситуации любой элемент из группы $A((t))^*$ разлагается единственным образом в произведение степени элемента t, элемента из группы A^*, и бесконечного произведения элементов вида $1 - u_i t^i$, где $i \neq 0$, $u_i \in A$. Это также показывает, что функтор $L\mathbb{G}_m(A) := A((t))^*$ на категории колец представим инд-плоской инд-аффинной схемой. Однако, как объясняется в [111, § 3.4], уже в двумерной ситуации неясно, как мог бы работать такой подход, а именно, неизвестно, раскладывается ли произвольный элемент из группы $A((t_1))((t_2))^*$ в произведение

элементов вида $1 - u_{i,j}t_1^i t_2^j$. Также неизвестно, представлен ли функтор $L^2\mathbb{G}_m$ инд-плоской инд-аффинной схемой. Для того, чтобы обойти эту проблему в многомерной ситуации, в диссертации развивается принципиально новый метод работы с инд-аффинными схемами, а именно, теория так называемых толстых инд-конусов.

Цель работы. Нахождение способа представить мотив Чжоу в виде прямого слагаемого в более простом мотиве Чжоу. Приложение такого способа к выражению рационального мотива Чжоу трехмерного многообразия с представимыми нуль-циклами через рациональные мотивы Чжоу кривых. Получение при помощи такого способа нового критерия для мотивов Чжоу лефшецева типа, а также нового критерия для K-мотивов единичного типа. Развитие новых методов установления лефшецевости мотивов Чжоу при помощи теоремы Меркурьева–Суслина. Приложение данных методов к построению геометрических фантомов. Приложение данных методов к доказательству лефшецевости мотивов Чжоу трехмерных многообразий с K-мотивом единичного типа. Развитие теории полярных комплексов с коэффициентами в расслоениях на гладких алгебраических многообразиях. Доказательство аналога теоремы де Рама, т.е. установление связи между полярными гомологиями с коэффициентами в расслоении и когомологиями данного расслоения, подкрученного на канонический пучок. Итерпретация полярных гомологий в терминах модулей циклов Роста. Приложение полярных гомологий к новому построению отображения класса цикла из групп Чжоу в когомологии пучков дифференциальных форм. Нахождение нового геометрического подхода к работе с n-кратными группами петель, обходящего проблему отсутствия инд-плоского представления для итерированной мультипликативной группы при $n \geqslant 2$. Описание непрерывных гомоморфизмов между алгебрами итерированных рядов Лорана. Нахождение критерия обратимости для таких эндоморфизмов. Доказательство того, заданный естественной явной формулой рациональный многомерный символ Конту-Каррера продолжается на все кольца. Доказательство однозначности такого продолжения. Установление целочисленности явной формулы для рационального многомерного символа Конту-Каррера. Нахождение явной формулы для многомерного символа Конту-Каррера для всех колец. Описание касательного пространства к K-группам Милнора в терминах абсолютных кэлеровых дифференциалов. Доказательство универсального свойства для многомерного символа Конту-Каррера. Сравнение его с композицией граничных отображений для алгебраических K-групп.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

1. Доказано, что рациональный мотив Чжоу трехмерных многообразий с представимыми нуль-циклами раскладывается в прямую сумму прямых слагаемых в рациональных мотивах Чжоу кривых, подкрученных на степени мотива Лефшеца. Найден критерий того, что мотив Чжоу поверхности имеет лефшецев тип. При помощи данного критерия построен геометрический универсальный фантом, являющийся допустимой подкатегорией в произведении двух поверхностей общего типа, для которых выполнена гипотеза Блоха, для которых порядки кручения в группах Пикара взаимно просты и которые обладают квазифантомами. Показано, что если мотив Чжоу гладкого проективного многообразия имеет лефшецев тип, то его K-мотив имеет единичный тип. Для многообразий размерности не выше 3 доказана обратная импликация (при этом предполагается, что характеристика базового поля не равна 2). В частности, установлена лефшецевость мотивов Чжоу гладких проективных трехмерных многообразий с полным исключительным набором.

2. Определены полярные цепи со значениями в векторном расслоении для произвольного алгебраического многообразия над полем характеристики нуль, а также построен соответствующий полярный комплекс векторного расслоения. Для гладкого многообразия доказано, что полярный комплекс векторного расслоения локально ацикличен в топологии Зарисского. Для этого найдена подходящая модификация трюка Квиллена в алгебраической K-теории. Из локальной ацикличности полярного комплекса выведен фундаментальный факт, утверждающий, что когомологии полярного комплекса векторного расслоения канонически изоморфны когомологиям данного векторного расслоения, подкрученного на канонический пучок. При помощи этого изоморфизма найдена новая конструкция отображения класса цикла из групп Чжоу в когомологии пучков дифференциальных форм.

3. Построена принципиально новая техника работы с инд-аффинными схемами, для которых, возможно, нет инд-плоского представления. Инд-плоские схемы заменяются в этом методе на так называемые толстые инд-конуса. Доказано, что итерированная мультипликативная группа петель представлена произведением толстого инд-конуса и инд-плоской схемы. Дано полное описание непрерывных гомоморфизмов между алгебрами итерированных рядов Лорана. При помощи теории толстых инд-конусов получен критерий обратимости таких эндоморфизмов, причем для обратного автоморфизма найдена явная формула, являющаяся новой даже в одномерном случае.

4. Доказано, что рациональный многомерный символ Конту-Каррера, заданный естественной формулой, однозначно продолжается до морфизма функторов на категории всех колец. При этом показано, что продолжение полилинейно, и что для него выполняется соотношение Стейнберга. При этом многомерный символ Конту-Каррера над всеми кольцами построен явно. При помощи теории толстых инд-конусов доказана целочисленность коэффициентов в явной формуле для рационального многомерного символа Конту-Каррера. Исследована связь между многомерным символом Конту-Каррера и многомерным аналогом спаривания Витта из многомерной теории полей классов. Доказано, что построенное Блохом отображение задает изоморфизм между касательным пространством к K-группам Милнора и абсолютными кэлеровыми дифференциалами при выполнении условия слабой 5-стабильности для рассматриваемого кольца. Доказано универсальное свойство многомерного символа Конту-Каррера, утверждающее, что он является порождающей циклической группы всех возможных морфизмов групповых функторов из $L^n K^M_{n+1}$ в $\mathbb{G}_m$.

Методы исследования. В работе используются методы теории мотивов Чжоу, групп Чжоу, алгебраической K-теории, теории инд-схем, методы работы с разрешениями особенностей и общие методы теории многомерных локальных полей. Кроме того, для получения ряда существенных результатов диссертации был развит принципиально новый метод работы с инд-аффинными схемами, а именно, теория толстых инд-конусов.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в алгебраической геометрии, некоммутативной геометрии, арифметической геометрии, алгебраической K-теории и теории чисел.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на семинаре отдела алгебры и отдела алгебраической геометрии (семинар И. Р. Шафаревича) и общеинститутском семинаре “Математика и ее приложения” Математического института им. В. А. Стеклова, семинаре “Глобус” Независимого московского университета, семинаре “Алгебро-геометрические методы в интегрируемых системах и квантовой физике” Моковского физико-технического университета, семинаре “Узлы и теория представлений” механико-математического факультета МГУ, семинаре Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, коллоквиуме Исследовательской лаборатории им. П. Л. Чебышева (Санкт-Петербург), семинаре по алгебраической геометрии Университета Цюриха (Швейцария), семинаре “Algebra, Zahlentheorie und algebraische Geometrie” Университета Фрайбурга (Германия), семинаре “Géométrie et analyse” Математического института Марселя (Франция), семинаре по

теории чисел Математического института Бордо (Франция), на семинарах “Autour des cycles algébriques” и “Géométrie algébrique” Математического института Жюссье (Париж, Франция), семинаре по алгебре Университета Индианы (Блумингтон, США), семинаре Института физики и математики Вселенной (Кашива, Япония), а также на международных конференциях, в том числе:

— летняя школа-конференция по проблемам алгебраической геометрии и комплексного анализа, 30 мая–4 июня 2008, ЯГПУ, Ярославль,

— международная конференция “Finiteness for Motives and Motivic Cohomology”, 9–13 февраля 2009, Университет Регенсбурга, Германия,

— летняя школа-конференция по проблемам алгебраической геометрии и комплексного анализа, 11–16 мая 2009, ЯГПУ, Ярославль,

— международная конференция “Workshop on Integrable Systems, Random Matrices, Algebraic Geometry and Geometric Invariants”, 7–10 февраля 2011, МИАН, Москва,

— международная конференция “Instantons in complex geometry”, 14–15 марта 2011, НИУ ВШЭ и МИАН, Москва,

— международная конференция “Russian–German conference on higher-dimensional complex analysis”, 27 февраля–2 марта 2012, МИАН, Москва,

— мемориальная конференция “Алгебраическая и дифференциальная геометрии Андрея Тюрина”, 24–26 октября 2012, МИАН, Москва,

— международная конференция “Геометрия алгебраических многообразий”, посвященная памяти В. А. Исковских, 22–25 октября 2013, МИАН, Москва,

— международная конференция “Caucasian Mathematics Conference CMC I”, 5–6 сентября 2014, Тбилиси, Грузия,

— международная конференция “Zeta functions 5”, Лаборатория Понселе, 1–5 декабря 2014, Москва,

— традиционная зимняя сессия МИАН–ПОМИ, посвященная теме “Алгебраическая геометрия, K-теория и мотивы”, 18–20 декабря 2014, ПОМИ РАН, Санкт-Петербург,

— международная конференция “Magadan Algebraic Geometry International Conference”, 6–12 декабря 2015, Магадан,

— международная конференция “Arithmetic and Geometry: Ten years in Alpbach”, 26 июня–1 июля 2015, Альпбах, Австрия,

— международная конференция “Zeta functions 6”, 14–18 декабря 2015, Лаборатория Понселе, Москва,

— международная конференция “Informal Geometry/Topology workshop”, 16–19 января 2016, SwissMAP, Бельальп, Швейцария,

— международная конференция “Motives, Periods and L-functions”, 10–12 апреля 2017, НИУ ВШЭ, Москва,

— международная конференция “Algebraic Geometry and its Applications”, 28 мая–2 июня 2018, Международный институт им. Леонарда Эйлера, Санкт-Петербург,

— международная конференция “Motives and their applications”, 10–14 сентября 2018, Международный институт им. Леонарда Эйлера, Санкт-Петербург.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах автора, список которых приведен в диссертации отдельно. Все относящиеся к диссертации результаты в совместных работах принадлежат автору.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, разбитых на параграфы, и списка литературы.

Содержание работы. Во введении приводится краткий обзор ранее известных результатов и результатов диссертации.

В первой главе приводятся все необходимые предварительные сведения, которые будут использоваться в остальных частях диссертации. За исключением § 1.5, а также предложения 1.4.11, все факты в этой главе хорошо известны.

В § 1.1 напоминаются определения и известные факты, относящиеся к мотивам Чжоу и K-мотивам. В частности, предложение 1.1.8 в § 1.1.2 утверждает, что из отсутствия кручения в K_0 следует отсутствие кручения в первой группе Чжоу. В § 1.1.4 объясняется эквивалентность между категорией рациональных K-мотивов и категорией, состоящей из рациональных мотивов Чжоу с морфизмами во все подкрутки на целые степени мотива Лефшеца.

Далее в § 1.2 рассматриваются K-группы Милнора, алгебраические K-группы, а также топологические и этальные K-группы. В 1.2.1 мы определяем K-группы Милнора $K_n^M(R)$ кольца R как фактор тензорной алгебры группы его обратимых элементов R^* по двустороннему идеалу, порожденному соотношением Стейнберга. В 1.2.2 мы напоминаем, следуя Грейсону [54] и Като [70], конструкцию граничного отображения для алгебраических K-групп $\partial\colon K_{n+1}\big(A((t))\big) \to K_n(A)$ и показываем его функториальность, где $A((t)) = A[[t]][t^{-1}]$ является кольцом рядов Лорана над A. В § 1.2.3 приводятся хорошо известные факты о K-когомологиях и спектральной последовательности Брауна–Герстена. Мы напоминаем в § 1.2.4 вытекающую из теоремы Меркурьева–Суслина точную последовательность (1.2.15), связывающую первые K-когомологии, третие этальные когомологии и кручение во второй

группе Чжоу. В § 1.2.4 мы обсуждаем спектральную последовательность Атьи–Хирцебруха для топологических K-групп многообразий над $\mathbb{C}$ и этальных K-групп многообразий над сепарабельно замкнутым полем. Лемма 1.2.23 утверждает, что спектральная последовательность Атьи–Хирцебруха вырождается для гладких проективных трехмерных многообразий.

В § 1.3 обсуждаются K-мотивы в контексте производных категорий когерентных пучков. После сжатого описания допустимых подкатегорий в § 1.3.1, мы объясняем в § 1.3.2 как для них строятся K-мотивы. В § 1.3.3 вводятся понятия фантомов и квазифантомов, см. определение 1.3.4, а в лемме 1.3.5 приводится известный подход к построению (квази)фантомов для поверхностей общего типа, удовлетворяющих гипотезе Блоха. Также в теоремах 1.3.6, 1.3.7 и 1.3.8 приводятся примеры таких построений квазифантомов из работ других авторов.

Мы приводим общие свойства логарифмических форм в § 1.4. В § 1.4.1 определяются сами логарифмические формы, а также отображение вычета для них. В леммах 1.4.2 и 1.4.4 в § 1.4.2 обсуждается обратный образ и след для логарифмических форм, соответственно. Мы приводим в § 1.4.3 полезные для нас в дальнейшем факты о разрешении особенностей многообразий над полем нулевой характеристики. В предложении 1.4.11 дано доказательство логарифмического варианта теоремы Грауэрта–Рименшнайдера о производном прямом образе пучка старших дифференциальных форм с полюсами первого порядка вдоль дивизора с простыми нормальными пересечениями. Отметим, что наше доказательство этого факта чисто алгебраическое.

§ 1.5 содержит общее введение в кольца итерированных рядов Лорана $\mathcal{L}^n(A)$ от n переменных над произвольным кольцом A. Оригинальность нашего подхода заключается в систематическом использовании некоторых явно определенных подмножеств $\mathbb{Z}^n_\lambda \subset \mathbb{Z}^n$, где λ принадлежит направленному множеству Λ_n, состоящему из специальных наборов целозначных функций, см. детали в § 1.5.1. Приведенные комбинаторные факты о множествах $\mathbb{Z}^n_\lambda$, см. лемму 1.5.1, позволяют эффективно применять эти множества к описанию различных важных свойств топологии на кольце $\mathcal{L}^n(A)$ в § 1.5.2. Кроме того, мы даем явное описание в предложении 1.5.9 в § 1.5.3 кольца ограниченных по степени элементов $\mathcal{L}^n(A)^0$ в $\mathcal{L}^n(A)$, а также его идеала топологически нильпотентных элементов $\mathcal{L}^n(A)^\sharp$. В § 1.5.4 приводятся элементарные свойства естественных фактормодулей $\widetilde{\Omega}^i_{\mathcal{L}^n(A)}$ модулей абсолютных дифференциальных форм $\Omega^i_{\mathcal{L}^n(A)}$.

Во второй главе мы доказываем различные утверждения о мотивах Чжоу, K-мотивах, а также приводим их приложения.

В § 2.1 мы изучаем мотивы Чжоу многообразий, для которых нуль-циклы или, более обще, алгебраические циклы могут быть запараметризованы в правильном смысле нуль-циклами на многообразиях меньшей размерности. В § 2.1.1 мы приводим один удобный способ представить мотив Чжоу M в виде прямого слагаемого в других мотивах Чжоу см. предложение 2.1.6. У данного способа есть несколько полезных приложений, см. следствия 2.1.10, 2.1.12. В § 2.1.2 при помощи этих утверждений мы доказываем важный факт, теорему 2.1.24. Она утверждает, что если для равноразмерного гладкого проективного многообразия X размерности d его группы Чжоу $CH^i(X)$, $d - r \leqslant i \leqslant d$, можно универсально накрыть при помощи соответствий нуль-циклами некоторого многообразия размерности $e < d - 2r$, то мотив Чжоу $M(X)$ состоит из подкруток на степени мотива Лефшеца прямых слагаемых в мотивах Чжоу многообразий размерности e и $d - 2r - 2$ (на самом деле, теорема 2.1.24 дает более точное описание мотива Чжоу $M(X)$). Из этого легко выводится следующая теорема.

Теорема 2.1.32. *Пусть X является неприводимым гладким проективным трехмерным многообразием над алгебраически замкнутым полем k. Предположим, что существует расширение полей $k \subset \Omega$, для которого Ω является универсальной областью и ядро отображения Абеля–Якоби на нуль-циклах $T(X_\Omega)$ тривиально. Тогда существует изоморфизм рациональных мотивов Чжоу*

$$M(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{1} \oplus P^\vee \oplus \mathbb{L}^{\oplus n} \oplus \big(Q \otimes \mathbb{L}\big) \oplus (\mathbb{L}^2)^{\oplus n} \oplus \big(P \otimes \mathbb{L}\big) \oplus \mathbb{L}^3\,,$$

где $n \geqslant 0$, рациональные мотивы Чжоу P и Q являются прямыми слагаемыми в $M^1(C)_{\mathbb{Q}}$ и $M^1(D)_{\mathbb{Q}}$ для некоторых неприводимых гладких проективных кривых C и D над k, соответственно.

Условие теоремы 2.1.32 выполнено для целого ряда трехмерных многообразий. В частности, оно выполнено для всех трехмерных многообразий Фано, а также для рациональных расслоений на поверхности дель Пеццо или на поверхности Энриквеса над кривой, см. замечание 2.1.33. Наконец, в § 2.1.3 мы вводим понятие степени трансцендентности для элементов группы Чжоу нуль-циклов. Данное понятие тесно связано с представимостью нуль-циклов, см. предложение 2.1.35. Мы получаем следующее приложение к коммутативной алгебре:

Теорема 2.1.38. *Для любых натуральных d, r существуют конечно порожденная регулярная алгебра R над $\mathbb{C}$ размерности d и конечно порожденный проективный R-модуль M ранга r такие, что M не порождается $d + r - 1$ элементами над R.*

Заметим, что по теореме Форстера–Суона [38], [129] модуль M всегда можно породить над R при помощи $d + r$ элементов. Суон [128, Theor. 4] доказал утверждение, аналогичное

теореме 2.1.38, для алгебр над $\mathbb{R}$, существенно используя незамкнутость поля вещественных чисел. Насколько нам известно, до сих пор в литературе не было предложено ни одного примера для случая, когда основное поле алгебраически замкнуто. Данный вопрос был поставлен автору В. Н. Желябиным в контексте теории простых йордановых супералгебр.

Далее в § 2.2 мы изучаем в целом мотивы Чжоу лефшецева типа и K-мотивы единичного типа. В § 2.2.1 приведены некоторые общие свойства мотивов Чжоу лефшецева типа, а также критерий для мотива Чжоу иметь лефшецев тип, см. предложение 2.2.5. Аналогичным образом в § 2.2.2 рассмотрены K-мотивы, см. предложение 2.2.13. При помощи полученных критериев далее в § 2.2.3, предложение 2.2.16, показано, что из лефшецевости мотива Чжоу многообразия следует то, что его K-мотив имеет единичный тип.

§ 2.3 посвящен построению геометрического фантома. С этой целью в § 2.3.1 приведено одно техническое утверждение, основанное на теореме Меркурьева–Суслина, являющееся для нас ключевым при установлении того, что мотивы Чжоу имеют лефшецев тип, см. предложение 2.3.1. С помощью его в § 2.3.2 доказан следующий критерий.

Следствие 2.3.4. *Предположим, что поле k является универсальной областью характетистики нуль (например, $k = \mathbb{C}$). Тогда мотив Чжоу $M(S)_{1/n}$ имеет лефшецев тип тогда и только тогда, когда выполняются два условия:*

(i) *отображение степени* $\deg\colon CH^2(S)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ *является изоморфизмом;*

(ii) *имеется равенство* $n \cdot \mathrm{Pic}(S)_{\mathrm{tors}} = 0$.

При помощи этого критерия в теореме 2.3.9 дается общий способ построения геометрических фантомов. В частности, мы получаем следующий результат, утверждающий существование геометрического фантома.

Следствие 2.3.10. *Пусть S является классической поверхностью Годо над $\mathbb{C}$, а S' является поверхностью Бюрниа над $\mathbb{C}$ с рангом группы Пикара равным 4. Пусть $\mathcal{N} \subset D^b(S)$ и $\mathcal{N}' \subset D^b(S')$ — квазифантомы из теорем 1.3.6 и 1.3.7, соответственно. Тогда категория $\mathcal{N} \boxtimes \mathcal{N}' \subset D^b(S \times S')$ является геометрическим универсальным фантомом.*

В § 2.4 мы исследуем многообразия размерности не больше 3 с K-мотивом единичного типа. Сначала в § 2.4.1 приводится несколько вспомогательных утверждений, относящихся к фильтрованым решеткам с унимодулярным спариванием и линейным функционалом. Далее в § 2.4.2 это применяется к решетке K_0 с фильтрацией по коразмерности носителя, с

естественным симметрическим спариванием и с функционалом, являющимся эйлеровой характеристикой. В результате при помощи упомянутого выше ключевого технического утверждения, т.е. предложения 2.3.1, а также с использованием вырождения спектральной последовательности Атьи–Хирцебруха для трехмерных многообразий, доказывается следующая теорема.

Теорема 2.4.7. *Пусть X является гладким проективным многообразием размерности d над k. Предположим, что K-мотив $KM(X)$ имеет единичный тип, и что выполняется одно из следующих условий:*

(i) *имеется неравенство $d \leqslant 2$;*

(ii) *имеется равенство $d = 3$ и характеристика поля k не равна 2.*

Тогда мотив Чжоу $M(X)$ имеет лефшецев тип.

В частности, трехмерные многообразия с полным исключительным набором имеют мотив Чжоу лефшецева типа.

В третьей главе мы строим полярный комплекс для локально свободных пучков на алгебраических многообразиях и доказываем теорему, сравнивающую его когомологии с когомологиями локально свободных пучков.

В § 3.1 описан основной результат и обсуждаются некоторые общие идеи вокруг него. В § 3.1.1 приведены основные определения. А именно, для локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на многообразии X и неприводимого подмногообразия $Z \subset X$ среди всех рациональных сечений на Z пучка $\omega_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{F}|_Z$ выделен класс специальных сечений, названных полярными, см. определение 3.1.1. Группа таких полярных сечений обозначена через $\mathrm{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z)$. Можно сказать, что полярные элементы — это рациональные сечения, имеющие полюса не выше первого порядка в правильном смысле. Из групп $\mathrm{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z)$ строится комплекс $\mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{F})$, называемый полярным комплексом, см. определение 3.1.3. Члены полярного комплекса имеют вид $\bigoplus_Z \mathrm{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z)$, где прямая сумма берется по всем неприводимым подмногообразиям $Z \subset X$ фиксированной размерности. Вычет логарифмических форм задает дифференциал в полярном комплексе. Сформулируем основную теорему данной главы.

Теорема 3.1.4. *Пусть X — гладкое неприводимое квазипроективное многообразие размерности d, а $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на X. Тогда имеется канонический изоморфизм*

$$H^{d-p}(X, \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}) \simeq H_p\big(\mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{F})\big), \qquad 0 \leqslant p \leqslant d\,.$$

В § 3.1.2 даются топологические мотивировки для построения полярного комплекса. А именно, приводится словарь, позволяющий переводить понятия из мира вещественных многообразий в мир комплексных многообразий. С этой точки зрения основная теорема оказывается по своей формулировке переводом теоремы де Рама, сравнивающей когомологии де Рама с сингулярными когомологиями, см. предложение 3.1.7.

Основная теорема доказывается в § 3.2. Доказательство проводится в несколько шагов. А именно, сначала в § 3.2.1 для каждого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ определяется некоторый подпучок абелевых групп $\mathcal{F}_{\mathrm{pol}}$, названный полярным пучком, см. определение 3.2.4. Рассмотрение полярных пучков позволяет нам разделить основную теорему на два утверждения о полярных пучках. Приведем одно из них. Полярный комплекс $\mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{F})$ естественным образом определяет комплекс вялых пучков $\underline{\mathrm{Pol}}_\bullet(X, \mathcal{F})$, см. определение 3.2.1.

Теорема 3.2.6. *Пусть X — гладкое неприводимое квазипроективное многообразие размерности d, а $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на X. Тогда комплекс пучков $\underline{\mathrm{Pol}}_\bullet(X, \mathcal{F})$ на X является вялой резольвентой пучка $(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_{\mathrm{pol}}$, т.е. следующая последовательность пучков точна:*

$$0 \longrightarrow (\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_{\mathrm{pol}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pol}}_d(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\partial} \underline{\mathrm{Pol}}_{d-1}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} \underline{\mathrm{Pol}}_0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow 0\,.$$

Второе утверждение заключается в том, что полярный подпучок $\mathcal{F}_{\mathrm{pol}}$ имеет такие же когомологии, что и исходный локально свободный пучок $\mathcal{F}$, см. теорему 3.2.7. Заметим, что теорема 3.2.6 может быть интерпретирована как теорема о локальной точности комплекса Герстена для некоторого непостоянного модуля циклов Роста над X. В § 3.2.2 мы доказываем несколько простых вспомогательных утверждение о полярных элементах, фактически при этом показывая, что полярные элементов задают модуль циклов Роста, см. определение 3.2.11 и предложение 3.2.13. В § 3.2.4 мы применяем некоторую модификацию трюка Квиллена в K-теории, чтобы доказать теорему 3.2.6 для проективных многообразий. Теорема 3.2.7 также сначала доказывается в § 3.2.5 только для проективных многообразий. Наконец, в § 3.2.6 мы сводим общий случай к проективному.

В § 3.3 обсуждаются связи полярного комплекса с другими понятиями. В § 3.3.1 объясняется, что полярные элементы задают модуль циклов Роста. При помощи этого, а также при помощи стандартных фактов из теории смешанных структур Ходжа дается новое доказательство основной теоремы в частном случае, когда векторное расслоение тривиально, а многообразие проективно. В § 3.3.2 показано, как полярные циклы позволяют строить отображение класса цикла из групп Чжоу в когомологии пучков дифференциальных форм.

Наконец, в § 3.3.3 доказывается, что полярный комплекс является квазиизоморфным подкомплексом в комплексе Кузена векторного расслоения, при чем частью, состоящей из сечений, имеющих полюса не выше первого порядка.

В четвертой главе мы развиваем геометрический подход к описанию итерированных рядов Лорана и демонстрируем его эффективность серией новых утверждений об итерированных рядах Лорана.

В § 4.1 мы фиксируем обозначения и соглашения, в основном касающиеся инд-схем и функторов на категории колец.

В § 4.2 мы определяем итерированные группы петель $L^nF(A) = F\big(\mathcal{L}^n(A)\big)$, см. определение 4.2.1, и вводим наш главный объект изучения — итерированную группу петель $L^n\mathbb{G}_m$. Мы строим разложение группы $L^n\mathbb{G}_m$, которое обобщает результат Конту-Каррера для случая $n = 1$, см. предложение 4.2.8. Мы также вводим специальные групповые подфункторы $(L^n\mathbb{G}_m)^0$ и $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp$ в $L^n\mathbb{G}_m$, см. определение 4.2.13. А именно, $(L^n\mathbb{G}_m)^0$ является группой итерированных рядов Лорана с тривиальным значением нормирования ν, а $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp$ является такой подгруппой группы $(L^n\mathbb{G}_m)^0$, что на ней над $\mathbb{Q}$ корректно определено отображение логарифма, см. предложение 4.2.21. Для любого кольца A группа $(L^n\mathbb{G}_m)^0(A)$ совпадает с группой обратимых элементов в кольце $\mathcal{L}^n(A)^0$, состоящим из ограниченных по степени элементов, и имеется равенство $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A) = 1 + \mathcal{L}^n(A)^\sharp$, см. следствие 4.2.17.

В § 4.3 развивается теория толстых инд-конусов. Сначала в § 4.3.1 мы приводим краткое описание инд-аффинных схем. Затем мы вводим кольцо степенных рядов от бесконечного множества переменных, см. определение 4.3.1, определяем алгебраическую сходимость степенных рядов, см. определение 4.3.3, и рассматриваем некоторые инд-замкнутые подсхемы в инд-аффинных пространствах, которые состоят из точек с нильпотентными координатами, см. определение 4.3.8. Данные инд-замкнутые подсхемы используются для определения толстых инд-конусов, см. определения 4.3.13, 4.3.16. Главные свойства толстых инд-конусов содержатся в предложениях 4.3.17, 4.3.23 и леммах 4.3.19, 4.3.20. Наконец, в § 4.3.5 мы обсуждаем связность инд-схем над базовым кольцом, а в § 4.3.6 мы обсуждаем плотность инд-замкнутой подсхемы в инд-аффинной схеме.

В § 4.4 теория толстых инд-конусов применяется к теории итерированных групп петель. Мы начинаем с введения некоммутативного произведения (строгих) инд-множеств, см. определение 4.4.1. Это произведение очень полезно для работы с представимостью итерированных функторов петель, см. предложение 4.4.6. Затем мы доказываем, что инд-аффинные схемы, представляющие функтор $L^n\mathbb{G}_m$ и его специальные подгруппы, являются произведениями толстых инд-конусов и инд-плоских инд-аффинных схем, см. предложение 4.4.8. Это

приводит ко многим хорошим свойствам данных инд-аффинных схем, см. теоремы 4.4.10 и 4.4.12.

Теорема 4.4.12. *Пусть даны вложение колец $R \subset S$, инд-плоская инд-аффинная схема Y над R, аффинная схема Z над R и натуральное число N. Тогда естественное отображение*

$$\mathrm{Hom}_R\left((L^n\mathbb{G}_m)_R^{\times N} \times Y, Z\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S\left((L^n\mathbb{G}_m)_S^{\times N} \times Y_S, Z_S\right)$$

инъективно, где для краткости мы положили $X = \left((L^n\mathbb{G}_a)^\sharp\right)^{\times N}$.

Мы также показываем, что инд-аффинная схема $(L^n\mathbb{G}_m)^0$ связна, и что инд-замкнутая подсхема $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp$ плотна в инд-аффинной схеме $(L^n\mathbb{G}_m)^0$, см. предложение 4.4.13. Мы изучаем в § 4.4.5 характеры группового функтора $L^n\mathbb{G}_m$ над $\mathbb{Q}$ и доказываем, что они коммутируют с их дифференциалами через экспоненциальное отображение, см. предложения 4.4.20 и 4.4.22. Наконец, мы показываем в § 4.4.6, что любое функториальное линейное отображение $\Omega^n_{A((t_1))\ldots((t_n))} \to A$ пропускается через группу "непрерывных" дифференциальных форм $A((t_1))\ldots((t_n))dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n$, см. предложение 4.4.24.

В § 4.5 мы изучаем непрерывные гомоморфизмы между кольцами итерированных рядов Лорана. Мы устанавливаем в § 4.5.1, что непрерывные гомоморфизмы — это то же самое, что функториальные гомоморфизмы, см. предложение 4.5.3 и следствие 4.5.5. В § 4.5.2 мы даем следующее описание всех непрерывных гомоморфизмов между A-алгебрами итерированных рядов Лорана, см. теорему 4.5.14. Для заданного набора из n обратимых итерированных рядов Лорана $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{L}^m(A)^*$ от m переменных предположим, что $(m \times n)$-матрица $\big(\nu(\varphi_1), \ldots, \nu(\varphi_n)\big)$ с целыми элементами имеет ступенчатый вид по столбцам с положительными ведущими элементами (см. лемму 4.5.10(ii)). Например, при $m = n$ это означает, что данная матрица верхнетреугольная с положительными диагональными элементами. Тогда возникает корректно определенный непрерывный гомоморфизм A-алгебр

$$\phi : \mathcal{L}^n(A) \longrightarrow \mathcal{L}^m(A)\,,$$

$$f = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t_1^{l_1}\ldots t_n^{l_n} \longmapsto f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l \varphi_1^{l_1}\ldots\varphi_n^{l_n}\,.$$

Более того, все непрерывные гомоморфизмы A-алгебр $\mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^m(A)$ имеют такой вид. В частности, из этого вытекает, что при $n > m$ таких гомоморфизмов не существует, см. следствие 4.5.15. В качестве другого приложения мы получаем в § 4.5.3, предложение 4.5.19 и следствие 4.5.20, что функтор, сопоставляющий коммутативному кольцу A множество всех непрерывных гомоморфизмов A-алгебр $\mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^m(A)$, представим инд-аффинной схемой над $\mathbb{Z}$, которая является произведением инд-плоской схемы над $\mathbb{Z}$ и толстого инд-конуса.

В § 4.5.4 мы описываем в предложении 4.5.25 и в следствии 4.5.27 явно как меняется вычет старших дифференциальных форм при непрерывных гомоморфизмах. В частности, для случая $m = n$ мы получаем следующий результат. В качестве приложения мы получаем при достаточно слабых предположениях инъективность рассматриваемых выше гомоморфизмов, см. следствие 4.5.28 и замечание 4.5.29.

Наконец, при $m = n$ мы приводим в § 4.5.5 критерий обратимости непрерывного эндоморфизма ϕ.

Теорема 4.5.40. *Непрерывный эндоморфизм A-алгебры $\phi\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^n(A)$ обратим тогда и только тогда, когда обратима матрица $\Upsilon(\phi) \in \mathrm{M}^+_{n\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)$, т.е. у верхнетреугольной матрицы с (локально постоянными на схеме $\mathrm{Spec}(A)$) целыми элементами*

$$\Upsilon(\phi) = \big(\nu(\phi(t_1)), \dots, \nu(\phi(t_n))\big)$$

на диагонали стоят единицы. Более того, если эндоморфизм ϕ обратим, то выполняется равенство

$$\phi^{-1} = \phi^\vee\,,$$

Здесь $\phi^\vee$ является сопряженным отображением к индуцированному отображению $\phi\colon \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)} \to \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)}$ (которое мы обозначаем также через ϕ) относительно совершенного непрерывного спаривания

$$\mathcal{L}^n(A) \times \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)} \longrightarrow A\,, \qquad (f, \omega) \longmapsto \mathrm{res}(f\omega)\,.$$

Доказательство критерия обратимости основано на инвариантности отображения вычета, а также на приведенном выше результате о представимости функтора вместе с теорией толстых инд-конусов. Описание обратного к непрерывному эндоморфизму ϕ как сопряженного отображения непосредственно дает явную формулу для $\phi^{-1} = \phi^\vee$, см. в замечании 4.5.35 явную формулу для $\phi^\vee$. Для простоты приведем данную формулу при $n = 1$. По-видимому, даже в этом случае формула не была известна ранее. Если эндоморфизм ϕ задан элементом $\varphi \in A((t))^*$ с $\nu(\varphi) = 1$, то для любого элемента $f \in A((t))$ имеем

$$\phi^{-1}(f) = \phi^\vee(f) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \mathrm{res}\,\big(f\varphi^{-l-1}(\partial\varphi/\partial t)dt\big)t^l\,.$$

Из этого вытекает следующее необычное равенство (для общего случая $n \geqslant 1$ см. формулу (4.5.42)):

$$f = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \mathrm{res}\,\big(f\varphi^{-l-1}(\partial\varphi/\partial t)dt\big)\varphi^l\,.$$

Нам неизвестно ни одного элементарного (непосредственно вычислительного) доказательства этой формулы даже для случая, когда A является полем.

В пятой главе проводится масштабное исследование многомерного символа Конту-Каррера.

В § 5.1 дается конструкция многомерного символа Конту-Каррера. Перед изложением результатов, относящихся к многомерному символу Конту-Каррера, мы рассматриваем в § 5.1.1 более простой случай многомерного аддитивного символа, см. предложение 5.1.1, что позволяет увидеть частично схему рассуждений, связанную с многомерным символом Конту-Каррера. В § 5.1.2 многомерный символ Конту-Каррера задается для $\mathbb{Q}$-алгебр явной формулой, см. теорему 5.1.4(i). Существенным образом, данная формула сводится к

$$(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}) \longmapsto \exp \operatorname{res}\left(\log(f_1)\,\frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_{n+1}}{f_{n+1}}\right),$$

где предполагается, что $f_1 \in (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$. Поскольку эта формула использует ряды для экспоненты и логарифма, изначально она применима лишь для $\mathbb{Q}$-алгебр. Несложно проверяется, что для данной явной формулы выполняется соотношение Стейнберга, см. теорему 5.1.4(ii), т.е. возникает рациональный многомерный символ Конту-Каррера

$$(CC_n)_{\mathbb{Q}} \;:\; (L^nK^M_{n+1})_{\mathbb{Q}} \longrightarrow (\mathbb{G}_m)_{\mathbb{Q}}\,.$$

Также непосредственно проверяется инвариантность рационального многомерного символа Конту-Каррера относительно автоморфизмов алгебры итерированных рядов Лорана, см. предложение 5.1.11. В § 5.1.3 рациональный многомерный символ Конту-Каррера продолжается однозначным образом до морфизма функторов

$$CC_n \;:\; L^nK^M_{n+1} \longrightarrow \mathbb{G}_m\,,$$

который мы и называем многомерным символом Конту-Каррера. Однозначность такого продолжения непосредственно выводится из теории толстых инд-конусов, см. теорему 5.1.14(ii). Главная сложность заключается в доказательстве существования такого продолжения. Для этого при помощи инвариантности рационального многомерного символа Конту-Каррера все сводится к канонической проекции $\pi\colon L^n\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$, возникающей из многомерного аналога разложения Конту-Каррера группы обратимых рядов Лорана, см. детали в теореме 5.1.14(i) и в ее доказательстве. Также при этом существенным образом используется приведенный выше критерий обратимости эндоморфизмов алгебры итерированных рядов Лорана, см. теорему 4.5.40.

В § 5.2 обсуждаются различные явные формулы для многомерного символа Конту-Каррера. Во-первых, в § 5.2.1 доказывается, что, на самом деле, в явной формуле для рационального многомерного символа Конту-Каррера "все знаменатели сокращаются", см. теорему 5.2.3, т.е. она задается рядом с целыми коэффициентами от коэффициентов рядов Лорана, к которым применяется символ Конту-Каррера. Это следует довольно непосредственно из теории толстых инд-конусов и существования продолжения рационального символа Конту-Каррера на все кольца. Нам неизвестен ни один явный комбинаторный способ доказать, что указанные выше коэффициенты не содержат знаменателей. Далее, из доказательства теоремы 5.1.14(i) о существовании продолжения рационального символа Конту-Каррера сама по себе возникает явная формула для всех колец. Она описана более подробно в § 5.2.2. Наконец, применяя теорию толстых инд-конусов и исходную явную формулу для рационального многомерного символа Конту-Каррера, можно посчитать многомерный символ Конту-Каррера для некоторых специальных колец A, содержащих нильпотенты. Такие примеры вычислений рассматриваются в § 5.2.3, см. предложения 5.2.8, 5.2.10. В лемме 5.2.16 и предложении 5.2.18 мы связываем многомерный символ Конту-Каррера с многомерным обобщением спаривания Витта, важным для явного подхода к многомерной локальной теории полей классов.

§ 5.3 посвящен описанию касательного пространства к K-группам Милнора в терминах абсолютных кэлеровых дифференциалов. Такое описание необходимо нам для доказательства универсального свойства многомерного символа Конту-Каррера. В то же время, данное описание представляет собой и независимый интерес. В работе Блоха [12] для любого кольца R, содержащего $\frac{1}{2}$, был построен канонический гомоморфизм $B\colon TK^M_{n+1}(R) \to \Omega^n_R$, см. определение 5.3.6. Мы доказываем следующий результат.

Теорема 5.3.8. *Пусть R — слабо 5-стабильное кольцо, содержащее элемент $\frac{1}{2}$. Тогда гомоморфизм $B\colon TK^M_{n+1}(R) \to \Omega^n_R$ является изоморфизмом.*

Слабая 5-стабильность кольца R означает, что к любой четверке элементов в R можно прибавить обратимый элемент так, чтобы это стала четверка обратимых элементов. Заметим, что, используя сложные результаты ван дер Каллена в алгебраической K-теории [68], [69], можно получить вариант теоремы 5.3.8 в более слабой форме, а именно, для 5-стабильных колец. Тем не менее, для наших целей такой подход неприменим вследствие замечания 5.3.3(ii). Кроме того, наше доказательство теоремы 5.3.8 совершенно явное, оно сводит все необходимые тождества в K-группах Милнора к соотношению Стейнберга. Заметим, что впоследствии в работе автора и Тюрина [52] было найдено далекое обобщение теоремы 5.3.8, также полученное явными методами.

Мы применяем теорему 5.3.8 в § 5.4 к доказательству универсального свойства символа Конту-Каррера. А именно, рассмотрим морфизм групповых функторов

$$\Theta \,:\, \mathbb{G}_m \longrightarrow L^n K^M_{n+1}\,, \qquad a \longmapsto \{a, t_1, \ldots, t_n\}\,,$$

где $a \in A^*$ для кольца A. Напомним, что для любого кольца R имеется изоморфизм групп $\mathrm{Hom}^{gr}_R\left((\mathbb{G}_m)_R, (\mathbb{G}_m)_R\right) \simeq \underline{\mathbb{Z}}(R)$ (см. лемму 4.4.19(ii)).

Теорема 5.4.1. *Для любого кольца R, не содержащего $\mathbb{Z}$-кручения, естественный гомоморфизм групп*

$$\Theta^*_R \,:\, \mathrm{Hom}^{gr}_R\left((L^n K^M_{n+1})_R, (\mathbb{G}_m)_R\right) \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}(R)\,, \qquad \Phi \longmapsto \Phi \circ \Theta_R\,,$$

является изоморфизмом, причем $\Theta^*(CC_n) = 1$.

Мы рассматриваем теорему 5.4.1 как наш главный результат относительно многомерного символа Конту-Каррера. В частности, из него следует, что CC_n совпадает с композицией граничных отображений для алгебраических K-групп, см. следствие 5.4.2. В целом доказательство теоремы заключается в переходе от кольца R к кольцу $S := R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ при помощи теории толстых инд-конусов. Так как S является $\mathbb{Q}$-алгеброй, то можно свести описание характера группового функтора $(L^n K^M_{n+1})_S$ к описанию его дифференциала. Далее надо применить изоморфизм из теоремы 5.3.8.

В дальнейшем k обозначает поле. В основном мы будем рассматривать многообразия, определенные над k (другие поля определений многообразий будут оговорены отдельно). Для расширения полей $k \subset K$ и многообразия X над k через X_K мы будем обозначать расширение скаляров многообразия X с k на K.

По умолчанию $\otimes$ и rk обозначают тензорное произведение и ранг абелевых групп над $\mathbb{Z}$. Для произвольной абелевой группы Γ и натурального числа l через Γ_l будем обозначать подгруппу l-кручения в Γ. Для произвольного коммутативного кольца R будем обозначать расширение скаляров $\Gamma \otimes R$ через Γ_R.

1.1. Мотивы Чжоу и K-мотивы

В данном параграфе мы вводим обозначения относительно мотивов Чжоу и K-мотивов и приводим их некоторые хорошо известные свойства. Также мы вводим обозначения, связанные с группой Гротендика категории векторных расслоений на многообразии, и обсуждаем известные факты о ее связи с группами Чжоу. Кроме того, объясняется связь между рациональными мотивами Чжоу и рациональными K-мотивами.

1.1.1. **Мотивы Чжоу.** В качестве общих ссылок по поводу мотивов Чжоу приведем статьи Манина [95] и Шоля [120].

Пусть X является равноразмерным гладким проективным многообразием над k размерности d. Для натурального числа $i \geqslant 0$ через $CH^i(X)$ обозначим группу Чжоу алгебраических циклов коразмерности i на X. Для алгебраического цикла Z на X коразмерности i через $[Z]$ будем обозначать его класс в $CH^i(X)$. Для равноразмерных гладких проективных многообразий X_1, X_2, X_3 и элементов $f \in CH^i(X_1 \times X_2)$ и $g \in CH^j(X_2 \times X_3)$, т.е. соответствий, положим

$$g \circ f := \mathrm{pr}_{13\,*}\left(\mathrm{pr}_{12}^*(f) \cdot \mathrm{pr}_{23}^*(g)\right) \in CH^{i+j-d_2}(X_1 \times X_3)\,,$$

где pr_{ij} обозначает естественные проекции из $X_1 \times X_2 \times X_3$ в $X_i \times X_j$, а $d_2 = \dim(X_2)$.

Мы будем обозначать через $\mathcal{CM}(k)$ *категорию мотивов Чжоу* над k с целыми коэффициентами. Объекты в $\mathcal{CM}(k)$ задаются тройками $M(X, \pi, n)$, где X как выше, $\pi \in CH^d(X \times X)$ удовлетворяет равенству $\pi \circ \pi = \pi$, т.е. π является проектором, а n является целым числом. При $n = 0$ мы будем обычно опускать число n в приведенной выше тройке. Морфизмы между мотивами Чжоу задаются по формуле

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(k)}\left(M(X, \pi, n), M(X', \pi', n')\right) := \pi' \circ CH^{d+n'-n}(X \times X') \circ \pi\,, \tag{1.1.1}$$

а композиция морфизмов задается композицией соответствий. Мотив Чжоу вида $M(X,\pi,n)$ с $n \geqslant 0$ называется *эффективным*. На самом деле, любой эффективный мотив Чжоу можно представить как прямое слагаемое в мотиве Чжоу некоторого равноразмерного гладкого проективного многообразия, т.е. можно считать, что $n = 0$.

Определен мотив Чжоу $M(X) := M\big(X, [\Delta_X], 0\big)$, где $\Delta_X \subset X \times X$ является диагональю. Это задает котравариантный функтор $X \mapsto M(X)$ из категории гладких проективных многообразий над k в $\mathcal{CM}(k)$. *Мотив Лефшеца* определяется по формуле $\mathbb{L} := \big(\operatorname{Spec}(k), [\Delta], -1\big)$. Имеет место канонический изоморфизм $M(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{1} \oplus \mathbb{L}$ в $\mathcal{CM}(k)$.

На категории $\mathcal{CM}(k)$ имеется естественная симметрическая тензорная структура, определенная по формуле

$$M(X,\pi,n) \otimes M(X',\pi',n') := M(X \times X', \pi \times \pi', n+n')\,. \tag{1.1.2}$$

Единичным объектом $\mathbb{1}$ является мотив точки $M\big(\operatorname{Spec}(k)\big)$. В тензорной категории $\mathcal{CM}(k)$ определен внутренний Hom и она является жесткой. При этом из формул (1.1.1) и (1.1.2) следует, что для произвольного мотива Чжоу $M(X,\pi,n)$ имеется канонический изоморфизм $M(X,\pi,n)^\vee \simeq M(X,\pi^{\mathrm{t}},d-n)$, где π^{t} обозначает образ проектора π относительно естественной симметрии на $X \times X$.

Для краткости, мы будем обозначать мотив $\mathbb{L}^{\otimes i} = M\big(\operatorname{Spec}(k), [\Delta], -i\big)$ через $\mathbb{L}^i$ для $i \in \mathbb{Z}$. Имеется канонический изоморфизм $\mathbb{L}^{-1} \simeq \mathbb{L}^\vee = M\big(\operatorname{Spec}(k), [\Delta], 1\big)$. Заметим, что мотив Чжоу $M(X,\pi,n)$ является прямым слагаемым в мотиве Чжоу $M(X) \otimes \mathbb{L}^{-n}$.

Группы Чжоу мотивов Чжоу определяются по формуле

$$CH^i\big(M(X,\pi,n)\big) := \pi\big(CH^{i+n}(X)\big)\,,$$

где $\pi(\alpha) := \operatorname{pr}_{2*}(\operatorname{pr}_1^*(\alpha) \cdot \pi)$ для произвольного элемента $\alpha \in CH^{i+n}(X)$, а $\operatorname{pr}_i\colon X \times X \to X$ являются естественными проекциями. В частности, $CH^i(\mathbb{L}^i) \simeq \mathbb{Z}$ и $CH^j(\mathbb{L}^i) = 0$ при $i \neq j$.

Каждый элемент $\alpha \in CH^i(X)$ задает морфизмы

$$\alpha_* \,:\, \mathbb{L}^i \longrightarrow M(X)\,, \qquad \alpha^* \,:\, M(X) \longrightarrow \mathbb{L}^{d-i}$$

в силу равенств $\operatorname{Spec}(k) \times X = X \times \operatorname{Spec}(k) = X$. Если дан еще один элемент $\beta \in CH^{d-i}(X)$, то имеются равенства

$$\beta^* \circ \alpha_* = \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{L}^i}\,, \qquad \alpha_* \circ \beta^* = \beta \times \alpha\,, \tag{1.1.3}$$

где $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ обозначает индекс пересечения алгебраических циклов и

$$\beta \times \alpha := \operatorname{pr}_1^*\beta \cdot \operatorname{pr}_2^*\alpha \in CH^d(X \times X)\,.$$

Имеется канонический изоморфизм

$$M(X)^\vee \xrightarrow{\sim} M(X)\otimes \mathbb{L}^{-d}\,, \tag{1.1.4}$$

называемый иногда *мотивной двойственностью Пуанкаре*. При этом морфизм вычисления $M(X)\otimes M(X)^\vee \to \mathbb{1}$ соответствует морфизму $M(X)\otimes \big(M(X)\otimes \mathbb{L}^{-d}\big) \to \mathbb{1}$, полученному тензорным умножением на $\mathbb{L}^{-d}$ морфизма $[\Delta_X]^*\colon M(X\times X)\to \mathbb{L}^d$. Из этого следует, что после перехода к группам Чжоу морфизм вычисления соответствует индексу пересечения.

Для произвольного коммутативного кольца R аналогичным образом определяется категория мотивов Чжоу $\mathcal{CM}(k)_R$ с коэффициентами в R, при построении которой рассматриваются группы Чжоу $CH^i(X)_R = CH^i(X)\otimes R$ с коэффициентами в R. Для целочисленого мотива Чжоу M из $\mathcal{CM}(k)$ соответствующий мотив Чжоу с коэффициентами в R из $\mathcal{CM}(k)_R$ будет обозначаться через M_R. Для простоты мы будем использовать такие же обозначения $\mathbb{1}$ и $\mathbb{L}$ для соответствующих объектов $\mathbb{1}_R$ и $\mathbb{L}_R$ в категории $\mathcal{CM}(k)_R$. Все, что было сказано выше о категории $\mathcal{CM}(k)$, остается верным и для категории $\mathcal{CM}(k)_R$.

1.1.2. **Группа Гротендика векторных расслоений.** В качестве общих ссылок по поводу группы Гротендика векторных расслоений приведем [11, Exp.0] и учебник Фултона [42].

Пусть X является неприводимым гладким проективным многообразием размерности d. Через $K_0(X)$ обозначим группу Гротендика категории векторных расслоений на X или, что равносильно, категории когерентных пучков на X. В данном параграфе E и F будут обозначать произвольные векторные расслоения на X. Через $[E]$ будем обозначать класс векторного расслоения E в $K_0(X)$, и также будем использовать аналогичное обозначение для когерентных пучков. Абелева группа $K_0(X)$ имеет естественную структуру коммутативного кольца с умножением, заданным по формуле $[E]\cdot[F] := [E\otimes F]$. При этом единицей $1\in K_0(X)$ является класс $[\mathcal{O}_X]$.

На группе $K_0(X)$ часто рассматривается *форма Эйлера*, определенная по формуле

$$\chi \;:\; K_0(X)\otimes K_0(X)\longrightarrow \mathbb{Z}\,,\qquad \chi\big([E],[F]\big) := \sum_{i\geqslant 0}(-1)^i \dim_k \operatorname{Ext}^i(E,F) = \chi\big(X,\mathcal{H}om(E,F)\big)\,,$$

где $\chi(X,-)$ обозначает эйлерову характеристику когерентного пучка на X. Преимущество формы Эйлера заключается в том, что она имеет категорный смысл, будучи определенной только в терминах производной категории когерентных пучков на X, т.е. производно эквивалентные многообразия имеют изоморфные группы Гротендика с формой Эйлера. Однако в общем случае форма Эйлера не является ни симметрической, ни антисимметрической.

Мы будем также использовать следующее симметрическое спаривание:

$$\tau \;:\; K_0(X)\otimes K_0(X)\longrightarrow \mathbb{Z}\,,\qquad \tau\big([E],[F]\big) := \chi(X,E\otimes F)\,. \tag{1.1.5}$$

Отметим, что спаривание τ зависит от выбора многообразия X и не определено корректно для производной категории когерентных пучков на X без тензорной структуры на ней, т.е. спаривание τ не инвариантно относительно производных эквивалентностей.

Имеется каноническая убывающая *фильтрация по коразмерности носителя* $F^iK_0(X)$, $i \geqslant 0$. Элемент из $K_0(X)$ принадлежит подгруппе $F^iK_0(X)$ тогда и только тогда, когда он может быть представлен линейной комбинацией элементов вида $[\mathcal{F}]$, где $\mathcal{F}$ является когерентным пучком, имеющим коразмерность носителя не меньше, чем i. Данная фильтрация согласована с произведением на $K_0(X)$ в естественном смысле:

$$F^iK_0(X) \cdot F^jK_0(X) \subset F^{i+j}K_0(X)\,, \qquad i,j \geqslant 0\,.$$

В частности, на $\mathrm{gr}_F^\bullet K_0(X)$ имеется структура градуированного кольца.

Легко видеть, что $\tau\big(F^iK_0(X), F^jK_0(X)\big) = 0$ при $i + j > d$. Таким образом, для каждого $i \geqslant 0$ спаривание τ на $K_0(X)$ индуцирует спаривание

$$\tau_i \;:\; \mathrm{gr}_F^i K_0(X) \otimes \mathrm{gr}_F^{d-i} K_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}\,.$$

Следующие важные факты см., например, в [11, Exp. 0] или [42, Ex. 15.1.5, Ex. 15.3.6].

Предложение 1.1.6. *Для каждого $i \geqslant 0$ выполняется следующее:*

(i) *корректно определены гомоморфизмы*

$$\varphi_i \;:\; CH^i(X) \longrightarrow \mathrm{gr}_F^i K_0(X)\,, \qquad c_i \;:\; \mathrm{gr}_F^i K_0(X) \longrightarrow CH^i(X)\,,$$

где первый гомоморфизм сопоставляет классу неприводимого подмногообразия $Z \subset X$ коразмерности i класс его структурного пучка $\mathcal{O}_Z$, а второй гомоморфизм индуцирован классом Черна $c_i\colon K_0(X) \to CH^i(X)$;

(ii) *гомоморфизм φ_i сюръективен, и выполняются равенства*

$$c_i \circ \varphi_i = \varphi_i \circ c_i = (-1)^{i-1}(i-1)!$$

Следствие 1.1.7.

(i) *Для каждого $i \geqslant 0$ ядро сюръективного гомоморфизма φ_i содержится в подгруппе $(i-1)!$-кручения в $CH^i(X)$;*

(ii) *для каждого $i \geqslant 0$ гомоморфизм $(\varphi_i)_{\mathbb{Q}}$ является изоморфизмом;*

(ii) *имеются изоморфизмы*

$$\varphi_0 \,:\, CH^0(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_F^0 K_0(X) \simeq \mathbb{Z}\,, \qquad \varphi_1 \,:\, CH^1(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_F^1 K_0(X)\,,$$

$$\varphi_2 \,:\, CH^2(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_F^2 K_0(X)\,,$$

а ядро гомоморфизма φ_3 содержится в подгруппе 2-кручения в $CH^3(X)$.

Градуированное отображение

$$\varphi = \bigoplus_{i\geqslant 0} \varphi_i \,:\, \bigoplus_{i\geqslant 0} CH^i(X) \longrightarrow \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathrm{gr}_F^i K_0(X)$$

является гомоморфизмом градуированных колец. Композиция отображения $\varphi_i \otimes \varphi_{d-i}$ с τ_i равна индексу пересечения. В частности, композиция $CH^d(X) \xrightarrow{\varphi_d} F^d K_0(X) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}$ совпадает со степенью нуль-циклов.

Нам также будет нужен следующий полезный результат, доказанный в работе Галкина–Кацаркова–Меллита–Шиндера [45, Lem. 2.2]. Приведенное ниже "безвычислительное" доказательство отличается от доказательства из [45].

Предложение 1.1.8. *Предположим, что группа $K_0(X)$ не содержит кручения. Тогда группа $CH^1(X)$ также не содержит кручения.*

Доказательство. Имеется каноническое вложение групп

$$CH^1(X) \hookrightarrow 1 + F^1 K_0(X)\,, \qquad [D] \longmapsto [\mathcal{O}_X(-D)] = 1 - [\mathcal{O}_D]\,,$$

где групповой закон на $1 + F^1 K_0(X)$ задается умножением в кольце $K_0(X)$. Поскольку кольцо $K_0(X)$ не содержит кручения, естественное отображение $K_0(X) \to K_0(X)_{\mathbb{Q}}$ инъективно, а значит инъективен и естественный гомоморфизм мультипликативных групп

$$1 + F^1 K_0(X) \longrightarrow 1 + F^1 K_0(X)_{\mathbb{Q}}\,.$$

Так как идеал $F^1 K_0(X)$ в кольце $K_0(X)$ нильпотентен, то имеется изоморфизм групп

$$\log \,:\, 1 + F^1 K_0(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} F^1 K_0(X)_{\mathbb{Q}}\,.$$

Все вместе это показывает, что группа $CH^1(X)$ является подгруппой в векторном пространстве $F^1 K_0(X)_{\mathbb{Q}}$ над $\mathbb{Q}$, и, следовательно, группа $CH^1(X)$ не содержит кручения. □

1.1.3. **K-мотивы.** В качестве общей ссылки по поводу категории K-мотивов приведем статью Манина [95].

Категория K-мотивов $\mathcal{KM}(k)$ над полем k определяется подобно категории мотивов Чжоу $\mathcal{CM}(k)$ с заменой групп Чжоу на группы Гротендика. А именно, объекты в $\mathcal{KM}(k)$ являются парами $KM(X,\pi)$, где X является гладким проективным многообразием над k, а $\pi \in K_0(X\times X)$ является проектором относительно композиции K_0-соответствий. Обратим внимание на то, что целое число n из тройки, определяющей мотив Чжоу $M(X,\pi,n)$, отсутствует для K-мотивов. Это соответствует отсутствию канонической градуировки на K_0, а также отсутствию весов в некоммутативной геометрии.

Для каждого гладкого проективного многообразия X над k определен его K-мотив $KM(X) := KM\big(X,[\mathcal{O}_{\Delta_X}]\big)$. Морфизмы между K-мотивам определяются подобно морфизмам между мотивами Чжоу. Имеется симметрическая тензорная структура на $\mathcal{KM}(k)$, заданная по стандартной формуле $KM(X,\pi)\otimes KM(X',\pi') = KM(X\times X',\pi\boxtimes\pi')$, где $\boxtimes$ соответствует внешнему произведению расслоений. Единичный объект $\mathbb{1}$ является K-мотивом точки $KM\big(\operatorname{Spec}(k)\big)$. Из явного описания группы $K_0(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$ следует, что имеется изоморфизм $KM(\mathbb{P}^1)\simeq\mathbb{1}\oplus\mathbb{1}$, т.е. в контексте K-мотивов мотив Лефшеца совпадает с единичным объектом.

Каждый элемент $\alpha\in K_0(X)$ задает морфизмы

$$\alpha_*\ :\ \mathbb{1}\longrightarrow KM(X)\,,\qquad \alpha^*\ :\ KM(X)\longrightarrow\mathbb{1}\,.$$

Если дан еще один элемент $\beta\in K_0(X)$, то имеются равенства

$$\beta^*\circ\alpha_* = \langle\alpha,\beta\rangle\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{1}}\,,\qquad \alpha_*\circ\beta^* = \beta\boxtimes\alpha\,. \tag{1.1.9}$$

Поскольку алгебраические K-группы многообразий (см. также параграф 1.2.1 ниже) являются модулями над кольцом K_0 и имеет место формула проекции (см. [117]), они корректно определены для K-мотивов по формуле

$$K_i\big(KM(X,\pi)\big) := \pi\big(K_i(X)\big)\,,\qquad i\geqslant 0\,, \tag{1.1.10}$$

где $\pi(\alpha) = \mathrm{pr}_{2*}\big(\mathrm{pr}_1^*(\alpha)\cdot\pi\big)$ для произвольного элемента $\alpha\in K_i(X)$.

Напомним, что гомологии Хохшильда многообразия X над k задаются по формуле $HH_i(X) = \operatorname{Tor}_i^{X\times X}(\mathcal{O}_{\Delta_X},\mathcal{O}_{\Delta_X})$, $i\geqslant 0$. Подобно алгебраическим K-группам гомологии Хохшильда также корректно определены для K-мотивов, а именно

$$HH_i\big(KM(X,\pi)\big) := \pi\big(HH_i(X)\big)\,.$$

Здесь используется канонический гомоморфизм колец $K_0(X) \to HH_0(X)$, коммутирующий с обратными и прямыми образами, а также то, что для гомологий Хохшильда верна формула проекции, см. статьи Маркаряна [96] и Кальдарару–Виллертона [27, § 6].

Замечание 1.1.11. Более обще, для K-мотивов корректно определен любой аддитивный инвариант в смысле Табуады [130], т.е. функтор из категории малых k-линейных DG-категорий в некоторую аддитивную категорию, переводящий эквивалентности по Морите в изоморфизмы и переводящий полуортогональные разложения (см. параграф 1.3.1 ниже) в прямые суммы. Действительно, как показано в [130], задать аддитивный инвариант — это то же самое, что задать аддитивный функтор из некоторой универсальной аддитивной категории $\mathrm{Hmo}_0(k)$, построенной по категории малых k-линейных DG-категорий. При этом $\mathcal{KM}(k)$ является полной подкатегорией в $\mathrm{Hmo}_0(k)$.

Для произвольного коммутативного кольца R определена категория K-мотивов $\mathcal{KM}(k)_R$ с коэффициентами в R, при построении которой рассматриваются группы Гротендика $K_0(X)_R = K_0(X) \otimes R$ с коэффициентами в R. Для целочисленого K-мотива M из $\mathcal{KM}(k)$ соответствующий K-мотив с коэффициентами в R из $\mathcal{KM}(k)_R$ будет обозначаться через M_R. Для простоты мы будем использовать такое же обозначение $\mathbb{1}$ для единичного объекта в категории $\mathcal{KM}(k)_R$. Все, что было сказано выше о категории $\mathcal{KM}(k)$, остается верным и для категории $\mathcal{KM}(k)_R$.

1.1.4. **Связь между рациональными мотивами Чжоу и K-мотивами.** В статье Орлова [107] объяснена следующая связь между рациональными категориями $\mathcal{CM}(k)_\mathbb{Q}$ и $\mathcal{KM}(k)_\mathbb{Q}$.

Пусть $\widetilde{\mathcal{CM}}(k)_\mathbb{Q}$ обозначает симметрическую тензорную категорию с теми же объектами, что и в категории $\mathcal{CM}(k)_\mathbb{Q}$, и с морфизмами определенными по формуле

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{CM}}(k)_\mathbb{Q}}(M, M') := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(k)_\mathbb{Q}}(M, M' \otimes \mathbb{L}^i) \tag{1.1.12}$$

для произвольных рациональных мотивов Чжоу M и M' (при этом градуировка на правой части не учитывается), ср. с [131, § 7]. Тогда имеется эквивалентность симметрических тензорных категорий

$$\mathcal{KM}(k)_\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{CM}}(k)_\mathbb{Q}\,, \tag{1.1.13}$$

переводящая рациональный K-мотив $KM(X)_\mathbb{Q}$ гладкого проективного многообразия X в его рациональный мотив Чжоу $M(X)_\mathbb{Q}$. Для гладких проективных многообразий X и X' данная

эквивалентность задает отображение на морфизмах

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{KM}(k)_{\mathbb{Q}}}\left(KM(X)_{\mathbb{Q}}, KM(X')_{\mathbb{Q}}\right) = K_0(X\times X')_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \\ \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} CH^i(X\times X')_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{CM}}(k)_{\mathbb{Q}}}\left(M(X)_{\mathbb{Q}}, M(X')_{\mathbb{Q}}\right),$$

определяемое по формуле

$$\alpha \longmapsto \mathrm{pr}_1^*\sqrt{\mathrm{Td}_X}\cdot\mathrm{ch}(\alpha)\cdot\mathrm{pr}_2^*\sqrt{\mathrm{Td}_{X'}}\,, \tag{1.1.14}$$

где $\mathrm{pr}_1\colon X\times X'\to X$, $\mathrm{pr}_2\colon X\times X'\to X'$ являются естественными проекциями, $\mathrm{ch}(\alpha)$ обозначает характер Черна класса α, а Td_X, $\mathrm{Td}_{X'}$ обозначают классы Тодда многообразий X, X', соответственно. Из теоремы Гротендика–Римана–Роха следует, что отображение (1.1.14) сохраняет композицию морфизмов.

Замечание 1.1.15. Следуя Табуаде [131, § 8], вместо правой части в формуле (1.1.14) классу α можно сопоставить элемент $\mathrm{ch}(\alpha)\cdot\mathrm{pr}_2^*\,\mathrm{Td}_{X'}$, или, более обще, элемент вида $\mathrm{pr}_1^*\,\mathrm{Td}_X^u\cdot\mathrm{ch}(\alpha)\cdot\mathrm{pr}_2^*\,\mathrm{Td}_{X'}^{1-u}$ для произвольного $u\in\mathbb{Q}$.

1.2. Различные K-группы

В этом параграфе мы определяем K-группы Милнора, напоминаем их связь с алгебраическими K-группами, а также приводим конструкцию граничного отображения для алгебраических K-групп колец рядов Лорана с коэффициентами в произвольном кольце. Также мы кратко обсуждаем K-когомологии, спектральную последовательность Брауна–Герстена и приложения теоремы Меркурьева–Суслина к изучению кручения в группах Чжоу. Наконец, мы напоминаем основные факты, касающиеся спектральной последовательности Атьи–Хирцебруха для топологических и этальных K-групп.

1.2.1. **K-группы Милнора и алгебраические K-группы.** Мы будем использовать следующий вариант определения K-групп Милнора для колец. Для коммутативного кольца A его *K-группа Милнора* $K_n^M(A)$ с номером n является факторгруппой группы $(A^*)^{\otimes n}$ по подгруппе, порожденной всеми элементами вида

$$a_1\otimes\ldots\otimes a_{i-1}\otimes a\otimes(1-a)\otimes a_{i+2}\otimes\ldots\otimes a_n\,,\qquad 1\leqslant i\leqslant n-1\,, \tag{1.2.1}$$

которые называются *соотношениями Стейнберга*. Отметим, что в тензоре (1.2.1) сомножители a и $1-a$ идут один после другого и не разделены. Класс в группе $K_n^M(A)$ тензора $a_1\otimes\ldots\otimes a_n$, $a_i\in R^*$, обычно обозначается через $\{a_1,\ldots,a_n\}$ и называется *символом*. Ясно, что K_n^M является групповым функтором на категории коммутативных колец. В частности, имеется изоморфизм $K_1^M\simeq\mathbb{G}_m$.

Обозначим через Ω^n групповой функтор на категории коммутативных колец, сопоставляющий кольцу A группу n-ых абсолютных кэлеровых дифференциалов Ω^n_A. Легко проверить, что имеется морфизм групповых функторов

$$d\log\ :\ K_n^M \longrightarrow \Omega^n\,, \qquad \{a_1,\dots,a_n\} \longmapsto \frac{da_1}{a_1}\wedge\ldots\wedge\frac{da_n}{a_n}\,.$$

Определение 1.2.2. Пусть $\underline{\mathbb{Z}}$ является групповым функтором, определенным следующим образом: для кольца A положим $\underline{\mathbb{Z}}(A)$ равной группе локально постоянных функций на топологическом пространстве $\mathrm{Spec}(A)$ со значениями в кольце $\mathbb{Z}$.

Другими словами, $\underline{\mathbb{Z}}$ есть постоянный пучок в топологии Зарисского, ассоциированный с группой $\mathbb{Z}$. Так как аффинные схемы квазикомпактны, то для заданного кольца A элемент $\underline{l}\in\underline{\mathbb{Z}}(A)$ определяет разложение в конечное произведение колец

$$A\simeq\prod_{i=1}^N A_i$$

и набор целых чисел l_i, $1\leqslant i\leqslant N$, так что для каждого i ограничение элемента $\underline{l}$ на пространство $\mathrm{Spec}(A_i)$ является постоянной функцией со значением, равным l_i.

Для кольца A также определены алгебраические K-группы $K_n(A)$, $n\geqslant 0$, функториальные относительно A, см., например, обзор Суслина [126]. Имеются канонические разложения групповых функторов

$$K_0\simeq\underline{\mathbb{Z}}\times\widetilde{K}_0\,, \qquad K_1\simeq\mathbb{G}_m\times SK_1\,, \tag{1.2.3}$$

Пусть $\mathrm{rk}\colon K_0\to\underline{\mathbb{Z}}$ и $\det\colon K_1\to\mathbb{G}_m$ обозначают соответствующие проекции. В явном виде, они задаются взятием ранга конечно порожденного проективного модуля и взятием определителя матрицы, соответственно.

Лодей [92] построил коммутативное в градуированном смысле произведение между алгебраическими K-группами, функториальное относительно кольца A:

$$K_m(A)\otimes_{\mathbb{Z}}K_n(A)\longrightarrow K_{m+n}(A)\,, \qquad \alpha\otimes\beta\longmapsto\alpha\cdot\beta\,, \qquad m,n\geqslant 0\,.$$

Произведение Лодея между групповыми подфункторами $\mathbb{G}_m\subset K_1$ пропускается через K-группы Милнора (см., например, книгу Шриниваса [125, §§ 1, 2]), т.е. имеется морфизм групповых функторов

$$K_n^M\longrightarrow K_n\,, \qquad \{a_1,\dots,a_n\}\longmapsto a_1\cdot\ldots\cdot a_n\,, \qquad a_i\in A^*\,. \tag{1.2.4}$$

Легко видеть, что если кольцо A локально, то морфизм (1.2.4) задает изоморфизмы $\mathbb{Z}=K_0^M(A)\simeq K_0(A)$, $A^*=K_1^M(A)\simeq K_1(A)$. Теорема Мура–Мацумото (см., например, книгу Милнора [100, §§ 11, 12]) утверждает, что для произвольного поля F морфизм (1.2.4) задает изоморфизм $K_2^M(F)\simeq K_2(F)$.

1.2.2. **Граничное отображение для алгебраических K-групп.** Пусть A является произвольным кольцом, а $n \geqslant 0$ является натуральным числом. В этом параграфе мы напомним конструкцию граничного отображения

$$\partial_{n+1} \ : \ K_{n+1}\big(A((t))\big) \longrightarrow K_n(A)\,,$$

а также покажем, что данное отображение функториально относительно кольца A. Все это непосредственно следует из работы Томасона–Тробо [135]. Тем менее, мы решили привести более явную конструкцию, вытекающую из работ Грейсона [54] и Като [70].

Пусть $\mathcal{H}(A)$ является точной категорией $A[[t]]$-модулей, для которых существует резольвента длины один из конечно порожденных проективных $A[[t]]$-модулей и которые аннулируются некоторой степенью элемента t. Из одного результата Герстена [46] следует, что существует граничное отображение вида $\tilde{\partial}_{n+1}\colon K_{n+1}\big(A((t))\big) \to K_n\big(\mathcal{H}(A)\big)$. Результат Герстена был позже обобщен Грейсоном [54] (см. более детальное изложение в [125, Theor. 9.1]). Для того, чтобы показать функториальность отображения $\tilde{\partial}_{n+1}$, мы будем использовать именно конструкцию из работы [54], которую мы объясняем ниже.

Замечание 1.2.5. Резольвента произвольного модуля из $\mathcal{H}(A)$ является примером совершенного комплекса $A[[t]]$-модулей с носителем на замкнутой подсхеме $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathrm{Spec}\,\big(A[[t]]\big)$, заданной уравнением $t = 0$. Совершенные комплексы подобного вида играют ключевую роль в работе Томасона–Тробо [135].

Введем еще несколько обозначений. Для кольца R через $\mathcal{P}(R)$ обозначим точную категорию конечно порожденных проективных R-модулей. Через $\mathcal{P}^1(R)$ обозначим точную категорию R-модулей, для которых существует резольвента длины один из конечно порожденных проективных R-модулей. Пусть $\mathcal{V}(A)$ обозначает точную категорию конечно порожденных проективных $A((t))$-модулей, которые являются локализацией конечно порожденных проективных модулей над кольцом $A[[t]]$. Пусть $\mathcal{V}^1(A)$ обозначает точную категорию $A((t))$-модулей, для которых существует резольвента длины один из $A((t))$-модулей из категории $\mathcal{V}(A)$. Через BQ будем обозначать классифицирующее пространство Q-конструкции от точной категории.

По теореме Квиллена о резольвенте [117, Theor. 4.3, Cor. 4.1] вложение точных категорий $\mathcal{V}(A) \to \mathcal{V}^1(A)$ индуцирует гомотопическую эквивалентность $\mathrm{BQ}\mathcal{V}(A) \to \mathrm{BQ}\mathcal{V}^1(A)$, откуда возникают изоморфизмы K-групп

$$K_n\big(\mathcal{V}(A)\big) \simeq K_n\big(\mathcal{V}^1(A)\big)\,.$$

Заметим, что все точные последовательность в категории $\mathcal{P}\big(A((t))\big)$ расщепляются. Кроме того, подкатегория $\mathcal{V}(A)$ кофинальна в категории $\mathcal{P}\big(A((t))\big)$. Иными словами, любой модуль из $\mathcal{P}\big(A((t))\big)$ является прямым слагаемым в модуле из $\mathcal{V}(A)$, являясь прямым слагаемым в конечно порожденном свободном $A((t))$-модуле. Поэтому из [46, Prop. 1.1, Prop. 1.3] следует, что соответствующее отображение $\mathrm{BQ}\mathcal{V}(A) \to \mathrm{BQ}\mathcal{P}\big(A((t))\big)$ гомотопически эквивалентно накрытию, и мы получаем изоморфизмы K-групп

$$K_n\big(\mathcal{V}(A)\big) \simeq K_n\big(A((t))\big)\,, \qquad n \geqslant 1\,.$$

(Отображение $K_0\big(\mathcal{V}(A)\big) \to K_0\big(A((t))\big)$ инъективно, но не сюръективно в общем случае.) Наконец, рассмотрим следующую диаграмму точных категорий:

$$\mathcal{H}(A) \longrightarrow \mathcal{P}^1\big(A[[t]]\big) \longrightarrow \mathcal{V}^1(A)\,. \tag{1.2.6}$$

Основной момент заключается в том, что диаграмма (1.2.6) индуцирует гомотопическое расслоение

$$\mathrm{BQ}\mathcal{H}(A) \longrightarrow \mathrm{BQ}\mathcal{P}^1\big(A[[t]]\big) \longrightarrow \mathrm{BQ}\mathcal{V}^1(A)\,.$$

По существу это утверждение является “локализационной теоремой для проективных модулей” из [54] и следует из начала и конца доказательства этой теоремы. Таким образом, мы получаем длинную точную последовательность гомотопических групп и, в частности, мы получаем граничное отображение $K_{n+1}\big(\mathcal{V}^1(A)\big) \to K_n\big(\mathcal{H}(A)\big)$. Применяя приведенные выше изоморфизмы между K-группами, получаем отображение

$$\tilde{\partial}_{n+1} \;:\; K_{n+1}\big(A((t))\big) \longrightarrow K_n\big(\mathcal{H}(A)\big)\,.$$

Нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 1.2.7. *Для любого гомоморфизма колец $A \to B$ и для любого $A[[t]]$-модуля M из $\mathcal{H}(A)$ имеется равенство* $\mathrm{Tor}_1^{A[[t]]}\big(M, B[[t]]\big) = 0$.

Доказательство. Пусть

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\alpha} Q \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

является резольвентой модуля M из конечно порожденных проективных модулей над $A[[t]]$. Надо показать, что отображение

$$\alpha' := \alpha \otimes_{A[[t]]} B[[t]] \;:\; P \otimes_{A[[t]]} B[[t]] \longrightarrow Q \otimes_{A[[t]]} B[[t]]$$

инъективно. Поскольку модуль M аннулируется некоторой степенью элемента t, отображение $\alpha \otimes_{A[[t]]} A((t))$ является изоморфизмом, а значит отображение $\alpha \otimes_{A[[t]]} B((t)) = \alpha' \otimes_{B[[t]]} B((t))$

тоже изоморфизм. Следовательно, каждый элемент из $B[[t]]$-модуля $\mathrm{Ker}(\alpha')$ аннулируется некоторой степенью элемента t. С другой стороны, $\mathrm{Ker}(\alpha')$ является подмодулем в проективном $B[[t]]$-модуле $P\otimes_{A[[t]]}B[[t]]$, и t не является делителем нуля в кольце $B[[t]]$. Следовательно, $\mathrm{Ker}(\alpha')=0$. □

Предложение 1.2.8. *Отображение* $\tilde{\partial}_{n+1}\colon K_{n+1}\big(A((t))\big)\to K_n\big(\mathcal{H}(A)\big)$ *функториально относительно кольца* A.

Доказательство. Мы будем использовать идею Като из доказательства леммы 2 в [70, § 2.1]. Отметим, что вторая и третья категории из диаграммы (1.2.6) не функториальны относительно кольца A. Чтобы обойти эту проблему, определим некоторые вспомогательные точные категории. Пусть $\varphi\colon A\to B$ является произвольным гомоморфизмом колец. Пусть $\mathcal{P}^1_\varphi\big(A[[t]]\big)$ обозначает точную категорию $A[[t]]$-модулей M из категории $\mathcal{P}^1\big(A[[t]]\big)$, для которых $\mathrm{Tor}_1^{A[[t]]}\big(M,B[[t]]\big)=0$. Аналогично, пусть $\mathcal{V}^1_\varphi(A)$ обозначает точную категорию $A((t))$-модулей N из категории $\mathcal{V}^1(A)$, для которых $\mathrm{Tor}_1^{A((t))}\big(N,B((t))\big)=0$. Лемма 1.2.7 утверждает, что $\mathcal{H}(A)$ является подкатегорией в $\mathcal{P}^1_\varphi\big(A[[t]]\big)$. Таким образом, имеется следующая диаграмма точных категорий, в которой все стрелки являются точными функторами:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{H}(A) & \longrightarrow & \mathcal{P}^1\big(A[[t]]\big) & \longrightarrow & \mathcal{V}^1(A) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{H}(A) & \longrightarrow & \mathcal{P}^1_\varphi\big(A[[t]]\big) & \longrightarrow & \mathcal{V}^1_\varphi(A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}(B) & \longrightarrow & \mathcal{P}^1\big(B[[t]]\big) & \longrightarrow & \mathcal{V}^1(B)
\end{array}$$

По теореме Квиллена о резольвенте все идущие наверх стрелки в этой диаграмме индуцируют гомотопические эквивалентности между соответствующими BQ-пространствами. Следовательно, функториальность отображения $\tilde{\partial}_{n+1}$ вытекает из функториальности граничного отображения в длинной точной последовательности гомотопических групп. □

Теперь построим отображение из $K_n\big(\mathcal{H}(A)\big)$ в $K_n(A)$. Осипов и Жу доказали в [111, Prop. 7.1], что любой $A[[t]]$-модуль из категории $\mathcal{H}(A)$ является конечно порожденным проективным A-модулем (ср. с [43, § 3.3] и [70, Lem. 2.1.1]). Таким образом, имеется точный функтор $\mathcal{H}(A)\to\mathcal{P}(A)$, который индуцирует отображения между K-группами

$$I_n\ :\ K_n\big(\mathcal{H}(A)\big)\longrightarrow K_n(A)\,.$$

Нам также понадобится следующая простая лемма.

Лемма 1.2.9. *Пусть дан гомоморфизм колец $A \to B$, и пусть M является $A[[t]]$-модулем, для которого $t^l \cdot M = 0$ при некотором целом числе $l \geqslant 0$. Тогда естественный гомоморфизм B-модулей $M \otimes_A B \to M \otimes_{A[[t]]} B[[t]]$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Определим $A[[t]]$-модуль $T := A[[t]]/t^l A[[t]]$. Тогда для T лемма выполнена, т.е. естественный гомоморфизм B-модулей

$$T \otimes_A B \longrightarrow T \otimes_{A[[t]]} B[[t]]$$

является изоморфизмом. Действительно, оба B-модуля изоморфны B-модулю $B[[t]]/t^l B[[t]]$. Чтобы доказать лемму в общем случае, рассмотрим следующую композицию изоморфизмов B-модулей:

$$M \otimes_A B \xrightarrow{\sim} (M \otimes_{A[[t]]} T) \otimes_A B \xrightarrow{\sim} M \otimes_{A[[t]]} (T \otimes_A B) \xrightarrow{\sim}$$
$$\xrightarrow{\sim} M \otimes_{A[[t]]} (T \otimes_{A[[t]]} B[[t]]) \xrightarrow{\sim} (M \otimes_{A[[t]]} T) \otimes_{A[[t]]} B[[t]] \xrightarrow{\sim} M \otimes_{A[[t]]} B[[t]] \,.$$

□

Из леммы 1.2.9 непосредственно вытекает, что отображение I_n функториально относительно кольца A.

Наконец, определим граничное отображение для K-групп по формуле

$$\partial_{n+1} := I_n \circ \tilde{\partial}_{n+1} \ : \ K_{n+1}\big(A((t))\big) \longrightarrow K_n(A) \,. \tag{1.2.10}$$

Объединяя функториальность отображения I_n с функториальностью отображения $\tilde{\partial}_{n+1}$ из предложения 1.2.8, мы получаем функториальность отображения ∂_{n+1} из формулы (1.2.10) относительно кольца A.

Мы также будем использовать следующее специальное свойство отображения ∂_{n+1}. Обозначим через $\lambda_n \colon K_n\big(A[[t]]\big) \to K_n\big(A((t))\big)$ отображение, индуцированное гомоморфизмом колец $A[[t]] \to A((t))$. Через $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ обозначим отображение $K_n\big(A[[t]]\big) \to K_n(A)$, индуцированное гомоморфизмом колец $A[[t]] \to A[[t]]/(t) \simeq A$. Из [70, Prop. 2.4.5] следует, что для любого элемента $\alpha \in K_n\big(A[[t]]\big)$ имеется равенство в $K_n(A)$

$$\partial_{n+1}\big(\lambda_n(\alpha) \cdot t\big) = \bar{\alpha} \,, \tag{1.2.11}$$

где t рассматривается как элемент группы $K_1\big(A((t))\big)$. В частности, выполняется равенство $\partial_1(t) = 1$, где 1 рассматривается как элемент группы $K_0(A)$.

1.2.3. **K-когомологии.** Пусть X является гладким равноразмерным многообразием над k. Обозначим через $\mathcal{K}_i$, $i \geqslant 0$, пучок в топологии Зарисского на X, ассоциированный с предпучком, сопоставляющим открытому подмножеству $U \subset X$ его алгебраическую K-группу $K_i(U) \simeq K_i\big(k[U]\big)$. В частности, имеем $\mathcal{K}_0 = \underline{\mathbb{Z}}_X$ и $\mathcal{K}_1 = \mathcal{O}_X^*$. По результату Квиллена [117, § 7.5] *K-когомологии* $H^i(X, \mathcal{K}_j)$ канонически изоморфны группам когомологий комплекса Герстена, имеющего вид

$$\bigoplus_{\eta\in X^{(0)}} K_j\big(k(\eta)\big) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{(p)}} K_{j-p}\big(k(x)\big) \longrightarrow \bigoplus_{y\in X^{(p+1)}} K_{j-p-1}\big(k(y)\big) \longrightarrow \ldots \tag{1.2.12}$$

Здесь $X^{(p)}$ обозначает множество схемных точек на X коразмерности p, через $k(x)$ обозначено поле вычетов произвольной схемной точки $x \in X$, а дифференциал в комплексе (1.2.12) состоит из сумм граничных отображений для алгебраических K-групп вида $K_{n+1}(K) \to K_n(\kappa)$, где K является полем частных некоторого кольца дискретного нормирования с полем вычетов κ (ср. с граничным отображением в § 1.2.2). Из этого следует, что $H^i(X, \mathcal{K}_j) = 0$ при $i > j$, и что имеются канонические изоморфизмы

$$H^i(X, \mathcal{K}_i) \simeq CH^i(X)\,, \qquad i \geqslant 0\,. \tag{1.2.13}$$

Имеется спектральная последовательность Брауна–Герстена [26]

$$E_2^{ij} = H^i(X, \mathcal{K}_{-j}) \Rightarrow K_{-i-j}(X)\,,$$

для которой соответствующая фильтрация на K-группах совпадает с фильтрацией по коразмерности носителя. Произведение между алгебраическими K-группами естественно определяет произведение между K-когомологиями. При изоморфизме (1.2.13) данное произведение соответствует (с точностью до знака) пересечению алгебраических циклов (см. статьи Грейсона [55], Жилле [47], а также в [49, Cor. 4.22]). Спектральная последовательность Брауна–Герстена мультипликативна в естественном смысле (см., например, обзор Жилле [48, Theor. 69]).

При $i \geqslant 0$ в спектральной последовательности Брауна–Герстена нет ненулевых дифференциалов, выходящих из $H^i(X, \mathcal{K}_i)$, и соответствующее отображение

$$CH^i(X) \simeq H^i(X, \mathcal{K}_i) \longrightarrow \mathrm{gr}_F^i K_0(X)$$

совпадает (с точностью до знака) с отображением φ_i из предложения 1.1.6. Все дифференциалы, выходящие из $H^0(X, \mathcal{K}_1) \simeq k^*$, равны нулю по функториальности спектральной последовательности Брауна–Герстена, примененной к морфизму $X \to \mathrm{Spec}(k)$. Таким образом,

член E_2 выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z} & 0 & & & \\
k^* & CH^1(X) & 0 & & \\
H^0(X,\mathcal{K}_2) & H^1(X,\mathcal{K}_2) & CH^2(X) & 0 & \\
H^0(X,\mathcal{K}_3) & H^1(X,\mathcal{K}_3) & H^2(X,\mathcal{K}_3) & CH^3(X) & 0
\end{array}$$

(стрелки d_2 из $H^0(X,\mathcal{K}_2)$ в $H^1(X,\mathcal{K}_3)$ и из $H^1(X,\mathcal{K}_2)$ в $H^2(X,\mathcal{K}_3)$)

По предложению 1.1.6 ядро гомоморфизма φ_3 является 2-кручением, и поэтому дифференциал $d_2\colon H^1(X,\mathcal{K}_2)\to CH^3(X)$ пропускается через фактор $H^1(X,\mathcal{K}_2)/2$. Таким образом, имеется точная последовательность

$$H^1(X,\mathcal{K}_2)/2 \xrightarrow{d_2} CH^3(X) \xrightarrow{\varphi_3} \mathrm{gr}^3_F K_0(X)\,. \tag{1.2.14}$$

1.2.4. **Теорема Меркурьева–Суслина.** Пусть F — произвольное поле, а n — целое число, взаимно простое с характеристикой поля F. Для краткости мы будем обозначать через $H^i\bigl(F,\mathbb{Z}/n(j)\bigr)$ когомологии Галуа $H^i\bigl(G_F,\mathbb{Z}/n(j)\bigr)\simeq H^i_{\acute{e}t}\bigl(\mathrm{Spec}(F),\mathbb{Z}/n(j)\bigr)$, где G_F обозначает абсолютную группу Галуа поля F, а $\mathbb{Z}/n(j):=\mu_n^{\otimes j}$, $j\in\mathbb{Z}$. *Теория Куммера* задает изоморфизм $F^*/n\xrightarrow{\sim} H^1\bigl(F,\mathbb{Z}/n(1)\bigr)$. Рассматривая произведение в K-группах Милнора и в когомологиях Галуа, мы получаем гомоморфизм

$$K_2^M(F)/n\longrightarrow H^2\bigl(F,\mathbb{Z}/n(2)\bigr)\,,$$

называемый *символом норменного вычета. Теорема Меркурьева–Суслина* [98] утверждает, что символ норменного вычета является изоморфизмом.

Пусть теперь X является неприводимым гладким многообразием над k, а целое число n взаимно просто с характеристикой поля k. Важное следствие из теоремы Меркурьева–Суслина заключается в существовании точной последовательности (см. [98, § 18])

$$0\longrightarrow H^1(X,\mathcal{K}_2)/n\xrightarrow{\nu} NH^3_{\acute{e}t}\bigl(X,\mathbb{Z}/n(2)\bigr)\longrightarrow CH^2(X)_n\longrightarrow 0\,, \tag{1.2.15}$$

где через $NH^3_{\acute{e}t}\bigl(X,\mathbb{Z}/n(2)\bigr)$ обозначено ядро отображения ограничения $H^3_{\acute{e}t}\bigl(X,\mathbb{Z}/n(2)\bigr)\longrightarrow H^3\bigl(k(X),\mathbb{Z}/n(2)\bigr)$.

Опишем отображение ν более подробно. Пусть $\mathcal{H}^i$ обозначает пучок в топологии Зарисского на X, ассоциированный с предпучом, сопоставляющим открытому подмножеству $U\subset X$ его этальные когомологии $H^i_{\acute{e}t}\bigl(U,\mathbb{Z}/n(2)\bigr)$. Для любого многообразия U определены этальные классы Черна $K_i(U)\to H^i\bigl(U,\mathbb{Z}/n(i)\bigr)$, см. статью Суле [124, § II.2.3]. Заметим, что при

$i = 1$ этальный класс Черна задается теорией Куммера на обратимых элементах, а при $i = 2$ этальный класс Черна совпадает с символом норменного вычета на разложимых элементах. Также, при $i = 2$ этальный класс Черна индуцирует морфизм пучков $\mathcal{K}_2 \to \mathcal{H}^2$ и, соответственно, отображение между когомологиями пучков

$$H^1(X, \mathcal{K}_2)/n \longrightarrow H^1(X, \mathcal{H}^2)\,. \tag{1.2.16}$$

Далее, прямой образ пучков из этальной топологии в топологию Зарисского определяет спектральную последовательность Лере

$$E_2^{ij} = H^i(X, \mathcal{H}^j) \Rightarrow H_{\acute{e}t}^{i+j}\big(X, \mathbb{Z}/n(2)\big)\,.$$

Из основного результата в работе Блоха и Огаса [21] следует, что соответствующая фильтрация на $H_{\acute{e}t}^{i+j}\big(X, \mathbb{Z}/n(2)\big)$ совпадает с фильтрацией по коразмерности носителя, и что $H^i(X, \mathcal{H}^j) = 0$ при $i > j$. Следовательно, член E_2 спектральной последовательности Лере выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccc}
H^0(X, \mathcal{H}^3) & H^1(X, \mathcal{H}^3) & H^2(X, \mathcal{H}^3) \\
 & \overset{d_2}{\searrow} & \\
H^0(X, \mathcal{H}^2) & H^1(X, \mathcal{H}^2) & H^2(X, \mathcal{H}^2) \\
H^0(X, \mathcal{H}^1) & H^1(X, \mathcal{H}^1) & 0 \\
\mathbb{Z}/n & 0 & 0
\end{array}$$

Таким образом, возникает изоморфизм

$$H^1(X, \mathcal{H}^2) \xrightarrow{\sim} NH_{\acute{e}t}^3\big(X, \mathbb{Z}/n(2)\big)\,. \tag{1.2.17}$$

Отображение ν равно композиции отображений (1.2.16) и (1.2.17).

Нам также понадобится следующее простое наблюдение относительно отображения ν. Рассмотрим композицию

$$k^*/n \otimes CH^1(X)/n \longrightarrow H_{\acute{e}t}^1\big(X, \mathbb{Z}/n(1)\big) \otimes H_{\acute{e}t}^2\big(X, \mathbb{Z}/n(1)\big) \longrightarrow H_{\acute{e}t}^3\big(X, \mathbb{Z}/n(2)\big)\,, \tag{1.2.18}$$

где первое отображение является тензорным произведением композиции изоморфизма из теории Куммера и отображения обратного образа

$$k^*/n \xrightarrow{\sim} H^1\big(k, \mathbb{Z}/n(1)\big) \longrightarrow H_{\acute{e}t}^1\big(X, \mathbb{Z}/n(1)\big) \tag{1.2.19}$$

и отображения класса цикла

$$CH^1(X)/n \longrightarrow H^2_{\acute{e}t}\big(X, \mathbb{Z}/n(1)\big)\,, \tag{1.2.20}$$

а второе отображение является произведением в этальных когомологиях. Поскольку $CH^1\big(\operatorname{Spec}(k(X))\big) = 0$, образ композиции (1.2.18) содержится в $NH^3_{\acute{e}t}\big(X, \mathbb{Z}/n(2)\big)$. Таким образом, возникает гомоморфизм

$$\zeta \,:\, k^*/n \otimes CH^1(X)/n \longrightarrow NH^3_{\acute{e}t}\big(X, \mathbb{Z}/n(2)\big)\,. \tag{1.2.21}$$

Лемма 1.2.22. *Гомоморфизм ζ совпадает с точностью до знака с композицией*

$$k^*/n \otimes CH^1(X)/n \longrightarrow H^0(X, \mathcal{K}_1)/n \otimes H^1(X, \mathcal{K}_1)/n \xrightarrow{m} H^1(X, \mathcal{K}_2)/n \xrightarrow{\nu} NH^3_{\acute{e}t}\big(X, \mathbb{Z}/n(2)\big)$$

где m является произведением в K-когомологиях.

Доказательство. Композиции

$$k^*/n \longrightarrow H^0(X, \mathcal{K}_1)/n \longrightarrow H^0(X, \mathcal{H}^1) \xrightarrow{\sim} H^1_{\acute{e}t}\big(X, \mathbb{Z}/n(1)\big)\,,$$

$$CH^1(X)/n \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{K}_1)/n \longrightarrow H^1(X, \mathcal{H}^1) \hookrightarrow H^2_{\acute{e}t}\big(X, \mathbb{Z}/n(1)\big)$$

совпадают с отображениями (1.2.19) и (1.2.20), соответственно. Теперь надо воспользоваться мультипликативностью этальных классов Черна и мультипликативностью спектральной последовательности Лере. □

1.2.5. **Топологические и этальные K-группы.** В этом параграфе мы рассматриваем топологические и этальные K-группы и вводим спектральную последовательность Атьи–Хирцебруха, связывающую их с когомологиями Бетти и этальными когомологиями, соответственно. Мы также объясняем, почему топологические и этальные K-группы корректно определены для K-мотивов.

Пусть X является гладким многообразием над сепарабельно замкнутыми полем k. Пусть l является простым числом, не равным характеристике поля k. Выберем порождающую модуля Тейта $\mathbb{Z}_l(1)$, т.е. согласованный набор l-примарных корней из единицы в k. Данный выбор позволяет игнорировать подкрутку Тейта в этальных когомологиях.

Пусть $H^i(X)$, $i \geqslant 0$, обозначает либо когомологии Бетти $H^i\big(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}\big)$, когда $k = \mathbb{C}$, либо этальные когомологии $H^i_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_l)$, когда k является произвольным сепарабельно замкнутым полем. Соответственно, пусть $KT_i(X)$, $i \geqslant 0$, обозначает либо *топологическую K-группу* $K_i^{top}\big(X(\mathbb{C})\big)$, либо *этальную K-группу* $\hat{K}_i^{\acute{e}t}(X)$, связанную с простым числом l. А

именно, обозначим через $U(\infty)$ бесконечную унитарную группу, через $BU(\infty)$ — ее классифицирующее пространство, и пусть Map обозначает пространство непрерывных отображений между топологическими пространствами (или симплициальными множествами, или про-симплициальными множествами и т.д.). Пусть $\mathrm{Map}\big(X, \mathbb{Z}\times BU(\infty)\big)$ обозначает либо пространство $\mathrm{Map}\big(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}\times BU(\infty)\big)$, либо пространство $\mathrm{Map}\big(X_{\acute{e}t}, (\mathbb{Z}\times BU(\infty))\hat{}_l\big)$, где про-симплициальное множество $X_{\acute{e}t}$ является этальным гомотопическим типом многообразия X, определенным Артиным и Мазуром [3], а $\big(\mathbb{Z}\times BU(\infty)\big)\hat{}_l$ является l-адическим пополнением пространства $\mathbb{Z}\times BU(\infty)$ в правильном смысле, см. детали в статье Фридландера [40, § 1]. Тогда имеются изоморфизмы

$$KT_i(X) \simeq \pi_i\,\mathrm{Map}\big(X, \mathbb{Z}\times BU(\infty)\big)\,, \qquad i\geqslant 0\,.$$

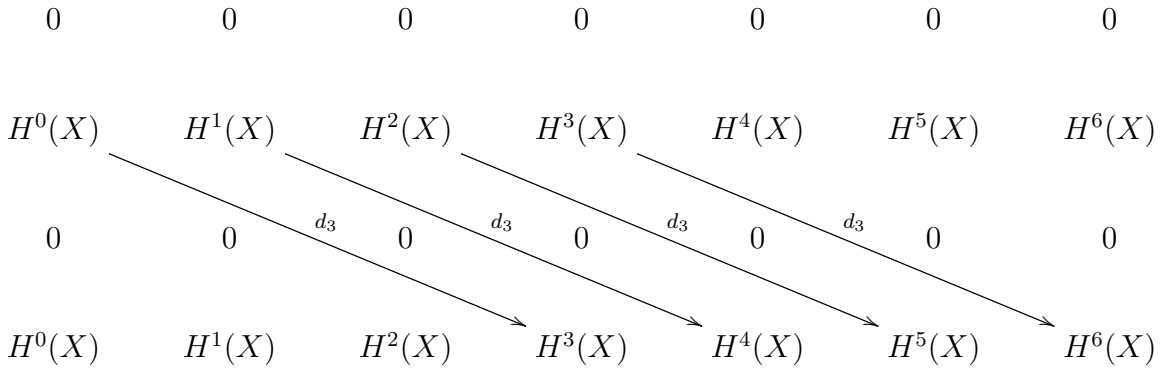
Напомним также, что топологическая K-группа $K_0^{top}\big(X(\mathbb{C})\big)$ изоморфна группе Гротендика категории комплексных векторных расслоений на топологическом пространстве $X(\mathbb{C})$.

Пространство петель $\Omega\big(\mathbb{Z}\times BU(\infty)\big)$ гомотопически эквивалентно топологическому пространству $U(\infty)$, и по периодичности Ботта пространство $\Omega U(\infty)$ гомотопически эквивалентно пространству $\mathbb{Z}\times BU(\infty)$. Следовательно, имеются изоморфизмы $KT_{2i}(X)\simeq KT_0(X)$ и $KT_{2i+1}(X)\simeq KT_1(X)$, $i\geqslant 0$.

Имеется *спектральная последовательность Атьи–Хирцебруха*

$$E_2^{ij} = H^i(X, j/2) \Rightarrow KT_{-i-j}(X)\,,$$

где $H^i(X, j/2) := H^i(X)$ для четных j и $H^i(X, j/2) = 0$ для нечетных j. Дифференциал d_2 нулевой, а член E_3 выглядит следующим образом:



Данная спектральная последовательность периодична относительно вертикального сдвига на 2 и вырождается в члене E_2 после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$. В частности, образы дифференциалов являются группами кручения.

Исходно спектральная последовательность Атьи–Хицебруха была построена в работе [4] для топологических K-групп при помощи возрастающей клеточной фильтрации на топологическом пространстве $X(\mathbb{C})$ (при $k = \mathbb{C}$). Та же самая спектральная последовательность возникает и при рассмотрении убывающей фильтрации Постникова на пространстве $\mathbb{Z} \times BU(\infty)$ (доказательство равносильности этих двух подходов можно найти, например, в книге Гринлиса–Мэя [56, Theor. B.8]). Отметим, что присоединенный фактор с номером j относительно фильтрации Постникова на $\mathbb{Z}\times BU(\infty)$ гомотопически эквивалентен пространству Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z}, j)$ для четного j и тривиален для нечетного j, а также, что имеются естественные изоморфизмы

$$\pi_i \operatorname{Map}\big(X, K(\mathbb{Z}, j)\big) \simeq H^{j-i}(X)\,, \qquad i \leqslant j\,,$$

$$\pi_i \operatorname{Map}\big(X, K(\mathbb{Z}, j)\big) = 0\,, \qquad i > j\,.$$

Два первых нетривиальных присоединенных фактора относительно фильтрации Постникова на $\mathbb{Z} \times BU(\infty)$ выглядят следующим образом:

$$\mathbb{Z} \times BU(\infty) \longrightarrow \mathbb{Z} \sim K(\mathbb{Z}, 0)\,,$$

$$BU(\infty) \longrightarrow BU(1) \sim K(\mathbb{Z}, 2)\,,$$

где первое отображение является естественной проекцией, второе отображение задается определителем $U(\infty) \to U(1)$, а $\sim$ обозначает гомотопическую эквивалентность. Легко видеть, что оба отображения расщепляются (для второго отображения надо рассмотреть вложение $U(1) \to U(\infty)$, задаваемое произвольным диагональным элементом в матрице), ср. с разложениями (1.2.3).

Мы видим, что спектральная последовательность Атьи–Хирцебруха определяет сюръективные гомоморфизмы

$$KT_0(X) \to H^0(X)\,, \qquad KT_1(X) \longrightarrow H^1(X)\,, \qquad \widetilde{K}T_0(X) \longrightarrow H^2(X)\,,$$

где $\widetilde{K}T_0(X)$ обозначает ядро гомоморфизма $KT_0(X) \to H^0(X)$. Таким образом, все дифференциалы в спектральной последовательности Атьи–Хирцебруха, выходящие из $H^0(X)$, $H^1(X)$ и $H^2(X)$, равны нулю.

При $k = \mathbb{C}$ гомоморфизм $K_0^{top}\big(X(\mathbb{C})\big) \to H^0\big(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}\big)$ задается рангом векторных расслоений, а гомоморфизм $\widetilde{K}_0^{top}\big(X(\mathbb{C})\big) \to H^2\big(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}\big)$ является первым классом Черна векторных расслоений.

Лемма 1.2.23. *Для любого гладкого проективного многообразия X размерности 3 над сепарабельно замкнутым полем спектральная последовательность Атьи–Хирцебруха вырождается в члене E_2.*

Доказательство. Единственным возможно ненулевым дифференциалом в спектральной последовательности Атьи–Хирцебруха является дифференциал $d_3\colon H^3(X) \to H^6(X)$. Однако, поскольку X является гладким проективным многообразием размерности 3, группа $H^6(X)$ не содержит кручения, и поэтому данный дифференциал равен нулю. □

Имеется естественный гомоморфизм колец $K_0(X) \to KT_0(X)$, коммутирующий с отображением обратного образа. Более того, он коммутирует и с отображением прямого образа относительно морфизмов между гладкими проективными многообразиями. Для топологических K-групп это было доказано Атьей–Хирцебрухом [5, Theor. 4.2]. Для этальных K-групп это выполняется по определению отображения прямого образа для них, которое, в свою очередь, основано на теореме Томасона о сравнении между алгебраическими и этальными K-группами, см. [134, §§ 1.13, 2.2] (см. также [132] для более общего определения отображения прямого образа на этальных K-группах, которое также согласовано с отображением прямого образа на алгебраических K-группах).

Возникает гомоморфизм между кольцами соответствий $K_0(X \times X) \to KT_0(X \times X)$, где произведение определяется через композицию соответствий. Поскольку группы $KT_i(X)$, $i = 0, 1$, являются модулями над кольцом соответствий $KT_0(X \times X)$, мы видим, что топологические и этальные K-группы корректно определены для K-мотивов.

1.3. Производные категории когерентных пучков

В данном параграфе мы напоминаем определения и общие факты, касающиеся исключительных объектов, исключительных наборов, допустимых подкатегорий и полуортогональных разложений в триангулированных категориях. Мы определяем K-мотив для допустимой подкатегории в производной категории гладкого проективного многообразия. Мы вводим понятия фантома и квазифантома и описываем один известный способ строить квазифантомы на поверхностях общего типа, для которых выполняется гипотеза Блоха.

1.3.1. **Допустимые подкатегории.** В качестве общих ссылок по поводу исключительных наборов, допустимых подкатегорий и полуортогональных разложений приведем статьи Бондала [17], Бондала–Капранова [18] и Бондала–Орлова [21].

Пусть X является гладким проективным многообразием над k. Для краткости будем обозначать ограниченную производную категорию когерентных пучков на X через $D^b(X)$.

Естественно пытаться раскладывать категорию $D^b(X)$ на более простые полные триангулированные подкатегории, подобно разложению мотива. Отметим, что при этом разложение категории $D^b(X)$ в прямую сумму полных триангулированных подкатегорий возможно лишь засчет представления X в виде дизъюнктного объединения многообразий. Таким образом, чтобы иметь нетривиальные разложения для связных многообразий, под "разложением" следует понимать нечто более общее, чем просто разложение в прямую сумму.

Наиболее простой триангулированной k-линейной категорией естественно считать ограниченную производную категорию конечномерных k-векторных пространств $D^b(k) = D^b\big(\operatorname{Spec}(k)\big)$. Данная категория также эквивалентна категории градуированных конечномерных k-векторных пространств с естественной триангулированной структурой. Пусть $\mathcal{T}$ — произвольная k-линейная триангулированная категория. Для объектов $E, F \in \mathcal{T}$ и $i \in \mathbb{Z}$ положим $\operatorname{Hom}^i(E,F) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}\big(E, F[i]\big)$. Имеется эквивалентность между категорией строго полных триангулированных функторов из $D^b(k)$ в $\mathcal{T}$ и категорией *исключительных объектов* в $\mathcal{T}$, т.е. таких объектов $E \in \mathcal{T}$, для которых

$$\operatorname{Hom}^0(E,E) = k \qquad \text{и} \qquad \operatorname{Hom}^i(E,E) = 0 \qquad \text{при} \qquad i \neq 0\,.$$

А именно, функтору $i\colon D^b(k) \to \mathcal{T}$ соответствует исключительный объект $E = i(k)$. В качестве примера исключительного объекта можно привести произвольное линейное расслоение на X в случае, когда $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ при $i > 0$, где по умолчанию когерентные пучки на X рассматриваются как комплексы в $D^b(X)$, сосредоточенные в нулевой когомологической степени.

Пусть зафиксирован строго полный триангулированный функтор $i\colon D^b(k) \to \mathcal{T}$ или, что равносильно, зафиксирован исключительный объект $E \in \mathcal{T}$. Объясним, в каком смысле образ $\operatorname{Im}(i)$ "отщепляется" от $\mathcal{T}$. Можно показать, что у функтора i имеются правый и левый сопряженные функторы, а именно, функторы $F \mapsto \operatorname{Hom}^\bullet(E,F)$ и $F \mapsto \operatorname{Hom}^\bullet(F,E)^\vee$, соответственно, где $F \in \mathcal{T}$. Кроме того, для конуса естественного морфизма

$$C := \operatorname{cone}\big(\operatorname{Hom}^\bullet(E,F) \otimes_k E \to F\big)$$

выполняется условие $\operatorname{Hom}^\bullet(E,C) = 0$. Другими словами, C лежит в *правом ортогонале* $E^\perp$ к E, т.е. в полной триангулированной подкатегории в $\mathcal{T}$, состоящей из всех объектов $H \in \mathcal{T}$, для которых $\operatorname{Hom}^\bullet(E,H) = 0$. Из наличия отмеченного треугольника

$$\operatorname{Hom}^\bullet(E,F) \otimes_k E \longrightarrow F \longrightarrow C \longrightarrow \operatorname{Hom}^\bullet(E,F) \otimes_k E[1]$$

следует, что $\mathcal{T}$ *триангулированно порождается* объектом E и подкатегорией $E^\perp$, т.е. совпадает с наименьшей полной триангулированной подкатегорией в $\mathcal{T}$, содержащей $E_1, \ldots, E_n$

(обратим внимание, что при этом мы не требуем замкнутости подкатегории относительно взятия прямых слагаемых). Аналогично, рассматривая естественный морфизм $F \to \mathrm{Hom}^\bullet(F, E)^\vee \otimes_k E$, можно показать, что $\mathcal{T}$ также триангулированно порождается объектом E и левым ортогоналом ${}^\perp E$. Обычно это обозначается следующим образом:

$$\mathcal{T} = \langle E^\perp, E\rangle = \langle E, {}^\perp E\rangle\,.$$

Именно в этом смысле подкатегория $\mathrm{Im}(i)$, совпадающая с полной триангулированной подкатегорией в $\mathcal{T}$, порожденной E, отщепляется от $\mathcal{T}$.

Далее можно пытаться аналогично отщепить $D^b(k)$ от ортогонала к E (левого или правого). Итерируя, мы приходим к следующему понятию: *исключительный набор* в $\mathcal{T}$ — это упорядоченный набор исключительных объектов $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{T}$, для которого $\mathrm{Hom}^\bullet(E_j, E_i) = 0$ при $i < j$. Исключительный набор называется *полным*, если $\mathcal{T}$ триангулированно порождается объектами $E_1, \dots, E_n$. Хорошо известным примером полного исключительного набора является набор линейных расслоений $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1), \dots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n)$ в $D^b(\mathbb{P}^n)$, рассмотренный Бейлинсоном [7].

Естественно также отщеплять от $\mathcal{T}$ в указанном выше смысле и более сложные подкатегории. *Допустимая справа* (соответственно, *слева*) подкатегория $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ — это полная триангулированная подкатегория, удовлетворяющая одному из следующих равносильных условий:

(i) категория $\mathcal{T}$ триангулировано порождается $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}^\perp$ (соответственно, ${}^\perp\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}$);

(ii) для вложения $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ имеется правый (соответственно, левый) сопряженный функтор;

(iii) для любого объекта $F \in \mathcal{T}$ существует отмеченный треугольник

$$F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow F'[1]\,,$$

где $F' \in \mathcal{N}$, $F'' \in \mathcal{N}^\perp$ (соответственно, где $F' \in {}^\perp\mathcal{N}$, $F'' \in \mathcal{N}$).

Можно показать, что отмеченный треугольник из пункта (iii) функториален по объекту F. *Допустимая подкатегория* — это полная триангулированная подкатегория, допустимая и справа, и слева. Можно показать, что для любой допустимой подкатегории ее левый и правый ортогоналы канонически эквивалентны друг другу, а также они эквивалентны локализации по Вердье $\mathcal{T}/\mathcal{N}$. Любой исключительный набор $E_1, \dots, E_n$ в $\mathcal{T}$ триангулированно порождает допустимую подкатегорию $\langle E_1, \dots, E_n\rangle \subset \mathcal{T}$.

Итак, для допустимой справа (соответственно, слева) подкатегории $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ имеется разложение $\mathcal{T} = \langle \mathcal{N}^{\perp}, \mathcal{N} \rangle$ (соответственно, $\mathcal{T} = \langle \mathcal{N}, {}^{\perp}\mathcal{N} \rangle$). Раскладывая исходную категорию на более мелкие куски, мы приходим к следующему обобщению понятия полного исключительного набора. *Полуортогональное разложение* категории $\mathcal{T}$ — это упорядоченный набор полных триангулированных подкатегорий $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n$, для которого $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}_j^{\perp}$ при $i < j$, и для которого $\mathcal{T}$ триангулированно порождается подкатегориями $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n$. Обычно полуортогональное разложение обозначается так:

$$\mathcal{T} = \langle \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n \rangle .$$

Легко видеть, что для кажого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, подкатегория $\mathcal{N}_i$ является допустимой справа в подкатегории $\langle \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_i \rangle$ и допустимой слева в подкатегории $\langle \mathcal{N}_i, \dots, \mathcal{N}_n \rangle$. Для любой допустимой подкатегории $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ имеются полуортогональные разложения $\mathcal{T} = \langle \mathcal{N}^{\perp}, \mathcal{N} \rangle = \langle \mathcal{N}, {}^{\perp}\mathcal{N} \rangle$. В частности, для любого исключительного набора $E_1, \dots, E_n$ в $\mathcal{T}$ возникают полуортогональные разложения

$$\mathcal{T} = \langle E_1, \dots, E_n, \mathcal{N} \rangle = \langle \mathcal{N}', E_1, \dots, E_n \rangle$$

с эквивалентными категориями $\mathcal{N} = {}^{\perp}\langle E_1, \dots, E_n \rangle$ и $\mathcal{N}' = \langle E_1, \dots, E_n \rangle^{\perp}$.

Заметим, что любая допустимая справа или слева подкатегория в $D^b(X)$ является также допустимой и с другой стороны. Кроме того, для любого полуортогонального разложения категории $D^b(X)$ его компоненты являются допустимыми подкатегориями. В качестве примера допустимой подкатегории можно привести полное вложение $Lf^*\colon D^b(Y) \to D^b(X)$, где $f\colon X \to Y$ является морфизмом гладких проективных многообразий, для которого имеется изоморфизм $Rf_*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Y$.

Пусть даны два гладких проективных многообразия X, X' и полуортогональные разложения

$$D^b(X) = \langle \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n \rangle, \qquad D^b(X') = \langle \mathcal{N}'_1, \dots, \mathcal{N}'_{n'} \rangle . \tag{1.3.1}$$

Утверждается, что они естественно задают полуортогональное разложение категории $D^b(X \times X')$. А именно, для каждой пары допустимых подкатегорий $\mathcal{N}_i$ и $\mathcal{N}'_j$ определим $\mathcal{N}_i \boxtimes \mathcal{N}'_j$ как наименьшую полную триангулированную подкатегорию в $D^b(X \times X')$, содержащую объекты вида $F \boxtimes F' = \operatorname{pr}_1^* F \otimes \operatorname{pr}_2^* F'$, где $F \in \mathcal{N}_i$, $F' \in \mathcal{N}'_j$, и замкнутую относительно взятия прямых слагаемых. Легко видеть, что $\mathcal{N}_i \boxtimes \mathcal{N}'_j \subset (\mathcal{N}_k \boxtimes \mathcal{N}'_l)^{\perp}$, если $i < k$ или $j < l$.

С другой стороны, наименьшая полная триангулированная подкатегория в $D^b(X \times X')$, содержащая все объекты вида $A \boxtimes A'$, где $A \in D^b(X)$, $A' \in D^b(X')$, и замкнутая относительно

взятия прямых слагаемых, совпадает со всей категорий $D^b(X \times X')$. Это следует из того, что любой когерентный пучок $\mathcal{F}$ на $X \times X'$ обладает (возможно, бесконечной влево) резольвентой $P^\bullet$ из пучков вида $A \boxtimes A'$ как выше, причем $\mathcal{F}$ является прямым слагаемым в наивном обрезании $\sigma_{\geqslant -p}P^\bullet$ для достаточно большого натурального числа p. Следовательно, подкатегории $\mathcal{N}_i \boxtimes \mathcal{N}'_j$ триангулированно порождают всю категорию $D^b(X \times X')$. Таким образом, полуортогональное разложение (1.3.1) категорий $D^b(X)$ и $D^b(X')$ задает полуортогональное разложение

$$D^b(X \times X') = \big\langle \mathcal{N}_i \boxtimes \mathcal{N}'_j \big\rangle_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant n'} \,. \tag{1.3.2}$$

Заметим, что категории $\mathcal{N}_i \boxtimes \mathcal{N}'_j$ зависят от выбора вложений $\mathcal{N}_i \subset D^b(X)$ и $\mathcal{N}'_j \subset D^b(X')$ и не определены корректно для $\mathcal{N}_i$ и $\mathcal{N}'_j$ как абстрактных триангулированных категорий.

1.3.2. **Группы Гротендика и K-мотивы допустимых подкатегорий.** Напомним, что для триангулированной категории $\mathcal{T}$ ее группа Гротендика $K_0(\mathcal{T})$ порожена классами изоморфизма $[F]$ объектов $F \in \mathcal{T}$ по модулю соотношений $[F] = [F'] + [F'']$ для каждого отмеченного треугольника $F' \to F \to F'' \to F'[1]$. В частности, для гладкого многообразия X имеется канонический изоморфизм $K_0\big(D^b(X)\big) \simeq K_0(X)$.

Легко показать, что для любого полуортогонального разложения $\mathcal{T} = \langle \mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n \rangle$ вложения $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{T}$ определяют разложение в прямую сумму

$$K_0(\mathcal{N}_1) \oplus \ldots \oplus K_0(\mathcal{N}_n) \simeq K_0(\mathcal{T})\,.$$

Например, если $\mathcal{T}$ обладает полным исключительным набором из n объектов, то имеется изоморфизм $K_0(\mathcal{T}) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus n}$, поскольку $K_0(k) \simeq \mathbb{Z}$.

Пусть X — гладкое проективное многообразие над k. С каждой допустимой подкатегорией $\mathcal{N} \subset D^b(X)$ можно связать не только группу Гротендика $K_0(\mathcal{N})$, но старшие алгебраические K-группы, и даже K-мотив $KM(\mathcal{N}, X)$, являющийся прямым слагаемым в K-мотиве $KM(X)$. Отметим, что данный мотив зависит от выбора вложения $\mathcal{N} \subset D^b(X)$ и не определен корректно для $\mathcal{N}$ как абстрактной триангулированной категории.

Приведем конструкцию K-мотива $KM(\mathcal{N}, X)$, следуя идее Кузнецова [85, Theor. 3.7]. Согласно формуле (1.3.2) полуортогональное разложение $D^b(X) = \langle \mathcal{N}, {}^\perp\mathcal{N} \rangle$ задает полуортогональное разложение

$$D^b(X \times X) = \langle \mathcal{N} \boxtimes D^b(X), {}^\perp\mathcal{N} \boxtimes D^b(X) \rangle\,.$$

Для объекта $\mathcal{O}_{\Delta_X} \in D^b(X \times X)$ рассмотрим соответствующий отмеченный треугольник в $D^b(X \times X)$

$$F' \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta_X} \longrightarrow F'' \longrightarrow F'[1]\,,$$

где $F' \in {}^{\perp}\mathcal{N} \boxtimes D^b(X)$ и $F'' \in \mathcal{N} \boxtimes D^b(X)$. Тогда классы $[F'], [F''] \in K_0(X \times X)$ являются ортогональными идемпотентами, сумма которых равна единице. Более того, можно показать, что действие K_0-соответствий $[F']$ и $[F'']$ на $K_0(X)$ задает проекции на прямые слагаемые $K_0({}^{\perp}\mathcal{N})$ и $K_0(\mathcal{N})$ в $K_0(X)$, соответственно. Искомый K-мотив определяется по формуле

$$KM(\mathcal{N}, X) = KM(X, [F'']) \,.$$

В частности, имеем $KM(X) \simeq KM(\mathcal{N}, X) \oplus KM({}^{\perp}\mathcal{N}, X)$.

Пусть даны два гладких проективных многообразия X, X' и допустимые подкатегории $\mathcal{N} \subset D^b(X)$, $\mathcal{N}' \subset D^b(X')$. Тогда можно показать, что имеется канонический изоморфизм K-мотивов $KM(\mathcal{N}, X) \otimes KM(\mathcal{N}', X) \simeq KM(\mathcal{N} \boxtimes \mathcal{N}', X \times X)$, а также канонический изоморфизм групп

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{KM}(k)}\big(KM(\mathcal{N}, X), KM(\mathcal{N}', X')\big) \simeq K_0(\mathcal{N} \boxtimes \mathcal{N}') \,.$$

Замечание 1.3.3. Зависимость произведения $\mathcal{N} \boxtimes \mathcal{N}'$ и K-мотива $KM(\mathcal{N}, X)$ от вложений в производные категории многообразий можно избежать, если перейти от триангулированных категорий к DG-категориям, несущим в себе значительно больше информации. А именно, в статье Бондала–Ларсена–Лунца [20] определено произведение DG-категорий, а для геометрической DG-категории в смысле Орлова [108] корректно определен ее K-мотив, см. [9, § 4.3].

Кроме того, по результату Лунца–Орлова [93] для триангулированной категории $D^b(X)$ имеется единственное с точностью до (сильной) квазиэквивалентности DG-оснащение. Для каждой допустимой подкатегории $\mathcal{N} \subset D^b(X)$ ограничение на нее DG-оснащения с $D^b(X)$ приводит к геометрической DG-категории $\mathcal{N}_{DG}$.

При этом гомотопическая категория произведения $\mathcal{N}_{DG}$ и $\mathcal{N}'_{DG}$ эквивалентна определенному выше произведению $\mathcal{N} \boxtimes \mathcal{N}'$, а K-мотив $KM(\mathcal{N}_{DG})$ канонически изоморфен K-мотиву $KM(\mathcal{N}, X)$. Кроме того, K-группы, гомологии Хохшильда и другие аддитивные инварианты DG-категории $\mathcal{N}_{DG}$ канонически изоморфны соответствующим инвариантам K-мотива $KM(\mathcal{N}, X)$.

1.3.3. **Фантомы и квазифантомы.** В контексте построения полуортогональных разложений производных категорий естественно найти удобный критерий того, что допустимая подкатегория в $D^b(X)$ равна нулю. Ясно, что у нулевой категории группа Гротендика равна нулю.

Определение 1.3.4. Триангулированная категория $\mathcal{T}$ называется *фантомом* (соответственно, *квазифантомом*), если $\mathcal{T} \neq 0$ и $K_0(\mathcal{T}) = 0$ (соответственно, $K_0(\mathcal{T})_{\mathbb{Q}} = 0$).

Например, любая триангулированная категория с бесконечными прямыми суммами является фантомом. Интересен вопрос изучения *геометрических (квази)фантомов*, т.е. (квази)фантомов, являющихся допустимыми подкатегориями в производных категориях гладких проективных многообразий.

Приведем один способ построения геометрических квазифантомов, возникший независимо у Галкина–Шиндера и у Бенинга–Граф фон Бетмера–Сосны.

Лемма 1.3.5. *Предположим, что гладкая проективная поверхность S удовлетворяет следующим свойствам:*

(i) *группа Пикара* $\operatorname{Pic}(S) \simeq CH^1(S)$ *конечно порождена;*

(ii) *степень нуль-циклов задает изоморфизм* $\deg\colon CH^2(S) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$*;*

(iii) *в* $D^b(S)$ *существует исключительный набор* $E_1, \dots, E_{r+2}$*, где* r *— ранг группы Пикара* $\operatorname{Pic}(S)$*.*

Тогда для правого (или левого) ортогонала $\mathcal{N}$ *к* $\langle E_1, \dots, E_{r+2}\rangle$ *в* $D^b(X)$ *имеется изоморфизм* $K_0(\mathcal{N}) \simeq \operatorname{Pic}(S)_{\mathrm{tors}}$*; в частности,* $\mathcal{N}$ *является геометрическим квазифантомом.*

Доказательство. Так как S поверхность, то по следствию 1.1.7(iii) ее группы Чжоу изоморфны соответствующим присоединенным факторам относительно фильтрации по коразмерности носителя на $K_0(S)$. Поскольку имеется изоморфизм $\deg\colon CH^2(S) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$, ограничение эйлеровой характеристики $\chi\colon K_0(S) \to \mathbb{Z}$ на $CH^2(S) \simeq F^2K_0(S)$ задает изоморфизм $\chi\colon F^2K_0(S) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. Из этого следует, что подгруппа $F^2K_0(S)$ отщепляется от $K_0(S)$. Значит, имеется (неканонический) изоморфизм

$$K_0(S) \simeq CH^0(S) \oplus CH^1(S) \oplus CH^2(S) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus(r+2)} \oplus \operatorname{Pic}(S)_{\mathrm{tors}}\,.$$

Таким образом, требуемое утверждение вытекает из изоморфизмов

$$K_0(S) \simeq K_0\big(\langle E_1, \dots, E_{r+2}\rangle\big) \oplus K_0(\mathcal{N})\,, \qquad K_0\big(\langle E_1, \dots, E_{r+2}\rangle\big) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus(r+2)}\,.$$

□

Пусть теперь S является гладкой проективной поверхностью над $\mathbb{C}$ с $q(S) = p_g(S) = 0$ и с $\operatorname{Pic}(S)_{\mathrm{tors}} \neq 0$. Тогда группа Пикара $\operatorname{Pic}(S)$ конечно порождена (также из данных условий следует, что S является поверхностью общего типа). Кроме того, *гипотеза Блоха о нуль-циклах* предсказывает, что имеется изоморфизм $\deg\colon CH^2(S) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. Таким образом, если для S верна гипотеза Блоха, и при этом в $D^b(S)$ имеется исключительный набор $E_1, \dots, E_{r+2}$

длины $r+2$, где r — ранг группы Пикара $\mathrm{Pic}(S)$, то по лемме 1.3.5 возникает геометрический квазифантом $\mathcal{N} \subset D^b(S)$ с $K_0(\mathcal{N}) \simeq \mathrm{Pic}(S)_{\mathrm{tors}}$.

В статье Бенинга, Граф фон Бетмера и Сосны [15] данный подход был применен к классической поверхности Годо, являющейся $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$-фактором квинтики Ферма в $\mathbb{P}^3$. В этом случае имеем $r = 9$. При этом Гулецким и Педрини [60] было ранее показано, что мотив Чжоу с рациональными коэффициентами классической поверхности Годо имеет лефшецев тип (см. определение 2.2.1 в параграфе 2.2.1 ниже) и, в частности, для нее верна гипотеза Блоха.

Теорема 1.3.6. [15, Theor. 8.2] *Пусть S является классической поверхностью Годо. Тогда имеется полуортогональное разложение*

$$D^b(S) = \langle L_1, \dots, L_{11}, \mathcal{N} \rangle,$$

где $L_1, \dots, L_{11}$ является исключительным набором, состоящим из линейных расслоений на S, причем $K_0(\mathcal{N}) \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Алексеев и Орлов [1] реализовали приведенный выше подход для поверхностей Бюрниа с $r = 4$ (такие поверхности образуют четырехмерное семейство). Гипотеза Блоха была доказана ранее для поверхностей Бюрниа в работе Инузе–Мицуками [64].

Теорема 1.3.7. [1, Theor. 4.12] *Пусть S является поверхностью Бюрниа с $r = 4$. Тогда имеется полуортогональное разложение*

$$D^b(S) = \langle L_1, \dots, L_6, \mathcal{N} \rangle,$$

где $L_1, \dots, L_6$ является исключительным набором, состоящим из линейных расслоений на S, причем $K_0(\mathcal{N}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 6}$.

Галкин и Шиндер [44] построили квазифантом такого же типа для поверхности Бовиля с $r = 2$, являющейся фактором произведения двух кривых по действию конечной группы. Гипотеза Блоха для таких поверхностей выполняется по результату Кимуры [83]. Подгруппа кручения в группе Пикара для поверхности Бовиля и для некоторых других поверхностей подобного вида была вычислена Шабалиным [122, Theor. 3.4].

Теорема 1.3.8. [44, Prop. 3.10] *Пусть S является поверхностью Бовиля. Тогда имеется полуортогональное разложение*

$$D^b(S) = \langle L_1, \dots, L_4, \mathcal{N} \rangle,$$

где $L_1, \dots, L_4$ является исключительным набором, состоящим из линейных расслоений на S, причем $K_0(\mathcal{N}) \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\oplus 3}$.

В дальнейшем появилась целая серия работ [91, 89, 90, 82], посвященных построению исключительных наборов максимальной длины, состоящих из линейных расслоений, на поверхностях вида $S = (C \times D)/G$, где C и D — кривые, а G — конечная группа.

1.4. Логарифмические формы

В данном параграфе мы предполагаем, что основное поле k имеет характеристику нуль. Под дивизором мы будем иметь в виду дивизор Вейля. Для заданного морфизма многообразий f через $f^{-1}(\cdot)$ мы будем обозначать теоретико-множественный (не схемный) прообраз. По умолчанию, мы будем рассматривать на многообразиях топологию Зарисского и под словом "локально" мы будем иметь в виду локально в топологии Зариского. Для простоты, под точкой на многообразии мы будем иметь в виду замкнутую точку.

1.4.1. **Определение и отображение вычета.** Для гладкого многообразия V обозначим через Ω^p_V пучок дифференциальных форм степени p на V. Если V равноразмерно размерности d, то положим $\omega_V := \Omega^d_V$. Для неприводимого (не обязательно гладкого) многообразия V обозначим через $k(V)$ поле рациональных функций на нем. Пусть $\Omega^p_{k(V)}$ обозначает пространство рациональнх форм на V степени p, и, соответственно, пусть $\omega_{k(V)} := \Omega^d_{k(V)}$.

Среди всех рациональных форм особую роль для нас будут играть логарифмические формы (см., например, учебники Гриффитса–Харриса [58, § 3.5] или Вуазен [144, § 8.2]). Пусть V — гладкое неприводимое многообразие, а W — гладкий неприводимый дивизор на V. Рациональная форма $\alpha \in \Omega^p_{k(V)}$ называется *локально логарифмической вдоль* W если α и $d\alpha$ имеют полюс не выше первого порядка вдоль W. Равносильно, в общей точке дивизора W форма α может быть записана (не единственным способом) в виде

$$\alpha = \frac{dt}{t} \wedge \beta + \gamma\,,$$

где $t = 0$ является уравнением дивизора W в его общей точке, а β и γ являются рациональными формами на V степеней $p-1$ и p, соответственно, регулярными в общей точке дивизора W. Отметим, что если формы α_1 и α_2 локально логарифмические вдоль W, то форма $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ также локально логарифмическая вдоль W. Кроме того, для любой ненулевой рациональной функции h на V рациональная 1-форма $d\log h = dh/h$ локально логарифмическая вдоль любого дивизора W.

Рассмотрим пучок

$$\Omega^p_V(\log W) := \operatorname{Ker}\big(\Omega^p_V(W) \to j_*\Omega^p_W(W)\big),$$

где $j\colon W \hookrightarrow V$ обозначает заданое вложение. Пучок $\Omega^p_V(\log W)$ локально свободен на V. Форма $\alpha \in H^0(V \smallsetminus W, \Omega^p_V)$ локально логарифмическая вдоль W тогда и только тогда, когда

$\alpha \in H^0(V, \Omega^p_V(\log W))$. Из точной последовательности пучков на W

$$0 \longrightarrow j^*\mathcal{O}_V(-W) \longrightarrow j^*\Omega^1_V \longrightarrow \Omega^1_W \longrightarrow 0$$

и простой линейной алгебры с внешними степенями следует, что корректно определен морфизм пучков $j^*\Omega^p_V(\log W) \to \Omega^{p-1}_W$. Это задает *отображение вычета*

$$\mathrm{res}_{VW} \ : \ H^0\big(V, \Omega^p_V(\log W)\big) \longrightarrow H^0(W, \Omega^{p-1}_W).$$

Локально вдоль W выполняется равенство $\mathrm{res}_{VW}(\frac{dt}{t} \wedge \beta + \gamma) = \beta|_W$.

Эффективный дивизор $W \subset V$ является *дивизором с простыми нормальными пересечениями*, если $W = \bigcup_i W_i$, где W_i являются гладкими неприводимыми дивизорами на V, пересекающимися трансверсально в каждой точке на V. В явном виде, для любой точки $x \in V$ локальные уравнения $t_1, \ldots, t_r$ дивизоров $W_1, \ldots, W_r$ имеют линейно независимые дифференциалы в x, где $W_1, \ldots, W_r$ являются компонентами дивизора W, содержащими точку x. В этом случае положим $\Omega^p_V(\log W)$ равным пучку рациональных дифференциальных форм, локально логарифмических вдоль всех дивизоров W_i и регулярных на $V \smallsetminus W$. В частности, имеется равенство $\Omega^d_V(\log W) = \omega_V(W)$, где d является размерностью многообразия V. Локально в каждой точке $x \in V$ форма $\alpha \in H^0(V, \Omega^p_V(\log W))$ может быть представлена (неоднозначно) в виде

$$\alpha = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant r} \frac{dt_{i_1}}{t_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_{i_l}}{t_{i_l}} \wedge \beta_{i_1,\ldots,i_l}\,, \tag{1.4.1}$$

где $0 \leqslant l \leqslant p$, а $\beta_{i_1,\ldots,i_l}$ являются регулярными дифференциальными формами в точке x степени $p - l$. Пучок $\Omega^p_V(\log W)$ локально свободен. В дальнейшем, под *логарифмической формой степени* p на V мы будем понимать элемент пространства $H^0(V, \Omega^p_V(\log W))$ для некоторого дивизора с простыми нормальными пересечениями $W \subset V$.

Описанные выше свойства логарифмических форм с гладким дивизором полюсов продолжаются до более общего случая, когда дивизор полюсов имеет простые нормальные пересечения. А именно, произведение дифференциальных форм определяет морфизм пучков

$$\Omega^p_V(\log W) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^q_V(\log W) \longrightarrow \Omega^{p+q}_V(\log W)\,.$$

Кроме того, для любой ненулевой рациональной функции h на V такой, что h и h^{-1} регулярны на $V \smallsetminus W$, рациональная дифференциальная форма $d\log h = dh/h$ принадлежит пространству $H^0\big(V, \Omega^1_V(\log W)\big)$. В введенных выше обозначениях для каждого i обозначим через $W - W_i$ объединение всех неприводимых компонент дивизора W кроме W_i. Для каждой формы $\alpha \in H^0\big(V, \Omega^p_V(\log W)\big)$ определен вычет

$$\mathrm{res}_{VW_i}(\alpha) \in H^0\big(W_i \smallsetminus W_i', \Omega^{p-1}_{W_i}\big)\,,$$

где $W_i' := W_i \cap (W - W_i)$. На самом деле, W_i' является дивизором с простыми нормальными пересечениями на W_i, и рациональная форма $\mathrm{res}_{VW_i}(\alpha)$ принадлежит пространству $H^0\big(W_i, \Omega^{p-1}_{W_i}(\log W_i')\big)$.

1.4.2. **Прямой и обратный образ логарифмических форм.** Следующий факт показывает, что обратный образ сохраняет логарифмичность рациональных дифференциальных форм.

Лемма 1.4.2. *Пусть $f\colon V' \to V$ является доминантным морфизмом между гладкими неприводимыми многообразиями, и пусть $W \subset V$, $W' \subset V'$ являются дивизорами с простыми нормальными пересечениями, для которых $f^{-1}(W) \subset W'$. Тогда для любой дифференциальной формы $\alpha \in H^0\big(V, \Omega^p_V(\log W)\big)$ рациональная дифференциальная форма $f^*\alpha$ принадлежит пространству $H^0\big(V', \Omega^p_{V'}(\log W')\big)$.*

Доказательство. Существует покрытие многообразия V открытыми подмножествами U, для которых ограничение $\alpha|_U$ имеет вид как в формуле (1.4.1). Тогда форма $f^*\alpha$ локально логарифмическая вдоль любого гладкого неприводимого дивизора в $U' := f^{-1}(U)$, потому что $f^*\alpha|_{U'}$ является суммой произведений форм вида $d\log$ от рациональной функции и регулярных дифференциальных форм. Поскольку, с другой стороны, форма $f^*\alpha$ имеет полюса только вдоль компонент дивизора с простыми нормальными пересечениями W', это завершает доказательство. □

Пусть теперь K является конечно порожденным полем над k, т.е. $K = k(V)$ для некоторого неприводимого многообразия V над k, и пусть $K \subset K'$ является конечным расширением полей. Тогда отображение следа $\mathrm{Tr}_{K'/K}\colon K' \to K$ индуцирует отображение следа на рациональных дифференциальных формах

$$\mathrm{Tr}_{K'/K} \;:\; \Omega^p_{K'} \simeq \Omega^p_K \otimes_K K' \longrightarrow \Omega^p_K\,, \qquad p \geqslant 0\,.$$

Отображение следа коммутирует с дифференциалом де Рама (но не сохраняет произведение форм), и выполняется формула проекции, включающая в себя отображение следа и обратный образ на рациональных дифференциальных формах. Для конечного в общей точке доминантного морфизма неприводимых многообразий $f\colon V' \to V$ будем обозначать отображение следа $\mathrm{Tr}_{k(V')/k(V)}$ на рациональных дифференциальных формах через f_*. Если морфизм f конечный и неразветвленный, а многообразия V и V' гладкие, то значение следа регулярной формы α' на V' в точке $x \in V$ имеет следующий явный вид:

$$(f_*\alpha')|_x = \sum_{x' \in f^{-1}(x)} ((df|_{x'})^\vee)^{-1}(\alpha'|_{x'})\,.$$

Для произвольного конечного в общей точке доминантного морфизма $f\colon V' \to V$ между гладкими многообразиями данная формула задает след рациональных дифференциальных форм на непустом открытом подмножестве в V.

Лемма 1.4.3. *Пусть $f\colon V' \to V$ является собственным конечным в общей точке сюръективным морфизмом между гладкими многообразиями. Тогда для любой регулярной дифференциальной формы α' на V' след $f_*\,\alpha'$ является регулярной дифференциальной формой на V.*

Доказательство. Пусть $U \subset V$ — такое непустое открытое подмножество, что морфизм f конечен над U. Можно предполагать, что дополнение $V \smallsetminus U$ имеет коразмерность не меньше 2 в V. Следовательно, достаточно показать, что дифференциальная форма $f_*\,\alpha'$ регулярна на U.

Без ограничения общности можно считать, что морфизм $f\colon f^{-1}(U) \to U$ является (возможно, разветвленным) накрытием Галуа, поскольку любой конечный морфизм доминируется накрытием Галуа (т.е. существует накрытие Галуа многообразия U, пропускающееся через f) и при этом, поднимая форму α' на такое накрытие Галуа, мы получаем равносильную задачу. Поэтому будем предполагать, что морфизм $f\colon f^{-1}(U) \to U$ является накрытием Галуа.

Форма $f^*f_*\,\alpha'$ на $f^{-1}(U)$ равна сумме Галуа сопряженных форм к форме α'. Действительно, это очевидно выполняется над непустым открытым подмножеством в U, над которым морфизм f неразветвлен, а из этого следует равенство над всем U. Поэтому регулярность формы α' влечет регулярность формы $f^*f_*\,\alpha'$. Теперь требуемое утверждение следует из того, что регулярность формы $f^*f_*\,\alpha'$ на $f^{-1}(U)$ равносильна регулярности формы $f_*\,\alpha'$ на U. $\square$

См. также аналитический подход к лемме 1.4.3 в статье Гриффитса [57].

Следующий результат утверждает, что логарифмичность рациональных дифференциальных форм также сохраняется при отображении следа.

Лемма 1.4.4. *Пусть $f\colon V' \to V$ является собственным конечным в общей точке сюръективным морфизмом и предположим, что $W \subset V$, $W' \subset V'$ являются дивизорами с простыми нормальными пересечениями, для которых $W' \subseteq f^{-1}(W)$. Тогда для любой дифференциальной формы $\alpha' \in H^0\big(V', \Omega^p_{V'}(\log W')\big)$ рациональная диференциальная форма $f_*\alpha'$ принадлежит пространству $H^0\big(V, \Omega^p_V(\log W)\big)$.*

Доказательство. Ограничение морфизма f задает собственный морфизм

$$V' \smallsetminus f^{-1}(W) \longrightarrow V \smallsetminus W\,.$$

Поскольку $W' \subseteq f^{-1}(W)$, а морфизм f собственный, по лемме 1.4.3 форма $f_*\alpha'$ регулярна на $V \smallsetminus W$. Пусть $W_i \subset W$ является одной из неприводимых компонент дивизора W и выберем уравнение t_i компоненты W_i в ее общей точке. Тогда формы

$$t_i \cdot f_*\alpha' = f_*((f^*t_i) \cdot \alpha')\,,$$

$$t_i \cdot d(f_*\alpha') = t_i \cdot f_*(d\alpha') = f_*((f^*t_i) \cdot d\alpha')$$

регулярны в общей точке дивизора W_i. Следовательно, формы $f_*\alpha'$ и $d(f_*\alpha')$ имеют полюса не выше первого порядка вдоль W_i, и таким образом форма $f_*\alpha'$ локально логарифмична вдоль W_i, что завершает доказательство. □

Нам также потребуется описание того, как обратный образ и след дифференциальных форм коммутируют с отображением вычета.

Лемма 1.4.5. *Пусть $f\colon V' \to V$ является доминантным морфизмом между гладкими многообразиями и предположим, что W является гладким неприводимым дивизором на V, для которого $W' := f^{-1}(W)$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями на V'. Выполняется следующее:*

(i) *для любой дифференциальной формы $\alpha \in H^0\big(V, \Omega^p_V(\log W)\big)$ имеется равенство*

$$\operatorname{res}_{V'W'_i}(f^*\alpha) = e_i \cdot f_i^*\big(\operatorname{res}_{VW}(\alpha)\big)\,, \tag{1.4.6}$$

где $\{W'_i\}$ является множеством таких неприводимых компонент дивизора W', которые отображаются доминантно на W, число e_i равно индексу ветвления морфизма f вдоль копоненты W'_i, а $f_i\colon W'_i \to W$ обозначает ограничение морфизма f на W_i;

(ii) *если морфизм f собственный, то для любой дифференциальной формы $\alpha' \in H^0\big(V', \Omega^p_{V'}(\log W')\big)$ имеется равенство*

$$\operatorname{res}_{VW}(f_*\alpha') = \sum_i f_{i*}\big(\operatorname{res}_{V'W'_i}(\alpha')\big)\,. \tag{1.4.7}$$

Приведем набросок доказательства этого хорошо известного факта.

Доказательство. (i) По лемме 1.4.2 выполняется $f^*\alpha \in H^0\big(W', \Omega^p_{V'}(\log W')\big)$ и, таким образом, вычет $\operatorname{res}_{V'W'_i}(f^*\alpha)$ определен корректно. Требуемое равенство проверяется непосредственно локальным вычислением.

(ii) По лемме 1.4.4 выполняется $f_*\alpha' \in H^0\big(V, \Omega^p_V(\log W)\big)$ и, таким образом, вычет $\operatorname{res}_{VW}(f_*\alpha')$ определен корректно. Пусть $t = 0$ является уравнением дивизора W в его общей

точке. Тогда 1-форма $f^*\left(\frac{dt}{t}\right)$ локально логарифмична вдоль каждой компоненты W_i', а ее вычет на W_i' равен e_i. Существует $(p-1)$-форма β' на V', регулярная в общей точке каждой компоненты W_i' и такая, что для каждого i имеется равенство $\mathrm{res}_{V'W_i'}(\alpha') = e_i \cdot \beta'|_{W_i'}$. Тогда форма $\gamma' := \alpha' - f^*\left(\frac{dt}{t}\right) \wedge \beta'$ не имеет вычета на W_i', и поэтому данная форма регулярна в общей точке каждой компоненты W_i'. Согласно лемме 1.4.3 из этого следует, что форма $f_*\gamma'$ регулярна в общей точке дивизора W, и по формуле проекции достаточно показать равенство $(f_*\beta')|_W = \sum_i e_i f_{i*}(\beta'|_{W_i'})$. Существуют p-формы β_j на V, регулярные в общей точке дивизора W, и рациональные функции h_j' на V', регулярные в общей точке каждого дивизора W_i', для которых $\beta' = \sum_j h_j' \cdot f^*\beta_j$ (ср. с приведенным выше определением следа дифференциальных форм). Вновь используя формулу проекции, мы сводим уравнение на формы к следующему уравнению на функции: $(f_*h)|_W = \sum_i e_i f_{i*}(h|_{W_i})$, где h является рациональной функцией на V', регулярной в общей точке каждой компоненты W_i' (напомним, что для функций отображения f_* и f_{i*} являются просто следами для соответствующих расширений полей). Последнее равенство может быть показано либо аналитически после сведения к случаю $k = \mathbb{C}$, либо при помощи пополненных локальных полей, связанных с дивизорами W_i. □

1.4.3. **Разрешение особенностей и логарифмический вариант теоремы Грауэрта–Рименшнайдера.** Нам потребуется следующий вариант теоремы Хиронаки [62].

Теорема 1.4.8.

(i) *Для любого неприводимого многообразия V и подмногообразия $Z \subset V$ существует собственный бирациональный морфизм $\pi\colon \widetilde{V} \to V$, для которого многообразие $\widetilde{V}$ гладкое, $\pi^{-1}(Z)$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями на $\widetilde{V}$, а π является изоморфизмом над дополнением $V \setminus (V_{sing} \cup Z)$, где V_{sing} обозначает множество особых точек на V.*

(ii) *Пусть $\varphi\colon V_1 \dashrightarrow V_2$ является бирациональным отображением между полными неприводимыми многообразиями. Тогда существует композиция раздутий с гладкими центрами $f\colon V_1' \to V_1$ и регулярный морфизм $\varphi'\colon V_1' \to V_2$, для которых $\varphi \circ f = \varphi'$.*

Для удобства приведем в виде отдельной леммы следующее простое следствие из теоремы Хиронаки.

Лемма 1.4.9. *Пусть $f\colon V \to X$ и $f'\colon V' \to X$ являются собственными морфизмами из неприводимых многообразий в многообразие X. Пусть $g\colon V' \dashrightarrow V$ является таким рациональным отображением, что $f \circ g = f'$. Тогда существует гладкое неприводимое многообразие V'' и собственные морфизмы $h\colon V'' \to V$, $h'\colon V'' \to V'$, для которых морфизм h' бирационален и выполняется равенство $g \circ h' = h$.*

Другими словами, для неприводимых многообразий V и V', собственных над X, любое рациональное отображение $g\colon V' \dashrightarrow V$ над X можно превратить в собственный регулярный морфизм, заменяя многообразие V' на подходящее бирациональное ему гладкое многообразие V''. Это можно выразить следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} & V'' & \\ h' \swarrow & & \searrow h \\ V' & \overset{g}{\dashrightarrow} & V \\ f' \searrow & & \swarrow f \\ & X & \end{array}$$

Доказательство. Пусть $U \subset V'$ — такое непустое открытое подмножество, что ограничение $g_U := g|_U$ регулярно на U. Рассмотрим композицию вложения графика морфизма g_U и открытого вложения

$$\Gamma_{g_U} \subset U \times_X V \subset V' \times_X V\,,$$

а таже замыкание $\bar\Gamma_{g_U}$ графика Γ_{g_U} в $V' \times_X V$. Заметим, что $\bar\Gamma_{g_U}$ содержит $\Gamma_{g_U} \simeq U$ в качестве открытого плотного подмножества, а проекции на два сомножителя в $V' \times_X V$ определяют собственные морфизмы из $\bar\Gamma_{g_U}$ в V' и V. Теперь в качестве гладкого многообразия V'' можно взять разрешение особенностей замыкания $\bar\Gamma_{g_U}$. □

Следующий результат может рассматриваться как логарифмический вариант теоремы Грауэрта–Рименшнайдера [53], утверждающей, что гладкие многообразия имеют рациональные особенности. Поскольку мы не смогли найти ссылку для такого варианта, приведем полное доказательство. Для морфизма $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ между гладкими неприводимыми многообразиями равной размерности и локально свободного пучка $\mathcal{G}$ на X, положим

$$\pi^!\mathcal{G} := \omega_{\widetilde{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}} \pi^*(\omega_X^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})\,. \tag{1.4.10}$$

Мы будем использовать, что $\pi^!$ продолжается до функтора между производными категориями когерентных пучков, являющегося правым сопряженным к функтору $R\pi_*$ по двойственности Гротендика, при условии, что морфизм π собственный, см., например, книгу Хартсхорна [61].

Предложение 1.4.11. *Пусть $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ является собственным бирациональным морфизмом между гладкими неприводимыми квазипроективными многообразиями. Предположим, что $D \subset X$ и $\widetilde{D} := \pi^{-1}(D)$ — дивизоры с простыми нормальными пересечениями. Тогда имеется канонический изоморфизм*

$$R\pi_*\omega_{\widetilde{X}}(\widetilde{D}) \simeq \omega_X(D)\,.$$

Доказательство. По теореме Хиронаки, см. теорему 1.4.8, существует гладкое проективное замыкание всех данных в предложении. Утверждение предложения локально по X, а слои собственного морфизма π над X на меняются при переходе к проективному замыканию. Следовательно, мы можем считать, что многообразия $\widetilde{X}$ и X проективны.

По теореме 1.4.8 (ii), примененной к бирациональному отображению $\varphi := \pi^{-1}$, существует гладкое многообразие Y вместе с регулярными бирациональными собственными морфизмами $f\colon Y \to X$ и $\widetilde{f}\colon Y \to \widetilde{X}$, для которых $f = \pi \circ \widetilde{f}$, причем f является композицией раздутий с гладкими центрами. Положим $C := f^{-1}(D)$, $C' := \widetilde{f}^*(\widetilde{D})$. По определению функтора $\widetilde{f}^{\,!}$, имеется канонический изоморфизм $\widetilde{f}^{\,!}\,\omega_{\widetilde{X}}(\widetilde{D}) \simeq \omega_Y(C')$. Далее, так как функтор $\widetilde{f}^{\,!}$ сопряжен справа к функтору $R\widetilde{f}_*$, то определено отображение следа

$$R\widetilde{f}_*\omega_Y(C') \longrightarrow \omega_{\widetilde{X}}(\widetilde{D})\,.$$

Из формулы (1.4.1) следует, что определено отображение обратного образа на дифференциальных формах $\omega_{\widetilde{X}}(\widetilde{D}) \to \widetilde{f}_*\omega_Y(C)$, потому что $\widetilde{D}$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями. Рассмотрим композицию данного отображение обратного образа с естественными морфизмами $\widetilde{f}_*\omega_Y(C) \to R\widetilde{f}_*\omega_Y(C)$, $R\widetilde{f}_*\omega_Y(C) \to R\widetilde{f}_*\omega_Y(C')$ (обратим внимание, что $C \leqslant C'$), и с приведенным выше отображением следа. Получаем последовательность морфизмов

$$\omega_{\widetilde{X}}(\widetilde{D}) \longrightarrow R\widetilde{f}_*\omega_Y(C) \longrightarrow \omega_{\widetilde{X}}(\widetilde{D})\,,$$

композиция которых тождественна на $\omega_{\widetilde{X}}(\widetilde{D})$ (это достаточно проверить на открытом подмножестве в $\widetilde{X}$, над которым морфизм $\widetilde{f}$ является изоморфизмом). Таким образом, имеется разложение

$$R\widetilde{f}_*\omega_Y(C) \simeq \omega_{\widetilde{X}}(\widetilde{D}) \oplus N$$

для некоторого объекта N в производной категории когерентных пучков на $\widetilde{X}$. Применяя функтор $R\pi_*$, мы получаем разложение

$$Rf_*\omega_Y(C) \simeq R\pi_*\omega_{\widetilde{X}}(\widetilde{D}) \oplus R\pi_*N\,.$$

С другой стороны, утверждается, что $Rf_*\omega_Y(C) \simeq \omega_X(D)$. Для доказательства этого факта можно считать, что f является раздутием с гладким центром $Z \subset X$. По формуле проекции достаточно рассмотреть только компоненты дивизора D, содержащие Z, так как для остальных компонент их теоретико-множественные прообразы совпадают с их схемными обратными образами. Далее требуемый результат получается прямым вычислением.

Таким образом, мы видим, что $R\pi_*\omega_{\widetilde{X}}(\widetilde{D})$ является прямым слагаемым в $\omega_X(D)$. Это доказывает предложение, поскольку обратимый пучок на связном многообразии не содержит нетривиальных прямых слагаемых. □

Для нас будет полезным приведенное ниже следствие.

Следствие 1.4.12. *Пусть $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ является собственным бирациональным морфизмом между гладкими неприводимыми квазипроективными многообразиями. Предположим, что $D \subset X$ и $\widetilde{D} := \pi^{-1}(D)$ — дивизоры с простыми нормальными пересечениями. Тогда для любого локально свободного пучка $\mathcal{G}$ на X и для любого целого числа $q \geqslant 0$ имеется канонический изоморфизм*

$$H^q\big(\widetilde{X}, \pi^!\mathcal{G}(\widetilde{D})\big) \simeq H^q\big(X, \mathcal{G}(D)\big)\,.$$

1.5. Итерированные ряды Лорана

Для краткости, под кольцом мы подразумеваем коммутативное ассоциативное кольцо с единицей и аналогично для алгебр. В течение данного параграфа A обозначает кольцо, а $n \geqslant 1$ является положительным целым числом.

1.5.1. **Определение итерированных рядов Лорана.** Для произвольного кольца A определены кольцо $A[[t]]$ *степенных рядов* и кольцо $A((t)) = A[[t]][t^{-1}]$ *рядов Лорана* над A от формальной переменной t. В явном виде, кольцо $A[[t]]$ является кольцом всех рядов вида $\sum\limits_{0 \leqslant l \in \mathbb{Z}} a_l t^l$, где $a_l \in A$, а $A((t))$ является кольцом всех рядов вида $\sum\limits_{m \leqslant l \in \mathbb{Z}} a_l t^l$, где m может быть любым целым числом, и выполнено $a_l \in A$. Для краткости, положим

$$\mathcal{L}(A) := A((t))\,.$$

Повторяя эту конструкцию, получим кольцо *итерированных рядов Лорана* над кольцом A от формальных переменных $t_1, \ldots, t_n$:

$$\mathcal{L}^n(A) := A((t_1))\ldots((t_n))\,.$$

Для произвольного элемента $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$ положим

$$t^l := t_1^{l_1} \ldots t_n^{l_n}\,.$$

Под *формальным рядом Лорана* мы имеем в виду произвольную бесконечную линейную комбинацию вида $f = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t^l$, $a_l \in A$, т.е. элемент из множества $A^{\mathbb{Z}^n}$ всех функций из $\mathbb{Z}^n$ в A. Будем обозначать через $\mathcal{FL}^n(A)$ множество всех формальных рядов Лорана. Ясно, что $\mathcal{FL}^n(A)$ обладает естественной структурой A-модуля. В то же время, произведение произвольных формальных рядов Лорана не определено корректно. *Носитель* $\mathrm{Supp}(f) \subset \mathbb{Z}^n$ формального ряда Лорана $f = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t^l$ состоит из всех элементов $l \in \mathbb{Z}^n$, для которых $a_l \neq 0$. Итерированные ряды Лорана описываются явно как формальные ряды Лорана, носитель которых удовлетворяет следующему условию.

Определим индуктивно по n множества

$$\Lambda_1 := \mathbb{Z}\,, \qquad \Lambda_n := \mathrm{Map}(\mathbb{Z}, \Lambda_{n-1}) \times \mathbb{Z}\,,$$

где $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}, \Lambda_{n-1})$ обозначает множество всех (теоретико-множественных) отображений из $\mathbb{Z}$ в Λ_{n-1}. Множество Λ_n обладает естественной групповой структурой, определяемой индуктивно при помощи суммы целых чисел и поточечной суммы функций со значениями в группе. Кроме того, множество Λ_n обладает естественным частичным порядком, также определяемым индуктивно при помощи порядка на целых чисел и поточечного порядка на функциях со значениями в целых числах. В явном виде, имеем

$$\Lambda_n = \big\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \;\mid\; \lambda_p : \mathbb{Z}^{n-p} \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{для} \quad 1 \leqslant p \leqslant n-1, \quad \lambda_n \in \mathbb{Z}\big\}\,,$$

а частичный порядок на множестве Λ_n определяется следующим образом:

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leqslant \lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$$

тогда и только тогда, когда $\lambda_1 \geqslant \lambda'_1, \dots, \lambda_n \geqslant \lambda'_n$ (отметим, что здесь рассматривается обратный порядок). Легко видеть, что частично упорядоченное множество Λ_n направлено, т.е. для любых $\lambda, \mu \in \Lambda_n$ существует $\rho \in \Lambda_n$, для которого $\lambda, \mu \leqslant \rho$.

Для произвольного элемента $\lambda \in \mathbb{Z}$ определим множество

$$\mathbb{Z}_\lambda = \mathbb{Z}^1_\lambda := \{l \in \mathbb{Z} \mid l \geqslant \lambda\} \subset \mathbb{Z}\,.$$

При $n \geqslant 2$ для элемента $\lambda = (\lambda', \lambda_n) \in \Lambda_n$, где $\lambda' \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}, \Lambda_{n-1})$, $\lambda_n \in \mathbb{Z}$, определим индуктивно множество

$$\mathbb{Z}^n_\lambda := \bigcup_{l_n \geqslant \lambda_n} \mathbb{Z}^{n-1}_{\lambda'(l_n)} \times \{l_n\} \subset \mathbb{Z}^n\,.$$

В явном виде, для любого $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda_n$ имеем

$$\mathbb{Z}^n_\lambda = \big\{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n \;\mid\; l_n \geqslant \lambda_n,\, l_{n-1} \geqslant \lambda_{n-1}(l_n),\, \dots,\, l_1 \geqslant \lambda_1(l_2, \dots, l_n)\big\}\,.$$

Заметим, что для любых элементов $\lambda, \mu \in \Lambda_n$ из неравенства $\lambda \leqslant \mu$ следует вложение $\mathbb{Z}^n_\mu \subset \mathbb{Z}^n_\lambda$.

Для двух подмножеств $X, Y \subset \mathbb{Z}^n$ пусть $X+Y$ обозначает подмножество в $\mathbb{Z}^n$, состоящее из всех попарных сумм $x+y \in \mathbb{Z}^n$, где $x \in X$ и $y \in Y$. Подобным образом, пусть подмножество $-X \subset \mathbb{Z}^n$ состоит из всех элементов $-x$, где $x \in X$. Для краткости, положим $0 := (0, \ldots, 0)$.

Кольцо итерированных рядов Лорана $\mathcal{L}^n(A)$ состоит из всех таких формальных рядов Лорана $f = \sum\limits_{l \in \mathbb{Z}^n} a_l t^l$, что $\mathrm{Supp}(f) \subset \mathbb{Z}^n_\lambda$ для некоторого $\lambda = (\lambda', \lambda_n) \in \Lambda_n$. В явном виде, имеем $f = \sum\limits_{i \geqslant \lambda_n} g_i t_n^i$, где $g_i \in \mathcal{L}^{n-1}(A)$ удовлетворяют условию $\mathrm{Supp}(g_i) \subset \mathbb{Z}^{n-1}_{\lambda'(i)}$ при $i \geqslant \lambda_n$.

Для любых двух итерированных рядов Лорана $f = \sum\limits_{l \in \mathbb{Z}^n_\lambda} a_l t^l$ и $g = \sum\limits_{l \in \mathbb{Z}^n_\mu} b_l t^l$ имеем $fg = \sum\limits_{l \in \mathbb{Z}^n} c_l t^l$, где $c_l = \sum\limits_{p+q=l} a_p b_q$. Поскольку fg является корректно определенным рядом Лорана, мы получаем, что для всех $\lambda, \mu \in \Lambda_n$ отображение суммирования $\mathbb{Z}^n_\lambda \times \mathbb{Z}^n_\mu \to \mathbb{Z}^n$ имеет конечные слои и существует такой элемент $\rho \in \Lambda_n$, что $\mathbb{Z}^n_\lambda + \mathbb{Z}^n_\mu \subset \mathbb{Z}^n_\rho$. Данное утверждение можно доказать и непосредственно в терминах подмножеств $\mathbb{Z}^n_\lambda \subset \mathbb{Z}^n$.

Мы понадобится также следующий комбинаторный факт.

Лемма 1.5.1. *Для любого подмножества $M \subset \mathbb{Z}^n$ следующие условия равносильны:*

(i) *для некоторого $\lambda \in \Lambda_n$ имеем $M \subset \mathbb{Z}^n_\lambda$;*

(ii) *для любого $\mu \in \Lambda_n$ пересечение $M \cap (-\mathbb{Z}^n_\mu)$ конечно, т.е. отображение суммирования $M \times \mathbb{Z}^n_\mu \to \mathbb{Z}^n$ имеет конечные слои;*

(iii) *для любого $\mu \in \Lambda_n$ существует $\rho \in \Lambda_n$, для которого $M + \mathbb{Z}^n_\mu \subset \mathbb{Z}^n_\rho$;*

(iv) *для некоторых $\mu, \rho \in \Lambda_n$ выполняется условие $M + \mathbb{Z}^n_\mu \subset \mathbb{Z}^n_\rho$.*

Доказательство. (i)⇒(ii),(iii) Это вытекает из указанного выше свойства подмножеств $\mathbb{Z}^n_\lambda$.

(ii)⇒(i) Проведем доказательство индукцией по n. База индукции $n = 1$ очевидна. Осуществим индукционный переход от $n-1$ к n, где $n \geqslant 2$. Поскольку $\mathbb{Z}^n = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda_n} \mathbb{Z}^n_\lambda$ и $\mathbb{Z}^n$ является группой по сложению, то имеется также равенство

$$\mathbb{Z}^n = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_n} (-\mathbb{Z}^n_\lambda)\,. \tag{1.5.2}$$

Покажем, что существует такое число $\lambda_n \in \mathbb{Z}$, что для любого целого числа $l_n < \lambda_n$ пересечение $M \cap \left(\mathbb{Z}^{n-1} \times \{l_n\}\right)$ пусто. Для этого предположим обратное. Тогда возникает такая строго возрастающая последовательность целых чисел $\{i_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, что пересечение $M \cap \left(\mathbb{Z}^{n-1} \times \{-i_k\}\right)$ непусто для всех $k \in \mathbb{N}$. Применяя формулу (1.5.2) при $n-1$, мы видим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такой элемент $\mu'_k \in \Lambda_{n-1}$, что пересечение

$M \cap \left((-\mathbb{Z}^{n-1}_{\mu'_k}) \times \{-i_k\}\right)$ непусто. Рассмотрим теперь любой элемент $\mu = (\mu', \mu_n) \in \Lambda_n$, удовлетворяющий условию $\mu'(i_k) = \mu'_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда пересечение $M \cap (-\mathbb{Z}^n_\mu)$ бесконечно и мы получаем противоречие.

Далее, для всех $l_n \geqslant \lambda_n$ и $\sigma \in \Lambda_{n-1}$ пересечение $M \cap \left((-\mathbb{Z}^{n-1}_\sigma) \times \{l_n\}\right)$ конечно. Таким образом, мы завершаем доказательство, примененяя предположение индукции к пересечениям $M \cap \left(\mathbb{Z}^{n-1} \times \{l_n\}\right)$ при $l_n \geqslant \lambda_n$.

(iii)⇒(iv) Это очевидно.

(iv)⇒(i) Снова проведем доказательство индукцией по n. База индукции $n = 1$ очевидна. Осуществим индукционный переход от $n-1$ к n, где $n \geqslant 2$. Также, как и при $n = 1$, легко видеть, что существует такое число $\lambda_n \in \mathbb{Z}$, что для любого целого числа $l_n < \lambda_n$ пересечение $M \cap \left(\mathbb{Z}^{n-1} \times \{l_n\}\right)$ пусто.

Пусть $\mu = (\mu', \mu_n)$, $\rho = (\rho', \rho_n)$, где $\mu', \rho' \in \Lambda_{n-1}$, $\mu_n, \rho_n \in \mathbb{Z}$. Пусть $i \in \mathbb{Z}$ такое, что $i \geqslant \mu_n$ и $i + \lambda_n \geqslant \rho_n$. Тогда для любого $l_n \geqslant \lambda_n$ выполняется

$$\left(M \cap (\mathbb{Z}^n \times \{l_n\})\right) + \mathbb{Z}^n_{\mu'(i)} \subset \mathbb{Z}^n_{\rho'(i)}\,.$$

Таким образом, мы завершаем доказательство, применяя предположение индукции к пересечениям $M \cap \left(\mathbb{Z}^{n-1} \times \{l_n\}\right)$ при $l_n \geqslant \lambda_n$.

□

Мы будем использовать следующий простой факт про нильпотентные ряды Лорана.

Лемма 1.5.3.

(i) *Элемент* $f = \sum\limits_{l \in \mathbb{Z}^n} a_l t^l$ *из кольца* $\mathcal{L}^n(A)$ *нильпотентен тогда и только тогда, когда нильпотентны элементы* $f_- := \sum\limits_{l<0} a_l t^l \in \mathcal{L}^n(A)$, $f_+ := \sum\limits_{l>0} a_l t^l \in \mathcal{L}^n(A)$ *и* $a_0 \in A$.

(ii) *Все коэффициенты любого нильпотентного ряда* $f \in \mathcal{L}^n(A)$ *являются нильпотентными элементами из* A.

Доказательство. (i) Представим ряд f в виде $f = \sum\limits_{i \in \mathbb{Z}} g_i t^i_n$. Индукцией по i можно показать, что ряды $g_i \in \mathcal{L}^{n-1}(A)$ нильпотентны для всех $i \in \mathbb{Z}$. Следовательно, конечная сумма $\sum\limits_{i<0} g_i t^i_n$ также является нильпотентным элементом в $\mathcal{L}^n(A)$. Далее, индукцией по n получаем нильпотентность элемента $(g_0)_- \in \mathcal{L}^{n-1}(A)$ и элемента $a_0 \in A$. Теперь все следует из равенства $f_- = \sum\limits_{i<0} g_i t^i_n + (g_0)_-$.

(ii) Это следует из пункта (i), примененного к нильпотнетным рядам $f \cdot t^l$, $l \in \mathbb{Z}^n$. □

Если кольцо A нетерово, то также верно и обратное к лемме 1.5.3(ii), так как в этом случае нильрадикал кольца A в степени N равен нулю для некоторого натурального числа N. Однако, в общем случае, обратное не верно. Например, рассмотрим кольцо

$$A = \mathbb{Z}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^3, \ldots)$$

и степенной ряд $f = \sum_{l \geqslant 1} \varepsilon_l t^l$ в кольце $A[[t]]$. Тогда все коэффициенты ряда f нильпотентны в то время, как сам ряд f не нильпотентен (это можно показать, например, рассматривая редукции по модулю простых чисел).

1.5.2. **Топология на кольце итерированных рядов Лорана.** Имеется естественная топология на $\mathcal{L}^n(A)$, относительно которой $\mathcal{L}^n(A)$ является топологической группой с групповой структурой, заданной суммами итерированных рядов Лорана. Данная топология была впервые введена Паршиным в работе [114] при $A = \mathbb{F}_q$ для конструкций в n-мерной локальной теории полей классов. В общем случае топология задается итерированными прямыми и обратными пределами и определяется индуктивно следующим образом.

При $n = 0$ рассматривается дискретная топология на A. Для произвольного $n \geqslant 1$ на $\mathcal{L}^n(A) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} t_n^m \mathcal{L}^{n-1}(A)[[t_n]]$ рассматривается топология объединения, где на каждой группе $t_n^m \mathcal{L}^{n-1}(A)[[t_n]]$, изоморфной счетному произведению групп $\mathcal{L}^{n-1}(A)$, рассматривается топология произведения. В явном виде, при $n = 1$ база открытых окрестностей нуля в группе $\mathcal{L}(A) = A((t))$ состоит из A-подмодулей $U_m := t^m A[[t]]$, $m \in \mathbb{Z}$. Для произвольного $n \geqslant 1$ база открытых окрестностей нуля в группе $\mathcal{L}^n(A) = A((t_1)) \ldots ((t_n))$ состоит из A-подмодулей

$$U_{m,\{V_j\}} := \Big(\bigoplus_{j<m} t_n^j \cdot V_j \Big) \oplus t_n^m \cdot \mathcal{L}^{n-1}(A)[[t_n]]\,, \tag{1.5.4}$$

где $m \in \mathbb{Z}$, и для каждого j, $j < m$, имеем, что A-модуль V_j принадлежит базе открытых окрестностей нуля в группе $\mathcal{L}^{n-1}(A) = A((t_1)) \ldots ((t_{n-1}))$. Топология на группе $\mathcal{L}^n(A)$ определяется однозначным образом из условия, что аддитивная группа кольца $\mathcal{L}^n(A)$ является топологической группой.

Мы будем использовать равносильное определение топологии в терминах носителей рядов Лорана. Для каждого элемента $\lambda \in \Lambda_n$ положим

$$\mathbb{Z}^n_{(\lambda)} := \mathbb{Z}^n \smallsetminus (-\mathbb{Z}^n_\lambda).$$

Заметим, что элемент $l \in \mathbb{Z}^n$ принадлежит $\mathbb{Z}^n_{(\lambda)}$ тогда и только тогда, когда $-l \notin \mathbb{Z}^n_\lambda$. Легко показать, что база открытых окрестностей нуля в $\mathcal{L}^n(A)$ задается A-подмодулями $U_\lambda \subset \mathcal{L}^n(A)$, $\lambda \in \Lambda$, состоящими из всех таких $f \in \mathcal{L}^n(A)$, что $\mathrm{Supp}(f) \subset \mathbb{Z}^n_{(\lambda)}$.

Лемма 1.5.5. *Топологическая группа $\mathcal{L}^n(A)$ отделима и полна, т.е. естественный гомоморфизм*

$$\mathcal{L}^n(A) \longrightarrow \varprojlim_{\lambda\in\Lambda_n} \mathcal{L}^n(A)/U_\lambda$$

является изоморфизмом.

Доказательство. По формуле (1.5.2) пересечение $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda_n} \mathbb{Z}^n_{(\lambda)}$ пусто. Из этого следует, что естественный гомоморфизм

$$\mathcal{FL}^n(A) \longrightarrow \varprojlim_{\lambda\in\Lambda_n} \mathcal{FL}^n(A)/U_\lambda$$

является изоморфизмом. Так как обратные пределы точны слева, то имеется вложение

$$\varprojlim_{\lambda\in\Lambda_n} \mathcal{L}^n(A)/U_\lambda \subset \varprojlim_{\lambda\in\Lambda_n} \mathcal{FL}^n(A)/U_\lambda\,.$$

Таким образом, нам надо показать, что $\varprojlim\limits_{\lambda\in\Lambda_n} \mathcal{L}^n(A)/U_\lambda$ совпадает с $\mathcal{L}^n(A)$ как подгруппа в $\mathcal{FL}^n(A)$. Пусть формальный ряд Лорана $f \in \mathcal{FL}^n(A)$ принадлежит подгруппе $\varprojlim\limits_{\lambda\in\Lambda_n} \mathcal{L}^n(A)/U_\lambda$. Тогда для любого $\lambda \in \Lambda_n$ множество

$$\mathrm{Supp}(f) \smallsetminus \big(\mathrm{Supp}(f) \cap \mathbb{Z}^n_{(\lambda)}\big) = \mathrm{Supp}(f) \cap (-\mathbb{Z}^n_\lambda)$$

совпадает с аналогичным множеством для некоторого итерированного ряда Лорана из $\mathcal{L}^n(A)$. Теперь все следует из равносильности условий (i) и (ii) в лемме 1.5.1. □

Напомним, что *последовательностью Коши* в топологической абелевой группе называется такая последовательность элементов $\{f_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, что для любой открытой окрестности нуля U существует число $N \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее следующему свойству: $f_i - f_j \in U$ для всех чисел $i, j \geqslant N$. Ясно, что свойство быть последовательностью Коши не зависит от порядка элементов в последовательности, и, таким образом, корректно определено для произвольного (неупорядоченного) счетного множества элементов. Из леммы 1.5.5 следует, что любая последовательность Коши имеет предел в $\mathcal{L}^n(A)$.

Отметим, что при $n \geqslant 2$ произведение итерированных рядов Лорана не непрерывно относительно введенной выше топологии, и, как следствие, $\mathcal{L}^n(A)$ не является топологическим кольцом. Это объясняется тем, что для всех открытых A-подмодулей U и V в пространстве $\mathcal{L}^n(A)$ выполнено $U \cdot V = \mathcal{L}^n(A)$, см. [114, § 1., Rem. 1]. Равносильно, для любых $\lambda, \mu \in \Lambda_n$ имеем $\mathbb{Z}^n_{(\lambda)} + \mathbb{Z}^n_{(\mu)} = \mathbb{Z}^n$. Действительно, для любого элемента $l \in \mathbb{Z}^n$ при достаточно больших целых числах $i, j \in \mathbb{Z}$ имеем $(-i, j, 0, \ldots, 0) \notin \mathbb{Z}^n_\lambda$, $l + (i, -j, 0 \ldots, 0) \notin \mathbb{Z}^n_\mu$.

Тем не менее, оказывается, что $\mathcal{L}^n(A)$ обладает многими замечательными свойствами, выполняющимися для топологических колец Хубера, т.е. для колец с топологией, заданой степенями идеала в каком-то открытом подкольце.

Подмножество $S \subset \mathcal{L}^n(A)$ *ограничено*, если для для любого открытого A-подмодуля U существует открытый A-подмодуль V, для которого $S \cdot V \subset U$. Равносильно, для любого $\mu \in \Lambda_n$ существует $\rho \in \Lambda_n$, для которого $\mathrm{Supp}(S) + \mathbb{Z}^n_{(\rho)} \subset \mathbb{Z}^n_{(\mu)}$, где $\mathrm{Supp}(S) \subset \mathbb{Z}^n$ является объединением носителей всех элементов из S.

Лемма 1.5.6. *Подмножество $S \subset \mathcal{L}^n(A)$ ограничено тогда и только тогда, когда существует $\lambda \in \Lambda_n$, для которого* $\mathrm{Supp}(S) \subset \mathbb{Z}^n_\lambda$.

Доказательство. Покажем, что для произвольного подмножества $M \subset \mathbb{Z}^n$ и для любых $\mu, \rho \in \Lambda_n$ условие $M + \mathbb{Z}^n_{(\rho)} \subset \mathbb{Z}^n_{(\mu)}$ равносильно условию $M + \mathbb{Z}^n_\mu \subset \mathbb{Z}^n_\rho$. Действительно, следующая последовательность состоит из равносильных условий:

$$M + \mathbb{Z}^n_{(\rho)} \subset \mathbb{Z}^n_{(\mu)}\,, \qquad \left(M + \mathbb{Z}^n_{(\rho)}\right) \cap (-\mathbb{Z}^n_\mu) = \varnothing\,,$$

$$\left(M + \mathbb{Z}^n_\mu\right) \cap (-\mathbb{Z}^n_{(\rho)}) = \varnothing\,, \qquad M + \mathbb{Z}^n_\mu \subset \mathbb{Z}^n_\rho\,.$$

Применяя это к подмножеству $\mathrm{Supp}(S) \subset \mathbb{Z}^n$, а также используя равносильность условий (i) и (iii) в лемме 1.5.1, мы получаем требуемое. □

Следствие 1.5.7.

(i) *Для любого элемента $f \in \mathcal{L}^n(A)$ умножение на f является непрерывным отображением $\mathcal{L}^n(A)$ в себя.*

(ii) *Для любых двух ограниченных подмножеств $S, S' \subset \mathcal{L}^n(A)$ их сумма $S + S'$ и произведение $S \cdot S'$ ограничены.*

(iii) *Любая последовательность Коши в $\mathcal{L}^n(A)$ ограничена.*

(iv) *Пусть последовательность итерированных рядов Лорана $\{f_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, стремится к нулю, а последовательность итерированных рядов Лорана $\{g_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, ограничена. Тогда для любого открытого A-подмодуля $U \subset \mathcal{L}^n(A)$ существует такое натуральное число $i_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $i \geqslant i_0$ и всех $j \in \mathbb{N}$ выполняется $f_i g_j \in U$. В частности, диагональное произведение $\{f_i g_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, стремится к нулю.*

(v) *Пусть заданы две последовательности Коши $\{f_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, и $\{g_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, в $\mathcal{L}^n(A)$. Тогда их попарное произведение $\{f_i g_j\}$, $(i,j) \in \mathbb{N}^{\times 2}$, также является последовательностью Коши (относительно любой биекции $\mathbb{N}^{\times 2} \simeq \mathbb{N}$), и предел последовательности $\{f_i g_j\}$ равен произведению пределов последовательностей $\{f_i\}$ и $\{g_j\}$.*

(vi) *Любое компактное подмножество в $\mathcal{L}^n(A)$ ограничено.*

Доказательство. (i) Это следует из леммы 1.5.6 и из того, что $\mathrm{Supp}(f) \subset \mathbb{Z}^n_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda_n$.

(ii) Это следует из леммы 1.5.6, из того, что множество Λ_n направлено, и из того, что для любых $\lambda, \mu \in \Lambda_n$ существует $\rho \in \Lambda_n$, для которого $\mathbb{Z}^n_\lambda + \mathbb{Z}^n_\mu \subset \mathbb{Z}^n_\rho$.

(iii) Пусть $M \subset \mathbb{Z}^n_\lambda$ является носителем некоторой последовательности Коши. Тогда для любого $\lambda \in \Lambda_n$ множество $M \smallsetminus (M \cap \mathbb{Z}^n_\lambda)$ конечно. Далее надо воспользоваться равносильностью условий (i) и (ii) в лемме 1.5.1, а также леммой 1.5.6.

(iv) Так как множество $\{g_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, ограничено, то существует такой открытый A-подмодуль $V \subset \mathcal{L}^n(A)$, что $g_j \cdot V \in U$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $\{f_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, стремится к нулю, то существует такое натуральное число i_0, что для всех $i \geqslant i_0$ выполяется $f_i \in V$. Следовательно, $f_i g_j \in U$.

(v) По лемме 1.5.5 в $\mathcal{L}^n(A)$ существуют пределы f и g последовательностей $\{f_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, и $\{g_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, соответственно. По пункту (i) последовательности $\{f_i g\}$, $i \in \mathbb{N}$, и $\{f g_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, являются последовательностями Коши и сходятся к fg. Из этого следует, что утверждение леммы для последовательностей $\{f_i g_j\}$, $i, j \in \mathbb{N}$, и $\{(f_i - f)(g_j - g)\}$, $i, j \in \mathbb{N}$, равносильны. Поэтому можно считать, что последовательности $\{f_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, и $\{g_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, стремятся к нулю.

По пункту (iii) каждое из множеств $\{f_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, и $\{g_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, ограничено. Далее надо два раза применить пункт (iv) к последовательностям $\{f_i\}$ и $\{g_j\}$, рассматривая по очереди каждую одну из них как ограниченное множество.

(vi) Пусть $C \subset \mathcal{L}^n(A)$ является произвольным компактным подмножеством. Предположим, что C не ограничено. Тогда существует открытая окрестность нуля $U \subset \mathcal{L}^n(A)$ и для каждого $\lambda \in \Lambda_n$ существует элемент $f_\lambda \in C$, для которого $f_\lambda \cdot U_\lambda$ не содержится в U. Поскольку C компакт, существует такое кофинальное подмножество $\Pi \subset \Lambda_n$, что $\{f_\lambda\}$, $\lambda \in \Pi$, является сетью Коши. Заметим, что аналог пункта (iii) верен для сетей Коши с аналогичным доказательством. Поэтому множество $\{f_\lambda\}$, $\lambda \in \Pi$, ограничено, т.е. существует такой элемент $\mu \in \Lambda_n$, что $f_\lambda \cdot U_\mu \subset U$ для всех $\lambda \in \Pi$. Вследствие кофинальности подмножества $\Pi \subset \Lambda_n$ можно считать, что $\mu \in \Pi$. Тогда возникает противоречие с условием, что $f_\mu \cdot U_\mu$ не содержится в U. □

1.5.3. **Топологически нильпотентные элементы.** Напомним, что элемент $f \in \mathcal{L}^n(A)$ *ограничен по степени*, если множество его степеней $\{f^i\}$, $i \in \mathbb{N}$, ограничено. Элемент $f \in \mathcal{L}^n(A)$ *топологически нильпотентен*, если последовательность $\{f^i\}$, $i \in \mathbb{N}$, стремится к нулю.

Определение 1.5.8. Будем обозначать через $\mathcal{L}^n(A)^0$ и $\mathcal{L}^n(A)^\sharp$ множество ограниченных по степени элементов в $\mathcal{L}^n(A)$ и множество топологически нильпотентных элементов в $\mathcal{L}^n(A)$, соответственно.

Применяя следствие 1.5.7(ii), легко видеть, что $\mathcal{L}^n(A)^0$ является подкольцом в $\mathcal{L}^n(A)$. По следствию 1.5.7(iii) имеется вложение $\mathcal{L}^n(A)^\sharp \subset \mathcal{L}^n(A)^0$, а по следствию 1.5.7(iv) подмножество $\mathcal{L}^n(A)^\sharp$ является идеалом в $\mathcal{L}^n(A)^0$. Дадим более явное описание $\mathcal{L}^n(A)^0$ и $\mathcal{L}^n(A)^\sharp$, ср. с [37, Lem. 1.1].

Предложение 1.5.9. *Для любого кольца A имеются равенства*

$$\mathcal{L}^n(A)^0 = \Big\{ \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t^l \in \mathcal{L}^n(A) \;\mid\; \sum_{l<0} a_l t^l \in \mathrm{Nil}\big(\mathcal{L}^n(A)\big) \Big\},$$

$$\mathcal{L}^n(A)^\sharp = \Big\{ \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t^l \in \mathcal{L}^n(A) \;\mid\; \sum_{l\leqslant 0} a_l t^l \in \mathrm{Nil}\big(\mathcal{L}^n(A)\big) \Big\}.$$

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n. База индукции $n = 0$, т.е. случай кольца A с дискретной топологией, очевидна: любой элемент в A ограничен по степени, а последовательность $\{f^i\}$, $i \in \mathbb{Z}$, стремится к нулю в A тогда и только тогда, когда f нильпотентен.

Проведем шаг индукции от $n-1$ к n. Пусть G является одной из четырех групп, присутствующих в левых и правых частях двух равенств из формулировки леммы. Легко видеть, что G содержит следующие подгруппы:

$$P := \Big\{ \sum_{i<0} g_i t_n^i \in \mathcal{L}^n(A) \;\mid\; g_i \in \mathrm{Nil}\big(\mathcal{L}^{n-1}(A)\big) \Big\}, \qquad Q := \Big\{ \sum_{i>0} g_i t_n^i \in \mathcal{L}^n(A) \;\mid\; g_i \in \mathcal{L}^{n-1}(A) \Big\}.$$

Мы утверждаем, что имеется разложение в прямую сумму

$$P \oplus \big(G \cap \mathcal{L}^{n-1}(A)\big) \oplus Q \xrightarrow{\sim} G\,.$$

Для доказательства этого разложения достаточно показать, что для произвольного элемента $f \in G$ выполняется условие $\sum\limits_{i<0} g_i t_n^i \in P$, где $f = \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} g_i t_n^i$, $g_i \in \mathcal{L}^{n-1}(A)$. Данное условие равносильно тому, что ряды g_i нильпотентны для всех $i < 0$.

Предположим сначала, что ряд f ограничен по степени. Тогда существует такое целое число i_0, что при разложении в ряд по t_n рядов f^k, $k \in \mathbb{N}$, их коэффициенты при t_n^i, где $i < i_0$, обращаются в нуль (это также следует из леммы 1.5.6). Индукцией по i можно показать, что ряды $g_i \in \mathcal{L}^{n-1}(A)$ нильпотентны для всех $i < 0$ (ср. с доказательством леммы 1.5.3(i)). Теперь предположим, что ряд $\sum\limits_{l<0} a_l t^l$ нильпотентен, где $f = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t^l$. Существует ряд $g_0' \in \mathcal{L}^{n-1}(A)$, для которого $\sum\limits_{l<0} a_l t^l = \sum\limits_{i<0} g_i t_n^i + g_0'$. По лемме 1.5.3(ii) при $n = 1$ мы вновь получаем, что ряды g_i нильпотентны для всех $i < 0$.

Теперь заметим, что пересечение $G \cap \mathcal{L}^{n-1}(A)$ совпадает с соответствующей группой для кольца $\mathcal{L}^{n-1}(A)$. Это следует из того, что ограничение топологии с $\mathcal{L}^n(A)$ на $\mathcal{L}^{n-1}(A)$ совпадает с топологией на $\mathcal{L}^{n-1}(A)$, а также из того, что ограничение лексикографического порядка с $\mathbb{Z}^n$ на $\mathbb{Z}^{n-1} \times \{0\}$ совпадает с лексикографическим порядком на $\mathbb{Z}^{n-1}$. Таким образом, требуемые равенства вытекают из предположения индукции. □

Замечание 1.5.10. Из предложения 1.5.9 можно вывести, что для любого $i \geqslant 0$ имеется изоморфизм

$$A/\mathrm{Nil}(A) \xrightarrow{\sim} \left(\mathcal{L}^n(A)^\sharp\right)^i / \left(\mathcal{L}^n(A)^\sharp\right)^{i+1}, \qquad a \longmapsto a \cdot t_1^i .$$

В частности, пересечение всех степеней идеала $\mathcal{L}^n(A)^\sharp$ состоит из его элементов, для которых коэффициенты при t_1^i, $i \geqslant 0$, нильпотентны.

По определению, ряд $\sum\limits_{i\geqslant 0} f_i$, состоящий из элементов топологической абелевой группы, *сходится*, если существует предел последовательности частичных сумм $\sum\limits_{i=1}^{N} f_i$. По лемме 1.5.5 ряд в $\mathcal{L}^n(A)$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его членов $\{f_i\}$, $i \in \mathbb{N}$ стремится к нулю, так как база открытых окрестностей нуля задана при помощи подгрупп. Если это выполнено, то результат суммирования не зависит от порядка суммирования, а также не зависит от способа представления ряда как двойного ряда или многократно итерированного ряда, ср. с [22, Theor. 4.5.1]. В частности, сходимость корректно определена для бесконечной суммы счетного множества элементов в $\mathcal{L}^n(A)$.

Замечание 1.5.11. По следствию 1.5.7(v) для любых двух сходящихся рядов $\sum\limits_{i\geqslant 0} f_i$ и $\sum\limits_{j\geqslant 0} g_j$ в $\mathcal{L}^n(A)$ ряд $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^{\times 2}} f_i g_j$ также сходится (относительно любой биекции $\mathbb{N}^{\times 2} \simeq \mathbb{N}$) и имеются равенства

$$\Big(\sum_{i\geqslant 0} f_i\Big) \cdot \Big(\sum_{j\geqslant 0} g_j\Big) = \sum_{i\geqslant 0} \Big(\sum_{j\geqslant 0} f_i g_j\Big) = \sum_{j\geqslant 0} \Big(\sum_{i\geqslant 0} f_i g_j\Big) .$$

Приведем следующий простой факт.

Лемма 1.5.12.

(i) *Для любого элемента* $f = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t^l$ *в* $\mathcal{L}^n(A)$ *ряд* $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t^l$ *сходится к* f *в* $\mathcal{L}^n(A)$.

(ii) *Множество, состоящее из всех многочленов Лорана, плотно в* $\mathcal{L}^n(A)$.

Доказательство. (i) По лемме 1.5.1, для произвольного элемента $\lambda \in \Lambda_n$ пересечение

$$\mathrm{Supp}(f) \cap (-\mathbb{Z}^n_\lambda) = \mathrm{Supp}(f) \smallsetminus \big(\mathrm{Supp}(f) \cap \mathbb{Z}^n_{(\lambda)}\big)$$

конечно. Следовательно, для любого конечного подмножества $M \subset \mathrm{Supp}(f)$, содержащего $\mathrm{Supp}(f) \cap (-\mathbb{Z}^n_\lambda)$, частичная сумма $f_M := \sum\limits_{l \in M} a_l t^l$ удовлетворяет условию $\mathrm{Supp}(f - f_T) \in \mathbb{Z}^n_{(\lambda)}$, т.е. $f - f_T \in U_\lambda$. Таким образом, частичные суммы ряда $\sum\limits_{l \in \mathbb{Z}^n} a_l t^l$ стремятся к f.

(ii) Это следует непосредственно из пункта (i). □

Заметим, что для любого степенного ряда $\varphi \in A[[x_1, \dots, x_r]]$ и элементов $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{L}^n(A)^\sharp$ ряд $\varphi(f_1, \dots, f_r)$ сходится в $\mathcal{L}^n(A)$. Доказательство следующего утверждения использует замечание 1.5.11 и копирует доказательство утверждения [22, Theor. 4.5.2] (см. также [37, Lem. 1.2]).

Лемма 1.5.13. *Рассмотрим степенные ряды $\varphi \in A[[x_1, \dots, x_r]]$ и $\psi_i \in A[[y_i]]$, $1 \leqslant i \leqslant r$, такие что постоянные члены всех рядов ψ_i равны нулю. Рассмотрим ряд $\phi \in A[[y_1, \dots, y_r]]$, являющийся формальной композицией $\varphi\big(\psi_1, \dots, \psi_r\big)$. Тогда для всех наборов $f_1, \dots, f_r$ элементов из $\mathcal{L}^n(A)^\sharp$ выполнено равенство в кольце $\mathcal{L}^n(A)$*

$$\varphi\big(\psi_1(f_1), \dots, \psi_r(f_r)\big) = \phi(f_1, \dots, f_r)\,.$$

1.5.4. **Дифференциальные формы.** Рассмотрим модуль абсолютных кэлеровых дифференциалов $\Omega^1_{\mathcal{L}^n(A)}$ кольца $\mathcal{L}^n(A)$. Через $K \subset \Omega^1_{\mathcal{L}^n(A)}$ обозначим $\mathcal{L}^n(A)$-подмодуль, порожденный всеми элементами $df - \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i$, где выполнено $f \in \mathcal{L}^n(A)$. В частности, подмодуль K содержит элементы da, где $a \in A$.

Определение 1.5.14. Определим фактормодуль

$$\widetilde{\Omega}^1_{\mathcal{L}^n(A)} := \Omega^1_{\mathcal{L}^n(A)} / K\,.$$

Легко видеть, что $\widetilde{\Omega}^1_{\mathcal{L}^n(A)}$ является свободным модулем над кольцом $\mathcal{L}^n(A)$ с базисом $dt_1, \dots, dt_n$. Далее, положим $\widetilde{\Omega}^i_{\mathcal{L}^n(A)} := \bigwedge^i_{\mathcal{L}^n(A)} \widetilde{\Omega}^1_{\mathcal{L}^n(A)}$.

Непосредственно проверяется, что дифференциал де Рама $d\colon \Omega^1_{\mathcal{L}^n(A)} \to \Omega^2_{\mathcal{L}^n(A)}$ переводит модуль K в модуль $K \wedge \Omega^1_{\mathcal{L}^n(A)}$. Поэтому имеем корректно определенный дифференциал де Рама $d\colon \widetilde{\Omega}^i_{\mathcal{L}^n(A)} \to \widetilde{\Omega}^{i+1}_{\mathcal{L}^n(A)}$ для любого числа $i \geqslant 0$ (полученный дифференциал обозначим той же самой буквой "d"). Очевидно, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^i_{\mathcal{L}^n(A)} & \xrightarrow{d} & \Omega^{i+1}_{\mathcal{L}^n(A)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\Omega}^i_{\mathcal{L}^n(A)} & \xrightarrow{d} & \widetilde{\Omega}^{i+1}_{\mathcal{L}^n(A)} \end{array}$$

где вертикальные стрелки — это естественные отображения.

Топология на пространстве $\mathcal{L}^n(A)$, определенная в § 1.5.2, естественно индуцирует топологию на каждом свободном $\mathcal{L}^n(A)$-модуле $\widetilde{\Omega}^i_{\mathcal{L}^n(A)}$, $i \geqslant 0$. Легко проверяется, что дифференциал де Рама непрерывен относительно этой топологии. Поэтому для любого элемента $f \in \mathcal{L}^n(A)^\sharp$ и любого степенного ряда $\varphi \in A[[x]]$ имеется равенство в модуле $\widetilde{\Omega}^1_{\mathcal{L}^n(A)}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(f) df = d(\varphi(f))\,. \tag{1.5.15}$$

Пусть $\log(1+x) := \sum\limits_{i\geqslant 1}(-1)^{i+1}\frac{x^i}{i}$ и $\exp(x) := \sum\limits_{i\geqslant 0}\frac{x^i}{i!}$ являются стандартными степенными рядами из кольца $\mathbb{Q}[[x]]$. Пусть $\mathrm{Li}_2(x) := \sum\limits_{i\geqslant 1}\frac{x^i}{i^2} \in \mathbb{Q}[[x]]$ является дилогарифмом.

Следующая лемма непосредственно следует из формулы (1.5.15).

Лемма 1.5.16. *Для любой $\mathbb{Q}$-алгебры A выполнены следующие равенства в $\widetilde{\Omega}^1_{\mathcal{L}^n(A)}$:*

(i) *для любого элемента $f \in \mathcal{L}^n(A)^\sharp$ имеется равенство*

$$\frac{df}{1+f} = \frac{d(1+f)}{1+f} = d\log(1+f)\,;$$

(ii) *для любого элемента $f \in \mathcal{L}^n(A)^\sharp \cap \mathcal{L}^n(A)^*$ имеется равенство*

$$\log(1-f)\frac{df}{f} = d\left(-\mathrm{Li}_2(f)\right);$$

(iii) *для любого элемента $f \in \mathcal{L}^n(A)^\sharp$ и ряда $\psi \in A[[x]]^*$ существует такой ряд $\varphi \in A[[x]]$, что выполнено*

$$\log(1-f)\frac{df}{\psi(f)} = d(\varphi(f))\,.$$

Имеется гомоморфизм

$$\mathrm{res} \;:\; \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)} \longrightarrow A\,, \qquad \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t^l \cdot dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n \longmapsto a_{-1\ldots-1}\,, \tag{1.5.17}$$

называемый *отображением вычета*. Для простоты, будем использовать также обозначение "res" и для отображения из модуля $\Omega^n_{\mathcal{L}^n(A)}$ в кольцо A, являющееся композицией естественного отображения $\Omega^n_{\mathcal{L}^n(A)} \to \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)}$ с отображением res, определенным по формуле (1.5.17).

Для любого элемента $\eta \in \widetilde{\Omega}^{n-1}_{\mathcal{L}^n(A)}$ имеем $\mathrm{res}(d\eta) = 0$. Более того, выполнен следующий факт.

Лемма 1.5.18. *Для любой $\mathbb{Q}$-алгебры A имеется изоморфизм*

$$\mathrm{res} \;:\; \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)}/d\widetilde{\Omega}^{n-1}_{\mathcal{L}^n(A)} \xrightarrow{\sim} A\,.$$

Доказательство. Доказательство основано на следующем наблюдении: дифференциал d непрерывен, и если $l_i \neq -1$ для некоторого индекса i, $1 \leqslant i \leqslant n$, то выполнено равенство

$$t_1^{l_1}\ldots t_n^{l_n} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n = d\left(\frac{(-1)^{i-1}}{l_i+1} t_1^{l_1}\ldots t_i^{l_i+1}\ldots t_n^{l_n} dt_1 \wedge \ldots dt_{i-1} \wedge dt_{i+1} \wedge \ldots \wedge dt_n\right).$$

□

Глава 2. Мотивы Чжоу и их приложения

2.1. Мотивы Чжоу многообразий с представимыми нуль-циклами

В дальнейшем k обозначает поле. В основном мы будем рассматривать многообразия, определенные над k (другие поля определений многообразий будут оговорены отдельно). Для расширения полей $k \subset K$ и многообразия X над k через X_K мы будем обозначать расширение скаляров многообразия X с k на K.

По умолчанию $\otimes$ и rk обозначают тензорное произведение и ранг абелевых групп над $\mathbb{Z}$. Для произвольной абелевой группы Γ и натурального числа l через Γ_l будем обозначать подгруппу l-кручения в Γ. Для произвольного коммутативного кольца R будем обозначать расширение скаляров $\Gamma \otimes R$ через Γ_R.

2.1.1. **Представление мотивов Чжоу в виде прямого слагаемого.** Мы будем использовать следующий простой факт.

Лемма 2.1.1. *Предположим, что для целого числа $r \geqslant 1$ над полем k имеется разрешение особенностей для многообразий размерности не больше r. Тогда для любого равноразмерного гладкого многообразия X и равноразмерного (возможно, особого) многообразия Z размерности r естественный гомоморфизм*

$$\bigoplus_{Y \to Z} CH^i(X \times Y) \longrightarrow CH^i(X \times Z)\,, \qquad i \in \mathbb{Z}\,, \tag{2.1.2}$$

сюръективен, где $Y \to Z$ пробегает все собственные (не обязательно сюръективные) морфизмы из гладкого многообразия Y размерности r.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого неприводимого подмногообразия $W \subset X \times Z$ коразмерности i его класс $[W] \in CH^i(X \times Z)$ лежит в образе отображения (2.1.2). Пусть неприводимое замкнутое подмногообразие $\iota\colon T \hookrightarrow Z$ является образом многообразия W относительно собственной проекции $X \times Z \to Z$, и пусть число $t \leqslant r$ равно размерности многообразия T. По предположению существует разрешение особенностей $\sigma\colon \widetilde{T} \to T$. Пусть $U \subset T$ — непустое открытое подмножество, над которым σ является изоморфизмом. Из построения многообразия T следует, что подмногообразие $W \subset X \times Z$ содержится в $X \times T$, и что пересечение $W \cap (X \times U)$ непусто. В то же время, морфизм $X \times \widetilde{T} \to X \times T$ является изоморфизмом над $X \times U$. Следовательно, класс $[W]$ принадлежит образу композиции гомоморфизмов

$$CH^{i-t+r}(X \times \widetilde{T}) \longrightarrow CH^{i-t+r}(X \times T) \longrightarrow CH^i(X \times Z)\,.$$

Остается воспользоваться тем, что проекция $p\colon \widetilde{T} \times \mathbb{P}^{r-t} \to \widetilde{T}$ задает сюръективное отображение $CH^i(X \times \widetilde{T} \times \mathbb{P}^{r-t}) \to CH^{i-r+t}(X \times \widetilde{T})$ и рассмотреть в качестве морфизма $Y \to Z$ композицию собственных морфизмов $\widetilde{T} \times \mathbb{P}^{r-t} \xrightarrow{p} \widetilde{T} \xrightarrow{\sigma} T \xrightarrow{\iota} Z$. □

Замечание 2.1.3. Лемма 2.1.1 тривиально обобщается для групп Чжоу с коэффициентами в произвольном коммутативном кольце R. При этом лемма 2.1.1 остается верной, если не требовать существование разрешения особенностей над полем k, но потребовать, чтобы характеристика поля k была обратима в кольце коэффициентов R (например, R является $\mathbb{Q}$-алгеброй). Для этого можно, следуя идее Кана и Суджаты [67, Theor. 2.4.1], заменить в доказательстве леммы 2.1.1 разрешение особенностей $\widetilde{T} \to T$ на собственный сюръективный конечный в общей точке морфизм $\widetilde{T} \to T$, степень которого в общей точке взаимно проста с любым наперед заданным простым числом, отличным от характеристики поля k. Такой морфизм существует по усиленному Габбером варианту теоремы де Йонга, см. статью Иллюзи и Темкина [63, Theor. 2.1].

Пусть $M = M(X, \pi, n)$ является мотивом Чжоу в $\mathcal{CM}(k)$, где X — равноразмерное гладкое проективное многообразие над k размерности d, $\pi \in CH^d(X \times X)$ — проектор и $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, M является прямым слагаемым в мотиве Чжоу $M(X) \otimes \mathbb{L}^{-n}$. Для произвольного равноразмерного многообразия V над k определим группы Чжоу $CH^i(M_V)$, $i \in \mathbb{Z}$, используя тонкие пересечения из книги Фултона [42, § 8.1] (подобная идея присутствует также в статье Броснана [25]). Напомним, что для произвольного морфизма $B \to A$ в гладкое многообразие A тонкие пересечения задают на $CH^\bullet(B)$ структуру модуля над кольцом $CH^\bullet(A)$.

Так как проекция $\mathrm{pr}_{13}\colon X \times X \times V \to X \times V$ является плоским морфизмом с постоянной размерностью слоев, то определен обратный образ (см., например, [42, § 1.7])

$$\mathrm{pr}_{13}^* \ : \ CH^i(X \times V) \longrightarrow CH^i(X \times X \times V)\,.$$

Поскольку область значений морфизма $\mathrm{pr}_{12}\colon X \times X \times V \to X \times X$ является гладким многообразием, согласно [42, § 8.1] определена операция тонкого пересечения

$$- \cdot_{\mathrm{pr}_{12}} - \ : \ CH^i(X \times X \times V) \otimes CH^j(X \times X) \longrightarrow CH^{i+j}(X \times X \times V)\,,$$

удовлетворяющая набору естественных свойств, см. [42, Prop. 8.1.1]. Так как проекция $\mathrm{pr}_{23}\colon X \times X \times V \to X \times V$ является собственным морфизмом, то определен прямой образ (см., например, [42, § 1.4])

$$\mathrm{pr}_{23\,*} \ : \ CH^i(X \times X \times V) \longrightarrow CH^{i-d}(X \times V)\,.$$

Определим отображение

$$\pi_V \,:\, CH^i(X\times V)\longrightarrow CH^i(X\times V)\,,\qquad \alpha\longmapsto \mathrm{pr}_{23\,*}\left(\mathrm{pr}_{13}^*(\alpha)\cdot_{\mathrm{pr}_{12}}\pi\right).$$

Легко видеть, что из того, что π является проектором, следует, что π_V тоже является проектором. Теперь положим

$$CH^i(M_V):=\pi_V\big(CH^{i+n}(X\times V)\big)\,.$$

Можно проверить, что группы Чжоу $CH^i(M_V)$ функториальны относительно мотива M и не зависят от выбора X, π и n.

Для произвольного равноразмерного гладкого проективного многообразия X и равноразмерного многообразия V имеются канонические изоморфизмы $CH^i\big(M(X)_V\big)\simeq CH^i(X\times V)$.

Если многообразие V гладкое и проективное, то имеются канонические изоморфизмы

$$CH^i(M_V)\simeq CH^i\big(M(V)\otimes M\big)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(k)}\left(M(V),M\otimes\mathbb{L}^{e-i}\right),\tag{2.1.4}$$

где e равно размерности многообразия V. Можно показать, что в общем случае имеется изоморфизм

$$CH^i(M_V)\simeq \mathrm{Hom}_{DM_-(k)}\left(M\otimes\mathbb{L}^{e-i},M^c(V)\right),$$

где $DM_-(k)$ является триангулированной категорией мотивов Воеводского [143], а $M^c(V)$ обозначает мотив с компактным носителем произвольного многообразия V (напомним, что имеется строго полное вложение $\mathcal{CM}(k)^{\mathrm{op}}\subset DM_-(k)$, сопоставляющее мотиву Чжоу гладкого проективного многообразия его мотив в категории Воеводского, являющийся также его мотивом с компактным носителем).

Так как прямое слагаемое точной последовательности также является точной последовательностью, то для любого замкнутого равноразмерного подмногообразия $Z\subset V$ коразмерности c имеется точная последовательность

$$CH^{i-c}(M_Z)\longrightarrow CH^i(M_V)\longrightarrow CH^i(M_U)\longrightarrow 0\,,$$

где $U=V\smallsetminus Z$. Из этого следует, что имеется точная последовательность

$$\varinjlim_{D\subset V} CH^{i-1}(M_D)\longrightarrow CH^i(M_V)\longrightarrow \bigoplus_{\eta} CH^i(M_{k(\eta)})\longrightarrow 0\,,\tag{2.1.5}$$

где D пробегает все приведенные эффективные дивизоры на V, η пробегает общие точки неприводимых компонент многообразия V, а $k(\eta)$ обозначает поле рациональных функций на соответствующей компоненте.

Предложение 2.1.6. *Пусть дано целое число $r \geqslant -1$. Предположим, что над полем k имеется разрешение особенностей для многообразий размерности не больше r. Тогда для любого эффективного мотива M и морфизма $f\colon N \to M$ в категории $\mathcal{CM}(k)$ следующие условия равносильны:*

(i) *существует равноразмерное гладкое проективное многообразие Y размерности r над k (при $r = -1$ многообразие Y пусто) и изоморфизм $N \oplus M(Y) \simeq M \oplus P$, для которого соответствующий морфизм из N в M совпадает с исходным морфизмом f;*

(ii) *для любого расширения полей $k \subset K$ и любого целого числа $i > r$ морфизм f задает сюръективный гомоморфизм $CH^i(N_K) \to CH^i(M_K)$.*

Доказательство. Очевидно, что из условия (i) следует условие (ii).

Предположим, что выполнено условие (ii). Сначала докажем, что для любого равноразмерного многообразия V размерности $s \geqslant r$ естественный гомоморфизм

$$\varinjlim_{Z \subset V} CH^r(M_Z) \oplus CH^s(N_V) \longrightarrow CH^s(M_V) \tag{2.1.7}$$

сюръективен, где Z пробегает все равноразмерные подмногообразия в V размерности r, а отображение из $CH^s(N_V)$ в $CH^s(M_V)$ задается морфизмом $f\colon N \to M$. Доказательство этого факта ведется индукцией по $s \geqslant r$. При $s = r$ утверждение очевидно, так как в этом случае в качестве Z можно взять V. Осуществим переход индукции от $s-1$ к s, где $s > r$.

Рассматривая точную последовательность (2.1.5) для N и для M, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
\varinjlim\limits_{D \subset V} CH^{s-1}(N_D) & \longrightarrow & CH^s(N_V) & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{\eta} CH^s(N_{k(\eta)}) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\varinjlim\limits_{D \subset V} CH^{s-1}(M_D) & \longrightarrow & CH^s(M_V) & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{\eta} CH^s(M_{k(\eta)}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

где D пробегает все приведенные эффективные дивизоры на V, а η пробегает все общие точки неприводимых компонент многообразия V. Поскольку $s > r$, из условия (ii) следует сюръективность правой вертикальной стрелки. Кроме того, по предположению индукции для каждого дивизора D естественный гомоморфизм

$$\varinjlim_{Z \subset D} CH^r(M_Z) \oplus CH^{s-1}(N_D) \longrightarrow CH^{s-1}(M_D)$$

сюръективен, где Z пробегает все равноразмерные подмногообразия в D размерности r. Так как приведенные эффективные дивизоры на V образуют направленную систему, то из этого следует сюръективность гомоморфизма

$$\varinjlim_{Z\subset V} CH^r(M_Z) \oplus \varinjlim_{D\subset V} CH^{s-1}(N_D) \longrightarrow \varinjlim_{D\subset V} CH^{s-1}(M_D)\,.$$

Теперь простой диаграммный поиск показывает, что гомоморфизм (2.1.7) сюръективен.

Далее, утверждается, что для произвольного равноразмерного многообразия Z размерности r естественный гомоморфизм

$$\bigoplus_{Y\to Z} CH^i(M_Y) \longrightarrow CH^i(M_Z)\,, \qquad i\in\mathbb{Z}\,, \tag{2.1.8}$$

сюръективен, где $Y \to Z$ пробегает все собственные морфизмы из гладкого многообразия Y размерности r. Действительно, так как прямое слагаемое сюръективного отображения сюръективно, то сюръективность отображения (2.1.8) следует из определения групп Чжоу $CH^i(M_Z)$ и из леммы 2.1.1.

Предположим теперь, что V является равноразмерным гладким проективным многообразием размерности e. По формуле (2.1.4) имеются канонические изоморфизмы

$$CH^e(M_V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(k)}\big(M(V), M\big)\,, \qquad CH^e(N_V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(k)}\big(M(V), N\big)\,.$$

Поэтому из сюръективности гомоморфизмов (2.1.7) и (2.1.8) следует сюръективность гомоморфизма

$$\bigoplus_{Y\to V} \mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(k)}\big(M(Y), M\big) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(k)}\big(M(V), N\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(k)}\big(M(V), M\big)\,, \tag{2.1.9}$$

где прямая сумма рассматривается по всем морфизмам $Y \to V$, где Y является равноразмерным гладким проективным многообразием размерности r.

По предположению мотив Чжоу M эффективен, т.е. $M = M(X,\pi)$ для некоторого равноразмерного гладкого проективного многообразия X размерности d и проектора $\pi \in CH^d(X\times X)$. Обозначим также через π соответствующий морфизм $M(X) \to M$. Применяя сюръективность гомоморфизма (2.1.9) при $V = X$ к элементу $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(k)}\big(M(X), M\big)$, мы видим, что существует морфизм многообразий $w\colon Y \to X$, где Y является равноразмерным гладким проективным многообразием размерности r, и морфизмы мотивов Чжоу $g\colon M(Y) \to M$, $h\colon M(X) \to N$, для которых морфизм $\pi\colon M(X) \to M$ равен композиции

$$M(X) \xrightarrow{w^*\oplus h} M(Y)\oplus N \xrightarrow{g\oplus f} M\,.$$

Следовательно, тождественный морфизм из M в себя раскладывается в композицию

$$M \longrightarrow M(X) \xrightarrow{w^*\oplus h} M(Y)\oplus N \xrightarrow{g\oplus f} M\,.$$

Из этого напрямую следует требуемое утверждение. □

Следствие 2.1.10. *Для любого морфизма $f\colon N \to M$ в $\mathcal{CM}(k)$ следующие условия равносильны:*

(i) *мотив Чжоу M можно представить как прямое слагаемое в мотиве Чжоу N так, что соответствующий морфизм из N в M равен исходному морфизму f;*

(ii) *для любого расширения полей $k \subset K$ и любого целого числа i морфизм f задает сюръективный гомоморфизм $CH^i(N_K) \to CH^i(M_K)$.*

Доказательство. Легко видеть, что выполнение условий из обоих пунктов не меняется при тензорном умножении на $\mathbb{L}$. Поэтому можно считать, что мотив M эффективен и применить предложение 2.1.6 при $r = -1$ (при этом условие на разрешение особенностей над k пусто). □

Следствие 2.1.11. *Для любого мотива Чжоу M в $\mathcal{CM}(k)$ следующие условия равносильны:*

(i) *имеет место обращение в нуль $M = 0$;*

(ii) *для любого расширения полей $k \subset K$ и любого целого числа i имеем $CH^i(M_K) = 0$.*

Доказательство. Надо применить следствие 2.1.10 при $N = 0$. □

Следствие 2.1.12. *Пусть дано целое число $r \geqslant -1$. Предположим, что над полем k имеется разрешение особенностей для многообразий размерности не больше r. Тогда для любого эффективного мотива Чжоу M в $\mathcal{CM}(k)$ следующие условия равносильны:*

(i) *существует равноразмерное гладкое проективное многообразие Y размерности r над k, для которого мотив Чжоу M можно представить, как прямое слагаемое в мотиве Чжоу $M(Y)$;*

(ii) *для любого расширения полей $k \subset K$ и любого целого числа $i > r$ имеем $CH^i(M_K) = 0$.*

Доказательство. Надо применить предложение 2.1.6 при $N = 0$. □

Замечание 2.1.13.

(i) Для произвольной категории $\mathcal{C}$ определена категория инд-объектов $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ в ней, см. [59], [3]. В явном виде, инд-объект в $\mathcal{C}$ задается при помощи направленного частично упорядоченного множества Λ, набора объектов C_λ из категории $\mathcal{C}$ для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$, и набора согласованных морфизмов $C_\lambda \to C_\mu$ для каждой пары

индексов $\lambda \leqslant \nu$. Такой инд-объект обозначается через "$\varinjlim$"C_λ. При этом для любого объекта C в $\mathcal{C}$ имеются канонические биекции множеств

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{Ind}(\mathcal{C})}\big(\text{“}\varinjlim\text{”}C_\lambda, C\big) \simeq \varprojlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C_\lambda, C)\,. \tag{2.1.14}$$

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{Ind}(\mathcal{C})}\big(C, \text{“}\varinjlim\text{”}C_\lambda\big) \simeq \varinjlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C_\lambda)\,. \tag{2.1.15}$$

(ii) Для любого множества E и набора мотивов Чжоу M_x, $x \in E$, определен инд-объект в $\mathcal{CM}(k)$

$$\bigoplus_{x\in E} M_x := \text{“}\varinjlim_{E'\subset E}\text{”} \bigoplus_{x\in E'} M_x\,,$$

где $E' \subset E$ пробегает все конечные подмножества в E. Для любого инд-объекта $N = \text{“}\varinjlim\text{”}N_\lambda$ в $\mathcal{CM}(k)$ определены его группы Чжоу, изоморфные прямому пределу

$$CH^i(N) \simeq \varinjlim CH^i(N_\lambda)\,, \qquad i \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.1.16}$$

При этом для любого инд-объекта N в $\mathcal{CM}(k)$ и равноразмерного гладкого проективного многообразия V размерности e имеется канонический изоморфизм

$$CH^e\big(M(V)\otimes N\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\operatorname{Ind}(\mathcal{CM}(k))}\big(M(V), N\big)\,.$$

Это выводится из аналогичного утверждения для обычных объектов в $\mathcal{CM}(k)$ и из формул (2.1.15) и (2.1.16).

(iii) Ввиду сказанного в пункте (ii) предложение 2.1.6 и следствие 2.1.10 тривиально обобщаются на случай, когда N является инд-объектом в $\mathcal{CM}(k)$.

Замечание 2.1.17.

(i) Предложение 2.1.6, следствия 2.1.10, 2.1.11, 2.1.12, а также замечание 2.1.13(ii),(iii) тривиально обобщаются для мотивов Чжоу с коэффициентами в произвольном коммутативном кольце R.

(ii) Согласно замечанию 2.1.3 предложение 2.1.6 и следствие 2.1.12 остаются верными, если не требовать существование разрешения особенностей над полем k, но потребовать, чтобы характеристика поля k была обратима в кольце коэффициентов R.

Напомним, что поле Ω называется *универсальной областью*, если Ω алгебраически замкнуто и имеет бесконечную степень трасцендентности над своим простым подполем, т.е. над $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{F}_p$. Следующая лемма позволяет проверять условие (ii) из предложения 2.1.6 в случае, когда группы Чжоу рассматриваются с рациональными коэффициентами.

Лемма 2.1.18. *Предположим, что кольцо R содержит поле $\mathbb{Q}$. Тогда для любого морфизма $f\colon N \to M$ в $\mathcal{CM}(k)_R$ и целого числа $i \in \mathbb{Z}$ следующие условия равносильны:*

(i) *существует расширение полей $k \subset \Omega$, для которого Ω является универсальной областью и морфизм f задает сюръективный гомоморфизм $CH^i(N_\Omega)_R \to CH^i(M_\Omega)_R$;*

(ii) *для любого расширения полей $k \subset K$ морфизм f задает сюръективный гомоморфизм $CH^i(N_K)_R \to CH^i(M_K)_R$.*

Доказательство. Очевидно, что из условия (ii) следует условие (i).

Предположим, что выполнено условие (i). Существует подполе $k_0 \subset k$, конечно порожденное над своим простым подполем, и морфизм мотивов Чжоу $f_0\colon N_0 \to M_0$ над k_0, для которых морфизм f является расширением скаляров морфизма f_0 с k_0 на k. При этом легко видеть, что достаточно доказать условие (ii) для морфизма f_0 над полем k_0. Поэтому, заменив поле k на k_0, можно считать, что Ω имеет бесконечную степень трансцендентности над k, поскольку Ω имеет бесконечную степень трансцендентности над своим простым подполем.

Рассмотрим произвольное расширение полей $k \subset K$ и элемент $\alpha \in CH^i(M_K)_R$. Нам надо доказать, что α лежит в образе гомоморфизма $CH^i(N_K)_R \to CH^i(M_K)_R$, заданного морфизмом f. Элемент α определен над некоторым подполем в K, конечно порожденным над k. Поэтому, заменив K на такое подполе, можно считать, что поле K конечно порождено над k. Так как поле Ω алгебраически замкнуто и имеет бесконечную степень трансцендентности над k, то существует вложение полей $K \subset \Omega$ над полем k.

По условию (i) элемент $\alpha_\Omega \in CH^i(M_\Omega)_R$ лежит в образе гомоморфизма $CH^i(N_\Omega)_R \to CH^i(M_\Omega)_R$. Существует подполе $L \subset \Omega$, содержащее K и конечно порожденное над K, для которого элемент $\alpha_L \in CH^i(M_L)_R$ лежит в образе гомоморфизма $CH^i(N_L)_R \to CH^i(M_L)_R$.

Пусть $K \subset E \subset L$ является композицией расширений полей, в которой расширение $K \subset E$ чисто трансцендентное, а расширение $E \subset L$ конечное. Тогда расширения скаляров задают изоморфизм

$$CH^i(M_K)_R \xrightarrow{\sim} CH^i(M_E)_R$$

и вложение в качестве прямого слагаемого

$$CH^i(M_E)_R \hookrightarrow CH^i(M_L)_R\,,$$

с соответствующей проекцией $CH^i(M_L)_R \to CH^i(M_E)_R$, заданной гомоморфизмом $\frac{1}{[L:E]}\operatorname{Tr}_{L/E}$ (здесь мы используем то, что кольцо R содержит поле $\mathbb{Q}$). Аналогичное верно и для мотива N.

Мы видим, что гомоморфизм $CH^i(N_K)_R \to CH^i(M_K)_R$ является прямым слагаемым гомоморфизма $CH^i(N_L)_R \to CH^i(M_L)_R$. Поскольку α_L лежит в образе второго гомоморфизма, то α лежит и в образе первого гомоморфизма. Это завершает доказательство. □

Мы также будем использовать следующий простой факт.

Лемма 2.1.19. *Для любого мотива Чжоу M в $\mathcal{CM}(k)$ и целого числа $n \geqslant 0$ следующие условия равносильны:*

(i) *для любого расширения полей $k \subset K$ и любого неприводимого гладкого проективного многообразия Y над K размерности не выше n имеем*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(K)}\big(M(Y), M_K\big) = 0\,;$$

(ii) *для любого расширения полей $k \subset K$ и любого целого числа $0 \leqslant i \leqslant n$ имеем $CH^i(M_K) = 0$.*

Доказательство. Условие (i) влечет условие (ii), поскольку для любого $i \geqslant 0$ группа Чжоу $CH^i(M_K) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(K)}(\mathbb{L}^i, M_K)$ является прямым слагаемым в $\mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(K)}\big(M(\mathbb{P}^i), M_K\big)$.

Предположим, что выполнено условие (ii). По формуле (2.1.4) достаточно доказать, что для любого равноразмерного многообразия V над K размерности $i \leqslant n$ выполняется $CH^i(M_V) = 0$. Это делается индукцией по i при помощи точной последовательности (2.1.5). □

2.1.2. **Мотивы Чжоу многообразий с представимыми группами Чжоу.** В данном параграфе мы будем применять предложение 2.1.6 в случае, когда M является мотивом Чжоу гладкого проективного многообразия. Оказывается, что тогда, пользуясь мотивной двойственностью Пуанкаре, см. формулу (1.1.4), можно получить дополнительную информацию о мотиве Чжоу M. Продемонстрируем сначала это наблюдение следующим простым фактом.

Лемма 2.1.20. *Пусть X — неприводимое гладкое проективное многообразие размерности d. Предположим, что существует расширение полей $k \subset \Omega$, для которого Ω является универсальной областью и отображение* $\deg\colon CH^d(X_\Omega)_\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *является изоморфизмом. Тогда рациональный мотив Чжоу $M(X)_\mathbb{Q}$ изоморфен прямому слагаемому в рациональном мотиве Чжоу $\mathbb{1} \oplus \big(M(Y)_\mathbb{Q} \otimes \mathbb{L}\big)$, где Y — равноразмерное гладкое проективное многообразие размерности $d-1$.*

Доказательство. Из предложения 2.1.6 и замечания 2.1.17 следует, что $M(X)_{\mathbb{Q}}$ изоморфен прямому слагаемому в $M(Y)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{L}^d$, где Y является равноразмерным гладким проективным многообразием размерности $d-1$. Значит, $M(X)^{\vee}_{\mathbb{Q}}$ изоморфен прямому слагаемому в $M(Y)^{\vee}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{L}^{-d}$. Согласно мотивной двойственности Пуанкаре, см. формулу (1.1.4), имеются изоморфизмы

$$M(X)^{\vee} \simeq M(X) \otimes \mathbb{L}^{-d}\,, \qquad M(Y)^{\vee} \simeq M(Y) \otimes \mathbb{L}^{-d+1}\,.$$

Из этого напрямую следует требуемый факт. □

Приведенное ниже следствие можно также легко вывести из разложения диагонали по Блоху–Шринивасу [14].

Следствие 2.1.21. *Пусть X — неприводимое гладкое проективное многообразие размерности d. Предположим, что существует расширение полей $k \subset \Omega$, для которого Ω является универсальной областью и отображение* $\deg\colon CH^d(X_\Omega)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ *является изоморфизмом. Пусть l — простое число, не равное характеристике поля k. Тогда выполняется следующее:*

(i) *многообразие Пикара* $\mathrm{Pic}^0(X)$ *тривиально и группа $CH^1(X) \simeq NS(X)$ конечно порождена;*

(ii) *имеем $H^1_{\acute{e}t}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l) = 0$, где $\bar{k}$ обозначает алгебраическое замыкание поля k;*

(iii) *отображение класса цикла $CH^1(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^2_{\acute{e}t}\big(X, \mathbb{Z}_l(1)\big)$ является изоморфизмом.*

Доказательство. (i) Из леммы 2.1.20 следует, что $H^1_{\acute{e}t}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l) = 0$. Следовательно, $\mathrm{Pic}^0(X) = 0$. По теореме Нерона–Севери, группа $CH^1(X)$ конечно порождена, будучи изоморфной группе Нерона–Севери $NS(X)$.

(ii) Так как $\mathrm{Pic}^0(X) = 0$, то $H^1_{\acute{e}t}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l) = 0$.

(iii) Напомним, что из точной последовательности Куммера и из точности слева обратных пределов следует точная последовательность

$$0 \longrightarrow \varprojlim_r CH^1(X)/l^r \xrightarrow{\lambda} H^2_{\acute{e}t}\big(X, \mathbb{Z}_l(1)\big) \longrightarrow T_l\big(\mathrm{Br}(X)\big)\,,$$

где $T_l\big(\mathrm{Br}(X)\big)$ обозначает модуль Тейта группы Брауэра. Поскольку модуль Тейта не содержит кручения, мы видим, что коядро отображения λ также не содержит кручения. Из леммы 2.1.20 следует, что $\lambda_{\mathbb{Q}_l}$ является изоморфизмом, так как $CH^1(X)_{\mathbb{Q}_l}$ является прямым слагаемым в $CH^0(Y)_{\mathbb{Q}_l}$ в обозначениях данной леммы. Поэтому λ также является изоморфизмом. Остается заметить, что вследствие конечной порожденности группы $CH^1(X)$, естественное отображение $CH^1(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to \varprojlim_r CH^1(X)/l^r$ является изоморфизмом. □

Пусть X является равноразмерным гладким проективным многообразием размерности d.

Определение 2.1.22.

(i) Будем говорить, что группа Чжоу $CH^i(X)$ *представима в размерности* e, если существуют равноразмерное гладкое проективное многообразие Y размерности e и морфизм $f\colon M(Y)\otimes\mathbb{L}^{i-e}\to M(X)$, т.е. соответствие в $CH^i(Y\times X)$, так что для любого расширения полей $k\subset K$ морфизм f задает сюръективное отображение $CH^e(Y_K)\to CH^i(X_K)$.

(ii) Будем говорить, что группа Чжоу $CH^i(X)$ *сильно представима в размерности* e, если существуют равноразмерное гладкое проективное многообразие Y размерности e, прямое слагаемое N в $M(Y)$, и морфизм $f\colon N\otimes\mathbb{L}^{i-e}\to M(X)$, так что для любого расширения полей $k\subset K$ морфизм f задает сюръективное отображение $CH^e(N_K)\to CH^i(X_K)$ и $CH^j(N_K)=0$ при $j<e$.

Замечание 2.1.23.

(i) Определение 2.1.22(i),(ii) естественным образом обобщается для групп Чжоу с коэффициентами в произвольном кольце R. При этом если R является $\mathbb{Q}$-алгеброй, то по лемме 2.1.18 достаточно требовать условие сюръективности отображения $CH^e(N_\Omega)_R\to CH^i(X_\Omega)_R$ и обращение в нуль $CH^j(N_\Omega)=0$, $j<e$, только для некоторой универсальной области Ω, содержащей поле k.

(ii) Заметим, что из стандартных мотивных гипотез, например, из существования абелевой категории смешанных мотивов с рациональными коэффициентами, следует, что для любого равноразмерного гладкого проективного многообразия Y размерности e существует прямое слагаемое N в $M(Y)_{\mathbb{Q}}$, такое что для любого расширения полей выполняется $CH^e(N_K)\simeq CH^e(Y_K)$ и $CH^j(N_K)=0$ при $j<e$. Поэтому гипотетически с рациональными коэффициентами определение 2.1.22(i) и определение 2.1.22(ii) равносильны.

(iii) Над алгебраически замкнутым полем k условие на Y из пункта (ii) выполняется с рациональными коэффициентами при $e\leqslant 2$ (для $e=2$ надо использовать разложение Мюрре [103]) .

Теорема 2.1.24. *Пусть X является равноразмерным гладким проективным многообразием размерности d. Предположим, что для некоторых целых чисел $e,r\geqslant 0$ группы Чжоу*

$CH^d(X)$, $CH^{d-1}(X)$, $\dots,$, $CH^{d-r}(X)$ сильно представимы в размерности e. Предположим также, что выполняется неравенство $e < d-2r$, и что над полем k существует разрешение особенностей для многообразий размерности не больше $d-r-1$. Для каждого i, $0 \leqslant i \leqslant r$, пусть N_i — мотив Чжоу, сильно представляющий группу $CH^{d-i}(X)$ как в определении 2.1.22(ii). Тогда имеется изоморфизм мотивов Чжоу

$$M(X) \simeq \bigoplus_{i=0}^{r}(P_i^\vee \otimes \mathbb{L}^{e+i}) \oplus (Q \otimes \mathbb{L}^{r+1}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{r}(P_i \otimes \mathbb{L}^{d-e-i})\,,$$

где для каждого i, $0 \leqslant i \leqslant r$, мотив Чжоу P_i изоморфен прямому слагаемому в N_i, а мотив Чжоу Q изоморфен прямому слагаемому в мотиве Чжоу некоторого равноразмерного гладкого проективного многообразия размерности $d-2r-2$.

Для доказательства теоремы 2.1.24 нам понадобятся следующие вспомогательные абстрактные леммы. Пусть $\mathcal{C}$ является произвольной идемпотентно замкнутой аддитивной категорией.

Лемма 2.1.25. *Предположим, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) = 0$ для объектов A и B в $\mathcal{C}$. Тогда любое прямое слагаемое в $A \oplus B$ изморфно прямой сумме вида $A' \oplus B'$, где A' является прямым слагаемым в A, а B' является прямым слагаемым в B.*

Лемма 2.1.26. *Предположим, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) = 0$ для объектов A и B в $\mathcal{C}$ и что для некоторых объектов C и D имеется изоморфизм $A \oplus C \simeq D \oplus B$. Тогда существует объект E и изоморфизмы*

$$A \oplus E \simeq D\,, \qquad E \oplus B \simeq C\,, \tag{2.1.27}$$

так что исходный изоморфизм получается естественным образом в результате применения изоморфизмов (2.1.27) к объекту $A \oplus E \oplus B$.

Доказательство теоремы 2.1.24. По условию представимости и по предложению 2.1.6 мотив $M(X)$ изоморфен прямому слагаемому в

$$M(Y) \oplus \bigoplus_{i=0}^{r}(N_i \otimes \mathbb{L}^{d-i-e})\,,$$

где Y является равноразмерным гладким проективным многообразием размерности $d-r-1$. Заметим, что для любого расширения полей $k \subset K$ и для любых j, $0 \leqslant j \leqslant d-r-1$, и i, $0 \leqslant i \leqslant r$, имеется обращение в нуль

$$CH^j\big((N_i)_K \otimes \mathbb{L}^{d-i-e}\big) \simeq CH^{j-d+i+e}\big((N_i)_K\big) = 0\,,$$

потому что $j-d+i+e<e$ так как $i+j<d$ (здесь мы пользуемся тем, что представимость сильная). Значит, по лемме 2.1.19 мы получаем, что для любого i, $0\leqslant i\leqslant r$, имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(k)}\left(M(Y),N_i\otimes\mathbb{L}^{d-i-e}\right)=0\,.$$

Аналогичным образом из того, что мотивы Чжоу N_j являются прямыми слагаемыми в мотивах Чжоу многообразий размерности e, устанавливается, что для любых i,j, $0\leqslant i<j\leqslant r$, имеется

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(k)}\left(N_j\otimes\mathbb{L}^{d-j-e},N_i\otimes\mathbb{L}^{d-i-e}\right)=0\,.$$

Значит, по лемме 2.1.25 существуют прямые слагаемые P_i в N_i, прямое слагаемое T в $M(Y)$ и изоморфизм

$$M(X)\simeq T\oplus\bigoplus_{i=0}^{r}(P_i\otimes\mathbb{L}^{d-i-e})\,. \tag{2.1.28}$$

Теперь воспользуемся мотивной двойственностью Пуанкаре $M(X)\simeq M(X)^\vee\otimes\mathbb{L}^d$, см. (1.1.4) в § 1.1.1. Возникает изоморфизм

$$M(X)\simeq\bigoplus_{i=0}^{r}(P_i^\vee\otimes\mathbb{L}^{i+e})\oplus(T^\vee\otimes\mathbb{L}^d)\,. \tag{2.1.29}$$

Так как T является прямым слагаемым в $M(Y)$ и $\dim(Y)=d-r-1$, то $T^\vee\otimes\mathbb{L}^{d-r-1}$ также является прямым слагаемым в $M(Y)\simeq M(Y)^\vee\otimes\mathbb{L}^{d-r-1}$.

Аналогично, мотивы Чжоу $P_i^\vee\otimes\mathbb{L}^e$ являются прямыми слагаемыми в мотивах Чжоу многообразий размерности e. Вновь пользуясь тем, что представимость сильная, а также неравенством $e<d-2r$, мы получаем что для любых i,j, $0\leqslant i,j\leqslant r$, имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(k)}(P_i^\vee\otimes\mathbb{L}^{i+e},P_j\otimes\mathbb{L}^{d-j-e})=0\,.$$

Значит, по лемме 2.1.26, примененной к правым частям изоморфизмов (2.1.28) и (2.1.29), возникает изоморфизм

$$M(X)\simeq\bigoplus_{i=0}^{r}(P_i^\vee\otimes\mathbb{L}^{i+e})\oplus(Q\otimes\mathbb{L}^{r+1})\oplus\bigoplus_{i=0}^{r}(P_i\otimes\mathbb{L}^{d-i-e})\,,$$

где мотив Чжоу Q является прямым слагаемым в $T^\vee\otimes\mathbb{L}^{d-r-1}$, и значит, согласно доказаному выше, является прямым слагаемым в $M(Y)$.

Теперь заметим, что из условия представимости для групп Чжоу $CH^j(X)$, $j\geqslant d-r$, следует, что $CH^j(Q\otimes\mathbb{L}^{r+1})$ для $j\geqslant d-r$. Равносильно, $CH^m(Q)=0$ для $m\geqslant d-2r-1$. При этом мотив Q эффективен, являясь прямым слагаемым в $M(Y)$. Значит, по следствию 2.1.12 мы получаем, что Q является прямым слагаемым в мотиве некоторого равноразмерного гладкого проективного многообразия размерности $d-2r-2$. □

Замечание 2.1.30. Теорема 2.1.24 тривиально обобщается для мотивов Чжоу с коэффициентами в произвольном кольце R.

Положим $T(X) := \operatorname{Ker}\big(AJ\colon CH^d(X)_0 \to \operatorname{Alb}(X)(k)\big)$, где AJ является отображением Абеля–Якоби на группе нуль-циклов степени нуль $CH^d(X)_0$. Нам понадобится следующий элементарный факт.

Лемма 2.1.31. *Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) *существует расширение полей $k \subset \Omega$, для которого Ω является универсальной областью и $T(X_\Omega) = 0$;*

(ii) *группа Чжоу $CH^d(X)_{\mathbb{Q}}$ сильно представима в размерности* 1.

Доказательство. Из условия (ii) следует условие (i), потому что группа $T(X_\Omega)$ является $\mathbb{Q}$-векторным пространством по теореме Ройтмана [118].

Предположим, что выполнено условие (i). Пусть $C \subset X$ является кривой, полученной общим кратным гиперплоским сечением. Пользуясь тем, что поле k алгебраически замкнуто и рассматривая произвольную k-точку на C, мы получаем разложение $M(C) \simeq \mathbb{1} \oplus N$. Ясно, что $CH^0(N_K) = 0$ и $CH^1(N_K) = CH^1(C_K)$ для любого расширения полей $k \subset K$. Пусть морфизм $f\colon N \otimes \mathbb{L}^{d-1} \to M(X)$ является композицией вложения $N \to M(C)$ и морфизма $M(C) \otimes \mathbb{L}^{d-1} \to M(X)$, заданного графиком вложения $C \hookrightarrow X$.

Хорошо известно, что естественный морфизм абелевых многообразий $\operatorname{Jac}(C) \to \operatorname{Alb}(X)$ сюръективен. Так как поле Ω, в частности, алгебраически замкнуто, то мы получаем, что морфизм f задает сюръективный гомоморфизм $CH^1(N_\Omega) \to CH^d(X_\Omega)$. Далее все следует из леммы 2.1.18, поскольку в условии (ii) рассматриваются рациональные коэффициенты. $\square$

Для произвольной неприводимой гладкой проективной кривой C над алгебраически замкнутым полем k определим мотив $M^1(C)$ из разложения $M(C) \simeq \mathbb{1} \oplus M^1(C) \oplus \mathbb{L}$. Заметим, что хотя такое разложение зависит от выбора точки, класс изоморфизма мотива $M^1(C)$ от этого выбора не зависит. Объединяя теорему 2.1.24 при $d = 3$, $e = 1$, $r = 0$ с замечанием 2.1.30, леммой 2.1.31 и с существованием разрешения особенностей для поверхностей в любой характеристике, мы получаем следующий результат.

Теорема 2.1.32. *Пусть X является неприводимым гладким проективным трехмерным многообразием над алгебраически замкнутым полем k. Предположим, что существует расширение полей $k \subset \Omega$, для которого Ω является универсальной областью и $T(X_\Omega) = 0$. Тогда*

существует изоморфизм рациональных мотивов Чжоу

$$M(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{1} \oplus P^{\vee} \oplus \mathbb{L}^{\oplus n} \oplus \big(Q \otimes \mathbb{L}\big) \oplus (\mathbb{L}^2)^{\oplus n} \oplus \big(P \otimes \mathbb{L}\big) \oplus \mathbb{L}^3\,,$$

где $n \geqslant 0$, рациональные мотивы Чжоу P и Q являются прямыми слагаемыми в $M^1(C)_{\mathbb{Q}}$ и $M^1(D)_{\mathbb{Q}}$ для некоторых неприводимых гладких проективных кривых C и D над k, соответственно.

Замечание 2.1.33. Условие теоремы 2.1.32 выполнено для целого ряда трехмерных многообразий. В частности, оно выполнено для всех трехмерных многообразий Фано. В [50, Theor. 13] было объяснено, когда выполнено данное условие, в терминах структуры расслоения трехмерного многообразия над кривой. В частности, данное условие выполнено для расслоений на поверхности дель Пеццо или на поверхности Энриквеса над кривой, см. [50, Theor. 15].

2.1.3. **Трансцендентность нуль-циклов и порождаемость модулей над кольцами.** В этом параграфе мы приводим одно приложение разложений мотивов Чжоу к коммутативной алгебре.

Пусть X является неприводимым многообразием размерности d над k. Предположим, что X является расширением скаляров некоторого многообразия X_0, определенного над подполем $k_0 \subset k$, т.е. зафиксирован изоморфизм $X \simeq (X_0)_k$. Будем говорить, что открытое (соответственно, замкнутое) подмножество в X определено над k_0, если оно является расширением скаляров с k_0 на k некоторого открытого (соответственно, замкнутого) подмножества в X_0.

Точка $P \in X(k) = X_0(k)$ соответствует морфизму схем $P\colon \operatorname{Spec}(k) \to X_0$. Обозначим через ξ_P его образ и положим

$$\operatorname{tr.deg}(P/k_0) := \operatorname{tr.deg}\big(k_0(\xi_P)/k_0\big)\,.$$

В явном виде, $\operatorname{tr.deg}(P/k_0)$ является степенью трансцендентности над k_0 поля, порожденного координатами точки P относительно ее произвольной аффинной окрестности, определенной над k_0. Для элемента $\alpha \in CH^d(X)$ его степень трансцендентности $\operatorname{tr.deg}(\alpha/k_0)$ определяется как минимальное натуральное число n, для которого существует нуль-цикл $\sum_i n_i P_i$ на X над k, представляющий класс α и такой, что для любого i имеется неравенство $\operatorname{tr.deg}(P_i/k_0) \leqslant n$. Аналогично определяется степень трансцендентности для элементов в $CH^d(X)_{\mathbb{Q}} := CH^d(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (при этом рассматриваются все представители с рациональными коэффициентами).

Замечание 2.1.34. В введенных выше обозначениях предположим, что существует определенное над k_0 открытое подмножество $U \subset X$, для которого $\alpha|_U = 0$ в группе $CH^d(U)$. Тогда класс α представлен нуль-циклом, имеющим носитель на дополнении $Z = X \setminus U$. Поскольку размерность многообразия Z строго меньше, чем d, и оно определено над k_0, то из определения степени трансцендентности нуль-циклов следует, что $\mathrm{tr.deg}(\alpha/k_0) < d$. Данный факт остается верным также после перехода к группам Чжоу с рациональными коэффициентами.

Следующий факт доказан в [51, Theor. 7].

Предложение 2.1.35. *Пусть $k_0 \subset k$ —расширение полей бесконечной степени трансцендентности, причем поле k алгебраически замкнуто. Пусть X — неприводимое гладкое проективное многообразие размерности d, являющееся расширением скаляров многообразия X_0, определенного над подполем k_0. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) *существует точка $P \in X(k)$ с $\mathrm{tr.deg}(P/k_0) = d$, класс которой $[P]$ в $CH^d(X)_{\mathbb{Q}}$ удовлетворяет неравенству $\mathrm{tr.deg}\big([P]/k_0\big) < d$;*

(ii) *рациональный мотив Чжоу $M(X_0)_{\mathbb{Q}}$ в $\mathcal{CM}(k_0)_{\mathbb{Q}}$ изоморфен прямому слагаемому в рациональном мотиве Чжоу $M(Y_0)_{\mathbb{Q}} \oplus \big(M(Z_0)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{L}\big)$, где Y_0, Z_0 — равноразмерные гладкие проективные многообразия над k_0 размерности $d-1$.*

Заметим, что по предложению 2.1.6 и замечанию 2.1.17 условие (ii) в предложении 2.1.35 равносильно тому, что группа $CH^d(X_0)_{\mathbb{Q}}$ представлена в размерности $d-1$ (см. определение 2.1.22(i)).

Идея доказательства предложения 2.1.35 заключается в рассмотрении точки P как ограничение класса диагонали в $X_0 \times X_0$ на подсхему $X_0 \times \mathrm{Spec}\,\big(k_0(X_0)\big)$ и в использовании разложения диагонали по Блоху–Шринивасу [14].

Теперь приведем приложение теории трансцендентности нуль-циклов к одному вопросу коммутативной алгебры. Пусть R является конечно порожденной коммутативной алгеброй с единицей над полем k, а M является конечно порожденным проективным R-модулем ранга r. Положим d равным размерности по Круллю алгебры R. Из теоремы Форстера–Суона [38], [129] следует, что M всегда можно породить над R при помощи $d+r$ элементов. На самом деле, теорема Форстера–Суона относится к гораздо более широкому ряду колец и модулей, а в нашем случае данное утверждение также несложно вывести из теоремы Бертини.

Возникает естественный вопрос о точности оценки $d+r$ на число порождающих. Другими словами, вопрос заключается в существовании R и M как выше, для которых M не

порождается никакими $d+r-1$ элементами (заметим, что при $d=1$ вопрос является тривиальным). Суон [128, Theor. 4] построил такой пример для произвольных d и r, когда $k=\mathbb{R}$, существенно используя незамкнутость поля вещественных чисел. Насколько нам известно, в литературе не было предложено ни одного примера для случая, когда основное поле k алгебраически замкнуто.

Пусть k является произвольным полем, $U=\operatorname{Spec}(R)$ является равноразмерным аффинным многообразием размерности d над k, N является проективным R-модулем ранга один, $M=N\oplus R^{\oplus(r-1)}$, и пусть линейное расслоение L на U соответствует R-модулю N. Для векторного расслоения E на равноразмерном многообразии X над k через $c_i(E)\in CH^i(X)$ будем обозначать соответствующий класс Черна. Следующая лемма доказывается при помощи аналога метода из [128, Ex. 2].

Лемма 2.1.36. *Предположим, что модуль M порождается $d+r-1$ элементами. Тогда имеется равенство $c_1(L)^d=0$ в группе $CH^d(U)$.*

Доказательство. Из условия леммы вытекает существование точной тройки расслоений на U

$$0\longrightarrow E\longrightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus(d+r-1)}\longrightarrow L\oplus\mathcal{O}_U^{\oplus(r-1)}\longrightarrow 0\,.$$

По формуле Уитни выполняется равенство

$$1+c_1(E)+\ldots+c_d(E)=\big(1+c_1(L)\big)^{-1}\,.$$

В частности, имеем $c_d(E)=(-1)^d c_1(L)^d$. С другой стороны, так как ранг расслоения E равен $d-1$, то $c_d(E)=0$. □

Таким образом, для доказательства того, что модуль над кольцом не порождается малым числом элементов, полезно устанавливать нетривиальность элементов в группе Чжоу нуль-циклов $CH^d(U)$. Заметим, что здесь важно рассматривать классы Черна именно со значениями в группах Чжоу, а не в группах когомологий (Бетти, де Рама, или этальных), поскольку когомологии с номером $2d$ тривиальны для любого d-мерного аффинного многообразия.

Приведем интерпретацию примера из [128, Ex. 2, Theor. 4] в терминах групп Чжоу. Отметим, что в данном примере важно, чтобы поле k не было алгебраически замкнутым.

Пример 2.1.37. Пусть $Q\subset\mathbb{P}^d$ является гладкой проективной квадрикой без точек над k, $U=\operatorname{Spec}(R)$ — дополнение к Q в $\mathbb{P}^d$, $L=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1)|_U$, N — соответствующий R-модуль и

$M = N \oplus R^{\oplus(r-1)}$. Тогда $c_1(L)^d$ является ограничением на U класса точки в $CH^d(\mathbb{P}^d) \simeq \mathbb{Z}$. Если бы выполнялось условие $c_1(L)^d = 0$, то из точной последовательности

$$CH^{d-1}(Q) \longrightarrow CH^d(\mathbb{P}^d) \longrightarrow CH^d(U) \longrightarrow 0$$

следовало, что на Q над k есть нуль-цикл степени 1. По известному результату Спрингера [88, Ch. VII, Th. 2.3] это противоречило бы тому, что на квадрике Q нет точек над k (при $k = \mathbb{R}$ данное противоречие также получается из рассмотрения действия комплексной инволюции на эффективном нуль-цикле нечетной степени). Значит, по лемме 2.1.36 модуль M не порождается $d + r - 1$ элементами.

Теорема 2.1.38. *Для любых натуральных d, r существуют конечно порожденная регулярная алгебра R над $\mathbb{C}$ размерности d и конечно порожденный проективный R-модуль M ранга r такие, что M не порождается $d + r - 1$ элементами над R.*

Доказательство. Пусть C — гладкая проективная кривая над $k_0 = \overline{\mathbb{Q}}$ положительного рода и положим $X_0 = C^d$, $k = \mathbb{C}$, $X = (X_0)_{\mathbb{C}}$. Рассмотрим произвольную комплексную точку $P = (P_1, \ldots, P_d) \in X(\mathbb{C})$, не лежащую ни на одном отличном от X подмногообразии в X, определенном над $\overline{\mathbb{Q}}$. В явном виде, условие на точку P можно задать так: выберем аффинную карту в C, определенную над $\overline{\mathbb{Q}}$, расширение скаляров которой на $\mathbb{C}$ содержит $P_1, \ldots, P_d$. Требуется, чтобы координаты точек $P_1, \ldots, P_d$ в данной карте порождали расширение поля $\overline{\mathbb{Q}}$ степени трансцендентности d.

Далее, рассмотрим дивизоры в X

$$D_i := \Big\{ (x_1, \ldots, x_d) \in X \;\mid\; x_i = P_i \Big\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant d\,,$$

и (приводимый) дивизор $D = \bigcup_i D_i$. Заметим, что дивизор D не определен над $\overline{\mathbb{Q}}$. Наконец, пусть $U = \operatorname{Spec}(R)$ — произвольное открытое аффинное подмножество в X, определенное над $\overline{\mathbb{Q}}$, $L = \mathcal{O}_X(D)|_U$, N — соответствующий R-модуль и $M = N \oplus R^{\oplus(r-1)}$. Тогда выполняются равенства

$$c_1(L)^d = c_1(\mathcal{O}_X(D))^d|_U = d! \cdot [P]|_U \in CH^d(U)\,.$$

Предположим, что $[P]|_U = 0$ в $CH^d(U)_{\mathbb{Q}}$. По замечанию 2.1.34, имеем $\operatorname{tr.deg}\big([P]/k_0\big) < d$ в $CH^d(X)_{\mathbb{Q}}$. Тогда из предложения 2.1.35 следует, что $H^0(X, \Omega^d_X) = 0$. Это противоречит тому, что

$$H^0(X, \Omega^d_X) \simeq H^0(C, \Omega^1_C)^{\otimes d}_{\mathbb{C}} \neq 0\,.$$

Значит, $[P]|_U \neq 0$ в $CH^d(U)_{\mathbb{Q}}$. Следовательно, $d! \cdot [P]|_U \neq 0$ в $CH^d(U)$, и по лемме 2.1.36, модуль M не порождается $d + r - 1$ элементами над R. Это завершает доказательство. $\square$

2.2. Мотивы Чжоу лефшецева типа и K-мотивы единичного типа

2.2.1. **Мотивы Чжоу лефшецева типа.**

Определение 2.2.1. Мотив Чжоу в $\mathcal{CM}(k)$ *имеет лефшецев тип*, если он изоморфен (конечной) прямой сумме мотивов Чжоу вида $\mathbb{L}^i$ для некоторых $i \in \mathbb{Z}$. Пусть $\mathcal{CM}_{\mathbb{L}}(k) \subset \mathcal{CM}(k)$ обозначает полную подкатегорию, состоящую из мотивов Чжоу лефшецева типа.

Легко видеть, что $\mathcal{CM}_{\mathbb{L}}(k)$ является жесткой симметрической тензорной подкатегорией в $\mathcal{CM}(k)$, замкнутой относительно взятия прямых слагаемых (для проверки последнего факта надо рассмотреть кольцо эндоморфизмов мотива Чжоу лефшецева типа). Заметим, что функтор $CH^\bullet$ на категории всех мотивов Чжоу не обладает тензорной структурой, поскольку в общем случае для групп Чжоу произведений многообразий не выполняется формула Кюннета. Тем не менее, из явного описания групп Чжоу для мотивов Чжоу лефшецева типа получается следующий простой, но полезный факт.

Лемма 2.2.2. *Пусть* GrFr *является симметрической тензорной категорией градуированных свободных конечно порожденных групп, на которой симметрическая структура определяется без правила знаков Кошуля. Тогда функтор*

$$CH^\bullet \,:\, \mathcal{CM}_{\mathbb{L}}(k) \longrightarrow \mathrm{GrFr}\,, \qquad M \longmapsto \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} CH^i(M)\,,$$

обладает естественной симметрической тензорной структурой и является эквивалентностью категорий.

Следствие 2.2.3. *Предположим, что для неприводимого гладкого проективного многообразия X размерности d его мотив Чжоу $M(X)$ имеет лефшецев тип. Тогда для любого целого i, $0 \leqslant i \leqslant d$, спаривание*

$$CH^i(X) \otimes CH^{d-i}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}\,,$$

заданное индексом пересечения, унимодулярно.

Доказательство. Напомним (см. § 1.1.1), что имеется каноническое унимодулярное спаривание в $\mathcal{CM}(k)$

$$M(X) \otimes \big(M(X) \otimes \mathbb{L}^{-d}\big) \longrightarrow \mathbb{1}\,, \tag{2.2.4}$$

индуцирующее мотивную двойственность Пуанкаре $M(X)^\vee \simeq M(X) \otimes \mathbb{L}^{-d}$. При этом после применения функтора $CH^\bullet$ спаривание (2.2.4) соответствует индексу пересечения. По лемме 2.2.2 функтор $CH^\bullet$ осуществляет симметрическую тензорную эквивалентность между

категориями $\mathcal{CM}_{\mathbb{L}}(k)$ и GrFr. Таким образом, спаривание между градуированными свободными конечно порожденными группами

$$\big(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} CH^i(X)\big)\otimes\big(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} CH^{i+d}(X)\big)\longrightarrow\mathbb{Z}\,,$$

заданное индексом пересечения, также унимодулярно. Это равносильно унимодулярности индекса пересечения $CH^i(X)\otimes CH^{d-i}(X)\to\mathbb{Z}$ для каждого $i\in\mathbb{Z}$. □

Предложение 2.2.5. *Мотив Чжоу M в $\mathcal{CM}(k)$ имеет лефшецев тип тогда и только тогда, когда для любого целого числа $i\in\mathbb{Z}$ и для любого расширения полей $k\subset K$ естественный гомоморфизм $CH^i(M)\to CH^i(M_K)$ сюръективен.*

Доказательство. Очевидно, что данное условие сюръективности выполняется для любого мотива Чжоу лефшецева типа.

Наоборот, предположим, что условие сюръективности выполнено. Для каждого $i\in\mathbb{Z}$ существует множество E_i и сюръективный гомоморфизм групп $\mathbb{Z}^{\oplus E_i}\to CH^i(M)$. Рассмотрим инд-объект в $\mathcal{CM}(k)$ (см. замечание 2.1.13(i),(ii))

$$N=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(\mathbb{L}^i)^{\oplus E_i}\,.$$

Канонические изоморфизмы $CH^i(M)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{CM}(k)}(\mathbb{L}^i,M)$ определяют морфизм $f\colon N\to M$ в категории инд-объектов в $\mathcal{CM}(k)$ (см. формулу (2.1.14)).

По своему построению морфизм f задает сюръективный гомоморфизм $CH^i(N)\to CH^i(M)$ для любого $i\in\mathbb{Z}$. Кроме того, по нашему предположению для любого расширения полей $k\subset K$ естественный гомоморфизм $CH^i(M)\to CH^i(M_K)$ сюръективен. Следовательно, для любого $i\in\mathbb{Z}$ и любого расширения полей $k\subset K$ морфизм f задает сюръективный гомоморфизм $CH^i(N_K)\to CH^i(M_K)$. По следствию 2.1.10 и замечанию 2.1.13(iii) мы получаем, что M является прямым слагаемым в N.

Поскольку N является инд-объектом в $\mathcal{CM}(k)$, а M является обычным объектом в $\mathcal{CM}(k)$, мы видим, что на самом деле M является прямым слагаемым в конечной прямой сумме мотивов Чжоу вида $\mathbb{L}^i$, $i\in\mathbb{Z}$. Так как подкатегория $\mathcal{CM}_{\mathbb{L}}(k)\subset\mathcal{CM}(k)$ замкнута относительно взятия прямых слагаемых, то мы получаем, что мотив Чжоу M имеет лефшецев тип. □

Замечание 2.2.6. Предположим, что $M=M(X)$ для равноразмерного гладкого проективного многообразия размерности d. Тогда в доказательстве предложения 2.2.5 можно вместо следствия 2.1.10 применить теорему 2.1.24, и получить, что достаточно проверять условие предложения 2.2.5 только при $i\geqslant d/2$ (а если поле k алгебраически замкнуто, т.е. все мотивы Артина единичные, то при $i\geqslant(d+1)/2$).

Замечание 2.2.7.

(i) Для произвольного коммутативного кольца R мотив Чжоу M в $\mathcal{CM}(k)_R$ имеет лефшецев тип, если M является прямым слагаемым в прямой сумме мотивов Чжоу вида $\mathbb{L}^i$, $i \in \mathbb{Z}$, или, равносильно, если $M \simeq \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} P_i \otimes_R \mathbb{L}^i$, где P_i — проективные конечно порожденные R-модули, равные нулю для всех $i \in \mathbb{Z}$, кроме конечного числа. Однако в дальнейшем нами будут рассматриваться мотивы Чжоу лефшецева типа с коэффициентами только в кольцах, для которых все проективные конечно порожденные модули свободны. Таким образом, для таких колец определение мотивов Чжоу лефшецева типа с коэффициентами в них ничем не отличается от определения 2.2.1.

(ii) Лемма 2.2.2, следствие 2.2.3 и предложение 2.2.5 тривиально обобщаются для мотивов Чжоу лефшецева типа с коэффициентами в произвольном кольце R (ср. с замечанием 2.1.17(i)).

2.2.2. K-мотивы единичного типа.

Определение 2.2.8. K-мотив в $\mathcal{KM}(k)$ *имеет единичный тип*, если он изоморфен $\mathbb{1}^{\oplus n}$ для некоторого целого числа $n \geqslant 0$. Пусть $\mathcal{KM}_{\mathbb{1}}(k) \subset \mathcal{KM}(k)$ обозначает полную подкатегорию, состоящую из K-мотивов единичного типа.

Для K-мотивов единичного типа выполняются аналоги всех фактов о мотивах Чжоу лефшецева типа из § 2.2.1. Легко видеть, что $\mathcal{KM}_{\mathbb{1}}(k)_R$ является жесткой симметрической тензорной подкатегорией в $\mathcal{KM}(k)_R$, замкнутой относительно взятия прямых слагаемых. Заметим, что функтор K_0 на категории всех K-мотивов не является тензорным. Тем не менее, из явного описания групп K_0 для K-мотивов единичного типа получается следующий простой факт.

Лемма 2.2.9. *Пусть* Fr *является симметрической тензорной категорией свободных конечно порожденных групп. Тогда функтор*

$$K_0 \,:\, \mathcal{KM}_{\mathbb{1}}(k) \longrightarrow \mathrm{Fr}\,, \qquad M \longmapsto K_0(M)\,,$$

обладает естественной симметрической тензорной структурой и является эквивалентностью категорий.

Доказательство приведенного ниже следствия 2.2.10 аналогично доказательству следствия 2.2.3 с заменой леммы 2.2.2 на лемму 2.2.9. Отметим, что факт, утверждаемый в следствии 2.2.10, был доказано Паниным [112, Lem. 7.4].

Следствие 2.2.10. *Предположим, что для неприводимого гладкого проективного многообразия X его K-мотив $KM(X)$ имеет единичный тип. Тогда спаривание (см. формулу* (1.1.5) *в § 1.1.2)*

$$\tau \ : \ K_0(X) \otimes K_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

унимодулярно.

Для любого K-мотива M и любого многообразия V можно определить группу $K_0'(M_V)$ подобно тому, как в § 2.1.1 были определены группы Чжоу $CH^i(M_V)$. При этом тонкие пересечения между группами Чжоу надо заменить на тот факт, что для любого многообразия V группа Гротендика $K_0'(V)$ абелевой категории когерентных пучков на V обладает естественной структурой модуля над кольцом Гротендика $K_0(V)$ точной категории векторных расслоений на V.

А именно, для K-мотива $M = KM(X, \pi)$ определим группу $K_0'(M_V)$ как образ проектора, являющегося композицией

$$K_0'(X \times V) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{13}^*} K_0'(X \times X \times V) \xrightarrow{-\cdot \mathrm{pr}_{12}^*(\pi)} K_0'(X \times X \times V) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{23\,*}} K_0'(X \times V)\,.$$

Первое отображение определено корректно, так как морфизм $\mathrm{pr}_{13}\colon X \times X \times V \to X \times V$ плоский, во втором отображении мы рассматриваем умножение на элемент $\mathrm{pr}_{12}^*(\pi) \in K_0(X \times X \times V)$, а третье отображение определено корректно, так как морфизм $\mathrm{pr}_{23\,*}\colon X \times X \times V \to X \times V$ собственный и мы рассматриваем K_0'-группы.

Доказательство следующего варианта следствия 2.1.10 дословно повторяет доказательство предложения 2.1.6 в простейшем случае при $r = -1$ (при этом не возникает необходимости пользоваться аналогом леммы 2.1.1 для K_0-групп). Данное утверждение тривиально обобщается на случай, когда N является инд-объектом в $\mathcal{KM}(k)$ (ср. с замечанием 2.1.13(iii)), а также для K-мотивов с коэффициентами в произвольном коммутативном кольце R.

Предложение 2.2.11. *Для любого морфизма $f\colon N \to M$ в $\mathcal{KM}(k)$ следующие условия равносильны:*

(i) *K-мотив M можно представить как прямое слагаемое в K-мотиве N так, что соответствующий морфизм из N в M равен исходному морфизму f;*

(ii) *для любого расширения полей $k \subset K$ морфизм f задает сюръективный гомоморфизм $K_0(N_K) \to K_0(M_K)$.*

Следствие 2.2.12. *Для любого K-мотива в $\mathcal{KM}(k)$ следующие условие равносильны:*

(i) *имеет место обращение в нуль* $M = 0$*;*

(ii) *для любого расширения полей* $k \subset K$ *имеем* $K_0(M_K) = 0$.

Доказательство приведенного ниже предложения 2.2.13 аналогично доказательству предложения 2.2.5 с заменой следствия 2.1.10 на предложение 2.2.11.

Предложение 2.2.13. *Произвольный* K*-мотив* M *в* $\mathcal{KM}(k)$ *имеет единичный тип тогда и только тогда, когда для любого расширения полей* $k \subset K$ *естественный гомоморфизм* $K_0(M) \to K_0(M_K)$ *сюръективен.*

Замечание 2.2.14.

(i) Для произвольного коммутативного кольца R будем говорить, что K-мотив M в $\mathcal{KM}(k)_R$ имеет единичный тип, если M является прямым слагаемым в K-мотиве вида $\mathbb{1}^{\oplus n}$, $n \geqslant 0$, или, равносильно, если $M \simeq P \otimes \mathbb{1}$, где P — проективный конечно порожденный R-модуль. В дальнейшем нами будут рассматриваться K-мотивы единичного типа с коэффициентами только в кольцах, для которых все проективные конечно порожденные модули свободны. Таким образом, для таких колец определение K-мотивов единичного типа с коэффициентами в них ничем не отличается от определения 2.2.8.

(ii) Предложение 2.2.13 тривиально обобщается для K-мотивов с коэффициентами в произвольном коммутативном кольце R.

2.2.3. **Связь между мотивами Чжоу лефшецева типа и K-мотивами единичного типа.** Из приведенной в § 1.1.4 связи между рациональными мотивами Чжоу и K-мотивами вытекает следующий факт.

Предложение 2.2.15. *Для произвольного гладкого проективного многообразия* X *его рациональный мотив Чжоу* $M(X)_{\mathbb{Q}}$ *в* $\mathcal{CM}(k)_{\mathbb{Q}}$ *имеет лефшецев тип тогда и только тогда, когда его рациональный* K*-мотив* $KM(X)_{\mathbb{Q}}$ *в* $\mathcal{KM}(k)_{\mathbb{Q}}$ *имеет единичный тип.*

Данный результат доказан в контексте некоммутативных мотивов Бернардарой–Табуадой [10, Theor. 2.1]. Также имеется вариант предложения 2.2.15, утверждающий, что если в $D^b(X)$ есть полный исключительный набор, то рациональный мотив Чжоу $M(X)_{\mathbb{Q}}$ имеет лефшецев тип. В течение некоторого времени это было хорошо известным фольклором, а затем различные доказательства были предложены Маркколли–Табуадой [97, Theor. 1.3],

Галкиным–Кацарковым–Меллитом–Шиндером [45, Prop. 2.1(1)] и Виалом [141, § 2]. Существенной частью во всех этих доказательствах является изоморфизм, задаваемый характером Черна (из чего становится ясна необходимость рациональности коэффициентов). Каждое из приведенных выше доказательств может быть легко адаптировано для того, чтобы доказать предложение 2.2.15.

Тем не менее, для полноты изложения, приведем следующее доказательство предложения 2.2.15, не претендуя на оригинальность. Легко проверить, что рациональный мотив Чжоу M имеет лефшецев тип, т.е. существует изоморфизм $M \simeq (\mathbb{L}^{i_1})^{\oplus r_1} \oplus \ldots \oplus (\mathbb{L}^{i_n})^{\oplus r_n}$ в $\mathcal{CM}(k)_{\mathbb{Q}}$, тогда и только тогда, когда существует изоморфизм $M \simeq \mathbb{1}^{\oplus r}$ в $\widetilde{\mathcal{CM}}(k)_{\mathbb{Q}}$ (см. формулу (1.1.12)). Таким образом, данное предложение следует из эквивалентности категорий (1.1.13).

Оказывается, что для мотивов с целыми коэффициентами остается верной одна из импликаций в эквивалентности из предложении 2.2.15.

Предложение 2.2.16. *Для любого гладкого проективного многообразия X из того, что его мотив Чжоу $M(X)$ имеет лефшецев тип, следует, что его K-мотив $KM(X)$ имеет единичный тип.*

Доказательство. Предположим, что мотив Чжоу $M(X)$ имеет лефшецев тип. Тогда для любого целого числа $i \in \mathbb{Z}$ и любого расширения полей $k \subset K$ естественный гомоморфизм $CH^i(X) \to CH^i(X_K)$ сюръективен. Заметим, что естественный гомоморфизм $K_0(X) \to K_0(X_K)$ сохраняет фильтрацию по коразмерности носителя $F^iK_0(X)$, $i \geqslant 0$, причем следующая диаграмма коммутативна (см. определение φ_i в предложении 1.1.6(i)):

$$\begin{array}{ccc} CH^i(X) & \xrightarrow{\varphi_i} & \mathrm{gr}^i_F K_0(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH^i(X_K) & \xrightarrow{\varphi_i} & \mathrm{gr}^i_F K_0(X_K)\,. \end{array}$$

Поэтому из сюръективности гомоморфизмов $CH^i(X) \to CH^i(X_K)$ и φ_i (см. предложение **??**(ii)) следует сюръективность гомоморфизмов $\mathrm{gr}^i_F K_0(X) \to \mathrm{gr}^i_F K_0(X_K)$. В свою очередь, из этого следует сюръективность гомоморфизма $K_0(X) \to K_0(X_K)$. Теперь все выводится из предложения 2.2.13. □

Замечание 2.2.17. Предложение 2.2.16 тривиально обобщается для мотивов с коэффициентами в произвольном кольце R (ср. с замечаниями 2.2.7 и 2.2.14).

Заметим, что обратная импликация к импликации в предложении 2.2.16 в общем случае неверна. А именно, Бернардара и Табуада [10, Prop. 2.3] построили пример квадрики Q над

не алгебраически замкнутым полем, для которой K-мотив имеет единичный тип, а мотив Чжоу не лефшецева типа. Идея заключается в том, что при условии четномерности и тривиальности дискриминанта квадрики Q ее K-мотив $KM(Q)$ и производная категория $D^b(Q)$ описываются ее инвариантом Клиффорда, являющимся элементом в $K_2^M(k)/2$. В то же время мотив Чжоу $M(Q)$ "контролируется" элементами во всех группах $K_i^M(k)/2$, $i \geqslant 0$. Более точно, в соответствии с [10, Ex. 5.4] можно рассмотреть поле $k = \mathbb{Q}(t_1, t_2, t_3)$, где t_1, t_2, t_3 — формальные переменные, и взять в качестве Q пфистерову квадрику размерности 6, заданную квадратичной формой $\langle 1, t_1\rangle \otimes \langle 1, t_2\rangle \otimes \langle 1, t_3\rangle$. Тем не менее, неизвестно, существуют ли подобные примеры над алгебраически замкнутым полем.

2.3. Геометрические фантомные категории

2.3.1. **Ключевое утверждение.** Приведенное в данном параграфе утверждение является ключевым для доказательства в дальнейшем того, что некоторые мотивы Чжоу имеют лефшецев тип. Пусть $\bar{k}$ обозначает алгебраическое замыкание поля k. Через $\mathbb{Z}/l(i)$ будем обозначать этальный пучок $\mu_l^{\otimes i}$, $i \in \mathbb{Z}$.

Предложение 2.3.1. *Пусть X — неприводимое гладкое проективное многообразие размерности d, а l — простое число, не равное характеристике поля k. Предположим, что выполняются следующие условия:*

(1) *существует расширение полей $k \subset \Omega$, для которого Ω является универсальной областью (см. комментарий перед леммой 2.1.18) и отображение* $\deg\colon CH^d(X_\Omega)_\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *является изоморфизмом;*

(2) *отображение* $\deg\colon CH^d(X) \to \mathbb{Z}$ *сюръективно, т.е. на X существует нуль-цикл степени* 1*;*

(3) *естественное отображение $CH^1(X) \to CH^1(X_{\bar{k}})$ является изоморфизмом;*

(4) *группы $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$ при $i = 2, 3, 4$ не содержат кручения.*

Тогда для любого расширения полей $k \subset K$ верно следующее:

(i) *естественное отображение $CH^1(X) \to CH^1(X_K)$ является изоморфизмом;*

(ii) *гомоморфизм $\zeta\colon K^*/l \otimes CH^1(X_K)/l \to NH^3_{\acute{e}t}\big(X_K, \mathbb{Z}/l(2)\big)$ (см. формулу* (1.2.21) *в § 1.2.4) является изоморфизмом;*

(iii) *имеется равенство $CH^2(X_K)_l = 0$;*

(iv) *если* $l = 2$, *то гомоморфизм* $\varphi_3 \colon CH^3(X_K) \to \mathrm{gr}^3_F K_0(X_K)$ *инъективен.*

Доказательство. (i) Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} CH^1(X) & \longrightarrow & CH^1(X_{\bar{k}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH^1(X_K) & \longrightarrow & CH^1(X_{\bar{K}})\,. \end{array} \tag{2.3.2}$$

В диаграмме (2.3.2) все отображения инъективны, так как здесь рассматриваются группы Пикара проективных многообразий. По условию (3) верхнее горизонтальное отображение является изоморфизмом. По следствию 2.1.21(i) имеется изоморфизм $CH^1(X_F) \simeq NS(X_F)$ для любого расширения полей $k \subset F$. Поэтому правое вертикальное отображение в диаграмме (2.3.2) является изоморфизмом, так как группа Нерона–Севери не меняется при расширении алгебраически замкнутых полей. Мы получаем, что два оставшихся отображения в диаграмме (2.3.2) также являются изоморфизмами.

Покажем, что для произвольного расширения полей $k \subset K$ все условия предложения 2.3.1 продолжают выполняться после замены k на K, а X на X_K. Действительно, это очевидно для условий (1) и (2). Для условия (3) это следует из того, что, как было показано выше, нижнее горизонтальное отображение в диаграмме (2.3.2) является изоморфизмом. Для условия (4) это следует из того, что этальные когомологии не меняются при расширении алгебраически замкнутых полей. Поэтому достаточно доказать пункты (ii), (iii) и (iv) для случая $k = K$.

(ii) Из условия (1) и следствия 2.1.21(iii) вытекает, что $H^1_{\acute{e}t}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l) = 0$. Применяя длинную точную последовательность когомологий к короткой точной последовательности коэффициентов $0 \to \mathbb{Z}_l \to \mathbb{Z}_l \to \mathbb{Z}/l \to 0$, из условия (4) мы получаем равенства

$$H^1_{\acute{e}t}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/l) = H^3_{\acute{e}t}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/l) = 0\,, \qquad H^2_{\acute{e}t}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)/l = H^2_{\acute{e}t}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/l)\,.$$

Учитывая последнее равенство, условие (3), а также применяя следствие 2.1.21(iii) к многообразию $X_{\bar{k}}$, мы получаем, что отображение класса цикла задает изоморфизм

$$CH^1(X)/l \xrightarrow{\sim} H^2_{\acute{e}t}\big(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/l(1)\big)\,.$$

Напомним, что этальные когомологии с коэффициентами l-кручения не меняются при расширении сепарабельно замкнутых полей характеристики, не равной l, см., например, книгу Милна [99, Cor. VI.4.3]. В частности, имеются канонические изоморфизмы $H^i_{\acute{e}t}\big(X_{k^{sep}}, \mathbb{Z}/l(j)\big) \simeq H^i_{\acute{e}t}\big(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/l(j)\big)$. Рассмотрим спектральную последовательность Хохшильда–Серра

$$E_2^{ij} = H^i\big(k, H^j_{\acute{e}t}\big(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/l(2)\big)\big) \Rightarrow H^{i+j}_{\acute{e}t}\big(X, \mathbb{Z}/l(2)\big)\,,$$

где для краткости $H^i(k,-)$ обозначает когомологии Галуа $H^i(G_k,-)$ абсолютной группы Галуа G_k поля k. Поскольку G_k действует на $H^2_{\acute{e}t}\big(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}/l(1)\big)\simeq CH^1(X)/l$ тривиально, имеются изоморфизмы

$$H^1\big(k,H^2_{\acute{e}t}\big(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}/l(2)\big)\big)\simeq H^1\big(k,\mathbb{Z}/l(1)\otimes H^2_{\acute{e}t}\big(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}/l(1)\big)\big)\simeq$$

$$\simeq H^1\big(k,\mathbb{Z}/l(1)\big)\otimes CH^1(X)/l\simeq k^*/l\otimes CH^1(X)/l\,.$$

Следовательно, член E_3 спектральной последовательности Хохшильда–Серра выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 0\\
CH^1(X)/l & k^*/l\otimes CH^1(X)/l & * & *\\
0 & 0 & 0 & 0\\
\mathbb{Z}/l & k^*/l & H^2\big(k,\mathbb{Z}/l(2)\big) & H^3\big(k,\mathbb{Z}/l(2)\big)
\end{array}$$

(стрелка d_3 идёт из $CH^1(X)/l$ в $H^3\big(k,\mathbb{Z}/l(2)\big)$)

Заметим, что композиция

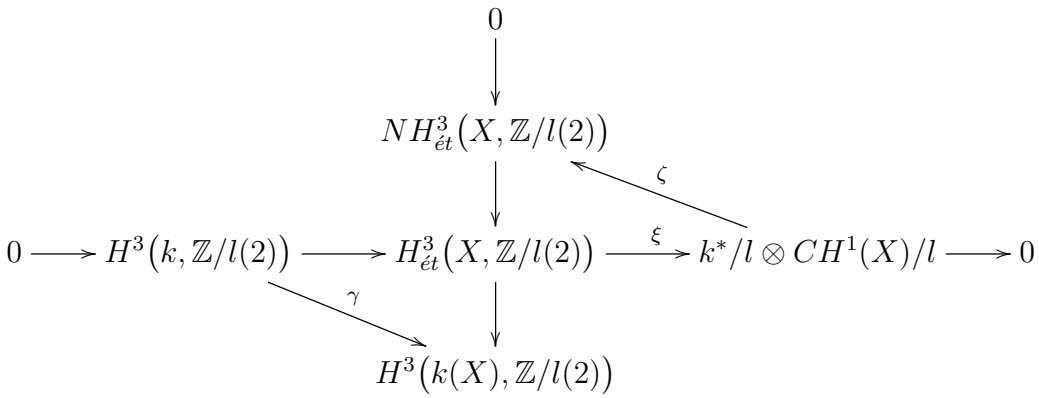
$$H^2_{\acute{e}t}\big(X,\mathbb{Z}/l(2)\big)\longrightarrow H^0\big(k,H^2\big(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}/l(2)\big)\big)\xrightarrow{d_3}H^3\big(k,\mathbb{Z}/l(2)\big)$$

обращается в нуль. Поскольку изоморфизм $CH^1(X)/l\xrightarrow{\sim}H^0\big(k,H^2\big(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}/l(2)\big)\big)$ пропускается через отображение класса цикла $CH^1(X)/l\to H^2_{\acute{e}t}\big(X,\mathbb{Z}/l(2)\big)$ над k, мы получаем, что дифференциал $d_3\colon CH^1(X)/l\to H^3\big(k,\mathbb{Z}/l(2)\big)$ обращается в нуль. Таким образом, мы видим, что из спектральной последовательности Хохшильда–Серра возникает точная последовательность

$$0\longrightarrow H^3\big(k,\mathbb{Z}/l(2)\big)\longrightarrow H^3_{\acute{e}t}\big(X,\mathbb{Z}/l(2)\big)\xrightarrow{\xi}k^*/l\otimes CH^1(X)/l\,.$$

Из мультипликативности спектральной последовательности Хохшильда–Серра следует, что композиция $\xi\circ\zeta$ равна (с точностью до знака) тождественному отображению и, в частности отображение ξ сюръективно.

Мы получаем коммутативную (с точностью до знака) диаграмму с точными столбцом и строкой



Таким образом, для того, чтобы доказать, что ζ является изоморфизмом, остается показать, что отображение γ инъективно. Напомним, что группа неразветвленных когомологий определяется по формуле

$$H^3_{nr}\big(X,\mathbb{Z}/l(2)\big) := \bigcap_{D\subset X} \operatorname{Ker}\left(H^3\big(k(X),\mathbb{Z}/l(2)\big) \to H^2\big(k(D),\mathbb{Z}/l(1)\big)\right),$$

где пересечение рассматривается по всем простым дивизорам $D \subset X$, а отображения $H^3\big(k(X),\mathbb{Z}/l(2)\big) \to H^2\big(k(D),\mathbb{Z}/l(1)\big)$ являются вычетами, см., например, обзор Кольо-Телена [29, § 4.1]. Из точной последовательности локализации для этальных когомологий следует, что γ разлагается в композицию

$$H^3\big(k,\mathbb{Z}/l(2)\big) \xrightarrow{\tilde\gamma} H^3_{nr}\big(k(X),\mathbb{Z}/l(2)\big) \hookrightarrow H^3\big(k(X),\mathbb{Z}/l(2)\big).$$

По условию (2) на X существует нуль-цикл α степени 1. Так как неразветвленные когомологии контравариантны относительно многообразий, см. [29, § 2.1], то нуль-цикл α задает отображение

$$\alpha^* \ : \ H^3_{nr}\big(X,\mathbb{Z}/l(2)\big) \to H^3_{nr}\big(\operatorname{Spec}(k),\mathbb{Z}/l(2)\big) = H^3\big(k,\mathbb{Z}/l(2)\big).$$

Композиция $\alpha^*\circ\tilde\gamma$ равна тождественному отображению, и поэтому отображения $\tilde\gamma$ и γ инъективны. Это доказывает пункт (ii).

(iii) По лемме 1.2.22 отображение ζ разлагается в композицию

$$k^*/l\otimes CH^1(X)/l \xrightarrow{m} H^1(X,\mathcal{K}_2)/l \xrightarrow{\nu} NH^3_{ét}\big(X,\mathbb{Z}/l(2)\big),$$

где m задается произведением в K-когомологиях, а отображение ν задано в формуле (1.2.15) в § 1.2.4. По пункту (ii) отображение ζ является изоморфизмом. Из теоремы Меркурьева–Суслина, точнее из инъективности отображения ν в точной последовательности (1.2.15), следует, что m и ν являются изоморфизмами. Вновь воспользовавшись точной последовательностью (1.2.15), мы получаем, что $CH^2(X)_l = 0$.

(iv) Так как отображение m является изоморфизмом, а спектральная последовательность Брауна–Герстена мультипликативна, то дифференциал $d_2\colon H^1(X,\mathcal{K}_2)/2 \to CH^3(X)$ обращается в нуль. Таким образом, все следует из точной последовательности (1.2.14). $\square$

2.3.2. **Поверхности с мотивом Чжоу лефшецева типа.** В течение данного параграфа S является неприводимой гладкой проективной поверхностью над k. Для ненулевого целого числа n пусть $\mathbb{Z}[1/n]$ обозначает локализацию кольца $\mathbb{Z}$ по всем степеням числа n. При расссмотрении расширения скаляров на кольцо $\mathbb{Z}[1/n]$ для простоты обозначений мы будем использовать индекс $1/n$ вместо $\mathbb{Z}[1/n]$. В частности, мы будем использовать обозначения $\mathcal{CM}(k)_{1/n}$, $CH^i(X)_{1/n}$ и $M(X)_{1/n}$.

Предложение 2.3.3. *Пусть n — натуральное число, делящееся на характеристику поля k (в случае, когда характеристика поля k равна нулю, данное условие пусто). Тогда мотив Чжоу $M(S)_{1/n}$ в $\mathcal{CM}(k)_{1/n}$ имеет лефшецев типа тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(i) *существует расширение полей $k \subset \Omega$, для которого Ω является универсальной областью и отображение* $\deg\colon CH^2(S_\Omega)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ *является изоморфизмом;*

(ii) *отображение* $\deg\colon CH^d(S) \to \mathbb{Z}$ *сюръективно, т.е. на S существует нуль-цикл степени* 1*;*

(iii) *естественное отображение $CH^1(S) \to CH^1(S_{\bar{k}})$ является изоморфизмом;*

(iv) *имеется равенство $n \cdot CH^1(S)_{\mathrm{tors}} = 0$.*

Доказательство. Очевидно, что условия (i)-(iv) выполнены, если мотив Чжоу $M(S)_{1/n}$ имеет лефшецев тип.

Наоборот, предположим выполнение условий (i)-(iv). Мы покажем, что для $i = 0, 1, 2$ и для любого расширения полей $k \subset K$ естественное отображение $CH^i(S)_{1/n} \to CH^i(S_K)_{1/n}$ сюръективно (и даже является изоморфизмом). При $i = 0$ это очевидно следует из того, что поверхность S абсолютно неприводима, так как $CH^2(S_\Omega)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}$. При $i = 1$ это следует из предложения 2.3.1(i). Действительно, доказательство этого пункта использует лишь условия (1) и (3), которые очевидно выполнены для S.

Для $i = 2$ применим предложение 2.3.1(iii). Условие (3) в предложении 2.3.1 также очевидно выполнено. Проверим, что выполнено условие (4) для простого числа l, не делящего n (в частности, l не равно характеристике поля k). По двойственности Пуанкаре для этальных когомологий группа $H^4_{\acute{e}t}(S_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$ не содержит кручения, а группа $H^3_{\acute{e}t}(S_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)_{\mathrm{tors}}$ двойственна

по Понтрягину группе $H^2_{\acute{e}t}\big(S_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(2)\big)_{\mathrm{tors}}$. Кроме того, группы $H^2_{\acute{e}t}\big(S_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(2)\big)_{\mathrm{tors}}$ и $H^2_{\acute{e}t}\big(S_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l\big)_{\mathrm{tors}}$ неканонически изоморфны группе $H^2_{\acute{e}t}\big(S_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(1)\big)_{\mathrm{tors}}$. При этом по следствию 2.1.21(iii) имеется изоморфизм $CH^1(S)\otimes\mathbb{Z}_l\simeq H^2_{\acute{e}t}\big(S_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(1)\big)$. Значит, из условия (iv) следует, что группы $H^i_{\acute{e}t}\big(S_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(1)\big)$, $i=2,3$, не содержат кручения. Применяя предложение 2.3.1(iii), мы получаем, что для любого расширения полей $k\subset K$ выполняется условие $CH^2(S_K)_l=0$. Следовательно, группа $CH^2(S_K)_{1/n}$ не содержит кручения.

С другой стороны, из условия (i) и из леммы 2.1.18 следует, что имеется изоморфизм $\deg\colon CH^2(S_K)_{\mathbb{Q}}\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}$. Поэтому из условия (ii) мы получаем изоморфизм $\deg\colon CH^2(S_K)_{1/n}\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}[1/n]$. В частности, отображение $CH^2(S)_{1/n}\to CH^2(S_K)_{1/n}$ сюръективно (и даже является изоморфизмом).

По предложению 2.2.5 и замечанию 2.2.7 мы получаем, что мотив Чжоу $M(S)_{1/n}$ имеет лефшецев тип. □

Следствие 2.3.4. *Предположим, что поле k является универсальной областью характеристики нуль (например, $k=\mathbb{C}$). Тогда мотив Чжоу $M(S)_{1/n}$ имеет лефшецев тип тогда и только тогда, когда выполняются два условия:*

(i) *отображение степени* $\deg\colon CH^2(S)_{\mathbb{Q}}\to\mathbb{Q}$ *является изоморфизмом;*

(ii) *имеется равенство* $n\cdot\mathrm{Pic}(S)_{\mathrm{tors}}=0$.

2.3.3. **Основной результат.** Пусть X является гладким проективным многообразием и пусть $\mathcal{N}\subset D^b(X)$ является допустимой подкатегорией.

Лемма 2.3.5. *Следующие условия равносильны:*

(i) *для любого гладкого проективного многообразия X' допустимая подкатегория $\mathcal{N}\boxtimes D^b(X')\subset D^b(X\times X')$ является фантомом (см. определение 1.3.4(ii));*

(ii) *выполняется равенство* $K_0\big(\mathcal{N}\boxtimes D^b(X)\big)=0$;

(iii) *имеет место обращение в нуль $KM(\mathcal{N},X)=0$ в категории K-мотивов $\mathcal{KM}(k)$;*

Доказательство. (i)⇒(ii) Это очевидно.

(ii)⇒(iii) Напомним, что $K_0\big(\mathcal{N}\boxtimes D^b(X)\big)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{KM}(k)}\big(KM(X),KM(\mathcal{N},X)\big)$. Таким образом, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{KM}(k)}\big(KM(X),KM(\mathcal{N},X)\big)=0$. С другой стороны, $KM(\mathcal{N},X)$ является прямым слагаемым в $KM(X)$, из чего сразу же следует равенство $KM(\mathcal{N},X)=0$.

(iii)⇒(i) Предположим, что $KM(\mathcal{N},X)=0$ в категории K-мотивов. Тогда для любого гладкого проективного многообразия Y имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{KM}(k)}\big(KM(X'),KM(\mathcal{N},X)\big)\simeq K_0\big(\mathcal{N}\boxtimes D^b(X')\big)=0\,.$$

□

Определение 2.3.6. Будем говорить, что допустимая подкатегория $\mathcal{N} \subset D^b(X)$ является *универсальным фантомом*, если $\mathcal{N} \neq 0$ и выполняются равносильные условия леммы 2.3.5.

Замечание 2.3.7. Используя обобщение следствия 2.2.12 для K-мотивов с рациональными коэффициентами, а также аналог леммы 2.1.18 для групп K_0 вместо групп Чжоу, можно показать, что если k является универсальной областью, то K-мотив M в $\mathcal{KM}(k)_{\mathbb{Q}}$ равен нулю тогда и только тогда, когда $K_0(M)_{\mathbb{Q}} = 0$. Из этого следует, что любой квазифантом $\mathcal{N}$ над универсальной областью является универсальным квазифантомом в естественном смысле. В частности, равны нулю все его аддитивные инварианты с рациональными коэффициентами, например, старшие алгебраические K-группы с рациональными коэффициентами или гомологии Хохшильда в случае, когда характеристика поля k нулевая.

Предложение 2.3.8. *Пусть X и X' — гладкие проективные многообразия, для которых существуют квазифантомы $\mathcal{N} \subset D^b(X)$ и $\mathcal{N}' \subset D^b(X')$. Пусть n и n' такие ненулевые целые числа, что $n \cdot K_0(\mathcal{N}) = 0$ и $n' \cdot K_0(\mathcal{N}') = 0$, а мотивы Чжоу $M(X)_{1/n} \in \mathcal{CM}(k)_{1/n}$ и $M(X')_{1/n'} \in \mathcal{CM}(k)_{1/n'}$ имеют лефшецев тип. Предположим, что числа n и n' взаимно просты. Тогда допустимая подкатегория $\mathcal{N} \boxtimes \mathcal{N}' \subset D^b(X \times X')$ является универсальным фантомом.*

Доказательство. Так как мотив Чжоу $M(X)_{1/n}$ имеет лефшецев тип, то по предложению 2.2.16 и замечанию 2.2.17 K-мотив $KM(X)_{1/n}$ имеет единичный тип. Следовательно, K-мотив $KM(\mathcal{N}, X)_{1/n} = 0$ также имеет единичный тип, являясь прямым слагаемым в $KM(X)_{1/n}$. С другой стороны, по предположению группа $K_0\big(KM(\mathcal{N}, X)\big)_{1/n} = K_0(\mathcal{N})_{1/n}$ тривиальна, и поэтому $KM(\mathcal{N}, X)_{1/n} = 0$. Аналогично, $KM(\mathcal{N}', X)_{1/n'} = 0$.

Следовательно, K-мотив $KM(\mathcal{N} \boxtimes \mathcal{N}', X \times X') \simeq KM(\mathcal{N}, X) \otimes KM(\mathcal{N}', X')$ становится тривиальным после расширения скаляров как на $\mathbb{Z}[1/n]$, так и на $\mathbb{Z}[1/n']$. Поскольку числа n и n' взаимно просты, K-мотив $KM(\mathcal{N} \boxtimes \mathcal{N}', X \times X')$ тривиален.

Наконец, легко видеть, что $\mathcal{N} \boxtimes \mathcal{N}' \neq 0$. Действительно, по определению категории $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$ ненулевые, и любые ненулевые объекты $F \in \mathcal{N}$ и $F' \in \mathcal{N}'$ задают ненулевой объект $F \boxtimes F' \in \mathcal{N} \boxtimes \mathcal{N}'$. □

Теорема 2.3.9. *Пусть S и S' являются гладкими проективными поверхностями над $\mathbb{C}$ с $q = p_g = 0$, для которых верна гипотеза Блоха о нуль-циклах, причем группы $\mathrm{Pic}(S)_{\mathrm{tors}}$ и $\mathrm{Pic}(S')_{\mathrm{tors}}$ нетривиальны и имеют взаимно простые порядки. Предположим, что производные категории $D^b(S)$ и $D^b(S')$ обладают исключительными наборами максимальной*

длины, т.е. наборами длин $r+2$ *и* $r'+2$*, где* r *и* r' *являются рангами групп* $\mathrm{Pic}(S)$ *и* $\mathrm{Pic}(S')$*, соответственно. Пусть допустимые подкатегории* $\mathcal{N} \subset D^b(S)$ *и* $\mathcal{N}' \subset D^b(S')$ *являются ортогоналами (левыми или правыми) к этим исключительным наборам. Тогда допустимая подкатегория* $\mathcal{N} \boxtimes \mathcal{N}' \subset D^b(S \times S')$ *является универсальным фантомом.*

Доказательство. Обозначим через n и n' порядки групп $K_0(\mathcal{N}) \simeq \mathrm{Pic}(S)_{\mathrm{tors}}$ и $K_0(\mathcal{N}') \simeq \mathrm{Pic}(S')_{\mathrm{tors}}$, соответственно (см. лемму 1.3.5). По предположению числа n и n' взаимно просты. По следствию 2.3.4 мотивы Чжоу $M(S)_{1/n}$ и $M(S')_{1/n'}$ лефшецева типа. Таким образом по предложению 2.3.8 допустимая подкатегория $\mathcal{N} \boxtimes \mathcal{N}' \subset D^b(X \times X')$ является универсальным фантомом. □

Применяя теорему 2.3.9 к ранее известным примерам квазифантомов на поверхностях (см. § 1.3.3), мы получаем примеры геометрических универсальных фантомов.

Следствие 2.3.10. *Пусть* S *является классической поверхностью Годо над* $\mathbb{C}$*, а* S' *является поверхностью Бюрниа над* $\mathbb{C}$ *с рангом группы Пикара равным* 4*. Пусть* $\mathcal{N} \subset D^b(S)$ *и* $\mathcal{N}' \subset D^b(S')$ *— квазифантомы из теорем 1.3.6 и 1.3.7, соответственно. Тогда категория* $\mathcal{N} \boxtimes \mathcal{N}' \subset D^b(S \times S')$ *является геометрическим универсальным фантомом.*

По теореме 1.3.8 вместо классической поверхности Годо в следствии 2.3.10 можно также взять поверхность Бовиля, либо другие поверхности вида $(C \times D)/G$, используя результаты из статей, перечисленных в § 1.3.3.

2.4. Мотивы Чжоу трехмерных многообразий с единичным K-мотивом

2.4.1. **Вспомогательные факты о спариваниях на фильтрованных группах.** Пусть даны абелева группа A со структурой коммутативного кольца, линейное отображение

$$\chi \,:\, A \longrightarrow \mathbb{Z}\,,$$

и убывающая фильтрация длины d

$$A = F^0A \supset F^1A \supset \ldots \supset F^dA \supset F^{d+1}A = 0\,,$$

согласованная с произведением на A в естественном смысле: $F^iA \cdot F^jA \subset F^{i+j}A$ для всех $i, j \geqslant 0$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия: группа A свободна и конечно порождена, симметрическое спаривание

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \,:\, A \otimes A \longrightarrow \mathbb{Z}\,, \qquad x \otimes y \longmapsto \chi(x \cdot y)\,,$$

унимодулярно, и для каждого $i \geqslant 0$ имеется равенство между рангами присоединенных факторов

$$\operatorname{rk}(\operatorname{gr}_F^i A) = \operatorname{rk}(\operatorname{gr}_F^{d-i} A)\,.$$

Мы будем сохранять данные предположения о кольце A, отображении χ и фильтрации $F^\bullet A$ в течение всего этого параграфа.

В частности, $\langle F^i A, F^j A\rangle = 0$ для всех $i, j \geqslant 0$ с $i + j > d$, и возникает спаривание

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_i \;:\; \operatorname{gr}_F^i A \otimes \operatorname{gr}_F^{d-i} A \longrightarrow \mathbb{Z}\,.$$

Лемма 2.4.1. *Предположим, что фильтрация $F^\bullet A$ расщепляется, т.е. что для каждого i, $0 \leqslant i \leqslant d$, фактор $A/F^i A$ не содержит кручения. Тогда для каждого i, $0 \leqslant i \leqslant d$, возникающее спаривание между свободными конечно порожденными абелевыми группами*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_i \;:\; \operatorname{gr}_F^i A \otimes \operatorname{gr}_F^{d-i} A \longrightarrow \mathbb{Z}$$

унимодулярно.

Доказательство. Будем использовать индукцию по d. В зависимости от четности числа d базой индукции является либо случай $A = 0$ для нечетного d, либо случай $F^1 A = 0$ для четного d. В обоих случаях, соответствующее утверждение очевидно.

Осуществим переход индукции. Поскольку спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle$ унимодулярно, оно индуцирует изоморфизм $A \xrightarrow{\sim} A^\vee$. Так как фильтрация расщепляется, то гомоморфизм

$$\phi \;:\; A^\vee \longrightarrow (F^d A)^\vee = (\operatorname{gr}_F^d A)^\vee\,,$$

двойственный к вложению $F^d A \to A$, сюръективен. Из обращения в нуль $\langle F^1 A, F^d A\rangle = 0$ следует, что ϕ пропускается через фактор

$$A \longrightarrow A/F^1 A = \operatorname{gr}_F^0 A\,,$$

что задает сюръективное отображение $\psi\colon \operatorname{gr}_F^0 A \twoheadrightarrow (\operatorname{gr}_F^d A)^\vee$. Поскольку $\operatorname{gr}_F^0 A$ и $\operatorname{gr}_F^d A$ являются свободными конечно порожденными абелевыми группами одинакового ранга, мы видим, что ψ является изоморфизмом. С другой стороны, легко проверить, что отображение ψ индуцировано спариванием $\langle\cdot,\cdot\rangle_0\colon \operatorname{gr}_F^0 A \otimes \operatorname{gr}_F^d A \to \mathbb{Z}$, откуда получается унимодулярность данного спаривания. Также из этого получается равенство $(F^d A)^\perp = F^1 A$. Используя это и расщепляемость фильтрации, мы видим, что изоморфизм $A \xrightarrow{\sim} A^\vee$ определяет изоморфизмы

$$F^1 A \xrightarrow{\sim} (A/F^d A)^\vee\,, \qquad F^1 A/F^d A \xrightarrow{\sim} (F^1 A/F^d A)^\vee\,.$$

Таким образом, индуцированное спаривание $F^1A/F^dA \otimes F^1A/F^dA \to \mathbb{Z}$ унимодулярно, и мы завершаем доказательство перехода индукции, заменяя A на F^1A/F^dA и уменьшая d на 2. $\square$

Замечание 2.4.2. Более непосредственное но менее инвариантное доказательство леммы 2.4.1 заключается в том, чтобы выбрать расщепление фильтрации и рассмотреть базис в A, выбрав базис в каждом присоединенном факторе. Относительно такого базиса в A матрица Грама G спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$ имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * & G_0 \\ * & & & G_1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ * & G_{d-1} & & & 0 \\ G_d & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где G_i является матрицей спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ для каждого i, $0 \leqslant i \leqslant d$. Из равенства между рангами следует, что каждая матрица G_i квадратная. Следовательно, определитель $\det(G)$ равен с точностью до знака произведению определителей $\det(G_0) \cdot \ldots \cdot \det(G_d)$, что доказывает лемму.

Лемма 2.4.3. *Предположим, что выполняется условие* $\mathrm{rk}(\mathrm{gr}_F^0 A) = 1$ *(и, значит, также же* $\mathrm{rk}(\mathrm{gr}_F^d A) = \mathrm{rk}(F^d A) = 1$*), и что для некоторого* i_0, $0 \leqslant i_0 \leqslant d$, *факторгруппы* $A/F^{i_0}A$ *и* $A/F^{d-i_0}A$ *не содержат кручения. Тогда отображение* $\chi\colon F^dA \to \mathbb{Z}$ *является изоморфизмом, а факторгруппа* A/F^dA *не содержит кручения.*

Доказательство. Изменим фильтрацию $F^\bullet A$ следующим образом: для каждого i, $0 \leqslant i \leqslant d$, определим подгруппу $\widetilde{F}^i A \subset A$ как насыщение подгруппы F^iA в A, т.е. положим $\widetilde{F}^i A$ равной прообразу подгруппы кручения относительно отображения факторизации $A \to A/F^iA$. Ясно, что фильтрация $\widetilde{F}^\bullet A$ мультипликативна, и что для каждого $i \geqslant 0$ имеются равенства

$$\mathrm{rk}(\mathrm{gr}^i_{\widetilde{F}} A) = \mathrm{rk}(\mathrm{gr}^i_F A) = \mathrm{rk}(\mathrm{gr}^{d-i}_F A) = \mathrm{rk}(\mathrm{gr}^{d-i}_{\widetilde{F}} A)\,.$$

Также, по построению фильтрация $\widetilde{F}^\bullet A$ расщепляется. Таким образом по лемме 2.4.1 для каждого $i \geqslant 0$ спаривание $\widetilde{\langle \cdot, \cdot \rangle}_i\colon \mathrm{gr}^i_{\widetilde{F}} A \otimes \mathrm{gr}^{d-i}_{\widetilde{F}} A \to \mathbb{Z}$ унимодулярно. В частности, данное отображение сюръективно.

Поскольку факторы $A/F^{i_0}A$ и $A/F^{d-i_0}A$ не содержат кручения, выполняются равенства $F^{i_0}A = \widetilde{F}^{i_0}A$ и $F^{d-i_0}A = \widetilde{F}^{d-i_0}A$. Поэтому естественные отображения

$$F^{i_0}A \longrightarrow \mathrm{gr}^{i_0}_{\widetilde{F}} A\,, \qquad F^{d-i_0}A \longrightarrow \mathrm{gr}^{d-i_0}_{\widetilde{F}} A$$

сюръективны. Композиция сюръективных отображений

$$F^{i_0}A \otimes F^{d-i_0}A \longrightarrow \mathrm{gr}_{\widetilde{F}}^{i_0} A \otimes \mathrm{gr}_{\widetilde{F}}^{d-i_0} A \xrightarrow{\widetilde{\langle\cdot,\cdot\rangle}_{i_0}} \mathbb{Z}$$

совпадает с композицией

$$F^{i_0}A \otimes F^{d-i_0}A \longrightarrow F^d A \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}\,.$$

Из этого следует сюръективность отображения $\chi\colon F^dA \to \mathbb{Z}$. Так как ранг группы F^dA равен 1 и F^dA не содержит кручения, то данное отображение является изоморфизмом. Из этого непосредственно следует, что фактор $A/F^dA \simeq \mathrm{Ker}(\chi)$ не содержит кручения. □

Следствие 2.4.4. *Предположим, что* $\mathrm{gr}_F^0 A = A/F^1A \simeq \mathbb{Z}$, *что присоединенный фактор* $\mathrm{gr}_F^1 A$ *не содержит кручения, и что* $d = 3$. *Тогда отображение* $\chi\colon F^3A \to \mathbb{Z}$ *является изоморфизмом, а присоединенный фактор* $\mathrm{gr}_F^2 A$ *не содержит кручения.*

Доказательство. Фактор A/F^2A не содержит кручения, являясь расширением группы $\mathrm{gr}_F^0 A \simeq \mathbb{Z}$ при помощи группы $\mathrm{gr}_F^1 A$, не содержащей кручения. Следовательно по лемме 2.4.3 с $i_0 = 1$, $d - i_0 = 2$ мы видим, что $\chi\colon F^3A \to \mathbb{Z}$ является изоморфизмом и что фактор A/F^3A не содержит кручения. □

Замечание 2.4.5. Предположим, что $\mathrm{gr}_F^0 A = A/F^1A \simeq \mathbb{Z}$ и $d = 2$. Применяя подобное рассуждение, как в доказательстве следствия 2.4.4, можно показать, что $\chi\colon F^2A \to \mathbb{Z}$ является изоморфизмом, а присоединенный фактор $\mathrm{gr}_F^1 A$ не содержит кручения.

2.4.2. **Основной результат.** Пусть l является простым числом, не равным характеристике поля k. Пусть R обозначает либо $\mathbb{Z}$, когда $k = \mathbb{C}$, либо $\mathbb{Z}_l$, когда k является произвольным сепарабельно замкнутым полем. Как и в § 1.2.5, пусть $H^i(X)$, $i \geqslant 0$, обозначает либо когомологии Бетти $H^i\big(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}\big)$, когда $k = \mathbb{C}$, либо этальные когомологии $H^i_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_l)$, когда k является произвольным сепарабельно замкнутым полем. Соответственно, пусть $KT_i(X)$, $i \geqslant 0$, обозначает либо топологическую K-группу $K_i^{top}\big(X(\mathbb{C})\big)$, либо этальную K-группу $\hat{K}_i^{\acute{e}t}(X)$, связанную с простым числом l.

Лемма 2.4.6. *Предположим, что поле* k *сепарабельно замкнуто. Пусть* X *является гладким проективным многообразием размерности* 3 *над* k, *для которого* K*-мотив* $KM(X)$ *имеет единичный тип. Тогда выполняется следующее:*

(i) *естественное отображение* $K_0(X)_R \to KT_0(X)$ *является изоморфизмом и выполняется равенство* $KT_1(X) = 0$.

(ii) *для нечетного i имеем $H^i(X) = 0$, а для четного i группа $H^i(X)$ не содержит кручения;*

Доказательство. (i) Пусть r является таким натуральным числом, что $KM(X) \simeq \mathbb{1}^{\oplus r}$. Поскольку группы KT_0 и KT_1 корректно определены для K-мотивов, имеются изоморфизмы

$$KT_i(X) \simeq KT_i(*)^{\oplus r}\,, \qquad i = 0, 1\,,$$

где $* = \mathrm{Spec}(k)$ обозначает точку. Далее, $KT_0(*) = R$ и $KT_1(*) = 0$ (это легко видеть для топологических K-групп, в то время, как для этальных K-групп это следует, например, из спектральной последовательности Атьи–Хирцебруха).

(ii) По пункту (i) группа $KT_1(X)$ равна нулю. Следовательно по лемме 1.2.23 мы видим, что $H^i(X) = 0$ для нечетного i. По двойственности Пуанкаре подгруппа кручения в $H^i(X)$ двойственна по Понтрягину подгруппе кручения в $H^{7-i}(X)$ для любого $i \geqslant 0$. Таким образом, группа $H^i(X)$ не содержит кручения для четного i. □

Теорема 2.4.7. *Пусть X является гладким проективным многообразием размерности d над k. Предположим, что K-мотив $KM(X)$ имеет единичный тип, и что выполняется одно из следующих условий:*

(i) *имеется неравенство $d \leqslant 2$;*

(ii) *имеется равенство $d = 3$ и характеристика поля k не равна 2.*

Тогда мотив Чжоу $M(X)$ имеет лефшецев тип.

Напомним (см.§ 1.3.2), что если в $D^b(X)$ есть полный исключительный набор, то K-мотив $KM(X)$ имеет единичный тип. Поэтому из теоремы 2.4.7 выводится следующий результат.

Следствие 2.4.8. *Пусть X является гладким проективным многообразием размерности d над k. Предположим, что в $D^b(X)$ существует полный исключительный набор и что выполняется одно из следующих условий:*

(i) *имеется неравенство $d \leqslant 2$;*

(ii) *имеется равенство $d = 3$ и характеристика поля k не равна 2.*

Тогда мотив Чжоу $M(X)$ имеет лефшецев тип.

Доказательство теоремы 2.4.7. Шаг 1. Применим результаты из § 2.4.1 к кольцу $A = K_0(X)$, к отображению χ, являющемуся эйлеровой характеристикой, и к фильтрации

$F^\bullet A = F^\bullet K_0(X)$ по коразмерности носителя. В частности, спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из § 2.4.1 совпадает со спариванием τ.

Следствие 2.2.10 утверждает, спаривание τ невырождено. По предложению 2.2.15 рациональный мотив Чжоу $M(X)_{\mathbb{Q}}$ имеет лефшецев тип. Значит, по следствию 2.2.3 для любого i, $0 \leqslant i \leqslant d$, спаривание $CH^i(X)_{\mathbb{Q}} \otimes CH^{d-i}_{\mathbb{Q}}(X) \to \mathbb{Q}$ унимодулярно. В частности, имеется равенство $\operatorname{rk}\big(CH^i(X)\big) = \operatorname{rk}\big(CH^{d-i}(X)\big)$. С другой стороны, по предложению 1.1.6(ii) имеются равенства $\operatorname{rk}\big(CH^i(X)\big) = \operatorname{rk}\big(\operatorname{gr}^i_F K_0(X)\big)$. Таким образом, для каждого $i \geqslant 0$ выполняются равенства

$$\operatorname{rk}\big(\operatorname{gr}^i_F K_0(X)\big) = \operatorname{rk}\big(\operatorname{gr}^{d-i}_F K_0(X)\big)\,.$$

Мы получаем, что для данных A, χ, $F^\bullet A$ выполнены условия из § 2.4.1.

Присоединенный фактор $\operatorname{gr}^1_F K_0(X) \simeq CH^1(X)$ не содержит кручения по предложению 1.1.8. Кроме того, в нашем случае $d \leqslant 3$. Поэтому из следствия 2.4.4 и замечания 2.4.5 мы получаем, что отображение $\chi\colon F^d K_0(X) \to \mathbb{Z}$ является изоморфизмом, а присоединенный фактор $\operatorname{gr}^{d-1}_F K_0(X)$ не содержит кручения. Таким образом, все присоединенные факторы $\operatorname{gr}^i_F K_0(X)$, $0 \leqslant i \leqslant d$, не содержат кручения.

Шаг 2. Мы хотим применить предложение 2.2.5, чтобы показать, что мотив Чжоу $M(X)$ имеет лефшецев тип. Покажем, что для любого расширения полей $k \subset K$ и для $i = 0, 1, 2$ естественные гомоморфизмы

$$CH^i(X) \longrightarrow CH^i(X_K)\,,$$

а также естественный гомоморфизм

$$F^3 K_0(X) \longrightarrow F^3 K_0(X_K)$$

являются изоморфизмами. Используя то, что рациональный мотив Чжоу $M(X)_{\mathbb{Q}}$ имеет лефшецев тип, и то, что отображения $(\varphi_i)_{\mathbb{Q}}$, $i \geqslant 0$, являются изоморфизмами по следствию 1.1.7(ii), а также коммутируют с расширением скаляров, мы видим, что естественный морфизм фильтрованных групп $\eta\colon F^\bullet K_0(X) \to F^\bullet K_0(X_K)$ становится изоморфизмом после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$. Кроме того, гомоморфизм $K_0(X) \to K_0(X_K)$ является изоморфизмом, потому что K-мотив $KM(X)$ имеет единичный тип. Как было установлено в шаге 1, все присоединенные факторы $\operatorname{gr}^i_F K_0(X)$ не содержат кручения. Объединяя все это вместе, мы получаем, что морфизм фильтрованных групп η является изоморфизмом, т.е. строго сохраняет фильтрацию. В частности, η индуцирует изоморфизмы на всех присоединенных факторах.

Таким образом, если $d \leqslant 2$, то теорема уже доказана по предложению 2.2.5. В дальнейшем мы будем предполагать, что $d = 3$. По предложению 2.2.5 нам достаточно показать,

что для любого расширения полей $k \subset K$ гомоморфизм $\varphi_3 \colon CH^3(X_K) \to F^3K_0(X_K)$ является изоморфизмом. Так как гомоморфизм φ_3 сюръективен (см. предложение 1.1.6), то надо доказать, что φ_3 инъективен.

Шаг 3. Применим предложение 2.3.1. Так как рациональный мотив Чжоу $M(X)_{\mathbb{Q}}$ лефшецева типа, то для любого расширения полей $k \subset K$ имеется изоморфизм $\deg \colon CH^3(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$, т.е. выполняется условие (1) в предложении 2.3.1. Так как композиция $CH^3(X) \xrightarrow{\varphi_d} F^3K_0(X) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}$ совпадает с отображением степени, и как показано в шаге 1, отображение $\chi \colon F^3K_0(X) \to \mathbb{Z}$ является изоморфизмом, то X обладает нуль-циклом степени 1 над k, т.е. выполняется условие (2) в предложении 2.3.1. Условие (3) в предложении 2.3.1 следует из доказанного в шаге 2. Остается воспользоваться леммой 2.4.6, чтобы проверить условие (4) в предложении 2.3.1. Итак, по предложению 2.3.1(iv), мы получаем, что гомоморфизм $\varphi_3 \colon CH^3(X_K) \to \operatorname{gr}^3_F K_0(X_K) = F^3K_0(X_K)$ инъективен для любого расширения полей $k \subset K$. Это завершает доказательство. $\square$

Глава 3. Полярный комплекс для локально свободных пучков

3.1. Формулировка основного результата

3.1.1. **Полярный комплекс.** Пусть Z является неприводимым многообразием, а $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок на Z. Мы определим некоторое подмножество в $\omega_K \otimes_K \mathcal{E}_K$, где $K := k(Z)$, а $\mathcal{E}_K$ обозначает пространство рациональных сечений пучка $\mathcal{E}$. В частности, его элементы будут иметь полюса не выше первого порядка в правильном смысле.

Определение 3.1.1. Элемент $\alpha \in \omega_K \otimes_K \mathcal{E}_K$ называется *полярным*, если существует гладкое многообразие V, собственный бирациональный морфизм $f\colon V \to Z$, дивизор с простыми нормальными пересечениями $W \subset V$ и сечение

$$\alpha_V \in H^0\big(V, \omega_V(W) \otimes_{\mathcal{O}_V} f^*\mathcal{E}\big)$$

такие, что ограничение сечения α_V на общую точку многообразия V совпадает с $f^*\alpha$. Мы будем использовать обозначение $\mathrm{Pol}_Z(\mathcal{E})$ для множества всех полярных элементов в $\omega_K \otimes_K \mathcal{E}_K$.

Замечание 3.1.2. Из теоремы Хиронаки следует, что множество $\mathrm{Pol}_Z(\mathcal{E})$ является k-векторным подпространством в $\omega_K \otimes_K \mathcal{E}_K$, см. детали ниже в замечании 3.2.12 и в предложении 3.2.13(i).

Для неприводимого приведенного дивизора B на Z определено *отображение вычета*

$$\mathrm{res}_{ZB}\colon \mathrm{Pol}_Z(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Pol}_B(\mathcal{E}|_B)\,,$$

задаваемое вычетами логарифмических форм. Для того, чтобы определить данный гомоморфизм, рассмотрим сначала случай, когда многообразие Z нормально. Тогда общая точка дивизора B гладка как на B, так и на Z. Поэтому любая форма $\alpha \in \mathrm{Pol}_Z(\mathcal{E})$ имеет полюс не выше первого порядка вдоль B локально в общей точке дивизора B, т.е. после замены Z на открытое подмножество, нетривиально пересекающееся с B, можно считать, что α является формой, локально логарифмической вдоль B, со значениями в $\mathcal{E}$. В этом случае определим $\mathrm{res}_{ZB}(\alpha)$ как обычный вычет формы α на B, см. § 1.4.1. Если многообразие Z не нормально, то надо рассмотреть нормализацию $\pi\colon \widetilde{Z} \to Z$ и положить

$$\mathrm{res}_{ZB}(\alpha) = \sum_i \pi_*\big(\mathrm{res}_{\widetilde{Z}\widetilde{B}_i}(\pi^*\alpha)\big)\,,$$

где $\widetilde{B}_i$ пробегает все неприводимые компоненты прообраза дивизора B в $\widetilde{Z}$. По построению, $\mathrm{res}_{ZB}(\alpha)$ является рациональной формой на B с коэффициентами в $\mathcal{E}|_B$, но, на самом

деле, можно показать, что $\mathrm{res}_{ZB}(\alpha)$ принадлежит пространству $\mathrm{Pol}_B(\mathcal{E}|_B)$. Отметим, что согласно замечанию 3.2.12 этот факт является частным случаем приведенного ниже предложения 3.2.13(vi).

Пусть теперь X является многообразием и выберем локально свободный пучок $\mathcal{F}$ на X. Рассматривая отображения вычета для всех возможных пар неприводимых подмногообразий $B \subset Z$ в X, мы получаем гомоморфизм

$$\partial \,:\, \bigoplus_{Z\in X_{(p)}} \mathrm{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z) \;\longrightarrow\; \bigoplus_{B\in X_{(p-1)}} \mathrm{Pol}_B(\mathcal{F}|_B),$$

где $X_{(p)}$ обозначает множество всех неприводимых подмногообразий в X размерности p. Для краткости, положим (ср. с комплексом Герстена (1.2.12) в § 1.2.3)

$$\mathrm{Pol}_p(X,\mathcal{F}) := \bigoplus_{Z\in X_{(p)}} \mathrm{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z)\,.$$

Выполняется равенство $\partial^2 = 0$. Действительно, данное утверждение локально по X, так что достаточно рассмотреть случай $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. Если, вдобавок, X является гладким комплексным проективным многообразием, то группы $\mathrm{Pol}_p(X,\mathcal{O}_X)$ и отображения ∂ были введены и изучены в работе Рослого–Хесина [78], где данные группы обозначались через $\mathcal{C}_p$, см. определения 3.2, 3.7 в [78]. На самом деле, условие $k = \mathbb{C}$, а также условие гладкости и проективности многообразия X не играют здесь никакой роли. А именно, в определение 3.2 из [78] следует внести единственное изменение, заключающееся в том, что, в введенных там обозначениях, надо заменить условие проективности многообразия A на условие собственности морфизма f. С этим изменением, группа $\mathcal{C}_p$ совпадает с нашей группой $\mathrm{Pol}_p(X,\mathcal{O}_X)$ для любого X. Теорема 3.9 из [78] утверждает, что $\partial^2 = 0$. Доказательство данной теоремы остается корректным после приведенного выше изменения, и, таким образом, мы видим, что $\partial^2 = 0$ и в нашем случае тоже.

Определение 3.1.3. *Полярный комплекс* локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на многообразии X — это комплекс $\mathrm{Pol}_\bullet(X,\mathcal{F})$ с дифференциалом ∂. Для цепи $\gamma = \oplus\gamma_Z \in \mathrm{Pol}_p(X,\mathcal{F})$, где $\gamma_Z \in \mathrm{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z)$, обозначим через $\mathrm{Supp}\,\gamma$ ее *носитель*, т.е. множество неприводимых подмногообразий $Z \in X_{(p)}$, для которых $\gamma_Z \neq 0$.

Основной результат данной главы заключается в следующем утверждении.

Теорема 3.1.4. *Пусть X — гладкое неприводимое квазипроективное многообразие размерности d, а $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на X. Тогда имеется канонический изоморфизм*

$$H^{d-p}(X,\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}) \simeq H_p\big(\mathrm{Pol}_\bullet(X,\mathcal{F})\big)\,,\qquad 0\leqslant p\leqslant d\,.$$

Замечание 3.1.5. Пусть $k = \mathbb{C}$, X является гладким комплексным проективным многообразием, и $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. В этом частном случае полярный комплекс был исследован в работах [78], [80], где группы $H_p(\mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{O}_X))$ обозначались через $HP_p(X)$ и назывались *полярными гомологиями*. Приведенная выше теорема была доказана в этом случае в работе [80].

Пример 3.1.6. Опишем комплекс $\mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{F})$ в простейшем случае, когда X является гладкой кривой над k. Тогда в гомологической степени один имеем

$$\mathrm{Pol}_X(\mathcal{F}) = \varinjlim_D H^0\big(X, (\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})(D)\big)\,,$$

где прямой предел берется по всем приведенным эффективным дивизорам D на X. Другими словами, группа $\mathrm{Pol}_X(\mathcal{F})$ состоит из рациональных сечений пучка $\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$, имеющих полюса не выше первого порядка где-либо на X. В гомологической степени нуль для каждой (замкнутой) точки $x \in X$ группа $\mathrm{Pol}_x(\mathcal{F}|_x)$ равна слою $\mathcal{F}|_x$ в точке x векторного расслоения, соответствующего локально свободному пучку $\mathcal{F}$. Таким образом, полярный комплекс $\mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{F})$ принимает вид

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pol}_X(\mathcal{F}) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in X} \mathcal{F}|_x \longrightarrow 0\,.$$

Данный комплекс является прямым пределом комплексов

$$0 \longrightarrow H^0\big(X, (\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})(D)\big) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in D} \mathcal{F}|_x \longrightarrow 0$$

по всем приведенным эффективным дивизорам $i_D : D \hookrightarrow X$. Утверждение теоремы 3.1.4 следует в этом случае из длинных точных последовательностей когомологий, связанных с точными последовательностями пучков на X

$$0 \longrightarrow \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \to (\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})(D) \longrightarrow i_{D\,*}(\mathcal{F}|_D) \longrightarrow 0\,.$$

3.1.2. **Топологическая аналогия.** Утверждение теоремы 3.1.4 было названо в статье [80] полярной теоремой де Рама ввиду следующей аналогии с топологической ситуацией. Отметим, что подобная аналогия рассматривалась многими специалистами, включая Арнольда, Виттена [148], Дональдсона–Томаса [35], Френкеля–Хесина [39]. В данном виде она была сформулирована и развита в работах Рослого–Хесина [76], [77], [78], [79].

гладкое вещественное многообразие	$\longleftrightarrow$	комплескное алгебраическое многообразие
d	$\longleftrightarrow$	$\bar{\partial}$
комплекс де Рама	$\longleftrightarrow$	комплекс Дольбо
гладкие функции или сечения	$\longleftrightarrow$	гладкие функции или сечения
локально постоянные функции или сечения	$\longleftrightarrow$	голоморфные функции или сечения
плоские расслоения		голоморфные расслоения
(локально постоянные пучки)	$\longleftrightarrow$	(локально свободные пучки)
ориентация	$\longleftrightarrow$	голоморфная форма старшей степени
пучок ориентаций	$\longleftrightarrow$	канонический пучок
оператор границы	$\longleftrightarrow$	отображение вычета
гомологии Бореля–Мура с коэффициентами		полярные гомологии с коэффициентами
в локально постоянном пучке	$\longleftrightarrow$	в локально свободном пучке

Таким образом, теорема 3.1.4 может быть рассмотрена как аналог следующего факта (см., например, обзор Виро–Фукса [142, Sect. 8.8 A and D of Ch. 2]):

Предложение 3.1.7. *Пусть M — гладкое вещественное многообразие размерности d, а $\mathcal{L}$ — локально постоянный пучок на M. Обозначим через or_M пучок ориентаций на M. Тогда имеется канонический изоморфизм*

$$H^{d-p}(M, \mathrm{or}_M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}) \simeq H_p^{BM}(M, \mathcal{L}), \qquad 0 \leqslant p \leqslant d.$$

Наше доказательство теоремы 3.1.4 может рассматриваться как алгебро-геометрический аналог следующего доказательства предложения 3.1.7. Напомним, что гомологии Бореля–Мура, стоящие в правой части приведенного выше изоморфизма, могут быть определены как гомологии комплекса $C_\bullet(M, \mathcal{L})$, состоящего из локально конечных цепей с коэффициентами в $\mathcal{L}$, т.е. элемент из $C_p(M, \mathcal{L})$ является бесконечной формальной линейной комбинацией сингулярных p-цепей с коэффициентами в $\mathcal{L}$, такой что для любого компактного подмножества $K \subset M$ имеется лишь конечное число слагаемых, носитель которых пересекается с K. Рассмотрим комплекс гомологического типа, состоящий из вылях пучков на M, заданный по формуле

$$\underline{C}_\bullet(M, \mathcal{L})(U) := C_\bullet(M, \mathcal{L}) \,/\, C_\bullet(M \smallsetminus U, \mathcal{L}|_{M \smallsetminus U})$$

для любого открытого подмножества $U \subset M$. Чтобы доказать требуемое, нам надо показать, что данный комплекс пучков квазиизоморфен пучку $\mathrm{or}_M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}$, стоящему в гомологической

степени d. Естественный способ это сделать заключается в использовании трубчатой окрестности, позволяющей представить локально сингулярный цикл как границу. Аналог трубчатой окрестности в алгебраической геометрии был найден Квилленом [117]. Соответствующая конструкция иногда называется трюком Квиллена и часто используется в различных мотивных задачах. Мы также применим этот метод и в нашей ситуации, см. §3.2.4.

3.2. Доказательство основного результата

3.2.1. **Полярные пучки.** Следуя аналогии с приведенным выше доказательством предложения 3.1.7, введем следующий пучковый вариант полярного комплекса.

Определение 3.2.1. Для многообразия X, локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на X и числа $p \geqslant 0$ обозначим через $\underline{\mathrm{Pol}}_p(X, \mathcal{F})$ пучок абелевых групп на X, заданный по формуле

$$\underline{\mathrm{Pol}}_p(X, \mathcal{F})(U) := \mathrm{Pol}_p(X, \mathcal{F}) \,/\, \mathrm{Pol}_p(X \smallsetminus U,\, \mathcal{F}|_{X \smallsetminus U})\,, \tag{3.2.2}$$

где $U \subset X$ является произвольным открытым подмножеством.

Более явно, имеется канонический изоморфизм

$$\underline{\mathrm{Pol}}_p(X, \mathcal{F})(U) \simeq \bigoplus_{\substack{Z \in X_{(p)} \\ Z \cap U \neq \varnothing}} \mathrm{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z)\,. \tag{3.2.3}$$

Из этого следует, что пучки $\underline{\mathrm{Pol}}_p(X, \mathcal{F})$ вялые и образуют комплекс $\underline{\mathrm{Pol}}_\bullet(X, \mathcal{F})$ с дифференциалом, индуцированным дифференциалом на комплексе $\mathrm{Pol}_\bullet$.

Далее, определим для произвольного локально свободного пучка $\mathcal{G}$ на X подпучок абелевых групп, сечения которого на открытом подмножестве $U \subset X$ являются сечениями пучка $\mathcal{G}$ на U, имеющими полюса не выше первого порядка на дополнении $X \smallsetminus U$ в следующем смысле (ср. с определением 3.1.1).

Определение-предложение 3.2.4. Пусть $\mathcal{G}$ является локально свободным пучком на гладком неприводимом многообразии X, а $U \subset X$ — открытое подмножество. Рассмотрим гладкое многообразие $\widetilde{X}$ и собственный бирациональный морфизм $\pi\colon \widetilde{X} \to X$, для которых $\widetilde{D} := \pi^{-1}(X \smallsetminus U)$ является дивизором с простыми нормальными пеерсечениями. Тогда группа (см. формулу (1.4.10) в § 1.4.3 для определения $\pi^!$)

$$\mathcal{G}_{\mathrm{pol}}(U) = H^0\big(\widetilde{X}, \pi^! \mathcal{G}(\widetilde{D})\big)$$

не зависит от выбора многообразия $\widetilde{X}$, и это задает пучок абелевых групп на X, который мы будем называть *полярным пучком*, связанным с локально свободным пучком $\mathcal{G}$.

Доказательство. Рассмотрим пучок $\mathcal{K}$ на X, заданный по формуле

$$\mathcal{K} := \operatorname{Ker}\Big(\underline{\operatorname{Pol}}_d(X, \omega_X^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) \xrightarrow{\partial} \underline{\operatorname{Pol}}_{d-1}(X, \omega_X^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})\Big),$$

где d является размерностью многообразия X. Также рассмотрим открытое подмножество $U \subset X$ и элемент $\alpha \in \mathcal{K}(U)$. По определению 3.1.1 и по теореме Хиронаки существует гладкое многообразие $\widetilde{X}$, собственный бирациональный морфизм $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ и дивизор с простыми нормальными пересечениями $W \subset \widetilde{X}$, для которых $\widetilde{D} := \pi^{-1}(X \smallsetminus U)$ является объединением некоторых компонент дивизора W, а рациональная дифференциальная форма $\pi^*\alpha$ на $\widetilde{X}$ принадлежит пространству $H^0\big(\widetilde{X}, \pi^!\mathcal{G}(W)\big)$. Более того, так как $\partial\alpha = 0$, то имеется равенство $\operatorname{res}_{\widetilde{X}W_i}(\pi^*\alpha) = 0$ для любой неприводимой компоненты $W_i \subset W$, пересечение которой с $\pi^{-1}(U)$ непусто. Значит, $\pi^*\alpha \in H^0\big(\widetilde{X}, \pi^!\mathcal{G}(\widetilde{D})\big)$. Из этого следует, что имеется канонический изоморфизм $\mathcal{K}(U) \simeq \mathcal{G}_{\mathrm{pol}}(U)$. Поэтому определение группы $\mathcal{G}_{\mathrm{pol}}(U)$ корректно, а $\mathcal{G}_{\mathrm{pol}}$ является пучком. □

Замечание 3.2.5.

(i) Пучок $\mathcal{G}_{\mathrm{pol}}$ является подпучком абелевых групп в $\mathcal{G}$, но не является подпучком $\mathcal{O}_X$-модулей. Действительно, ясно, что умножая элементы из $\mathcal{G}_{\mathrm{pol}}(U)$ на произвольную регулярную функцию h на открытом подмножестве $U \subset X$, мы нарушим условие из определения 3.2.4, поскольку h может иметь полюса высокого порядка вдоль D.

(ii) Для произвольного открытого вложения $U \subset X$ пучок $(\mathcal{G}_{\mathrm{pol}})|_U$ является подпучком абелевых групп в пучке $(\mathcal{G}|_U)_{\mathrm{pol}}$, но, в общем случае, они не совпадают. Действительно, имеется равенство $H^0(U, (\mathcal{G}|_U)_{\mathrm{pol}}) = \mathcal{G}(U)$ в то время, как $H^0(U, (\mathcal{G}_{\mathrm{pol}})|_U)$ состоит из сечений в $\mathcal{G}(U)$, имеющих полюс не выше первого порядка на $X \smallsetminus U$ в смысле определения 3.2.4.

(iii) Функтор $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}_{\mathrm{pol}}$ точный на категории локально свободных пучков (точность слева очевидна, а точность справа следует из теоремы Серра об обращении в нуль). Аналогично, точны функторы $\mathcal{F} \mapsto \operatorname{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z)$ и $\mathcal{F} \mapsto \operatorname{Pol}_\bullet(X, \mathcal{F})$.

Теорема 3.2.6. *Пусть X — гладкое неприводимое квазипроективное многообразие размерности d, а $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на X. Тогда комплекс пучков $\underline{\operatorname{Pol}}_\bullet(X, \mathcal{F})$ на X является вялой резольвентой пучка $(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_{\mathrm{pol}}$, т.е. следующая последовательность пучков точна:*

$$0 \longrightarrow (\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_{\mathrm{pol}} \longrightarrow \underline{\operatorname{Pol}}_d(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\partial} \underline{\operatorname{Pol}}_{d-1}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} \underline{\operatorname{Pol}}_0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow 0\,.$$

Теорема 3.2.7. *Пусть X — гладкое неприводимое квазипроективное многообразие, а $\mathcal{G}$ — локально свободный пучок на X. Тогда канонический инъективный морфизм пучков $\mathcal{G}_{\mathrm{pol}} \to \mathcal{G}$ индуцирует изоморфизмы на группах когомологий*

$$H^p(X, \mathcal{G}_{\mathrm{pol}}) \xrightarrow{\sim} H^p(X, \mathcal{G}), \qquad p \geqslant 0.$$

Теорема 3.2.6 и теорема 3.2.7 будут доказаны сначала для случая, когда многообразие X проективно, в § 3.2.4 и § 3.2.5, соответственно. Сведение обеих теорем к проективному случаю будет проведено в § 3.2.6. Все вместе это докажет теорему 3.1.4.

3.2.2. **Вспомогательные утверждения.** Чтобы доказать теорему 3.2.6 и теорему 3.2.7 нам понадобятся следующие свойства полярного комплекса.

Предложение 3.2.8. *Для локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на произвольном многообразии X выполняется следующее:*

(i) *для любого собственного морфизма $f\colon Y \to X$ существует канонический морфизм комплексов*

$$f_* \ : \ \mathrm{Pol}_\bullet(Y, f^*\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{F}),$$

согласованный со следом дифференциальных форм;

(ii) *для любого собственного морфизма $f\colon Y \to X$ и открытого подмножества $U \subset Y$ факторкомплекс (см. определение 3.2.1)*

$$\mathrm{Pol}_\bullet(Y, f^*\mathcal{F})(U) = \mathrm{Pol}_\bullet(Y, f^*\mathcal{F}) \ / \ \mathrm{Pol}_\bullet(Y \smallsetminus U, f^*\mathcal{F}|_{Y \smallsetminus U})$$

зависит только от морфизма $f|_U\colon U \to X$;

(iii) *проекция $\pi\colon X \times \mathbb{P}^1 \to X$ индуцирует квазиизоморфизм комплексов*

$$\pi_* \ : \ \mathrm{Pol}_\bullet(X \times \mathbb{P}^1, \pi^*\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{F});$$

(iv) *для любого векторного расслоения E на X проекция из его проективизации $\pi\colon \mathbb{P}(E) \to X$ индуцирует квазиизоморфизм комплексов*

$$\pi_* \ : \ \mathrm{Pol}_\bullet\big(\mathbb{P}(E), \pi^*\mathcal{F}\big) \longrightarrow \mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{F});$$

(v) *для любого раздутия $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ с центром в локально полном пересечении $R \subset X$ и замкнутого подмногообразия $Z \subset X$ канонический морфизм*

$$\pi_* \ : \ \mathrm{Pol}_\bullet(\widetilde{Z}, \pi^*\mathcal{F}|_{\widetilde{Z}}) \longrightarrow \mathrm{Pol}_\bullet(Z, \mathcal{F}|_Z)$$

является квазиизоморфизмом, где $\widetilde{Z} := \pi^{-1}(Z)$.

Доказательство. Доказательства пунктов (i) и (iii) по сути повторяют доказательство теоремы 3.8 в [78] (см. также замечание 3.12 в [78]) и доказательство леммы 3.5 в [80], соответственно. Морфизм f_* из пункта (i) строится следующим образом. Пусть $W \subset Y$ — неприводимое подмногообразие размерности p и пусть $\beta \in \mathrm{Pol}_W(f^*\mathcal{F}|_W)$ — полярная форма. Тогда пара (W, β) задает элемент в $\mathrm{Pol}_p(Y, f^*\mathcal{F})$. Если морфизм $f|_W \colon W \to X$ конечен, т.е. если $\dim\big(f(W)\big) = \dim(W)$, то положим

$$f_*(W, \beta) := (Z, \alpha) \in \mathrm{Pol}_p(X, \mathcal{F})\,,$$

где $Z = f(W)$ и $\alpha := \mathrm{Tr}_{k(W)/k(Z)}(\beta)$. В противном случае положим $f_*(W, \beta) := 0$.

Для того, чтобы доказать пункт (ii), заметим сначала, что для любого неприводимого многообразия Z и собственного морфизма $g \colon Z \to X$ группа $\mathrm{Pol}_Z(g^*\mathcal{F})$ зависит только от бирационального класса морфизма g, т.е. только от ограничения $\mathrm{Spec}\,\big(k(Z)\big) \to X$ морфизма g в общую точку. Это легко вывести из леммы 1.4.9. Утверждение пункта (ii) следует теперь из изоморфизма (ср. с формулами (3.2.2), (3.2.3)):

$$\mathrm{Pol}_p(Y, f^*\mathcal{F}) \;/\; \mathrm{Pol}_p(Y \smallsetminus U,\, f^*\mathcal{F}|_{Y\smallsetminus U}) \simeq \bigoplus_{\substack{Z\in Y_{(p)}\\ Z\cap U\neq\varnothing}} \mathrm{Pol}_Z(f^*\mathcal{F}|_Z)\,.$$

Переходя теперь к пункту (iv), рассмотрим сначала случай тривиального расслоения $\pi \colon X \times \mathbb{P}^n \to X$ и проведем следующим образом индукцию по n. База индукции заключается в пункте (iii). Чтобы перейти от n к $n-1$, заметим, что многообразия $X \times \mathbb{P}^n$ и $X \times \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1$ обладают открытыми подмножествами, изоморфными $X \times \mathbb{A}^n$ (для этого мы фиксируем гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-2} \subset \mathbb{P}^{n-1}$ и точку $\infty \in \mathbb{P}^1$). Соответствующими дополнениями являются $X \times \mathbb{P}^{n-1}$ и $X \times T$, где $T := (\mathbb{P}^{n-1} \times \{\infty\}) \cup (\mathbb{P}^{n-2} \times \mathbb{P}^1)$. Применяя пункт (ii), мы получаем изоморфизм комплексов

$$\mathrm{Pol}_\bullet(X \times \mathbb{P}^n, \pi^*\,\mathcal{F}) \,/\, \mathrm{Pol}_\bullet(X \times \mathbb{P}^{n-1}, \pi^*\,\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Pol}_\bullet(X \times \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1, \rho^*\,\mathcal{F}) \,/\, \mathrm{Pol}_\bullet(X \times T, \rho^*\,\mathcal{F})\,,$$

где $\rho \colon X \times \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1 \to X$ является естественной проекцией. Благодаря этому изоморфизму и предположению индукции, достаточно доказать, что морфизм

$$\mathrm{Pol}_\bullet(X \times T, \rho^*\,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Pol}_\bullet(X \times \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1, \rho^*\,\mathcal{F})\,,$$

индуцированный вложением $X \times T \subset X \times \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1$, является квазиизоморфизмом. (Здесь мы используем, что вложение комплексов является квазиизоморфизмом тогда и только тогда, когда факторкомплекс ацикличен.) По пункту (iii) достаточно показать, что морфизм $f \colon X \times T \to X \times \mathbb{P}^{n-1}$ индуцирует квазиизоморфизм

$$f_* \;:\; \mathrm{Pol}_\bullet(X \times T, \rho^*\,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Pol}_\bullet(X \times \mathbb{P}^{n-1}, \rho^*\,\mathcal{F})\,.$$

Положим $U := X \times \mathbb{P}^{n-1} \smallsetminus X \times \mathbb{P}^{n-2}$. Так как морфизм f ограничивается до изоморфизма $f^{-1}(U) \to U$, а ограничение морфизма f на $f^{-1}(X \times \mathbb{P}^{n-2})$ является проекцией $X \times \mathbb{P}^{n-2} \times \mathbb{P}^1 \to X \times \mathbb{P}^{n-2}$, то мы получаем требуемое из пункта (ii), примененного к открытым подмножествам $U \subset X \times \mathbb{P}^{n-1}$ и $f^{-1}(U) \subset X \times T$, и из пункта (iii), примененного к проекции $X \times \mathbb{P}^{n-2} \times \mathbb{P}^1 \to X \times \mathbb{P}^{n-2}$.

Чтобы доказать пункт (iv) для произвольного морфизма $\pi\colon \mathbb{P}(E) \to X$, мы будем использовать нетерову индукцию, т.е. будем предполагать, что требуемый квазизоморфизм доказан для всех замкнутых подмножеств $S \subsetneq X$. Пусть $U \subset X$ является непустым открытым подмножеством, над которым исходное расслоение $E \to X$ тривиально. Тогда $\mathbb{P}(E|_U) \simeq U \times \mathbb{P}^n$. Положим $S = X \smallsetminus U$ и пусть $\pi_S\colon \mathbb{P}(E|_S) \to S$ является естественной проекцией. Тогда по пунктам (ii) и (iv) для тривиального расслоения имеется квазиизоморфизм

$$\mathrm{Pol}_\bullet(\mathbb{P}(E), \pi^*\mathcal{F}) \,/\, \mathrm{Pol}_\bullet\big(\mathbb{P}(E|_S), \pi_S^*(\mathcal{F}|_S)\big) \longrightarrow \mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{F}) \,/\, \mathrm{Pol}_\bullet(S, \mathcal{F}|_S)\,.$$

Таким образом, мы завершаем доказательство, применяя нетерову индукцию и 5-лемму.

Наконец, пункт (v) следует из пунктов (ii) и (iv), так как π является изоморфизмом над $Z \smallsetminus (Z \cap R)$, а ограничение морфизма $\pi\colon \widetilde{Z} \to Z$ на $Z \cap R$ является проективизацией векторного расслоения на $Z \cap R$. □

До сих пор мы рассматривали неприводимые подмногообразия в заданном многообразии X и некоторые рациональные дифференциальные формы старшей степени на них с коэффициентами в локально свободном пучке $\mathcal{F}$ на X (см. определение 3.1.3). Для доказательства теоремы 3.2.6 нам также понадобится работать с неприводимыми многообразиями, которые отображаются в X, причем не обязательно бирационально на свой образ, и с некоторыми рациональными дифференциальными формами на них, не только старшей степени. Таким образом, приведенное ниже определение 3.2.11 может рассматриваться как обобщение определения 3.1.1, задающего понятие полярных элементов в $\omega_K \otimes_K \mathcal{F}_K$, где $K = k(Z)$, $Z \subset X$, на случай, когда Z заменяется на неприводимое многообразие V вместе с морфизмом $V \to X$, а рациональные дифференциальные формы старшей степени заменяются на формы произвольной степени q в Ω^q_K, где $K = k(V)$. При этом требование того, чтобы формы имели полюса не выше первого порядка, заменяется на требование того, чтобы q-формы имели логарифмические особенности.

Определение 3.2.9. Для произвольного многообразия X *полем над* X будем называть пару (K, φ), где K — поле, а $\varphi\colon \mathrm{Spec}(K) \to X$ — морфизм схем, для которой существует неприводимое многообразие V с $k(V) \simeq K$ и морфизм многообразий $f\colon V \to X$, совпадающий с φ

в общей точке многообразия V. Будем говорить, что поле (K', φ') является *расширением* поля (K, φ) над X, если задано расширение полей $K \subset K'$, для которого следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(K') & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(K) \\ & \varphi' \searrow \quad \swarrow \varphi & \\ & X & \end{array}$$

Другими словами, поле (K, φ) над X — это класс бирациональной эквивалентности пар $(V,\ f\colon V \to X)$. Как утверждает следующая лемма, можно всегда выбрать представителя (V, f), для которого многообразие V гладкое, а морфизм f собственный.

Лемма 3.2.10. *Для любого поля (K, φ) над многообразием X существует гладкое неприводимое многообразие V с $k(V) \simeq K$ и собственный морфизм $f\colon V \to X$, совпадающий с φ в общей точке многообразия V.*

Доказательство. Ясно, что существует аффинное многообразие U с $k(U) \simeq K$ и морфизм $f_U\colon U \to X$, совпадающий с φ в общей точке многообразия U. Пусть $\Gamma_{f_U} \subset U \times X$ является графиком морфизма f_U. Для произвольного вложения $U \subset \mathbb{P}^n$ и соответствующего вложения $U \times X \subset \mathbb{P}^n \times X$, рассмотрим замыкание $\bar{\Gamma}_{f_U}$ графика Γ_{f_U} в $\mathbb{P}^n \times X$. Заметим, что $\bar{\Gamma}_{f_U}$ содержит $\Gamma_{f_U} \simeq U$ в качестве плотного открытого подмножества, а проекция на X задает собственный (даже проективный) морфизм $\bar{\Gamma}_{f_U} \to X$. Искомое многообразие V можно получить, применяя разрешение особенностей к многообразию $\bar{\Gamma}_{f_U}$. □

Определение 3.2.11. Пусть X — произвольное многообразие, $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на X, а (K, φ) — поле над X. Определим $M_q(\mathcal{F})(K, \varphi)$ как множество, состоящее из всех элементов $\alpha \in \Omega^q_K \otimes_K \varphi^*\mathcal{F}$, для которых существует набор (V, f, W, α_V), где V — гладкое неприводимое многообразие с $k(V) \simeq K$, $f\colon V \to X$ — собственный морфизм, совпадающий с φ в общей точке многообразия V, $W \subset V$ — дивизор с простыми нормальными пересечениями,

$$\alpha_V \in H^0\big(V, \Omega^q_V(\log W) \otimes_{\mathcal{O}_V} f^*\mathcal{F}\big)\,,$$

такой что α совпадает с ограничением сечения α_V в общую точку многообразия V.

Замечание 3.2.12. Определение множества M_q похоже на определение полярных элементов (см. определение 3.1.1), однако в нем рассматриваются дифференциальные формы не только старшей степени, а морфизмы $f\colon V \to X$ не обязаны быть бирациональны на свой образ. Тем не менее, если Z является неприводимым подмногообразием размерности p в X, а

$\varphi_Z\colon \operatorname{Spec}\bigl(k(Z)\bigr) \to X$ — естественный морфизм, то имеется равенство

$$M_p(\mathcal{F})\bigl(k(Z), \varphi_Z\bigr) = \operatorname{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z)\,.$$

Предложение 3.2.13. *Пусть $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на произвольном многообразии X. Выполняется следующее:*

(i) *для любого поля (K, φ) над X множество $M_q(\mathcal{F})(K, \varphi)$ является k-векторным подпространством в $\Omega^q_K \otimes_K \varphi^*\mathcal{F}$;*

(ii) *если поле (K', φ') является расширением поля (K, φ) над X, то отображение обратного образа*

$$\Omega^q_K \otimes_K \varphi^*\mathcal{F} \longrightarrow \Omega^q_{K'} \otimes_{K'} \varphi'^*\mathcal{F}$$

переводит подмножество $M_q(\mathcal{F})(K, \varphi)$ в подмножество $M_q(\mathcal{F})(K', \varphi')$;

(iii) *если поле (K', φ') является расширением поля (K, φ) над X и при этом расширение полей $K \subset K'$ конечно, то отображение следа*

$$\Omega^q_{K'} \otimes_{K'} \varphi'^*\mathcal{F} \longrightarrow \Omega^q_K \otimes_K \varphi^*\mathcal{F}$$

переводит подмножество $M_q(\mathcal{F})(K', \varphi')$ в подмножество $M_q(\mathcal{F})(K, \varphi)$;

(iv) *для любого поля (K, φ) над X произведение дифференциальных форм задает структуру ассоциативного градуированного кольца на $\bigoplus\limits_{q\geqslant 0} M_q(\mathcal{O}_X)(K, \varphi)$ и структуру градуированного модуля над этим кольцом на $\bigoplus\limits_{q\geqslant 0} M_q(\mathcal{F})(K, \varphi)$;*

(v) *для любого поля (K, φ) над X образ гомоморфизма $d\log\colon K^* \to \Omega^1_K$ содержится в подмножестве $M_1(\mathcal{O}_X)(K, \varphi)$;*

(vi) *для любого неприводимого многообразия V, собственного морфизма $f\colon V \to X$ и приведенного неприводимого дивизора $D \subset V$ имеется отображение вычета*

$$\operatorname{res}_{VD} \;:\; M_q(\mathcal{F})\bigl(k(V), \varphi\bigr) \longrightarrow M_{q-1}(\mathcal{F})\bigl(k(D), \psi\bigr)\,, \qquad q \geqslant 1\,,$$

где φ и ψ являются ограничениями морфизма f в общие точки многообразий V и D, соответственно; при этом для любого набора (V, f, W, α_V) как в определении 3.2.11 и неприводимой компоненты D дивизора W отображение res_{VD}, примененное к соответствующему элементу $\alpha \in M_q(\mathcal{F})\bigl(k(V), \varphi\bigr)$, совпадает с вычетом логарифмической формы α_V, определенным в § 1.4.1;

(vii) *для неприводимого многообразия V, морфизма $f\colon V \to X$, неприводимого подмногообразия $Z \subset V$ коразмерности два и элемента $\alpha \in M_q(\mathcal{F})\big(k(V), \varphi\big)$, где φ является ограничением морфизма f в общую точку многообразия V, имеем*

$$\sum_D (\mathrm{res}_{DZ} \circ \mathrm{res}_{VD})(\alpha) = 0\,,$$

где сумма берется по всем неприводимым приведенным дивизорам D на V, содержащим Z;

(viii) *для собственного морфизма $g\colon X' \to X$ и поля (K, φ') над X' имеется канонический изоморфизм*

$$M_q(\mathcal{F})(K, \varphi) \simeq M_q(g^*\mathcal{F})(K, \varphi')\,,$$

где $\varphi := g \circ \varphi'$.

Доказательство. Заметим, что лемма 1.4.2 и лемма 1.4.4 могут быть легко обобщены на случай дифференциальных форм с коэффициентами в локально свободном пучке, определенном на многообразии в образе (обозначенном в данных леммах через V). Ниже мы будем использовать именно такие версии леммы 1.4.2 и леммы 1.4.4.

Ясно, что для любого поля (K, φ) над X подмножество

$$M_q(\mathcal{F})(K, \varphi) \subset \Omega^q_K \otimes_K \varphi^*\mathcal{F}$$

замкнуто относительно умножения на элементы из k. Далее, рассмотрим два элемента $\alpha_1, \alpha_2 \in M_q(\mathcal{F})(K, \varphi)$ и соответствующие наборы $(V_1, f_1, W_1, \alpha_{V_1})$, $(V_2, f_2, W_2, \alpha_{V_2})$ как в определении 3.2.11. Изоморфизмы $k(V_1) \simeq k(V_2) \simeq K$ фиксируют бирациональный морфизм $g\colon V_1 \dashrightarrow V_2$. По лемме 1.4.9 существует гладкое многообразие V и собственные бирациональные морфизмы $h_i\colon V \to V_i$, $i = 1, 2$, для которых $f_1 \circ h_1 = f_2 \circ h_2$. Пусть морфизм $f\colon V \to X$ является любой из этих композиций. По теореме Хиронаки, меняя бирационально многообразие V, мы можем считать, что $W := h_1^{-1}(W_1) \cup h_2^{-1}(W_2)$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями на V. По лемме 1.4.2 формы $h_i^*\alpha_{V_i}$, $i = 1, 2$, принадлежат пространству $H^0\big(V, \Omega^q_V(\log W) \otimes_{\mathcal{O}_V} f^*\mathcal{F}\big)$. Ограничение формы

$$h_1^*\alpha_{V_1} + h_2^*\alpha_{V_2} \in H^0\big(V, \Omega^q_V(\log W) \otimes_{\mathcal{O}_V} f^*\mathcal{F}\big)$$

на общую точку многообразия V равно $\alpha_1 + \alpha_2 \in \Omega^q_K \otimes_K \varphi^*\mathcal{F}$, что доказывает пункт (i).

Рассмотрим расширение (K', φ') поля (K, φ) над X, форму α из $M_q(\mathcal{F})(K, \varphi)$ и соответствующий набор (V, f, W, α_V) как в определении 3.2.11. Обозначим через α' обратный образ формы α. Наша цель показать, что рациональная форма $\alpha' \in \Omega^q_{K'} \otimes_{K'} \varphi'^*\mathcal{F}$ принадлежит

пространству $M_q(\mathcal{F})(K',\varphi')$. По лемме 3.2.10 существует гладкое неприводимое многообразие V' с $k(V')\simeq K'$ и собственный морфизм $f'\colon V'\to X$, сопадающий с φ' в общей точке многообразия V'. Расширение (K',φ') поля (K,φ) над X задает рациональное отображение $g\colon V'\dashrightarrow V$ над X, причем $f\circ g=f'$. По лемме 1.4.9 можно считать, что отображение g регулярно. Заменяя далее V' бирациональным образом в соответствии с теоремой Хиронаки, можно считать, что $W':=g^{-1}(W)$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями на V'. По лемме 1.4.2 обратный образ $\alpha_{V'}:=g^*\alpha_V$ принадлежит пространству $H^0\bigl(V',\Omega^q_{V'}(\log W')\otimes_{\mathcal{O}_{V'}} f'^*\mathcal{F}\bigr)$. Это доказывает пункт (ii), поскольку ограничение формы $\alpha_{V'}$ на общую точку многообразия V' совпадает с α'.

Теперь предположим, что расширение полей $K\subset K'$ конечно. Рассмотрим форму $\alpha'\in M_q(\mathcal{F})(K',\varphi')$ и соответствующий набор $(V',f',W',\alpha_{V'})$ как в определении 3.2.11. Обозначим через α след формы α'. Наша цель показать, что рациональная форма $\alpha\in\Omega^q_K\otimes_K\varphi^*\mathcal{F}$ принадлежит пространству $M_q(\mathcal{F})(K,\varphi)$. По лемме 3.2.10 существует гладкое неприводимое многообразие V с $k(V)\simeq K$ и собственный морфизм $f\colon V\to X$, совпадающий с φ в общей точке многообразия V. Конечное расширение $K\subset K'$ задает рациональное отображение $g\colon V'\dashrightarrow V$, для которого $f\circ g=f'$. По лемме 1.4.9 можно считать, что отображние g регулярно. Морфизм g отображает дивизор $W'\subset V'$ на подмногообразие $g(W')$ в V, которое в общем случае не обязано быть дивизором с простыми нормальными пересечениями на V. Тем не менее, можно применить теорему Хиронаки к паре $g(W')\subset V$ и получить собственный бирациональный морфизм $\pi\colon\widetilde{V}\to V$, для которого $\widetilde{W}:=\pi^{-1}\bigl(g(W')\bigr)$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями на $\widetilde{V}$. Одновременно это дает рациональное отображение $\tilde{g}\colon V'\dashrightarrow\widetilde{V}$ и по лемме 1.4.9 мы может предполагать, что это отображение регулярно. Для простоты обозначений мы будем теперь писать V вместо $\widetilde{V}$, g вместо $\tilde{g}$ и W вместо $\widetilde{W}$. Таким образом, мы построили собственный морфизм $g\colon V'\to V$, для которого $f\circ g=f'$, причем g соответствует в общей точке многообразия V' заданному расширению полей над X и имеется вложение $W'\subseteq g^{-1}(W)$. По лемме 1.4.4 след $\alpha_V:=g_*\alpha_{V'}$ принадлежит пространству $H^0\bigl(V,\Omega^q_V(\log W)\otimes_{\mathcal{O}_V} f^*\mathcal{F}\bigr)$. Это доказывает пункт (iii), поскольку ограничение формы α_V на общую точку многообразия V совпадает с α.

Пункт (iv) доказывается при помощи того же рассуждения, что и пункт (i), и того факта, что логарифмические формы замкнуты относительно произведения при условии, что объединение их полюсов является дивизором с простыми нормальными пересечениями.

Пункт (v) следует из того факта, что отображение $d\log$, примененное к ненулевой рациональной функции, дает логарифмическую форму при условии, что носитель дивизора

данной функции является дивизором с простыми нормальными пересечениями. Выполнение последнего условия может быть достигнуто при помощи теоремы Хиронаки.

Теперь рассмотрим V, f и D как в пункте (vi). Отметим, что многообразия V и D не обязательно гладкие. Рассмотрим форму $\alpha \in M_q(\mathcal{F})\big(k(V), \varphi\big)$ и соответствующий набор $(V', f', W', \alpha_{V'})$ как в определении 3.2.11. В частности, имеется изоморфизм $k(V') \simeq k(V)$. По лемме 1.4.9 мы можем предполагать, что данный изоморфизм соответствует собственному бирациональному морфизму $g\colon V' \to V$. Заменяя при необходимости V' бирациональным образом, мы можем достичь того, чтобы $g^{-1}(D) \cup W'$ был дивизором с простыми нормальными пересечениями на V'. Пусть $\{D'_i\}$ — множество всех неприводимых компонент дивизора $g^{-1}(D)$, отображающихся доминантно на D. Обозначим через $g_i\colon D'_i \to D$ ограничение морфизма g на D'_i и обозначим через $\psi'_i\colon \operatorname{Spec}\big(k(D'_i)\big) \to X$ ограничение морфизма f' на общую точку многообразия D'_i. Для каждого i обычный вычет $\operatorname{res}_{V'D'_i}(\alpha_{V'})$ в D'_i задает элемент $\beta_i \in M_{q-1}(\mathcal{F})\big(k(D'_i), \psi'_i\big)$. По пунктам (iii) и (i) рациональная форма $\beta := \sum_i g_{i*}(\beta_i)$ принадлежит $M_{q-1}(\mathcal{F})\big(k(D), \psi\big)$. Положим $\operatorname{res}_{VD}(\alpha) := \beta$. Форма β не зависит от сделанных выше выборов, потому что отображение вычета коммутирует с отображениями обратного образа и следа (см. формулы (1.4.6) и (1.4.7) в § 1.4.2; отметим, что в данном случае индексы ветвления равны $e_i = 1$). Это объясняет пункт (vi).

Доказательство пункта (vii) дословно повторяет доказательство теоремы 3.9 в [78].

Наконец, пункт (viii) может быть доказан следующим образом. Имеется очевидное отображение $M_q(g^*\mathcal{F})(K, \varphi') \to M_q(\mathcal{F})(K, \varphi)$. Построим обратное к нему. Рассмотрим набор (V, f, W, α_V) как в определении 3.2.11. Тогда φ' индуцирует рациональное отображение $h\colon V \dashrightarrow X'$. По лемме 3.2.10 и по теореме Хиронаки существует собственный бирациональный морфизм $\pi\colon V' \to V$ из гладкого неприводимого многообразия V', морфизм $f'\colon V' \to X'$ и дивизор с простыми нормальными пересечениями $W' \subset V'$, для которых $f' = h \circ \pi$ и $\pi^{-1}(W) \subseteq W'$. Теперь сопоставим элементу из $M_q(\mathcal{F})(K, \varphi)$, заданному набором (V, f, W, α_V), элемент из $M_q(g^*\mathcal{F})(K, \varphi')$, заданный набором $(V', f', W', \pi^*\alpha_V)$. □

3.2.3. **Геометрическая лемма.** Ниже нами будет использован следующий простой геометрический факт (по-видимому, у него нет подходящего аналога в случае, когда многообразие X не проективно).

Лемма 3.2.14. *Пусть X — гладкое неприводимое проективное многообразие размерности d, а $x \in X$ — точка на нем. Пусть $Z \subset X$, $W \subset X$ — два замкнутых подмногообразия, такие что $Z \neq X$ и любая неприводимая компонента многообразия W имеет коразмерность*

не меньше двух в X. Тогда существует раздутие $f\colon \widetilde{X} \to X$ в конечном множестве, не содержащем точку x и не пересекающемся с Z и W, и сюръективный морфизм $\pi\colon \widetilde{X} \to \mathbb{P}^{d-1}$, для которых морфизм π гладкий в точке $\widetilde{x} := f^{-1}(x)$, ограничение $\varphi := \pi|_{\widetilde{Z}}$ на $\widetilde{Z} := f^{-1}(Z)$ конечно, и имеется вложение

$$\widetilde{W} \cap \pi^{-1}(\pi(\widetilde{x})) \subseteq \{\widetilde{x}\}\,,$$

где $\widetilde{W} := f^{-1}(W)$.

Замечание 3.2.15. Последнее условие означает, что мы пытаемся минимизировать пересечение подмногообразия $\widetilde{W}$ со слоем морфизма π, проходящим через точку $\widetilde{x}$. Из доказательства леммы 3.2.14 будет видно, что если $x \notin W$, то можно достичь того, чтобы данные подмногообразия в $\widetilde{X}$ вообще не пересекались, а иначе можно достичь того, чтобы они пересекались только по точке $\widetilde{x}$.

Доказательство. Выберем вложение $X \subset \mathbb{P}^N$. Обозначим через $\mathbb{T}_x X$ проективное касательное пространство к X в точке x, т.е. единственное проективное подпространство в $\mathbb{P}^N$ размерности d, касательное к X в точке x. Обозначим через $C_x W$ конус над W с вершиной в x, т.е. замыкание по Зарисски объединения всех проективных прямых в $\mathbb{P}^N$, проходящих через x и пересекающихся с W. По теореме Бертини существует такое линейное подпространство $L \subset \mathbb{P}^N$ размерности $N-d$, что L пересекается трансверсально с X по конечному множеству точек, L не содержит точку x, $L \cap \mathbb{T}_x X$ является точкой, $L \cap Z = \varnothing$, и $L \cap C_x W = \varnothing$. Пусть $f\colon \widetilde{X} \to X$ является раздутием многообразия X в конечном множестве $L \cap X$. Тогда линейная проекция $\pi_L\colon \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{d-1}$ с центром L определяет морфизм $\pi\colon \widetilde{X} \to \mathbb{P}^{d-1}$, где $\pi = \pi_L|_X \circ f$, удовлетворяющий всем требуемым свойствам. В частности, ограничение $\pi|_{\widetilde{Z}} = \pi_L|_Z$ является конечным морфизмом, потому что центр L не пересекается с Z, см. [123, Theor. I.5.7]. □

3.2.4. **Алгебраическая трубчатая окрестность.** В данном параграфе мы докажем теорему 3.2.6 для случая, когда X является гладким неприводимым проективным многообразием.

Доказательство теоремы 3.2.6 в проективном случае. Как было отмечено при доказательстве предложения 3.2.4, имеется канонический изоморфизм пучков

$$(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_{\mathrm{pol}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\left(\underline{\mathrm{Pol}}_d(X,\mathcal{F}) \to \underline{\mathrm{Pol}}_{d-1}(X,\mathcal{F})\right).$$

Поэтому нам надо доказать, что комплекс пучков $\underline{\mathrm{Pol}}_\bullet(X,\mathcal{F})$ ацикличен, т.е. что локально каждый цикл в гомологической степени меньше d является границей. Пусть $x \in X$ — произвольная точка, а $\alpha \in \mathrm{Pol}_p(X,\mathcal{F})$ — цепь. В общем случае $\partial\alpha$ является суммой по неприводимым подмногообразиям в X размерности p. Обозначим через $\partial_x\alpha$ сумму слагаемых в $\partial\alpha$,

носитель которых содержит точку x. Предположим, что $\partial_x\alpha = 0$. Нам надо доказать существование такой цепи $\beta \in \mathrm{Pol}_{p+1}(X, \mathcal{F})$, что $\partial_x\beta = \alpha$ локально в точке x. Равносильно, мы хотим показать, что при условии $x \notin \mathrm{Supp}\ \partial\alpha$ существует такая цепь β, что $x \notin \mathrm{Supp}\,(\alpha - \partial\beta)$.

Пусть $Z := \mathrm{Supp}\ \alpha$ и пусть $\{Z_i\}$ являются неприводимыми компонентами в Z, так что $\alpha = \oplus\alpha_i$, где $\alpha_i \in \mathrm{Pol}_{Z_i}(\mathcal{F}|_{Z_i})$. Мы можем считать, что для каждого i подмногообразие Z_i содержит точку x.

Замечание 3.2.16. Идея доказательства заключается в том, чтобы использовать алгебраический вариант трубчатой окрестности, или, более точно, воротниковой окрестности. Предположим, что подмногообразие $T \subset X$ является "воротниковой окрестностью" подмногообразия Z локально в окрестности точки x в топологии Зарисского. Под этим мы имеем в виду, что $Z \subset T$, $\dim(T) = \dim(Z+1) = p+1$, существует "стягивание" $\rho\colon T \to Z$ и T гладко в точке $x \in Z$ вдоль нормального направления к Z. Если $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, то можно положить $\beta = \frac{dt}{t} \wedge \rho^*(\alpha)$, где t является уравнением подмногообразия Z на T локально в точке x. Проблема заключается в том, что такая воротниковая окрестность T не всегда существует. Квилленом [117, Theor. 5.11] был предложен способ обойти эту проблему. Основная идея заключается в том, чтобы использовать некоторое конечное сюръективное отображение на X, имеющее сечение над Z, т.е. решить проблему, заменяя топологию Зарисского на топологию Нисневича.

Легко видеть, что мы можем заменить многообразие X на его раздутие в конечном множестве, не содержащем точку x. Следовательно, по лемме 3.2.14 мы можем считать, что существует морфизм $\pi\colon X \to \mathbb{P}^{d-1}$, гладкий в точке x, для которого морфизм $\varphi := \pi|_Z$ конечен, причем $W \cap \pi^{-1}\big(\pi(x)\big) \subseteq \{x\}$, где W является объединением полюсов форм α_i и особенностей многообразий Z_i по всем i. Для схемы $Y' = Z \times_{\mathbb{P}^{d-1}} X$ имеются проекции $Z \xleftarrow{\rho} Y' \xrightarrow{\psi} X$. Обозначим через Y объединение всех неприводимых компонент многообразия Y'_{red}, содержащих какую-либо неприводимую компоненту многообразия $\sigma(Z)$, где $\sigma\colon Z \to Y'$ является сечением морфизма ρ, индуцированным вложением $Z \hookrightarrow X$. Возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\psi} & X \\ \sigma \uparrow\downarrow \rho & & \downarrow \pi \\ Z & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^{d-1} \end{array}$$

Заметим, что морфизм ψ конечный, а морфизм $\rho\colon Y \to Z$ гладкий в конечном множестве $S := \psi^{-1}(x)$, поскольку морфизм π гладкий в x. В частности, морфизм ρ гладкий в точке $\sigma(x) \in S$. Так как все подмногообразия Z_i в X содержат точку x, то мы видим, что все подмногообразия $\sigma(Z_i)$ в Y содержат точку $\sigma(x)$. Из этого следует, что множество $\{Y_i\}$

неприводимых компонент многообразия Y находится в биекции с множеством $\{Z_i\}$ неприводимых компонент многообразия Z, и что каждый морфизм $\rho\colon Y_i \to Z_i$ сюръективен. Кроме того, локально в точке $x \in Z$ слои морфизма ρ являются неприводимыми кривыми и все компоненты Y_i имеют одинаковую размерность $p+1$. Обозначим через $\chi_i\colon \operatorname{Spec}\big(k(Y_i)\big) \to Y$ естественный морфизм для каждой неприводимой компоненты Y_i многообразия Y.

Поскольку морфизм ρ гладкий в S, существует локальное уравнение $t = 0$ сечения $\sigma(Z)$ на Y локально в S. По предложению 3.2.13 (ii),(iv),(v),(viii) для каждого i рациональная дифференциальная форма $\gamma_i := \frac{dt}{t} \wedge \rho^*\alpha_i$ на Y_i принадлежит пространству $M_{p+1}(\rho^*\mathcal{F}_Z)\big(k(Y_i), \chi_i\big) = \operatorname{Pol}_{Y_i}\big((\rho^*\mathcal{F}_Z)|_{Y_i}\big)$, где $\rho^*\mathcal{F}_Z$ является обратным образом на Y пучка $\mathcal{F}_Z$, являющегося ограничением на Z локального свободного пучка $\mathcal{F}$ на X. Рассмотрим цепь

$$\gamma := \oplus\gamma_i \in \operatorname{Pol}_{p+1}(Y, \rho^*\mathcal{F}_Z)\,.$$

Для каждой точке $y \in S$, отличной от $\sigma(x)$, все формы γ_i регулярны в y, потому что $y \notin \sigma(Z)$ и $\rho(y) \notin W$. Так как $\sigma^*(\rho^*\mathcal{F}_Z) = \mathcal{F}_Z$, то предложение 3.2.8 (i) дает морфизм

$$\sigma_*\colon \operatorname{Pol}_\bullet(Z, \mathcal{F}_Z) \to \operatorname{Pol}_\bullet(Y, \rho^*\mathcal{F}_Z)\,.$$

Поэтому мы получаем элемент $\sigma_*\alpha$ из $\operatorname{Pol}_\bullet(Y, \rho^*\mathcal{F}_Z)$. Мы утверждаем, что $\partial_{\sigma(x)}\gamma = \sigma_*\alpha$. Действительно, для каждого i пусть $\partial_x\alpha_i = \oplus\eta_j$, где j пробегает все неприводимые компоненты носителя $\operatorname{Supp}\partial_x\alpha_i$. Выше было показано, что локально в точке $x \in Z$ слои морфизма ρ являются неприводимыми кривыми. Кроме того, для каждого j носитель $\operatorname{Supp}\eta_j$ цепи η_j содержит точку x, и поэтому $\rho^{-1}(\operatorname{Supp}\eta_j)$ является неприводимым многообразием размерности p. Применяя предложение 3.2.13 (ii), мы получаем обратный образ $\rho^*\eta_j$ формы η_j с $\operatorname{Supp}\eta_j$ на $\rho^{-1}(\operatorname{Supp}\eta_j)$. Так как $\operatorname{res}_{Y_i,\sigma(Z_i)}(\frac{dt}{t} \wedge \rho^*\alpha_i) = \sigma_*\alpha_i$, то мы получаем

$$\partial_{\sigma(x)}\gamma_i = \sigma_*\alpha_i \oplus \Big(\oplus_j\,(\tfrac{dt}{t} \wedge \rho^*\eta_j)\Big)\,.$$

Рассматривая сумму по всем i и используя, что $\partial_x\alpha = 0$, мы получаем требуемое равенство. Итак, мы видим, что $\partial\gamma = \sigma_*\alpha$ локально в S на Y, или, обобщая наши обозначения, имеем $\partial_S\gamma = \sigma_*\alpha$.

Теперь мы собираемся построить при помощи цепи $\gamma \in \operatorname{Pol}_{p+1}(Y, \rho^*\mathcal{F}_Z)$ подходящую цепь из $\operatorname{Pol}_{p+1}(Y, \psi^*\mathcal{F})$, а потом взять ее прямой образ ψ_* на X. Это даст нам искомую полярную цепь β на $\operatorname{Pol}_{p+1}(X, \mathcal{F})$. С этой целью, рассмотрим локально свободный пучок $\mathcal{H}om(\rho^*\mathcal{F}_Z, \psi^*\mathcal{F})$ на Y и когерентный пучок

$$\mathcal{K} := \operatorname{Ker}\Big(\mathcal{H}om(\rho^*\mathcal{F}_Z, \psi^*\mathcal{F}) \to \sigma_*\sigma^*\mathcal{H}om(\rho^*\mathcal{F}_Z, \psi^*\mathcal{F})\Big)\,.$$

По теореме Серра об обращении в нуль существует очень обильный обратимый пучок $\mathcal{L}$ на Y, для которого

$$H^1(Y, \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}) = 0.$$

В этом случае отображение

$$H^0\big(Y, \mathcal{H}om(\rho^*\mathcal{F}_Z, \psi^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L})\big) \longrightarrow H^0\big(Z, \sigma^*\mathcal{H}om(\rho^*\mathcal{F}_Z, \psi^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L})\big)$$

сюръективно. Равносильно, сюръективно отображение

$$\sigma^* \ : \ \mathrm{Hom}(\rho^*\mathcal{F}_Z, \psi^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(\mathcal{F}_Z, \mathcal{F}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{L}|_Z\right), \tag{3.2.17}$$

где мы используем, что

$$\sigma^*(\rho^*\mathcal{F}_Z) = \sigma^*(\psi^*\mathcal{F}) = \mathcal{F}_Z\,.$$

Пусть $D \subset Y$ является дивизором нулей общего регулярного сечения пучка $\mathcal{L}$, так что имеется изоморфизм $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_Y(D)$. Тогда мы можем считать, что $D \cap S = \varnothing$ и что $\sigma^{-1}(D)$ является дивизором Картье на Z. Из сюръективности отображения σ^* в формуле (3.2.17) следует, что существует морфизм пучков $\Phi\colon \rho^*\mathcal{F}_Z \to \psi^*\mathcal{F}(D)$, для которого $\sigma^*\Phi$ совпадает с вложением $\Upsilon\colon \mathcal{F}_Z \hookrightarrow \mathcal{F}_Z\big(\sigma^{-1}(D)\big)$. Тогда цепь на Y

$$\Phi(\gamma) = \oplus\Phi(\gamma_i) \in \mathrm{Pol}_{p+1}\big(Y, \psi^*\mathcal{F}(D)\big)$$

удовлетворяет условию $\partial\big(\Phi(\gamma)\big) = \Phi\big(\partial\gamma\big)$ вледствие функториальности полярного комплекса по локально свободным пучкам. Напомним, что цепь γ была построена так, чтобы выполнялось равенство $\partial_S\gamma = \sigma_*\alpha$, и поэтому $\Phi(\partial_S\gamma) = \Phi(\sigma_*\alpha)$. Так как отображение прямого образа из предложения 3.2.8 (i) функториально по локально свободным пучкам на области значений, то выполняется равенство $\Phi(\sigma_*\alpha) = \sigma_*\big((\sigma^*\Phi)(\alpha)\big)$. Поскольку $\sigma^*\Phi = \Upsilon$, имеем равенство $\partial_S\big(\Phi(\gamma)\big) = \sigma_*\big(\Upsilon(\alpha)\big)$.

С другой стороны, заметим, что пространство $\mathrm{Pol}_{Y_i}\big(\psi^*\mathcal{F}|_{Y_i}\big)$ состоит из таких элементов в

$$\mathrm{Pol}_{Y_i}(\psi^*\mathcal{F}(D)|_{Y_i}) \subset \omega_{k(Y_i)} \otimes_{k(Y_i)} \big(\psi^*\mathcal{F}(D)\big)_{k(Y_i)} = \omega_{k(Y_i)} \otimes_{k(Y_i)} (\psi^*\mathcal{F})_{k(Y_i)}\,,$$

которые имеют полюса не выше первого порядка вдоль дивизора D. Следовательно, по теореме Бертини (ср. с леммой 3.2.22 ниже) мы можем считать, что $\Phi(\gamma_i)$ принадлежит $\mathrm{Pol}_{Y_i}(\psi^*\mathcal{F}|_{Y_i})$, и поэтому $\Phi(\gamma) \in \mathrm{Pol}_{p+1}(Y, \psi^*\mathcal{F})$, где $\partial_S\Phi(\gamma) = \sigma_*\alpha$. Поэтому по предложению 3.2.8 (i) цепь

$$\beta = \psi_*\big(\Phi_Y(\gamma)\big) \in \mathrm{Pol}_{p+1}(X, \mathcal{F})$$

удовлетворяет равенству $\partial_x\beta = \alpha$, что завершает доказательство. □

Замечание 3.2.18. Построение пространств полярных элементов $\mathrm{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z)$ использует многообразие X глобально, и данные пространства меняются при замене X на открытое подмножество. Именно поэтому во второй части доказательства теоремы 3.2.6 мы не можем использовать то, что в некоторого открытой окрестности в топологии Зарисского множества S в Y локально свободные пучки $\rho^*\mathcal{F}_Z$ и $\psi^*\mathcal{F}$ становятся изоморфными. Чтобы обойти эту проблему, мы подкручиваем пучок $\psi^*\mathcal{F}$ на очень обильный пучок $\mathcal{L}$ на Y.

3.2.5. **Сравнение с когомологиями локально свободных пучков.** В этом параграфе мы докажем теорему 3.2.7 в проективном случае. Таким образом, в течение этого параграфа мы будем предполагать, что X — гладкое неприводимое проективное многообразие, а $\mathcal{G}$ — локально свобоный пучок на X.

Определение 3.2.19. Будем говорить, что открытое подмножество $U \subset X$ является *$\mathcal{G}$-малым*, если существует собственный бирациональный морфизм $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ из гладкого многообразия, для которого $\widetilde{D} := \pi^{-1}(X \smallsetminus U)$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями на $\widetilde{X}$ и выполняется условие $H^p\big(\widetilde{X}, \pi^!\mathcal{G}(\widetilde{D})\big) = 0$ для всех $p > 0$.

Замечание 3.2.20. Предположим, что $U \subset X$ является $\mathcal{G}$-малым открытым подмножеством.

(i) Пусть $\pi'\colon \widetilde{X}' \to X$ — произвольный собственный бирациональный морфизм из гладкого многообразия, для которого $\widetilde{D}' := (\pi')^{-1}(X \smallsetminus U)$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями на X'. Тогда по лемме 1.4.9 и следствию 1.4.12 имеется равенство $H^p\big(\widetilde{X}', (\pi')^!\mathcal{G}(\widetilde{D}')\big) = 0$ для всех $p > 0$.

(ii) В частности, из пункта (i) следует, что если дополнение $D := X \smallsetminus U$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями, то $H^p\big(X, \mathcal{G}(D)\big) = 0$ для всех $p > 0$.

(iii) Из пункта (i) также следует, что для произвольного собственного бирационального морфизма $\rho\colon Y \to X$ из гладкого многообразия открытое подмножество $\rho^{-1}(U) \subset Y$ является $(\rho^!\mathcal{G})$-малым.

Мы будем использовать следующее обозначение. Для открытого покрытия $\{U_i\}$, $i \in I$, открытого подмножества $U \subset X$ и непустого подмножества $S \subset I$ положим $U_S := \bigcap_{i\in S} U_i$ и $D_S := X \smallsetminus U_S$. При этом для $S = \varnothing$ положим $U_\varnothing := U$ и $D_\varnothing := X \smallsetminus U$.

Сначала установим изоморфизм между когомологиями Чеха полярного пучка и исходного локального свободного пучка.

Лемма 3.2.21. *Пусть $U \subset X$ — открытое подмножество и предположим, что $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ является таким конечным открытым покрытием, что для любого непустого подмножества $S \subset I$ открытое подмножество $U_S \subset X$ является $\mathcal{G}$-малым и для любого подмножества $S \subset I$, включая $S = \varnothing$, подмногообразие D_S является дивизором с простыми нормальными пересечениями на X. Тогда для любого $p \geqslant 0$ имеется канонический изоморфизм*

$$\check{H}^p\big(\{U_i\}, \mathcal{G}_{\mathrm{pol}}|_U\big) \simeq H^p\big(X, \mathcal{G}(D_\varnothing)\big)\,,$$

где $\check{H}$ обозначает когомологии Чеха, определяемые по открытому подкрытию.

Доказательство. Для каждого элемента $i \in I$ обозначим через D'_i объединение всех неприводимых компонент в D_i, не содержащихся в $D_\varnothing$. Заметим, что $\bigcap_i D'_i \subset D_\varnothing$, потому что $U = \bigcup_i U_i$. Утверждается, что, на самом деле, имеется равенство $\bigcap_i D'_i = \varnothing$. Для доказательства этого факта предположим обратное. Пусть непустое подмногообразие $Z \subset X$ является некоторой неприводимой компонентой пересечения $\bigcap_i D'_i$. Так как $\bigcup_i D'_i \subset \bigcup_i D_i = D_I$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями, то коразмерность подмногообразия Z в X равна числу c неприводимых компонент в $\bigcup_i D'_i$, содержащих Z. С другой стороны, $Z \subset D_\varnothing$, так что существует не меньше $c+1$ неприводимых компонент дивизора с простыми нормальными пересечениями D_I, содержащих Z, при условии, что дивизор $D_\varnothing$ непуст (при $D_\varnothing = \varnothing$ очевидно, что $\bigcap_i D'_i = \varnothing$). Следовательно, коразмерность подмногообразия Z в X не меньше, чем $c+1$, что приводит к противоречию.

Рассмотрим следующий комплекс $\mathcal{K}^\bullet$ локально свободных пучков на X:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} \mathcal{O}_X(D'_i) \longrightarrow \bigoplus_{\{i,j\}\subset I} \mathcal{O}_X(D'_i \cup D'_j) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{O}_X(D'_I) \longrightarrow 0\,,$$

где $\mathcal{K}^l := \bigoplus_{S\subset I, |S|=l+1} \mathcal{O}_X(D'_S)$ при $0 \leqslant l \leqslant |I|-1$ и $D'_S := \bigcup_{i\in S} D'_i$ для каждого подмножества $S \subset I$. Дифференциал в комплексе $\mathcal{K}^\bullet$ задается альтернированной суммой естественных вложений $\mathcal{O}_X(D'_S) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(D'_T)$, где $S \subset T \subset I$ с $|T| = |S|+1$. Так как $\bigcap_i D'_i = \varnothing$, то для каждой точки $x \in X$ существует такой элемент $i \in I$, что $x \notin D'_i$. Поэтому для некоторой открытой окрестности $x \in V$ имеется изоморфизм $\mathcal{O}_V \simeq \mathcal{O}_V(D'_i)$, что задают стягивающую гомотопию ограничения комплекса $\mathcal{O}_X \to \mathcal{K}^\bullet$ на V. Таким образом, $\mathcal{K}^\bullet$ является резольвентой пучка $\mathcal{O}_X$.

Тензорное произведение комплекса $\mathcal{K}^\bullet$ с пучком $\mathcal{G}(D_\varnothing)$ является резольвентой пучка $\mathcal{G}(D_\varnothing)$. Для любого подмножества $S \subset I$, $S \neq \varnothing$, имеем $D_\varnothing + D'_S = D_S$, а $U_S \subset X$ является $\mathcal{G}$-малым открытым подмножеством. Следовательно по замечанию 3.2.20(ii) имеется равенство $H^p\big(X, \mathcal{G}(D_S)\big) = 0$ для всех $p > 0$, т.е. пучки в резольвенте $\mathcal{K}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}(D_\varnothing)$

ацикличны. Таким образом, имеется канонический изоморфизм

$$H^p\big(X, \mathcal{G}(D_\varnothing)\big) \simeq H^p\big(\,\Gamma\big(X, \mathcal{K}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}(D_\varnothing)\big)\,\big)\,.$$

Остается заметить, по определению пучка $\mathcal{G}_{\mathrm{pol}}$ (см. определение 3.2.4) правая часть данного изоморфизма совпадает с когомологиями Чеха $\check{H}^p\big(\{U_i\}, \mathcal{G}_{\mathrm{pol}}|_U\big)$. □

Теперь покажем, что для любого $\mathcal{G}$-малого открытого покрытия $\{U_i\}$ многообразия X естественное отображение задает изоморфизм $\check{H}^p\big(\{U_i\}, \mathcal{G}_{\mathrm{pol}}\big) \simeq H^p\big(X, \mathcal{G}_{\mathrm{pol}}\big)$. Для этого достаточно показать, что пучок $\mathcal{G}_{\mathrm{pol}}$ ацикличен на любом $\mathcal{G}$-малом открытом подмножесте. Нам потребуется следующий факт, непосредственно вытекающий из теоремы Бертини (заметим, что теорема Бертини верна над произвольным бесконечным полем, поскольку любое плотное открытое подмножество в проективном пространстве имеет точку над таким полем).

Лемма 3.2.22. *Пусть V является гладким квазипроективным многообразием, $\varphi\colon V \to \mathbb{P}^N$ является регулярным морфизмом, а $W \subset V$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями. Тогда для общей гиперплоскости $H \subset \mathbb{P}^N$, прообраз $\varphi^{-1}(H)$ не содержит никакой компоненты дивизора W, а $W \cup \varphi^{-1}(H)$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями.*

Лемма 3.2.23. *Пусть $U \subset X$ является $\mathcal{G}$-малым открытым подмножеством. Тогда для любого $p > 0$ имеется равенство*

$$H^p(U, \mathcal{G}_{\mathrm{pol}}|_U) = 0\,.$$

Доказательство. Мы следуем идее доказательства хорошо известной теоремы Картана об ацикличности покрытий (см., например, обзор Данилова [32, §,1.4.5]). Будем использовать индукцию по $p \geqslant 1$. Рассмотрим произвольный элемент $\alpha \in H^p(U, \mathcal{G}_{\mathrm{pol}}|_U)$. Любой коцикл является локально когранице́й. Поэтому существует такое конечное открытое покрытие $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, что $\alpha|_{U_i} = 0$ для всех $i \in I$.

По теореме Хиронаки, см. теорему 1.4.8(i), существует такой собственный бирациональный морфизм $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ из гладкого многообразия, что ограничение π на $\widetilde{U} := \pi^{-1}(U)$ является изоморфизмом и для любого подмножества $S \subset I$, включая $S = \varnothing$, подмногообразие $\pi^{-1}(D_S)$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями на $\widetilde{X}$. По замечанию 3.2.20(iii) открытое подмножество $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ является $(\pi^!\mathcal{G})$-малым. Кроме того, из леммы 1.4.9 и следствия 1.4.12 также нетрудно вывести стандартными методами, что при изоморфизме $\pi\colon \widetilde{U} \xrightarrow{\sim} U$ пучок $\mathcal{G}_{\mathrm{pol}}|_U$ соответствует пучку $(\pi^!\mathcal{G})_{\mathrm{pol}}|_{\widetilde{U}}$. Таким образом, достаточно доказать утверждение леммы для открытого подмножества $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ и пучка $\pi^!\mathcal{G}$

на $\widetilde{X}$. Поэтому, меняя X на $\widetilde{X}$, мы будем считать, что D_S является дивизором с простыми нормальными пересечениями на X для любого подмножества $S \subset I$, включая $S = \varnothing$.

Пусть $\mathcal{L}$ является таким очень обильным обратимым пучком на X, что для любого подмножества $S \subset I$ и для всех $p > 0$, $m > 0$ имеется равенство

$$H^p\big(X, \mathcal{G}(D_S) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes m}\big) = 0\,.$$

По лемме 3.2.22 существует $d+1$ регулярных сечений пучка $\mathcal{L}$ с неприводимыми дивизорами нулей E_r, $1 \leqslant r \leqslant d+1$, для которых $\bigcap_r E_r = \varnothing$, никакой из дивизоров E_r не содержится в D_I, а $D_I \cup \big(\bigcup_r E_r\big)$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями на X. В частности, из этого следует, что $D_S \cup \big(\bigcup_{r\in T} E_r\big)$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями на X для любых подмножеств $S \subset I$ и $T \subset \{1, \ldots, d+1\}$.

Рассмотрим покрытие $U = \bigcup V_{ir}$, где $V_{ir} := U_i \smallsetminus E_r$. По построению открытые подмножества V_{ir} и их пересечения являются $\mathcal{G}$-малыми. Поэтому по предположению индукции когомологии пучка $\mathcal{G}_{\mathrm{pol}}$ на них тривиальны в степенях от 1 до $p-1$ включительно. Из спектральной последовательность Чеха для пучка $\mathcal{G}_{\mathrm{pol}}|_U$ относительно покрытия $U = \bigcup V_{ir}$ следует, что имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow \check{H}^p\big(\{V_{ir}\}, \mathcal{G}_{\mathrm{pol}}|_U\big) \longrightarrow H^p(U, \mathcal{G}_{\mathrm{pol}}|_U) \longrightarrow \bigoplus_{i,r} H^p(V_{ir}, \mathcal{G}_{\mathrm{pol}}|_{V_{ir}})\,.$$

По построению покрытие $\{V_{ir}\}$ открытого подмножества U удовлетворяет условию леммы 3.2.21. Следовательно, левый член в данной точной последовательности изоморфен группе $H^p\big(X, \mathcal{G}(D_\varnothing)\big)$. Таким образом, из замечания 3.2.20(ii) и из того, что U является $\mathcal{G}$-малым, следует, что левый член обращается в нуль. С другой стороны, правое отображение переводит элемент $\alpha \in H^p(U, \mathcal{G}_{\mathrm{pol}}|_U)$ в нуль. Поэтому $\alpha = 0$, что дает требуемый результат. □

Теперь мы готовы доказать теорему 3.2.7 в проективном случае.

Доказательство теоремы 3.2.7 в проективном случае. Применяя лемму 3.2.22 как в доказательстве леммы 3.2.23, мы видим, что существует открытое покрытие $\{U_i\}$ многообразия X, удовлетворяющее всем условиям леммы 3.2.21. Объединяя лемму 3.2.21 и лемму 3.2.23, мы получаем требуемый результат. □

Замечание 3.2.24. Из леммы 3.2.21 и из доказательства теоремы 3.2.7 для гладкого проективного многообразия X следует, что если для открытого подмножества $U \subset X$ дополнение $D := X \smallsetminus U$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями на X, то имеется изоморфизм

$$H^p(U, \mathcal{G}_{\mathrm{pol}}|_U) \simeq H^p\big(X, \mathcal{G}(D)\big)$$

для любого $p \geqslant 0$. Положив $\mathcal{G} := \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ и используя теорему 3.2.6 в проективном случае и определение 3.2.1, мы получаем изоморфизм

$$H^{d-p}\big(X, \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}(D)\big) \simeq H_p\big(\operatorname{Pol}_\bullet(X, \mathcal{F}) \,/\, \operatorname{Pol}_\bullet(D, \mathcal{F}|_D)\big)\,.$$

3.2.6. **Сведение к проективному случаю.** В этом параграфе мы докажем теорему 3.2.6 и теорему 3.2.7 в полной общности, т.е. для гладкого неприводимого квазипроективного многообразия X. При этом общий случай будет сведен к проективному случаю.

Следующий факт был нам подсказан Д. О. Орловым.

Лемма 3.2.25. *Пусть X — квазипроективное многообразие, а $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на X. Тогда существует проективное многообразие $\bar{X}$, открытое вложение с плотным образом $X \hookrightarrow \bar{X}$ и локально свободный пучок $\bar{\mathcal{F}}$ на $\bar{X}$, для которых $\bar{\mathcal{F}}|_X \simeq \mathcal{F}$. Если многообразие X гладкое, то можно дополнительно потребовать, чтобы $\bar{X}$ было гладким и чтобы дополнение $D := \bar{X} \smallsetminus X$ было дивизором с простыми нормальными пересечениями.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{O}_X(1)$ — очень обильный пучок на X, соответствующий некоторому локально замкнутому вложению $X \hookrightarrow \mathbb{P}^m$ и пусть r — ранг пучка $\mathcal{F}$. Для подходящих натуральных чисел n и N существует сюръективный морфизм $\mathcal{O}_X^{\oplus n} \to \mathcal{F}(N)$ пучков на X. Это задает локально замкнутое вложение $g\colon X \hookrightarrow G$ в грассманиан $G := \operatorname{Gr}(r, n)$, параметризующий подпространства размерности r в векторном пространстве размерности n. Кроме того, $\mathcal{F}(N) \simeq g^*\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ является двойственным расслоением к тавтологическому расслоению на грассманиане. Рассмотрим локально замкнутое вложение

$$X \hookrightarrow G \times \mathbb{P}^m$$

и замыкание $\bar{X}$ его образа. Остается положить $\bar{\mathcal{F}} := p_1^*\mathcal{E} \otimes p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-N)$, где p_1 и p_2 обозначают проекции из $\bar{X}$ на G и $\mathbb{P}^m$, соответственно. Если многообразие X гладкое, то дополнительные условия на $\bar{X}$ и D можно достичь, примененяя теорему Хиронаки. □

Нам также понадобится следующий результат.

Предложение 3.2.26. *Пусть X является открытым подмногообразием в гладком проективном многообразии $\bar{X}$, для которого дополнение $D := \bar{X} \smallsetminus X$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями на $\bar{X}$. Пусть $\bar{\mathcal{F}}$ — локально свободный пучок на $\bar{X}$ и $\mathcal{F} := \bar{\mathcal{F}}|_X$. Тогда имеются изоморфизмы*

$$\mathcal{F}_{\mathrm{pol}} \simeq \varinjlim_n \bar{\mathcal{F}}(nD)_{\mathrm{pol}}|_X\,,$$

$$\underline{\operatorname{Pol}}_\bullet(X, \mathcal{F}) \simeq \varinjlim_n \underline{\operatorname{Pol}}_\bullet\big(\bar{X}, \bar{\mathcal{F}}(nD)\big)|_X\,.$$

Доказательство. Для доказательства первого изоморфизма выберем произвольное открытое подмножество U в X и сравним сечения обоих пучков на U. По теореме Хиронаки существует собственный бирациональный морфизм $\bar\pi : \bar Y \to \bar X$ из гладкого многообразия, являющийся изоморфизмом над U и для которого следующие подмногообразия в $\bar Y$ являются дивизорами с простыми нормальными пересечениями: $\widetilde D := \bar\pi^{-1}(D)$, замыкание E в $\bar\pi^{-1}(X \smallsetminus U)$ на $\bar Y$ и $\bar\pi^{-1}(\bar X \smallsetminus U) = E \cup \widetilde D$. Положим $Y := \bar\pi^{-1}(X) = \bar Y \smallsetminus \widetilde D$ и $\pi := \bar\pi|_Y$. Будем использовать, что для произвольного многообразия V, дивизора Картье $W \subset V$ и когерентного пучка $\mathcal{G}$ на V имеется изоморфизм $H^0(V \smallsetminus W, \mathcal{G}|_{V\smallsetminus W}) \simeq \varinjlim_n H^0\big(V, \mathcal{G}(nW)\big)$. Таким образом, имеем

$$\mathcal{F}_{\mathrm{pol}}(U) \simeq H^0\big(Y, \pi^!\mathcal{F}(E)|_Y\big) \simeq \varinjlim_n H^0\big(\bar Y, \bar\pi^!\bar{\mathcal{F}}(E + n\widetilde D)\big) \simeq$$

$$\simeq \varinjlim_n H^0\big(\bar Y, \bar\pi^!\bar{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar Y}} \mathcal{O}_{\bar Y}(n\widetilde D) \otimes_{\mathcal{O}_{\bar Y}} \mathcal{O}_{\bar Y}(E \cup \widetilde D)\big) \simeq \varinjlim_n H^0\big(\bar Y, \bar\pi^!\bar{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar Y}} \bar\pi^*\mathcal{O}_{\bar X}(nD) \otimes_{\mathcal{O}_{\bar Y}} \mathcal{O}_{\bar Y}(E \cup \widetilde D)\big) \simeq$$

$$\simeq \varinjlim_n H^0\big(\bar Y, \bar\pi^!(\bar{\mathcal{F}}(nD))(E \cup \widetilde D)\big) \simeq \varinjlim_n \bar{\mathcal{F}}(nD)_{\mathrm{pol}}(U)\,,$$

что доказывает первый изоморфизм.

Для доказательства второго изоморфизма достаточно показать, что для любого неприводимого замкнутого подмногообразия $\bar Z \subset \bar X$ с непустым пересечением $Z := X \cap \bar Z$ имеется изоморфизм

$$\mathrm{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z) \simeq \varinjlim_n \mathrm{Pol}_{\bar Z}\big(\bar{\mathcal{F}}(nD)|_{\bar Z}\big).$$

Для этого напомним, что по определению для каждого n пространство $\mathrm{Pol}_{\bar Z}\big(\bar{\mathcal{F}}(nD)|_{\bar Z}\big)$ является объединением в $\omega_{k(Z)} \otimes_{k(Z)} \mathcal{F}_{k(Z)}$ подпространств

$$H^0\big(\bar V, \omega_{\bar V}(\bar W) \otimes_{\mathcal{O}_{\bar V}} \bar f^*\bar{\mathcal{F}}(nD)|_{\bar Z}\big)$$

по всем наборам $(\bar V, \bar f, \bar W)$, где $\bar V$ — гладкое многообразие, $\bar f\colon \bar V \to \bar Z$ — собственный бирациональный морфизм, а $\bar W \subset \bar V$ — дивизор с простыми нормальными пересечениями на $\bar V$. Кроме того, по теореме Хиронаки и по следствию 1.4.12 достаточно рассмотреть только такие наборы $(\bar V, \bar f, \bar W)$, для которых $C := \bar f^{-1}(\bar Z \smallsetminus Z) = \bar f^{-1}(\bar Z \cap D)$ и $C \cup \bar W$ являются дивизорами с простыми нормальными пересечениями на $\bar V$. С другой стороны по лемме 1.4.9 и по следствию 1.4.12 пространство $\mathrm{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z)$ является объединением в $\omega_{k(Z)} \otimes_{k(Z)} \mathcal{F}_{k(Z)}$ подпространств

$$H^0\big(V, \omega_V(W) \otimes_{\mathcal{O}_V} f^*\mathcal{F}|_Z\big)$$

по всем наборам $(\bar V, \bar f, \bar W)$ как выше, где $V := \bar f^{-1}(Z)$, $f := \bar f|_V$ и $W := \bar W \cap V$. Подобно доказательству первого изоморфизма имеем набор изоморфизмов

$$H^0\big(V, \omega_V(W) \otimes_{\mathcal{O}_V} f^*\mathcal{F}|_Z\big) \simeq \varinjlim_n H^0\big(\bar V, \omega_{\bar V}(\bar W) \otimes_{\mathcal{O}_{\bar V}} \bar f^*\bar{\mathcal{F}}|_{\bar Z} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar V}} \mathcal{O}_{\bar V}(nC)\big) \simeq$$

$$\simeq \varinjlim_n H^0\big(\bar{V}, \omega_{\bar{V}}(\bar{W}) \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{V}}} \bar{f}^*\bar{\mathcal{F}}(nD)|_{\bar{Z}}\big)\,,$$

что доказывает второй изоморфизм. □

Теперь заметим, что для X, $\bar{X}$, D как в предложении 3.2.26 и для любого $p \geqslant 0$ имеется изоморфизм

$$H^p(X, \mathcal{F}) \simeq \varinjlim_n H^p\big(\bar{X}, \bar{\mathcal{F}}(nD)\big)\,,$$

потому что направленные пределы коммутируют со взятием когомологий. Следовательно, объединяя лемму 3.2.25, предложение 3.2.26 и замечание 3.2.24, мы завершаем сведение к проективному случаю и, таким образом, доказываем теорему 3.2.6 и теорему 3.2.7.

3.3. Дополнительные свойства полярных цепей

3.3.1. **Связь с модулями циклов Роста.** В статье [119] Рост ввел понятие модуля циклов. Можно сказать, что модуль циклов над многообразием X — это правило, которое сопоставляет каждому полю (K, φ) над X градуированную абелеву группу $M(K, \varphi)$. При этом градуированные группы $M(K, \varphi)$ должны быть снабжены отображениями обратного образа, следа и отображениями вычета, которые должны удовлетворять некоторому естественному набору аксиом. Положим

$$M(\mathcal{F})(K, \varphi) := \bigoplus_{q \geqslant 0} M_q(\mathcal{F})(K, \varphi)\,,$$

см. определении 3.2.11. Предложение 3.2.13 равносильно тому, что это задает модуль циклов Роста.

Предложение 3.3.1. *Пусть $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на многообразии X. Тогда сопоставление*

$$(K, \varphi) \longmapsto M(\mathcal{F})(K, \varphi)$$

продолжается до модуля циклов над многообразием X, где (K, φ) пробегает все поля над X.

Действительно, предложение 3.2.13(i)-(vi) устанавливает существование всех данных, необходимых для того, чтобы определить модуль циклов над X, а предложение 3.2.13(vii) вместе с общими свойствами отображений обратного образа, следа и отображений вычета для логарифмических форм, см. § 1.4.2, показывает, что для этих данных выполнены аксиомы Роста.

До конца этого параграфа мы будем предполагать, что многообразие X гладкое проективное, а $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. Оказывается, что в этом случае теорему 3.2.6, теорему 3.2.7, а, значит, и теорему 3.1.4, являющуюся основным результатом в статье [80], можно вывести из общих свойств модулей циклов Роста и из теории смешанных структур Ходжа.

А именно, по предложению 3.2.13(viii) модуль циклов $M(\mathcal{O}_X)$ является обратным образом модуля циклов $M(\mathcal{O}_{\mathrm{pt}})$ над точкой $\mathrm{pt} = \mathrm{Spec}(k)$: для любого поля (K, φ) над X имеется равенство

$$M(\mathcal{O}_X)(K, \varphi) = M(\mathcal{O}_{\mathrm{pt}})(K, \varphi_K)\,,$$

где $\varphi_K\colon \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(k)$ является каноническим морфизмом. Напомним, что теорема 6.1 из [119] утверждает локальную точность комплекса Герстена, построенного по произвольному модулю циклов над точкой, и обобщающего комплекс Герстена (1.2.12) в § 1.2.3, построенный по алгебраическим K-группам. В частности, из этого сразу же следует теорема 3.2.6 в этом частном случае. Заметим, что, тем не менее, локальная точность комплекса Герстена неизвестна для произвольного модуля циклов над X, что подчеркивает нетривиальность данной теоремы 3.2.6 в полной общности.

Далее, для того, чтобы доказать теорему 3.2.7 для пучка $\mathcal{G} = \omega_X$ в рамках данного подхода, мы будем использовать еще один модуль циклов над точкой

$$H(K, \varphi_K) := \varinjlim_{U} \bigoplus_{q \geqslant 0} H^q_{dR}(U) \simeq \bigoplus_{q \geqslant 0} H^q_{dR}(K)\,,$$

где U пробегает все открытые подмножества в гладком неприводимом многообразии V над k с $k(V) \simeq K$, а $H^\bullet_{dR}$ обозначает алгебраические когомологии де Рама. Данный модуль циклов был рассмотрен ранее Блохом и Огасом [21], которые доказали локальную точность соответствующего комплекса Герстена для произвольного гладкого многообразия X. Более того, они построили спектральную последовательность, сходящуюся к $H^\bullet_{dR}(X)$, в которой член E^1 составлен из однородных частей данного комплекса Герстена.

Ниже мы будем использовать некоторые факты из теории смешанных структур Ходжа, см. работу Делиня [33]. Фильтрация Ходжа задает на модуле циклов H убывающую фильтрацию по формуле

$$F^p H(K, \varphi_K) := \varinjlim_{U} \bigoplus_{q \geqslant 0} F^{p+r} H^q_{dR}(U)\,,$$

где $r := \dim(U)$. Заметим, что все высшие дифференциалы в спектральной последовательности Блоха–Огаса являются строгими гомоморфизмами относительно фильтрации $F^\bullet H$. Действительно, по принципу Лефшеца можно считать, что $k = \mathbb{C}$, а в этом случае когомологии де Рама снабжены смешанными структурами Ходжа, которые образуют абелеву категорию, все морфизмы в которой строгие относительно фильтрации Ходжа. Кроме того, имеется канонический изоморфизм $F^r H^r_{dR}(U) \simeq (\omega_{\bar{U}})_{\mathrm{pol}}(U)$, где $\bar{U}$ является произвольной гладкой компактификацией гладкого аффинного многообразия U, причем $F^r H^q_{dR}(U) = 0$

при $q < r$. Поэтому, рассматривая член фильтрации F^0 в спектральной последовательности Блоха–Огаса для гладкого проективного многообразия X, мы получаем, что все строки обращаются в нуль, кроме одной, которая в точности совпадает с комплексом $\mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{O}_X)$.

Это дает еще одно доказательство теоремы 3.2.6 для $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ и, более того, показывает, что имеется канонический изоморфизм

$$F^d H^{p+d}_{dR}(X) \simeq H^p\big(X, (\omega_X)_{\mathrm{pol}}\big)\,.$$

С другой стороны из вырождения спектральной последовательности Ходжа следует, что имеется канонический изоморфизм $F^d H^{p+d}_{dR}(X) \simeq H^p(X, \omega_X)$. Это доказывает теорему 3.2.7 для случая $\mathcal{G} = \omega_X$.

3.3.2. **Алгебраические циклы.** Полярные цепи позволяют дать новую конструкцию классов алгебраических циклов в группах $H^q(X, \Omega^q_X)$, где X является гладким многообразием. А именно, пусть Z — неприводимое подмногообразие размерности p на гладком неприводимом многообразии X размерности d, и пусть $f\colon V \to X$ — собственный морфизм из гладкого многообразия, бирациональный на свой образ $f(V) = Z$. Дифференциал морфизма f определяет сечение α_Z расслоения на V

$$\mathcal{H}om(\mathcal{T}^p_V, f^*\,\mathcal{T}^p_X) \simeq \omega_V \otimes_{\mathcal{O}_V} f^*\,\mathcal{T}^p_X\,,$$

где $\mathcal{T}^p_X := \wedge^p \mathcal{T}_X$, а $\mathcal{T}_X$ обозначает касательное расслоение на X. Очевидно, что регулярное сечение α_Z задает элемент а группе

$$\mathrm{Pol}_Z(\mathcal{T}^p_X|_Z) \subset \mathrm{Pol}_p(X, \mathcal{T}^p_X)\,,$$

причем $\partial\alpha_Z = 0$. По теореме 3.1.4 класс гомологий элемента α_Z в комплексе $\mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{T}^p_X)$ задает элемент в группе $H^{d-p}(X, \Omega^{d-p}_X)$, потому что $\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}^p_X \simeq \Omega^{d-p}_X$ и поэтому имеется канонический изоморфизм

$$H_p\big(\mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{T}^p_X)\big) \simeq H^{d-p}(X, \Omega^{d-p}_X)\,.$$

По линейности это определяет элемент в группе $H^{d-p}(X, \Omega^{d-p}_X)$ для произвольного алгебраического цикла размерности p на X с коэффициентами в k.

Мы видим, что класс алгебраического цикла $\sum_i c_i Z_i$ на X, где $c_i \in k$, тривиален в $H^{d-p}(X, \Omega^{d-p}_X)$ тогда и только тогда, когда соответствующая полярная цепь является полярной границей. Последнее означает, что существует такая цепь $\beta \in \mathrm{Pol}_{p+1}(X, \mathcal{T}^p_X)$, что $\partial\beta = \oplus\,(c_i\,\alpha_{Z_i})$, где α_{Z_i} как выше. Яным образом, это означает, что существует набор неприводимых подмногообразий $Y_j \subset X$ размерности $p+1$ и полярные элементы

$$\beta_j \in \omega_{k(Y_j)} \otimes_{k(Y_j)} (\mathcal{T}^p_X|_{Y_j})_{k(Y_j)}\,,$$

для которых при каждом i выполняется равенство $\sum_j \mathrm{res}_{Y_j Z_i}(\beta_j) = c_i \alpha_{Z_i}$, где сумма берется по подмногообразиям Y_j, содержащим Z_i, а равенство принимает значения в группе $\omega_{k(Z_i)} \otimes_{k(Z_i)} (\mathcal{T}_X^p|_{Z_i})_{k(Z_i)}$.

По теореме 3.1.4 произвольный элемент из группы $H^{d-p}(X, \Omega_X^{d-p})$ может быть представлен полярной цепью

$$\gamma = \oplus \gamma_Z \in \mathrm{Pol}_p(X, \mathcal{T}_X^p)$$

с некоторыми полярными элементами $\gamma_Z \in \omega_{k(Z)} \otimes_{k(Z)} (\mathcal{T}_X^p|_Z)_{k(Z)}$. Мы видим, что класс цепи γ в $H^{d-p}(X, \Omega_X^{d-p})$ может быть представлен алгебраическим циклом тогда и только тогда, когда цепь γ гомологична в полярном комплексе $\mathrm{Pol}_\bullet(X, \mathcal{T}_X^p)$ цепи вида $\gamma' = \oplus \gamma'_Z$, где каждый элемент γ'_Z является кратным определенного выше выделенного элемента α_Z из группы $\omega_{k(Z)} \otimes_{k(Z)} (\mathcal{T}_X^p|_Z)_{k(Z)}$.

3.3.3. **Комплекс Кузена.** Классическая проблема Кузена заключается в том, чтобы найти рациональное (или мероморфное) сечение локально свободного пучка с заданными главными частями. В то же время полярный комплекс соответствует проблеме нахождения логарифмической формы со значениями в локально свободном пучке с заданными вычетами в ее полюсах первого порядка. Придадим данной аналогии более точный смысл.

Пусть X является гладким неприводимым квазипроективным многообразием размерности d. Для неприводимого подмногообразия $i_Z \colon Z \hookrightarrow X$ и пучка абелевых групп $\mathcal{P}$ на X обозначим через $\gamma_Z \mathcal{P}$ подпучок в $\mathcal{P}$, состоящий из сечений пучка $\mathcal{P}$, носитель которых содержится в Z. Будем рассматривать $\gamma_Z \mathcal{P}$ как пучок на Z. Функтор γ_Z из категории пучков на X в категорию пучков на Z точен слева. Пусть η_Z обозначает общую точку многообразия Z. Напомним, что локальные когомологии $H^i_{\eta_Z}(X, \mathcal{P})$ определяются как слой в η_Z правых производных пучков $R^i \gamma_Z \mathcal{P}$:

$$H^i_{\eta_Z}(X, \mathcal{P}) := (R^i \gamma_Z \mathcal{P})_{\eta_Z} .$$

С каждым пучком на $\mathcal{P}$ можно связать комплекс Кузена $\mathrm{Cous}_\bullet(X, \mathcal{P})$, см., например, [61]. В гомологических обозначениях комплекс Кузена является цепным комплексом, члены которого определяются по формуле

$$\mathrm{Cous}_p(X, \mathcal{P}) = \bigoplus_{Z \in X_{(p)}} H^{d-p}_{\eta_Z}(X, \mathcal{P}) .$$

Пусть теперь $\mathcal{G}$ — локально свободный пучок на X. В этом случае локальные когомологии $H^i_{\eta_Z}(X, \mathcal{G})$ обращаются в нуль при $i \neq d-p$, а при $i = d-p$ имеется канонический изоморфизм

$$H^{d-p}_{\eta_Z}(X, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{E}_{\mathcal{O}_{X,Z}}\big((i_Z^! \mathcal{G})_{k(Z)}\big) ,$$

где $\mathrm{E}_{\mathcal{O}_{X,Z}}(M)$ обозначает инъективную оболочку произвольного модуля M над локальным кольцом $\mathcal{O}_{X,Z}$. Кроме того, имеется канонический изоморфизм

$$H^{d-p}(X,\mathcal{G}) \simeq H_p\big(\mathrm{Cous}_\bullet(X,\mathcal{G})\big)\,. \tag{3.3.2}$$

Возвращаясь к полярным комплексам, теорема 3.2.6 дает резольвенту $\mathrm{Pol}_\bullet(X,\mathcal{F})$ пучка $(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_{\mathrm{pol}}$. Из явного вида комплекса $\mathrm{Pol}_\bullet(X,\mathcal{F})$ как прямой суммы по неприводимым подмногообразиям можно легко вывести, что локальные когомологии $H^i_{\eta_Z}\big(X,(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_{\mathrm{pol}}\big)$ обращаются в нуль при $i \neq d-p$, а при $i = d-p$ имеется канонический изоморфизм

$$H^{d-p}_{\eta_Z}\big(X,(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_{\mathrm{pol}}\big) \simeq \mathrm{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z)\,.$$

Из этого следует, что комплекс Кузена пучка $(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_{\mathrm{pol}}$ изоморфен полярному комплексу пучка $\mathcal{F}$:

$$\mathrm{Cous}_\bullet\big(X,(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_{\mathrm{pol}}\big) \simeq \mathrm{Pol}_\bullet(X,\mathcal{F})\,. \tag{3.3.3}$$

Инъективный морфизм пучков $(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_{\mathrm{pol}} \hookrightarrow \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ индуцирует морфизм соответствующих комплексов Кузена $\mathrm{Cous}_\bullet(X,(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_{\mathrm{pol}}) \to \mathrm{Cous}_\bullet(X,\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})$. Таким образом, по формуле (3.3.3) мы получаем инъективный морфизм комплексов

$$\mathrm{Pol}_\bullet(X,\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathrm{Cous}_\bullet(X,\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})\,, \tag{3.3.4}$$

состоящий из инъективных гомоморфизмов

$$\mathrm{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z) \hookrightarrow (\omega_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{F}|_Z)_{k(Z)} \hookrightarrow \mathrm{E}_{\mathcal{O}_{X,Z}}\big((\omega_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{F}|_Z)_{k(Z)}\big)\,,$$

где мы используем, что $i'_Z(\omega_Z \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_{k(Z)} \simeq (\omega_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{F}|_Z)_{k(Z)}$. Формулы (3.3.2) и (3.3.3) вместе с теоремой 3.1.4 приводят к тому, что морфизм в формуле (3.3.4) является квазиизоморфизмом. Таким образом, можно сказать, что для произвольного локально свободного пучка на гладком многообразии его полярный комплекс является квазиизоморфным подкомплексом в его комплексе Кузена, имеющим полюса не выше первого порядка.

В качестве примера рассмотрим гладкую кривую X и положим $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ (ср. с примером 3.1.6). Тогда

$$\mathrm{Pol}_\bullet(X,\omega_X) = \Big(\,0 \longrightarrow \mathrm{Pol}(X,\Omega^1_X) \longrightarrow \bigoplus_{x\in X} k(x) \longrightarrow 0\,\Big)\,,$$

$$\mathrm{Cous}_\bullet(X,\omega_X) = \Big(\,0 \longrightarrow \Omega^1_{k(X)} \longrightarrow \bigoplus_{x\in X} \Omega^1_{k(X)}/\Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}} \longrightarrow 0\,\Big)\,,$$

где $\mathrm{Pol}(X,\Omega^1_X)$ состоит из рациональных 1-форм, имеющих полюса только первого порядка на X, и для любой точки $x \in X$ подгруппа в $\Omega^1_{k(X)}/\Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}}$, имеющая полюса не выше первого порядка, отождествляется с $k(x)$ посредством отображения вычета.

Замечание 3.3.5. Возможно, что существует способ доказать теорему 3.1.4 подобно тому, как доказывается, что комплекс Кузена локально свободного пучка вычисляет его когомологии, см. [61]. С этой целью нужно суметь в соответствующих рассуждениях для каждого замкнутого подмногообразия $i_Z\colon Z \hookrightarrow X$ заменить "топологический" функтор γ_Z, релевантный комплексу Кузена, на "алгебро-геометрический" функтор $i_Z^!$, релевантный полярному комплексу.

Глава 4. Геометрический подход к итерированным рядам Лорана

4.1. Обозначения и терминология

На протяжении всей части под *кольцом* мы подразумеваем коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, и тоже самое для *алгебр* над кольцом. Через A и R обозначаются произвольные кольца, если только относительно колец A и R не оговаривается что-нибудь более специальное.

Зафиксируем терминологию, касающуюся функторов. Мы будем работать с ковариантными функторами из категории коммутативных ассоциативных колец с единицей в категорию множеств или в категорию абелевых групп. Для краткости, мы будем их называть просто *функторами* или *групповыми функторами*, соответственно. Тестовые кольца, на которых берутся значения функторов, обычно будут обозначаться через $A, B, \ldots$

Под *подфунктором* $F \subset G$ мы имеем в виду такой морфизм функторов $F \to G$, что для любого кольца A соответствующее отображение $F(A) \to G(A)$ инъективно. Под *групповым подфунктором* $F \subset G$ имеется в виду такой подфунктор, что соответствующий морфизм $F \to G$ является, кроме того, морфизмом групповых функторов.

При заданном кольце R под *функтором над* R (соответственно, *групповым функтором над* R) мы имеем в виду ковариантный функтор из категории коммутативных ассоциативных R-алгебр с единицей в категорию множеств (соответственно, в категорию абелевых групп). Для функтора F через F_R обозначается соответствующий функтор над кольцом R, являющийся ограничением функтора F на категорию R-алгебр. Базовые кольца, над которыми рассматриваются функторы, обычно будут обозначаться через $R, S, \ldots$

Если функтор F представлен некоторой инд-схемой, то мы будем обозначать эту инд-схему также через F.

Все рассматриваемые в этой части функторы удовлетворяют следующему свойству: морфизмы из функтора F над кольцом R в функтор G над R образуют множество $\mathrm{Hom}_R(F, G)$. Например, это выполнено, если функторы F и G представимы (инд-)аффинными схемами над R. Для групповых функторов F и G через $\mathrm{Hom}^{gr}_R(F, G)$ обозначается множество всех морфизмов групповых функторов из F в G. Через $\underline{\mathrm{Hom}}^{gr}_R(F, G)$ обозначается внутренний Hom-функтор, т.е. $\underline{\mathrm{Hom}}^{gr}_R(F, G)$ — это групповой функтор над кольцом R, сопоставляющий R-алгебре A группу $\mathrm{Hom}^{gr}_A(F_A, G_A)$.

Введем также обозначения для различных произведений. Пусть n натуральное число. Если X является объектом в категории с конечными произведениями (например, X — это множество, схема, или функтор), то через $X^{\times n}$ мы обозначим n-кратную декартову степень

объекта X (которая является множеством, схемой, или функтором, соответственно). Подчеркнем, что если X является, кроме того, групповым объектом (например, X — это группа, групповая схема, или групповой функтор), то $X^{\times n}$ все равно обозначает только объект в исходной категории без групповой структуры (который является множеством, схемой, или функтором, соответственно).

Напротив, если M является объектом в аддитивной категории (например, M — это абелева группа, модуль над кольцом, или пучок абелевых групп), то $M^{\oplus n}$ обозначает n-кратную прямую сумму объекта M с собой (которая является абелевой группой, модулем над кольцом, или пучком абелевых групп, соответственно). Иногда мы сокращаем обозначение $M^{\oplus n}$ до обозначения M^n, в частности, для $M = \mathbb{Z}$.

Для заданных абелевых групп M и N под *полилинейным отображением* $\varphi\colon M^{\times n} \to N$ мы подразумеваем отображение множеств (согласно нашим обозначениям, $M^{\times n}$ рассматривается лишь как множество), для которого выполняется условие

$$\varphi(m_1, \dots, m_i, \dots, m_n) + \varphi(m_1, \dots, m_i', \dots, m_n) = \varphi(m_1, \dots, m_i + m_i', \dots, m_n)$$

при всех $m_1, \dots, m_i, m_i' \dots, m_n \in M$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Отметим, что мы продолжаем использовать термин "полилинейное", даже если групповой закон в M или N обозначается мультипликативно, в частности, для группы обратимых элементов кольца с групповым законом, заданным произведением элементов.

4.2. Итерированная группа петель группы $\mathbb{G}_m$

4.2.1. **Итерированные функторы петель.**

Определение 4.2.1. Для функтора F (см. § 4.1) его *функтор петель* LF — это функтор, заданный по формуле $LF(A) := F\big(A((t))\big)$ для произвольного кольца A, где $A((t))$ является кольцом рядов Лорана над A (см. § 1.5.1). Для натурального числа $n \geqslant 1$ *n-кратный функтор петель* L^nF функтора F — это функтор $\underbrace{L \dots L}_{n} F$. Если F является групповым функтором, то функторы LF и L^nF также называются *группой петель* и *n-кратной группой петель* группового функтора F, соответственно.

В явном виде, имеем равенство

$$L^nF(A) = F\big(A((t_1)) \dots ((t_n))\big)$$

для кольца A. Определены естественные морфизмы функторов

$$F \longrightarrow LF\,, \qquad F \longrightarrow L^nF\,, \tag{4.2.2}$$

соответствующие отображениям

$$F(A) \longrightarrow F\big(A((t))\big)\,, \qquad F(A) \longrightarrow F\big(A((t_1))\dots((t_n))\big)\,,$$

заданным рядами, состоящими только из постоянного члена. Для аддитивной групповой схемы $\mathbb{G}_a = \mathrm{Spec}\,\big(\mathbb{Z}[x]\big)$ группа $L^n\mathbb{G}_a(A)$ является аддитивной группой кольца итерированных рядов Лорана $\mathcal{L}^n(A)$ (см. § 1.5.1). Нас будет главным образом интересовать n-кратная группа петель $L^n\mathbb{G}_m$ мультипликативной групповой схемы $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}\,\big(\mathbb{Z}[x, x^{-1}]\big)$. В явном виде, группа $L^n\mathbb{G}_m(A)$ является мультипликативной группой $\mathcal{L}^n(A)^*$ обратимых элементов кольца $\mathcal{L}^n(A)$.

4.2.2. **Разложение.** Для того, чтобы описать n-кратную группу петель $L^n\mathbb{G}_m$, мы рассмотрим в ней различные групповые подфункторы. Во-первых, согласно формуле (4.2.2) имеется вложение групповых функторов

$$\mathbb{G}_m \hookrightarrow L^n\mathbb{G}_m\,, \tag{4.2.3}$$

заданное рядами, состоящими только из постоянного члена.

Пусть $\underline{\mathbb{Z}}$ — постоянный пучок относительно топологии Зарисского, ассоциированный с группой $\mathbb{Z}$ (см. определение 1.2.2 и комментарий после него). Таким образом, для произвольного кольца A группа $\underline{\mathbb{Z}}(A)$ состоит из всех локально постоянных функций на $\mathrm{Spec}(A)$ со значениями в $\mathbb{Z}$.

Для произвольного кольца A и элемента $\underline{l} \in \underline{\mathbb{Z}}^n(A)$ определим элемент $t^{\underline{l}} \in \mathcal{L}^n(A)$ следующим естественным образом:

$$t^{\underline{l}} := (t_1^{l_{1,1}} \cdot \ldots \cdot t_n^{l_{1,n}},\, \ldots,\, t_1^{l_{N,1}} \cdot \ldots \cdot t_n^{l_{N,n}}) \in \mathcal{L}^n(A) \simeq \prod_{i=1}^{N} \mathcal{L}^n(A_i)\,,$$

где $A \simeq \prod\limits_{i=1}^{N} A_i$ является таким разложением, что для каждого номера i, $1 \leqslant i \leqslant N$, ограничение элемента $\underline{l}$ на пространство $\mathrm{Spec}(A_i)$ является постоянной функцией, принимающей значение $(l_{i,1}, \ldots, l_{i,n}) \in \mathbb{Z}^n$. Например, предположим, что $n = 1$ и существует такое разложение в произведение колец $A \simeq B \times B'$, что $\underline{l} \in \underline{\mathbb{Z}}(A)$ принимает значение $m \in \mathbb{Z}$ на $\mathrm{Spec}(B)$ и значение $m' \in \mathbb{Z}$ на $\mathrm{Spec}(B')$. Тогда $t^{\underline{l}}$ равен элементу $(t^m, t^{m'}) \in \mathcal{L}(B) \times \mathcal{L}(B') \simeq \mathcal{L}(A)$.

Имеется вложение групповых функторов

$$\underline{\mathbb{Z}}^n \hookrightarrow L^n\mathbb{G}_m\,, \qquad \underline{l} \longmapsto t^{\underline{l}}\,. \tag{4.2.4}$$

Далее, рассмотрим следующий *лексикографический порядок* на группе $\mathbb{Z}^n$: будем считать, что $(l_1, \ldots, l_n) \leqslant (l'_1, \ldots, l'_n)$ тогда и только тогда, когда либо $l_n < l'_n$, либо $l_n = l'_n$ и

$(l_1, \dots, l_{n-1}) \leqslant (l'_1, \dots, l'_{n-1})$. Отметим, что данный порядок инвариантен относительно сдвигов на элементы группы $\mathbb{Z}^n$. Для краткости будем обозначать элемент $(0, \dots, 0)$ через 0. Определим групповые функторы

$$\mathbb{V}_{n,+}(A) := \Big\{ 1 + \sum_{\mathbb{Z}^n \ni l > 0} a_l t^l \;\mid\; \sum_{l>0} a_l t^l \in \mathcal{L}^n(A) \Big\}, \tag{4.2.5}$$

$$\mathbb{V}_{n,-}(A) := \Big\{ 1 + \sum_{\mathbb{Z}^n \ni l < 0} a_l t^l \;\mid\; \sum_{l<0} a_l t^l \in \mathrm{Nil}\big(\mathcal{L}^n(A)\big) \Big\}. \tag{4.2.6}$$

Групповая структура на функторах $\mathbb{V}_{n,+}$ и $\mathbb{V}_{n,-}$ задается произведением итерированных рядов Лорана. Имеются вложения групповых функторов

$$\mathbb{V}_{n,+} \hookrightarrow L^n\mathbb{G}_m\,, \qquad \mathbb{V}_{n,-} \hookrightarrow L^n\mathbb{G}_m\,. \tag{4.2.7}$$

Предложение 4.2.8. *Вложения* (4.2.3), (4.2.4), *и* (4.2.7) *индуцируют изоморфизм групповых функторов*

$$\underline{\mathbb{Z}}^n \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{V}_{n,+} \times \mathbb{V}_{n,-} \simeq L^n\mathbb{G}_m\,. \tag{4.2.9}$$

Доказательство. Будем использовать индукцию по n. База индукции, т.е. случай $n = 1$, была рассмотрена Конту-Каррером, см. [30, Lem. 1.3], [31, Lem. 0.8]. Для проведения шага индукции рассмотрим сначала функторы петель от всех функторов в формуле (4.2.9), где при этом n заменено на $n-1$. Затем воспользуемся изоморфизмом $\underline{\mathbb{Z}} \simeq L\underline{\mathbb{Z}}$, индуцированным морфизмом (4.2.2) и доказанным Осиповым и Жу в [111, Lem. 3.2]. Остается применить изоморфизмы

$$\mathbb{V}_{1,+} \times L\mathbb{V}_{n-1,+} \simeq \mathbb{V}_{n,+}\,, \qquad \mathbb{V}_{1,-} \times L\mathbb{V}_{n-1,-} \simeq \mathbb{V}_{n,-}\,. \tag{4.2.10}$$

Объясним последние изоморфизмы подробнее. Здесь для заданного кольца A элементы в группах $\mathbb{V}_{1,+}(A)$ и $\mathbb{V}_{1,-}(A)$ являются рядами Лорана от переменной t_1 с коэффициентами из кольца A, удовлетворяющими, соответственно, условиям из формул (4.2.5) и (4.2.6) для $n = 1$. Аналогично, элементы в группах $L\mathbb{V}_{n-1,+}(A)$ и $L\mathbb{V}_{n-1,-}(A)$ являются итерированными рядами Лорана от переменных $t_2, \dots, t_n$ с коэффициентами из кольца $A((t_1))$, удовлетворяющими условиям из формул (4.2.5) и (4.2.6), где число n заменено на число $n-1$, а кольцо A заменено на кольцо $A((t_1))$. Изоморфизмы (4.2.10) могут быть проверены непосредственно при помощи следующего очевидного факта: для произвольного кольца B и подгрупп $P, Q \subset B^*$, удовлетворяющих условиям $P \cap Q = \{1\}$ и $P \cdot (Q-1) = Q - 1$, имеется изоморфизм

$$P \times Q \xrightarrow{\sim} P + Q - 1\,, \qquad (p, q) \longmapsto p \cdot q = p + p \cdot (q-1)\,.$$

Данный факт надо применить к кольцу $B = \mathcal{L}^n(A)$, к подгруппам $P = \mathbb{V}_{1,+}(A)$, $Q = L\mathbb{V}_{n-1,+}(A)$, а также к подгруппам $P = \mathbb{V}_{1,-}(A)$, $Q = L\mathbb{V}_{n-1,-}(A)$. □

Отметим, что при $n = 2$ предложение 4.2.8 было доказано в [111, § 3.1].

4.2.3. **Специальные подгруппы.** Разложение (4.2.9) определяет канонические проекции

$$\nu \,:\, L^n\mathbb{G}_m \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}^n\,, \qquad \pi \,:\, L^n\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m\,. \tag{4.2.11}$$

Если $A = k$ является полем и $n = 1$, то ν совпадает с естественным дискретным нормированием на поле $\mathcal{L}(A) = k((t))$, а отображение π сопоставляет ненулевому ряду его первый ненулевой коэффициент. В общем случае, для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, имеем $\nu(t_i) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где 1 стоит на i-ом месте.

Пример 4.2.12. Пусть ε является формальной переменной, удовлетворяющей соотношению $\varepsilon^2 = 0$. Рассмотрим кольцо $A = \mathbb{Z}[\varepsilon]$ и обратимый ряд Лорана из кольца $\mathcal{L}(A)$

$$f = (\varepsilon t^{-1} + 1) \cdot (1 + t) = \varepsilon t^{-1} + (1 + \varepsilon) + t\,.$$

Тогда выполнено $\nu(f) = 0$ и $\pi(f) = 1$ в то время, как постоянный член ряда f не равен 1.

Через $\mathrm{Nil}(R)$ обозначим нильрадикал кольца R, т.е. множество всех нильпотентных элементов произвольного кольца R. Имеются групповые функторы Nil и $1 + \mathrm{Nil}$, где групповые структуры заданы суммой и произведением элементов произвольного кольца, соответственно. В частности, имеется вложение групповых функторов $(1 + \mathrm{Nil}) \hookrightarrow \mathbb{G}_m$.

Определение 4.2.13. Определим следующие групповые подфункторы группового функтора $L^n\mathbb{G}_m$ (см. формулы (4.2.5), (4.2.6), и (4.2.11)):

$$(L^n\mathbb{G}_m)^0 := \mathrm{Ker}(\nu) = \mathbb{G}_m \times \mathbb{V}_{n,+} \times \mathbb{V}_{n,-}\,,$$

$$(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp := (1 + \mathrm{Nil}) \times \mathbb{V}_{n,+} \times \mathbb{V}_{n,-}\,.$$

Очевидно, что групповой функтор $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp$ вложен в групповой функтор $(L^n\mathbb{G}_m)^0$, пересечение $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp$ и $\mathbb{G}_m$ совпадает с $1 + \mathrm{Nil}$, и выполнено $(L^n\mathbb{G}_m)^0 = \mathbb{G}_m \cdot (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp$. Из предложения 4.2.8 получаем разложения

$$\underline{\mathbb{Z}}^n \times \big(\mathbb{G}_m \cdot (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp\big) = \underline{\mathbb{Z}}^n \times (L^n\mathbb{G}_m)^0 \simeq L^n\mathbb{G}_m\,. \tag{4.2.14}$$

Приведем более явное описание групповых функторов $(L^n\mathbb{G}_m)^0$ и $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp$, а также морфизмов ν и π.

Лемма 4.2.15. *Для любого кольца A выполняется следующее:*

(i) *для любого элемента* $f \in (L^n\mathbb{G}_m)^0(A)$ *постоянный член ряда* f *обратим и его класс в факторгруппе* $A^*/\big(1 + \mathrm{Nil}(A)\big)$ *равен классу элемента* $\pi(f) \in A^*$ *(ср. с примером 4.2.12);*

(ii) *имеется равенство групповых функторов*

$$(L^n\mathbb{G}_m)^0(A) = \Big\{1 + \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t^l \in \mathcal{L}^n(A) \;\mid\; 1 + a_0 \in A^*,\ \sum_{l<0} a_l t^l \in \mathrm{Nil}\big(\mathcal{L}^n(A)\big)\Big\};$$

(iii) *имеется равенство групповых функторов*

$$(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A) = \Big\{1 + \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t^l \in \mathcal{L}^n(A) \;\mid\; a_0 \in \mathrm{Nil}(A),\ \sum_{l<0} a_l t^l \in \mathrm{Nil}\big(\mathcal{L}^n(A)\big)\Big\};$$

Доказательство. (i) Пусть элемент $f \in (L^n\mathbb{G}_m)^0(A)$ равен произведению ag_-g_+, где $a \in A^*$, $g_+ \in \mathbb{V}_{n,+}(A)$ и $g_- \in \mathbb{V}_{n,-}(A)$. Используя формулы (4.2.5) и (4.2.5) и раскрывая скобки, мы видим, что $f = c + h + r$, где $h = \sum_{l>0} b_l t^l \in \mathcal{L}^n(A)$ и $r \in \mathrm{Nil}\big(\mathcal{L}^n(A)\big)$. Таким образом, применяя лемму 1.5.3(ii) к ряду r, мы получаем требуемое утверждение.

(ii) Применяя лемму 1.5.3(i) к ряду r из доказательства пункта (i), мы получаем, что группа $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$ содержится в группе, задаваемой правой стороной формулы. С другой стороны, группа из правой стороны формулы не пересекается с подгруппой $\mathbb{Z}^n(A) \subset L^n\mathbb{G}_m(A)$. Поэтому из разложения (4.2.14) следует, что обе части формулы действительно равны. □

Замечание 4.2.16. Из леммы 4.2.15(i),(ii) получается следующий критерий обратимости для итерированных рядов Лорана. Элемент $f \in \mathcal{L}^n(A)$ обратим тогда и только тогда, когда существует локально постоянная функция $\underline{l}$, совпадающая с $\nu(f) \in \underline{\mathbb{Z}}^n(A)$, однозначно характеризуемая следующим свойством: существует конечное разложение в произведение колец $A \simeq \prod_{i=1}^N A_i$, индуцирующее разложения $\mathcal{L}^n(A) \simeq \prod_{i=1}^N \mathcal{L}^n(A_i)$ и $f = \prod_{i=1}^N f_i$, где $f_i = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_{i,l}t^l \in \mathcal{L}^n(A_i)$, для которого $\underline{l}$ принимает постоянное значение l_i на $\mathrm{Spec}(A_i)$, равное наименьшему индексу обратимого коэффициента в f_i. При этом для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant N$, ряд $\sum_{l<l_i} a_{i,l}t^l \in \mathcal{L}^n(A_i)$ нильпотентен и, в частности, все коэффициенты ряда f_i с индексами меньшими, чем l_i, являются нильпотентными элементами кольца A.

Следствие 4.2.17. *Для любого кольца* A *имеются равенства (см. определение 1.5.8)*

$$(L^n\mathbb{G}_m)^0(A) = \big(\mathcal{L}^n(A)^0\big)^*, \qquad (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A) = 1 + \mathcal{L}^n(A)^\sharp$$

между подмножествами в $\mathcal{L}^n(A)$.

Доказательство. Из предложения 1.5.9 и леммы 4.2.15(ii) следует, что $(L^n\mathbb{G}_m)^0(A)$ содержится в $\big(\mathcal{L}^n(A)^0\big)^*$. Пусть $f \in \big(\mathcal{L}^n(A)^0\big)^*$. По предложению 1.5.9 и по замечанию 4.2.16 имеем $\nu(f) \geqslant 0$ и, аналогично, $-\nu(f) = \nu(f^{-1}) \geqslant 0$. Таким образом, $f \in (L^n\mathbb{G}_m)^0(A)$.

Равенство $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A) = 1 + \mathcal{L}^n(A)^\sharp$ выводится непосредственно из предложения 1.5.9 и леммы 4.2.15(iii), а также из того, что по лемме 1.5.3(ii) выполнение условия $\sum\limits_{l\leqslant 0} a_l t^l \in \mathrm{Nil}\big(\mathcal{L}^n(A)\big)$ равносильно выполнению условий $\sum\limits_{l<0} a_l t^l \in \mathrm{Nil}\big(\mathcal{L}^n(A)\big)$ и $a_0 \in \mathrm{Nil}(A)$. $\square$

Обозначим через $\widetilde{\mathbb{G}}_m$ функтор, сопоставляющий кольцу A множество таких элементов $f \in A^*$, что $1 - f \in A^*$. Имеется изоморфизм $\widetilde{\mathbb{G}}_m \simeq \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0, 1\}$. Определим подфунктор $(L^n\widetilde{\mathbb{G}}_m)'$ в $L^n\widetilde{\mathbb{G}}_m$ по формуле

$$(L^n\widetilde{\mathbb{G}}_m)'(A) = \Big\{ f \in \mathcal{L}^n(A)^* \;\mid\; 1 - f \in \mathcal{L}^n(A)^*\,,\;\; \nu(f) \geqslant \nu(1-f) \Big\}\,, \tag{4.2.18}$$

где A является произвольным кольцом, и требуется, чтобы неравенство $\nu(f) \geqslant \nu(1-f)$ между локально постоянными функциями на $\mathrm{Spec}(A)$ выполнялось поточечно.

Следствие 4.2.19.

(i) *Имеется изоморфизм функторов*

$$\big(\underline{\mathbb{Z}}^n_{\neq 0} \times (L^n\mathbb{G}_m)^0\big) \sqcup \big(\widetilde{\mathbb{G}}_m \times \mathbb{V}_{n,+} \times \mathbb{V}_{n,-}\big) \xrightarrow{\sim} (L^n\widetilde{\mathbb{G}}_m)'\,,$$

где $\underline{\mathbb{Z}}^n_{\neq 0} := \underline{\mathbb{Z}}^n \smallsetminus \{0\}$, *заданный естественным вложением левой части в* $L^n\mathbb{G}_m$.

(ii) *Пусть кольцо* A *не разлагается в произведение колец, и пусть* $f \in (L^n\widetilde{\mathbb{G}}_m)'(A)$. *Тогда если* $\nu(f) > 0$, *то* $1-f \in (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$ *и* $\nu(1-f) = 0$, *если* $\nu(f) < 0$, *то* $\nu(1-f) = \nu(f)$, *а если* $\nu(f) = 0$, *то* $\nu(1-f) = 0$.

Доказательство. Будем доказывать оба пункта леммы одновременно. Достаточно показать, что морфизм из пункта (i) корректно определен и является изоморфизмом после вычисления значения на произвольном кольце A, не разлагающимся в произведение колец. В этом случае имеется равенство $\underline{\mathbb{Z}}^n(A) = \mathbb{Z}^n$. Пусть $f \in \mathcal{L}(A)^*$.

Предположим, что $\nu(f) > 0$. Тогда по лемме 4.2.15(ii) имеется равенство $f = g + h$, где все ненулевые коэффициенты итерированного ряда Лорана $g \in \mathcal{L}^n(A)$ имеют положительные индексы, а итерированный ряд Лорана h нильпотентен. Легко видеть, что тогда итерированный ряд Лорана $1 - h$ обратим, а значит обратим и ряд $1 - g - h$. Кроме того, из замечания 4.2.16 следует, что $1 - f \in (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$.

Если $\nu(f) < 0$, то из замечания 4.2.16 напрямую следует, что $1 - f \in \mathcal{L}^n(A)^*$, причем $\nu(1-f) = \nu(f)$.

Наконец, предположим, что $\nu(f) = 0$. Тогда вновь по замечанию 4.2.16 условия $1 - f \in \mathcal{L}^n(A)^*$ и $0 = \nu(f) \geqslant \nu(1-f)$ равносильны условиям $1 - f \in \mathcal{L}^n(A)^*$ и $\nu(1-f) = 0$.

Также по замечанию 4.2.16 видно, что последние условия равносильны тому, что итерированный ряд Лорана $1-f$ имеет обратимый постоянный член. Из леммы 4.2.15(i) следует, что это равносильно обратимости элемента $1-\pi(f)\in A$. Вследствие разложения (4.2.9) из предложения 4.2.8 это доказывает лемму. □

Определение 4.2.20. Определим следующий групповой подфунктор группового функтора $L^n\mathbb{G}_a$:

$$(L^n\mathbb{G}_a)^\sharp(A) := \mathcal{L}^n(A)^\sharp = \Big\{ \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t^l \;\mid\; \sum_{l>0} a_l t^l \in \mathcal{L}^n(A),\, \sum_{l\leqslant 0} a_l t^l \in \mathrm{Nil}\big(\mathcal{L}^n(A)\big) \Big\}.$$

Очевидно, имеется изоморфизм функторов $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp \simeq (L^n\mathbb{G}_a)^\sharp$, $f\mapsto f-1$, который не уважает групповую структуру. Однако над полем $\mathbb{Q}$ определен групповой изоморфизм, задаваемый следующим предложением.

Предложение 4.2.21. *Имеется корректно определенный изоморфизм групповых функторов*

$$\log \;:\; (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} (L^n\mathbb{G}_a)^\sharp_{\mathbb{Q}},$$

обратный к которому задается отображением exp.

Доказательство. Это непосредственно следует из леммы 1.5.13, так как имеются равенства степенных рядов

$$\exp\big(\log(1+x)\big) = 1+x, \qquad \log\big(\exp(x)\big) = x,$$

$$\log(1+x+y+xy) = \log(1+x)+\log(1+y), \qquad \exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y).$$

□

4.3. Вспомогательные результаты про инд-аффинные схемы

Пусть R является кольцом.

4.3.1. **Инд-схемы.** Напомним некоторые общие понятия, связанные с *инд-схемами*, т.е. с инд-объектами в категории схем (см. замечание 2.1.13(i)). *Инд-аффинная схема* — это инд-схема X, которая изоморфна такой инд-схеме "$\varinjlim$"X_i, что все схемы X_i, $i\in I$, являются аффинными схемами. Аналогично, имеются понятия инд-схем и инд-аффинных схем над кольцом R.

Если задана инд-схема X, то обозначим также через X функтор, который сопоставляет кольцу A множество $X(A) := \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Spec}(A), X\big)$. Отметим, что множество $X(A)$ равно множеству $\varinjlim_{i\in I} X_i(A)$ для инд-схемы $X =$ "$\varinjlim$"X_i. Морфизм между инд-схемами — это тоже самое, что морфизм между соответствующими функторами на категории колец.

Например, из комментария после определения 1.2.2 следует, что групповой функтор $\underline{\mathbb{Z}}$ представим инд-аффинной схемой "$\varinjlim\limits_{N\geqslant 0}$" $\coprod\limits_{-N\leqslant i\leqslant N} \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$.

Инд-замкнутая подсхема схемы V — это инд-объект в категории замкнутых подсхем схемы V с согласованными морфизмами, являющимися вложениями между замкнутыми подсхемами. В явном виде, инд-замкнутая подсхема схемы V определяется при помощи направленного частично упорядоченного множества I и набора замкнутых подсхем $X_i \subset V$ для всех индексов $i \in I$, так что выполнено $X_i \subset X_j$ при $i \leqslant j$. В частности, инд-замкнутая подсхема аффинной схемы является инд-аффинной схемой.

Инд-замкнутая подсхема инд-схемы $Y \simeq$ "$\varinjlim\limits_{j\in J}$"$Y_j$ — это инд-схема $X \simeq$ "$\varinjlim\limits_{i\in I}$"$X_i$ вместе с таким морфизмом инд-схем $X \to Y$, что для любого индекса $i \in I$ имеются индекс $j \in J$ и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_i & \longrightarrow & Y_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

где верхняя горизонтальная стрелка является замкнутым вложением схем, а вертикальные стрелки являются естественными морфизмами.

В частности, если Y является инд-замкнутой подсхемой схемы V, то инд-замкнутая подсхема в Y — это тоже самое, что такая инд-замкнутая подсхема $X \simeq$ "$\varinjlim\limits_{i\in I}$"$X_i$ схемы V, что для любого индекса $i \in I$ существует индекс $j \in J$, для которого выполнено $X_i \subset Y_j$. Равносильно, имеется морфизм $X \to Y$ в категории инд-замкнутых подсхем схемы V.

Если заданы две инд-замкнутые подсхемы $X \simeq$ "$\varinjlim\limits_{i\in I}$"$X_i$ и $Y \simeq$ "$\varinjlim\limits_{j\in J}$"$Y_j$ схемы V, то *пересечением* $X \cap Y$ называется инд-замкнутая подсхема "$\varinjlim\limits_{(i,j)\in I\times J}$"$X_i \cap Y_j$ схемы V. Здесь рассматривается схемное пересечение двух замкнутых подсхем схемы V, т.е. пересечение задается пучком идеалов, порожденным пучками идеалов двух замкнутых подсхем. Более широко, можно также рассмотреть пересечение двух инд-замкнутых подсхем в инд-схеме, но мы не будем это использовать.

Если задана инд-схема X, то кольцо *регулярных функций* на X определяется по формуле $\mathcal{O}(X) := \operatorname{Hom}(X, \mathbb{A}^1)$. В частности, для аффинной схемы V имеем $V = \operatorname{Spec}\big(\mathcal{O}(V)\big)$. В явном виде, для инд-схемы $X \simeq$ "$\varinjlim\limits_{i\in I}$"$X_i$ имеется канонический изоморфизм $\mathcal{O}(X) \simeq \varprojlim\limits_{i\in I} \mathcal{O}(X_i)$. Морфизм инд-схем $\alpha\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм колец $\alpha^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$. Для инд-схемы X над кольцом R кольцо $\mathcal{O}(X)$ естественным образом является R-алгеброй.

Регулярные функции на замкнутой подсхеме в аффинном пространстве можно представить как многочлены от координат. Это не остается верным для инд-замкнутой подсхемы аффинного пространства. В этом случае естественно представлять регулярные функции как степенные ряды от координат. Например, для инд-замкнутой подсхемы $X = \text{“}\varinjlim_{d\in\mathbb{N}}\text{”}\operatorname{Spec}\big(\mathbb{Z}[x]/(x^d)\big)$ схемы $\mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec}\big(\mathbb{Z}[x]\big)$ имеется изоморфизм $\mathcal{O}(X) \simeq \mathbb{Z}[[x]]$. В § 4.3.4 мы обобщаем этот факт для некоторого класса инд-замкнутых подсхем в инд-аффинных пространствах.

4.3.2. **Алгебраическая сходимость степенных рядов.** Введем некоторые обозначения, касающиеся многочленов и степенных рядов от бесконечного числа переменных. Пусть M является (возможно, бесконечным) множеством. Через $R[M]$ обозначим алгебру многочленов над кольцом R от формальных переменных x_m, которые биективно соответствуют элементам $m \in M$. Мы будем также обозначать эту алгебру через $R[x_m;\, m \in M]$, если будет нужно указать явно формальные переменные. Заметим, что множество одночленов степени d с единичным коэффициентом от переменных x_m, $m \in M$, находится в биективном соответствии с d-ой симметрической степенью $\operatorname{Sym}^d(M)$ множества M, т.е. с множеством неупорядоченных наборов из d элементов множества M. Таким образом, имеется изоморфизм

$$R[M] \simeq \bigoplus_{d\geqslant 0} R^{\oplus \operatorname{Sym}^d(M)},$$

где для множества P через $R^{\oplus P}$ обозначена группа всех функций с конечным носителем из множества P в R.

Будем называть аффинную схему $\mathbb{A}^M_R := \operatorname{Spec}\big(R[M]\big)$ *аффинным пространством* над кольцом R. Таким образом, формальные переменные x_m, $m \in M$, интерпретируются как координаты на аффинном пространстве $\mathbb{A}^M_R$. Для краткости, будем обозначать аффинное пространство $\mathbb{A}^M_R$ через $\mathbb{A}^M$, если из контекста ясно, над каким кольцом оно рассматривается. Далее мы будем рассматривать аффинные пространства над кольцом R. Если задано подмножество $M' \subset M$, то имеется замкнутое вложение $\mathbb{A}^{M'} \subset \mathbb{A}^M$, для которого соответствующий эпиморфизм $R[M] \to R[M']$ тождественен на элементах множества M' и обращается в нуль на элементах множества $M \smallsetminus M'$. Через $(M) \subset R[M]$ обозначим идеал, порожденный всеми элементами x_m, $m \in M$.

Определение 4.3.1. Алгебра *степенных рядов над кольцом R от формальных переменных x_m, $m \in M$,* определяется по формуле

$$R[[M]] := \varprojlim_{(M',d)} R[M']/(M')^d,$$

где множество M' пробегает все конечные подмножества множества M, и $d \in \mathbb{N}$.

Будем обозначать эту алгебру также через $R[[x_m;\, m \in M]]$. Если множество M имеет не более, чем счетную мощность, то элементы алгебры $R[[M]]$ — это счетные суммы попарно различных одночленов от переменных x_m, $m \in M$, с коэффициентами из кольца R. Например, бесконечные суммы $\sum\limits_{m\in M} x_m$, $\sum\limits_{d\geqslant 0} x^d$ и $\sum\limits_{m\in M,\, d\geqslant 0} x_m^d$ являются степенными рядами, в то время как бесконечная сумма $x + 2x + 3x + \ldots$ степенным рядом не является. Для общего множества M элементы из кольца $R[[M]]$ являются трансфинитными суммами таких одночленов. В любом случае, имеются изоморфизмы

$$R[[M]] \simeq \prod_{d\geqslant 0} \varprojlim_{M'} R^{\oplus \operatorname{Sym}^d(M')} \simeq \prod_{d\geqslant 0} R^{\operatorname{Sym}^d(M)}\,, \tag{4.3.2}$$

где, как выше, множество M' пробегает все конечные подмножества множества M, и для множества P через R^P обозначена группа всех функций из множества P в кольцо R. Таким образом, степенные ряды $\varphi \in R[[M]]$ раскладываются в счетную сумму *однородных степенных рядов*: $\varphi = \sum\limits_{d\geqslant 0} \varphi_d$, где $\varphi_d \in R^{\operatorname{Sym}^d(M)}$. *Носителем степенного ряда* φ называется множество одночленов, которые имеют ненулевой коэффициент в ряде φ. Другими словами, носитель является подмножеством множества $\coprod\limits_{d\geqslant 0} \operatorname{Sym}^d(M)$, соответствующим ненулевым коэффициентам ряда φ относительно разложения (4.3.2).

Определение 4.3.3.

(i) Пусть A является R-алгеброй, и пусть $d \geqslant 0$ — натуральное число. *Однородный степенной ряд* $\varphi_d \in R^{\operatorname{Sym}^d(M)}$ *алгебраически сходится в* A*-точке* $p \in \mathbb{A}^M(A) = A^M$ если все одночлены, кроме конечного их числа, из носителя ряда φ_d обращаются в нуль в точке p. Если это выполнено, то $\varphi_d(p)$ является корректно определенным элементом алгебры A.

(ii) Произвольный *степенной ряд* $\varphi \in R[[M]]$ *алгебраически сходится в* A*-точке* p, определенной как в пункте (i), если все его однородные компоненты φ_d, где $d \geqslant 0$, алгебраически сходятся в точке p, и существует такое число $d_0 \in \mathbb{N}$, что $\varphi_d(p) = 0$ при $d \geqslant d_0$. Если это выполнено, то $\varphi(p) = \sum\limits_{d<d_0} \varphi_d(p)$ является корректно определенным элементом алгебры A.

(iii) Степенной ряд φ *алгебраически сходится на (инд-)замкнутой подсхеме* $X \subset \mathbb{A}^M$, если ряд φ алгебраически сходится во всех ее A-точках для любой R-алгебры A. Через $\mathcal{A}(X)$ обозначим множество всех степенных рядов из кольца $R[[M]]$, которые алгебраически сходятся на инд-замкнутой подсхеме X.

Пример 4.3.4.

(o) Любой многочлен алгебраически сходится в любой точке.

(i) Любой степенной ряд алгебраически сходится в точке, у которой только конечное число ненулевых координат, все из которых нильпотентны.

(ii) Ряд $\sum\limits_{m\in M} x_m$ алгебраически сходится в данной точке тогда и только тогда, когда все ее координаты, кроме конечного их числа, равны нулю.

(iii) Ряд $\sum\limits_{d\geqslant 0}(x_1^d - x_2^d)$ алгебраически сходится (и, в действительности, обращается в нуль) в точке $(1,1)\in\mathbb{A}^2$, в то время как ряд $\sum\limits_{d\geqslant 0}(-1)^d x_1^d$ не алгебраически сходится в этой точке.

(iv) Для любой замкнутой подсхемы $V\subset\mathbb{A}^M$ степенной ряд алгебраически сходится на V тогда и только тогда, когда он алгебраически сходится в точке $p\in\mathbb{A}^M\big(\mathcal{O}(V)\big)$, соответствующей гомоморфизму ограничения $\mathcal{O}(\mathbb{A}^M)\to\mathcal{O}(V)$.

(v) Для любой инд-замкнутой подсхемы $X = \text{“}\varinjlim\text{”}X_i$ в аффинном пространстве $\mathbb{A}^M$ степенной ряд алгебраически сходится на X тогда и только тогда, когда он алгебраически сходится во всех точках $p_i\in\mathbb{A}^M\big(\mathcal{O}(X_i)\big)$, соответствующих гомоморфизмам ограничения $\mathcal{O}(\mathbb{A}^M)\to\mathcal{O}(X_i)$, где $i\in I$.

Для любой инд-замкнутой подсхемы $X\subset\mathbb{A}^M$ множество $\mathcal{A}(X)$ является R-алгеброй, и имеется канонический гомоморфизм R-алгебр

$$\mathcal{A}(X)\longrightarrow\mathcal{O}(X)\,, \tag{4.3.5}$$

заданный вычислением алгебраически сходящихся рядов в точках инд-замкнутой подсхемы X. Если этот гомоморфизм является изоморфизмом, то это значит, что любая регулярная функция на инд-замкнутой подсхеме X однозначно раскладывается в алгебраически сходящийся степенной ряд от переменных x_m, $m\in M$. Например, это выполнено для самого аффинного пространства $\mathbb{A}^M$.

4.3.3. **Инд-аффинные пространства.** Как и выше, мы продолжаем рассматривать аффинные пространства над кольцом R. Мы будем работать с инд-замкнутыми подсхемами не только в аффинных пространствах, но и в инд-аффинных пространствах. Для этого введем еще одно понятие. Сначала напомним, что инд-множество — это инд-объект в категории множеств.

Определение 4.3.6. Будем называть инд-множество E *строгим*, если существует изоморфизм $E \simeq \text{“}\varinjlim\text{”} E_i$, где все структурные отображения $E_i \to E_j$, $i \leqslant j$, инъективны. Для строгого инд-множества $E = \text{“}\varinjlim\text{”} E_i$ через $\overline{E}$ обозначим множество $\bigcup\limits_{i\in I} E_i \simeq \varinjlim E_i$, а через E_f обозначим строгое инд-множество, образованное всеми конечными подмножествами множества $\overline{E}$.

В частности, любое множество является также строгим инд-множеством. Отметим, что не любое инд-множество является строгим.

Ниже $E = \text{“}\varinjlim\text{”} E_i$ является строгим инд-множеством. Назовем инд-аффинную схему $\mathbb{A}^E := \text{“}\varinjlim\text{”}\mathbb{A}^{E_i}$ *инд-аффинным пространством*. Ясно, что $\mathbb{A}^E$ является инд-замкнутой подсхемой аффинного пространства $\mathbb{A}^{\overline{E}}$, и имеется изоморфизм R-алгебр

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}^E) \simeq \varprojlim_{i\in I} \bigoplus_{d\geqslant 0} R^{\oplus \operatorname{Sym}^d(E_i)} . \tag{4.3.7}$$

Определение 4.3.8. Для множества M и натурального числа d определим следующую замкнутую подсхему аффинного пространства $\mathbb{A}^M$:

$$\mathbb{A}^M_{(d)} := \operatorname{Spec}\left(R[M]/(M)^d\right) .$$

Определим также следующую инд-замкнутую подсхему инд-аффинного пространства $\mathbb{A}^E$:

$$\widehat{\mathbb{A}}^E := \text{“}\varinjlim_{(i,d)}\text{”}\mathbb{A}^{E_i}_{(d)} ,$$

где $(i,d) \in I \times \mathbb{N}$.

В частности, для множества M имеем $\widehat{\mathbb{A}}^M = \text{“}\varinjlim_{d\in\mathbb{N}}\text{”}\mathbb{A}^M_{(d)}$, и имеет место изоморфизм R-алгебр

$$\mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^M) \simeq \prod_{d\geqslant 0} R^{\oplus \operatorname{Sym}^d(M)} .$$

В явном виде, для произвольной R-алгебры A точка $p \in \mathbb{A}^M(A) = A^M$ принадлежит инд-замкнутой подсхеме $\widehat{\mathbb{A}}^M \subset \mathbb{A}^M$ тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число d, что все координаты точки p обращаются в нуль в степени d.

Далее, выполняются равенства

$$\widehat{\mathbb{A}}^E = \text{“}\varinjlim_{i\in I}\text{”}\widehat{\mathbb{A}}^{E_i} = \text{“}\varinjlim_{(d)}\text{”}\mathbb{A}^E_{(d)} , \tag{4.3.9}$$

где $\mathbb{A}^E_{(d)} := \text{“}\varinjlim_{i\in I}\text{”}\mathbb{A}^{E_i}_{(d)}$ для каждого натурального числа d. Следовательно, имеются изоморфизмы R-алгебр

$$\mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^E) \simeq \varprojlim_{i\in I}\prod_{d\geqslant 0} R^{\oplus \operatorname{Sym}^d(E_i)} \simeq \prod_{d\geqslant 0}\varprojlim_{i\in I} R^{\oplus \operatorname{Sym}^d(E_i)} . \tag{4.3.10}$$

Кроме того, инд-схема $\mathbb{A}^{E_f}$ является инд-замкнутой подсхемой инд-аффинной схемы $\mathbb{A}^E$, и имеется изоморфизм R-алгебр

$$\mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^{E_f}) \simeq R[[\overline{E}]]\,. \tag{4.3.11}$$

В явном виде, для произвольной R-алгебры A точка $p \in \mathbb{A}^{\overline{E}}(A) = A^{\overline{E}}$ принадлежит инд-замкнутой подсхеме $\mathbb{A}^{E_f} \subset \mathbb{A}^{\overline{E}}$ тогда и только тогда, когда p имеет конечное число ненулевых координат, все из которых нильпотентны.

Замечание 4.3.12. Из формул (4.3.7) и (4.3.10) следует, что алгебры $\mathcal{O}(\mathbb{A}^E)$ и $\mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^E)$ являются подалгебрами алгебры степенных рядов $R[[\overline{E}]]$, что соответствует замкнутым вложениям инд-схем $\widehat{\mathbb{A}}^{E_f} \subset \mathbb{A}^E$ и $\widehat{\mathbb{A}}^{E_f} \subset \widehat{\mathbb{A}}^E$. Более того, имеются равенства $\mathcal{A}(\mathbb{A}^E) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^E)$, $\mathcal{A}(\widehat{\mathbb{A}}^E) = \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^E)$ и $\mathcal{A}(\widehat{\mathbb{A}}^{E_f}) = \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^{E_f}) = R[[\overline{E}]]$, где алгебры $\mathcal{A}(\mathbb{A}^E)$, $\mathcal{A}(\widehat{\mathbb{A}}^E)$ и $\mathcal{A}(\widehat{\mathbb{A}}^{E_f})$ определены при помощи вложений инд-замкнутых подсхем $\mathbb{A}^E$, $\widehat{\mathbb{A}}^E$ и $\widehat{\mathbb{A}}^{E_f}$ в аффинное пространство $\mathbb{A}^{\overline{E}}$. Таким образом, канонический гомоморфизм (4.3.5) является изоморфизмом для инд-замкнутых подсхем $\mathbb{A}^E$ и $\widehat{\mathbb{A}}^E$ аффинного пространства $\mathbb{A}^{\overline{E}}$.

4.3.4. **Толстые инд-конуса.** Как и выше, мы рассматриваем аффинные пространства над кольцом R, M является множеством, а E является строгим инд-множеством.

Определение 4.3.13. Замкнутая подсхема $V \subset \mathbb{A}^M$ называется *конусом*, если V соответствует однородному идеалу в кольце $R[M] = R[x_m;\, m \in M]$, где все переменные x_m имеют степень 1. Инд-замкнутая подсхема $X \subset \mathbb{A}^E$ называется *инд-конусом*, если существует изоморфизм $X \simeq \text{“}\varinjlim_{i\in I}\text{”} X_i$, где $X_i \subset \mathbb{A}^{\overline{E}}$ является конусом для любого $i \in I$.

Можно показать, что инд-замкнутая подсхема X является инд-конусом в смысле данного выше определения тогда и только тогда, когда X инвариантна относительно гомотетий, т.е. для любой R-алгебры A и элемента $a \in A$ подмножество $X(A) \subset \mathbb{A}^{\overline{E}}(A) = A^{\overline{E}}$ сохраняется при умножении всех координат на a.

Следующая лемма содержит ключевое свойство конусов, которое крайне важно для главных результатов статьи.

Лемма 4.3.14. *Пусть подсхема $V \subset \mathbb{A}^M$ является конусом. Тогда выполнено следующее:*

(i) *гомоморфизм ограничения $\theta_V \colon \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(V \cap \widehat{\mathbb{A}}^M)$ инъективен;*

(ii) *коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(V) \cap \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^M) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^M) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi_V} \\ \mathcal{O}(V) & \xrightarrow{\theta_V} & \mathcal{O}(V \cap \widehat{\mathbb{A}}^M) \end{array}$$

является декартовым квадратом, где пересечение в левом верхнем углу диаграммы берется в кольце $R[[M]]$, пересечение в правом нижнем углу диаграммы берется между инд-замкнутыми подсхемами аффинного пространства $\mathbb{A}^M$, а ξ_V является гомоморфизмом ограничения.

Замечание 4.3.15. В явном виде, лемма 4.3.14(ii) утверждает, что регулярная функция $\varphi \in \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^M)$, рассматриваемая как степенной ряд в кольце $R[[M]]$ (см. замечание 4.3.12) алгебраически сходится на подсхеме V тогда и только тогда, когда ограничение функции φ на инд-замкнутую подсхему $V \cap \widehat{\mathbb{A}}^M$ продолжается до регулярной функции на подсхеме V. Также, из леммы 4.3.14(i) следует, что описанная таким образом регулярная функция на подсхеме V единственна, в случае, если она существует.

Доказательство леммы 4.3.14. (i) Пусть $\mathfrak{a} \subset R[M]$ — идеал, задающий замкнутую подсхему $V \subset \mathbb{A}^M$. Так как V является конусом, то кольцо $\mathcal{O}(V) = R[M]/\mathfrak{a}$ градуировано, т.е. имеется разложение $\mathcal{O}(V) \simeq \bigoplus\limits_{d \geqslant 0} A_d$. Поэтому кольцо

$$\mathcal{O}(V \cap \widehat{\mathbb{A}}^M) \simeq \varprojlim_{d \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(V \cap \mathbb{A}^M_{(d)}) \simeq \varprojlim_{d \in \mathbb{N}} R[M]/\big(\mathfrak{a} + (M)^d\big)$$

изоморфно кольцу $\prod\limits_{d \geqslant 0} A_d$, а гомоморфизм θ_V является естественным вложением $\bigoplus\limits_{d \geqslant 0} A_d \hookrightarrow \prod\limits_{d \geqslant 0} A_d$.

(ii) Рассмотрим ряд $\varphi \in \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^M) \subset R[[M]]$. Пусть точка $p \in \mathbb{A}^M\big(\mathcal{O}(V)\big)$ соответствует гомоморфизму ограничения $\mathcal{O}(\mathbb{A}^M) \to \mathcal{O}(V)$. Из примера 4.3.4(iv) следует, что ряд φ алгебраически сходится на подсхеме V тогда и только тогда, когда он алгебраически сходится в точке p. Мы видим, что каждая однородная компонента $\varphi_d \in R^{\oplus \operatorname{Sym}^d(M)}$ ряда φ алгебраически сходится в точке p. Следовательно, ряд φ алгебраически сходится в точке p тогда и только тогда, когда значение $\varphi_d(p) \in A_d$ равно нулю для достаточно большого числа d. Из пункта (i) следует, что последнее эквивалентно тому, что элемент $\xi_V(\varphi) = \varphi(p) \in \prod\limits_{d \geqslant 0} A_d$ лежит в образе кольца $\mathcal{O}(V) \simeq \bigoplus\limits_{d \geqslant 0} A_d$ при отображении θ_V. Это доказывает лемму. □

Определение 4.3.16. Инд-замкнутая подсхема $X \subset \mathbb{A}^E$ называется *толстой*, если X содержит инд-замкнутую подсхему $\widehat{\mathbb{A}}^E \subset \mathbb{A}^E$ (см. определение 4.3.8).

В частности, инд-замкнутая подсхема $\mathbb{A}^{E_f}$ является толстой в инд-аффинном пространстве $\mathbb{A}^E$ тогда и только тогда, когда $E_f \simeq E$.

Приведем главное свойство толстых инд-конусов, обобщающее замечание 4.3.12.

Предложение 4.3.17. *Пусть $X \subset \mathbb{A}^E$ является толстым инд-конусом. Тогда канонический гомоморфизм $\mathcal{A}(X) \to \mathcal{O}(X)$ является изоморфизмом (см. формулу (4.3.5)), где алгебра $\mathcal{A}(X)$ определяется при помощи вложения инд-замкнутой подсхемы X в аффинное пространство $\mathbb{A}^{\overline{E}}$.*

Доказательство. Можно считать, что $E \simeq \text{“}\varinjlim\text{”} E_i$, $X \simeq \text{“}\varinjlim\text{”} X_i$, и X_i является конусом в аффинном пространстве $\mathbb{A}^{E_i}$ для любого элемента $i \in I$. Для каждого $i \in I$, применяя лемму 4.3.14 к конусу $X_i \subset \mathbb{A}^{E_i}$, получаем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(X_i) \cap \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^{E_i}) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^{E_i}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(X_i) & \longrightarrow & \mathcal{O}(X_i \cap \widehat{\mathbb{A}}^{E_i}) \,. \end{array}$$

Из формулы (4.3.9) имеем изоморфизмы

$$\varprojlim_{i \in I} \big(\mathcal{A}(X_i) \cap \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^{E_i})\big) \simeq \mathcal{A}(X) \cap \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^{E}) \,, \qquad \varprojlim_{i \in I} \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^{E_i}) \simeq \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^{E}) \,.$$

Очевидно, что $\text{“}\varinjlim\text{”}\big(X_i \cap \widehat{\mathbb{A}}^{E_i}\big) \simeq X \cap \widehat{\mathbb{A}}^{E}$. Таким образом, переходя к обратному пределу по всем индексам $i \in I$ и используя тот факт, что обратные пределы точны слева, получаем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(X) \cap \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^{E}) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^{E}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(X) & \longrightarrow & \mathcal{O}(X \cap \widehat{\mathbb{A}}^{E}) \,. \end{array}$$

Так как инд-замкнутая подсхема X толстая в инд-аффинном пространстве $\mathbb{A}^E$, т.е. $\widehat{\mathbb{A}}^E \subset X$, то выполнено равенство $\widehat{\mathbb{A}}^E \cap X = \widehat{\mathbb{A}}^E$, гомоморфизм ограничения $\mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^E) \to \mathcal{O}(X \cap \widehat{\mathbb{A}}^E)$ является изоморфизмом, и имеется равенство $\mathcal{A}(X) \cap \mathcal{A}(\widehat{\mathbb{A}}^E) = \mathcal{A}(X)$. Поскольку $\mathcal{A}(\widehat{\mathbb{A}}^E) = \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^E)$ (см. замечание 4.3.12), это влечет равенство $\mathcal{A}(X) \cap \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^E) = \mathcal{A}(X)$. Все вместе это доказывает предложение. □

Замечание 4.3.18. Легко проверить, что композиция обратного отображения к изоморфизму $\mathcal{A}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)$ из предложения 4.3.17 и естественного вложения $\mathcal{A}(X) \subset R[[\overline{E}]]$ совпадает с ограничением функций на инд-замкнутую подсхему $\widehat{\mathbb{A}}^{E_f} \subset \widehat{\mathbb{A}}^E \subset X$ (см. формулу (4.3.11)).

Мы будем также использовать следующие простые свойства толстых инд-конусов.

Лемма 4.3.19. *Пусть E_1, E_2 — строгие инд-множества, и пусть $X_1 \subset \mathbb{A}^{E_1}$, $X_2 \subset \mathbb{A}^{E_2}$ — инд-замкнутые подсхемы в соответствующих инд-аффинных пространствах над кольцом R. Положим*

$$E := E_1 \coprod E_2 \,, \qquad X := X_1 \times X_2 \subset \mathbb{A}^{E_1} \times \mathbb{A}^{E_2} \simeq \mathbb{A}^{E} \,.$$

Тогда инд-замкнутая подсхема $X \subset \mathbb{A}^E$ является толстой (соответственно, является инд-конусом) тогда и только тогда, когда являются толстыми инд-замкнутые подсхемы $X_1 \subset \mathbb{A}^{E_1}$ и $X_2 \subset \mathbb{A}^{E_2}$ (соответственно, когда они являются инд-конусами).

Доказательство. Для каждого индекса $k = 1, 2$ имеем равенства

$$X_k = X \cap \mathbb{A}^{E_k}, \qquad \widehat{\mathbb{A}}^{E_k} = \widehat{\mathbb{A}}^E \cap \mathbb{A}^{E_k}$$

между инд-замкнутыми подсхемами инд-аффинного пространства $\mathbb{A}^E$, что доказывает утверждение в одну сторону. Для доказательства в другую сторону надо использовать изоморфизм $\widehat{\mathbb{A}}^{E_1} \times \widehat{\mathbb{A}}^{E_2} \simeq \widehat{\mathbb{A}}^E$. □

Доказательство следующего утверждения прямолинейно.

Лемма 4.3.20. *Пусть $X \subset \mathbb{A}^E$ — инд-замкнутая подсхема, и пусть $R \to S$ — гомоморфизм колец. Если инд-замкнутая подсхема X является толстой (соответственно, является инд-конусом) в инд-аффинном пространстве $\mathbb{A}^E$, то инд-замкнутая подсхема X_S является толстой (соответственно, является инд-конусом) в инд-аффинном пространстве $\mathbb{A}^E_S$.*

Рассмотрим дальнейшие замечательные свойства функций на толстых инд-конусах.

Предложение 4.3.21. *Пусть инд-замкнутая подсхема $X \subset \mathbb{A}^E$ является толстым инд-конусом, и пусть $\alpha, \alpha' \colon X \to Y$ являются двумя морфизмами в аффинную схему Y над кольцом R. Предположим, что для любой R-алгебры A и любой точки $p \in X(A) \subset \mathbb{A}^{\overline{E}}(A)$, имеющей только конечное число ненулевых координат, все из которых являются нильпотентны, имеется равенство $\alpha(p) = \alpha'(p) \in Y(A)$. Тогда $\alpha = \alpha'$.*

Доказательство. При помощи замкнутого вложения $Y \subset \mathbb{A}^M$ для подходящего множества M утверждение предложения легко сводится к случаю $Y = \mathbb{A}^1$. В этом случае утверждение следует непосредственно из предложения 4.3.17 и замечания 4.3.18. □

Предложение 4.3.22. *Пусть инд-замкнутая подсхема $X \subset \mathbb{A}^E$ является толстым инд-конусом, и пусть $R \subset S$ является вложением колец. Тогда выполняется следующее:*

(i) *естественный гомоморфизм $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X_S)$ инъективен;*

(ii) *предположим, что для степенного ряда $\varphi \in S[[\overline{E}]]$ и регулярной функции $\phi \in \mathcal{O}(X)$ выполняется следующее условие: для произвольной S-алгебры A и для любой точки $p \in X(A) \subset \mathbb{A}^{\overline{E}}(A)$, имеющей только конечное число ненулевых координат, все из которых нильпотентны, выполнено равенство*

$$\varphi(p) = \phi(p) \in A\,;$$

тогда φ имеет коэффициенты из кольца R, т.е. $\varphi \in R[[\overline{E}]]$, степенной ряд φ алгебраически сходится на инд-замкнутой подсхеме X, т.е. $\varphi \in \mathcal{A}(X)$, и φ отображается в функцию ϕ при каноническом гомоморфизме $\mathcal{A}(X) \to \mathcal{O}(X)$.

Доказательство. (i) Нужно использовать предложение 4.3.17, лемму 4.3.20 и тот факт, что естественное отображение из алгебры $\mathcal{A}(X) \subset R[[\overline{E}]]$ в алгебру $\mathcal{A}(X_S) \subset S[[\overline{E}]]$ инъективно.

(ii) Это следует непосредственно из предложения 4.3.17 и замечания 4.3.18. □

Инд-аффинная схема Y над кольцом R называется *инд-плоской над R*, если существует изоморфизм $Y \simeq \text{“}\varinjlim\text{”} Y_j$, где для любого индекса $j \in J$ схема Y_j является плоской аффинной схемой над R. Следующий факт является обобщением предложения 4.3.22(i).

Предложение 4.3.23. *Пусть X — толстый инд-конус в инд-аффинном пространстве над R, Y — инд-плоская инд-аффинная схема над R, а Z — аффинная схема над R. Пусть $R \subset S$ является вложением колец. Тогда естественное отображение*

$$\mathrm{Hom}_R(X \times Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S\big((X \times Y)_S, Z_S\big)$$

инъективно.

Доказательство. Сначала при помощи замкнутого вложения $Z \subset \mathbb{A}^M$ для подходящего множества M предложение легко сводится к случаю $Z = \mathbb{A}^1$. Другими словами, достаточно доказать, что естественное отображение

$$\mathcal{O}(X \times Y) \longrightarrow \mathcal{O}\big((X \times Y)_S\big)$$

инъективно.

Рассмотрим такой изоморфизм $Y \simeq \text{“}\varinjlim\text{”} Y_j$, что для любого индекса $j \in J$ схема Y_j является плоской аффинной схемой над кольцом R. Имеем канонические изоморфизмы

$$\mathcal{O}(X \times Y) \simeq \varprojlim_{j \in J} \mathcal{O}(X \times Y_j)\,, \qquad \mathcal{O}\big((X \times Y)_S\big) \simeq \varprojlim_{j \in J} \mathcal{O}\big((X \times Y_j)_S\big)\,.$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда Y является плоской аффинной схемой над кольцом R, так как обратные пределы точны слева.

Пусть $Y \simeq \mathrm{Spec}(A)$, где A — плоская R-алгебра. Положим $B := A \otimes_R S$. Ясно, что имеется канонический изоморфизм

$$\mathcal{O}(X \times Y) \simeq \mathcal{O}(X_A)\,, \qquad \mathcal{O}\big((X \times Y)_S\big) \simeq \mathcal{O}(X_B)\,.$$

Так как гомоморфизм $R \to S$ инъективен, и кольцо A плоское над кольцом R, то естественный гомоморфизм $A \to B$ также инъективен. Таким образом, мы завершает доказательство при помощи леммы 4.3.20 и предложения 4.3.22(i), примененных к вложению колец $A \subset B$. □

4.3.5. **Связность.**

Определение 4.3.24. Инд-схема X над R *связна над* R, если любой идемпотент в кольце $\mathcal{O}(X)$ является некоторого образом идемпотента из R относительно естественного гомоморфизма колец $R \to \mathcal{O}(X)$. Инд-схема X над R *абсолютно связна над* R, если для любого гомоморфизма колец $R \to S$ инд-схема X_S связна над S.

Замечание 4.3.25. Идемпотенты в кольце A биективно соответствуют разложениям топологического пространства $\mathrm{Spec}(A)$ в несвязное объединение двух замкнутых подмножеств. Поэтому любой сюръективный гомоморфизм $A \to B$, для которого все элементы из его ядра нильпотентны, индуцирует биекцию между множествами идемпотентов колец A и B. Отсюда следует, что аффинная схема X над кольцом R является (абсолютно) связной над кольцом R тогда и только тогда, когда аффиная схема $X_{R_{\mathrm{red}}}$ является (абсолютно) связной над кольцом R_{red}, где R_{red} обозначает факторкольцо кольца R по его нильрадикалу $\mathrm{Nil}(R)$ (ср. с доказательством [111, лемма 3.2]).

Легко проверяется, что если топологическое пространство $\mathrm{Spec}(R)$ связно, то произвольная инд-схема X над R связна над R тогда и только тогда, когда любой морфизм $X \to \mathrm{Spec}(R) \coprod \mathrm{Spec}(R)$ над R пропускается через одну из копий схемы $\mathrm{Spec}(R)$. Если X является схемой над R, то последнее условие равносильно связности схемы X как топологического пространства.

Пример 4.3.26.

(i) Аффинная прямая $\mathbb{A}^1$ абсолютно связна над $\mathbb{Z}$. Действительно, по замечанию 4.3.25 достаточно показать, что схема $\mathbb{A}^1_R$ связна над R для любого кольца R, не содержащего нильпотентов. Ненулевой идемпотент в $\mathcal{O}(\mathbb{A}^1_R)$ соответствует такому многочлену

$$f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_d x^d \in R[x]\,,$$

что $f^2 = f$ и $a_d \neq 0$. Если $d > 0$, то имеем $a_d^2 = 0$, что противоречит условию $a_d \neq 0$. Это показывает, что схема $\mathbb{A}^1_R$ связна над кольцом R. Обощая, для любого множества M аффинное пространство $\mathbb{A}^M$ абсолютно связно над $\mathbb{Z}$ (доказательство аналогично).

(ii) Аналогично пункту (i) показывается, что схема $\mathbb{G}_m$ также абсолютно связна над $\mathbb{Z}$.

Замечание 4.3.27. Пусть $X \simeq \text{“}\varinjlim\text{”} X_i$ является инд-схемой над кольцом R. Предположим, что для любого $i \in I$ схема X_i связна над кольцом R, а гомоморфизм колец $R \to \mathcal{O}(X_i)$ инъективен (например, последнее условие выполнено, если множество $X_i(R)$ непусто). Тогда инд-схема X связна над кольцом R.

Следующая простая лемма утверждает, что инд-конуса абсолютно связны. Геометрически это можно объяснить тем, что любую точку на конусе можно соединить с вершиной.

Лемма 4.3.28. *Пусть X — инд-конус в инд-аффинном пространстве над R. Тогда инд-схема X абсолютно связна над кольцом R.*

Доказательство. По лемме 4.3.20 достаточно доказать, что инд-схема X связна R. Любой конус содержит точку $0 := (0, 0, \ldots)$ над любым кольцом. Поэтому по замечанию 4.3.27 достаточно предположить, что X является конусом V в аффинном пространстве $\mathbb{A}^M$ над кольцом R, где M является подходящим множеством. Рассмотрим идемпотент $\phi \in \mathcal{O}(V)$. Пусть $e \in R$ является значением функции ϕ в точке $0 \in V(R)$. Тогда элемент e также идемпотент. Покажем, что ϕ совпадает с образом элемента e при гомоморфизме $R \to \mathcal{O}(V)$.

Пусть A является произвольной R-алгеброй, а $x \in V(A) \subset \mathbb{A}^M(A) = A^M$ является A-точкой на V. Поскольку V конус, имеется морфизм схем над кольцом A

$$\gamma \,:\, \mathbb{A}^1_A \longrightarrow V_A\,, \qquad a \longmapsto a \cdot x\,,$$

который определяет прямую на конусе, соединяющую точки 0 и x. По примеру 4.3.26(i) схема $\mathbb{A}^1_A$ связна над A. Поэтому идемпотент $\gamma^*(\phi) \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^1_A)$ является образом идемпотента из кольца A при гомоморфизме $A \to \mathcal{O}(\mathbb{A}^1_A)$. В частности, функция $\gamma^*(\phi)$ на схеме $\mathbb{A}^1_A$ постоянна, и имеются равенства в кольце A:

$$\phi(0) = \gamma^*(\phi)(0) = \gamma^*(\phi)(1) = \phi(x)\,.$$

С другой стороны, элемент $\phi(0)$ является образом в A элемента $e \in R$ при гомоморфизме $R \to A$. Все вместе это доказывает, что ϕ является образом элемента e при гомоморфизме $R \to \mathcal{O}(V)$. □

Напомним, что групповой функтор $\underline{\mathbb{Z}}$ (см. определение 1.2.2) представим инд-аффинной схемой (см. § 4.3.1), которая, очевидно, не связна над $\mathbb{Z}$. Мы будем использовать следующее свойство связных инд-схем.

Предложение 4.3.29. *Пусть X — связная инд-схема над R, и пусть $\alpha\colon X \to \underline{\mathbb{Z}}_R$ — морфизм инд-схем над R. Предположим, что существует такая R-точка $x \in X(R)$, что выполняется равенство $\alpha(x) = 0$ в $\underline{\mathbb{Z}}(R)$. Тогда $\alpha = 0$.*

Доказательство. Пусть $\phi \in \mathcal{O}(\underline{\mathbb{Z}}_R)$ является характеристической функцией нулевого элемента, т.е. функция ϕ равна единице на связной компоненте $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \subset \underline{\mathbb{Z}}$, соответствующей элементу $0 \in \underline{\mathbb{Z}}(R)$, и ϕ равна нулю на всех остальных компонентах. В частности, ϕ является идемпотентом. Идемпотент $\alpha^*(\phi) \in \mathcal{O}(X)$ является образом некоторого идемпотента $e \in R$, так как инд-схема X связна над кольцом R. Идемпотент $e \in R$ определяет разложение $R \simeq R_1 \times R_2$, для которого образ морфизма $\alpha_{R_1}\colon X_{R_1} \to \underline{\mathbb{Z}}_{R_1}$ в схеме $\underline{\mathbb{Z}}_{R_1}$ равен нулю, а образ морфизма $\alpha_{R_2}\colon X_{R_2} \to \underline{\mathbb{Z}}_{R_2}$ в схеме $\underline{\mathbb{Z}}_{R_2}$ содержится в объединении всех компонент схемы $\underline{\mathbb{Z}}$ за исключением связной компоненты нулевого элемента. Если кольцо R_2 ненулевое, то точка x определяет R_2-точку $x_2 \in X_{R_2}(R_2)$, для которой $\alpha_{R_2}(x_2) = 0$, что приводит к противоречию. Поэтому $R = R_1$, $e = 1$ и $\alpha = 0$. □

4.3.6. **Плотность.**

Определение 4.3.30. Инд-замкнутая подсхема X инд-аффинной схемы Y называется *плотной*, если естественный гомоморфизм колец $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ инъективен. Инд-замкнутая подсхема X инд-аффинной схемы Y называется *абсолютно плотной*, если для любого кольца R инд-замкнутая подсхема X_R плотна в инд-аффинной схеме Y_R.

Отметим, что (абсолютная) плотность не является понятием, относительным по базе, т.е. (абсолютная) плотность не зависит от базового кольца, над которым рассматриваются заданные инд-схемы.

Если Y аффинная схема, то инд-замкнутая подсхема X схемы Y плотна тогда и только тогда, когда не существует замкнутой аффинной подсхемы $Z \subset Y$, $Z \neq Y$, для которой $X \subset Z$. В частности, замкнутая аффинная подсхема $X \subset Y$ плотна в Y тогда и только тогда, когда $X = Y$.

Лемма 4.3.31. *Инд-замкнутая подсхема X инд-аффинной схемы Y является абсолютно плотной тогда и только тогда, когда для любой инд-схемы T и любой аффинной схемы Z естественное отображение*

$$\mathrm{Hom}(Y \times T, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X \times T, Z) \tag{4.3.32}$$

инъективно.

Доказательство. Доказательство использует аналогичные идеи, как в доказательстве предложения 4.3.23.

Предположим, что отображение (4.3.32) инъективно для всех инд-схем T и аффинных схем Z как выше. Для произвольного кольца R положим $T = \mathrm{Spec}(R)$ и $Z = \mathbb{A}^1$. Тогда изоморфизмы $\mathrm{Hom}(X \times T, Z) \simeq \mathcal{O}(X_R)$ и $\mathrm{Hom}(Y \times T, Z) \simeq \mathcal{O}(Y_R)$ влекут, что инд-замкнутая подсхема X является абсолютно плотной в инд-аффинной схеме Y.

Докажем утверждение в обратную сторону. При помощи замкнутого вложения $Z \subset \mathbb{A}^M$ для подходящего множества M лемму легко свести к случаю $Z = \mathbb{A}^1$. Пусть $\alpha,\, \beta \colon Y \times T \to \mathbb{A}^1$ — два различных морфизма инд-схем, т.е. $\alpha \neq \beta$. Существует кольцо R и R-точка $x \in T(R)$, для которых морфизмы инд-схем над R

$$\alpha_R(-, x),\, \beta_R(-, x) \;:\; Y_R \longrightarrow \mathbb{A}^1_R$$

не равны. Так как инд-замкнутая подсхема X абсолютно плотна в Y, то образы морфизмов $\alpha_R(-, x)$ и $\beta_R(-, x)$ при естественном гомоморфизме колец $\mathcal{O}(Y_R) \to \mathcal{O}(X_R)$ различны. Поэтому композиции первоначальных морфизмов α и β с вложением $X \subset Y$ также не равны. □

Пример 4.3.33.

(i) Заметим, что групповой функтор Nil представим инд-аффинной схемой

$$\widehat{\mathbb{A}}^1 \simeq \text{“}\varinjlim_{n \in \mathbb{N}}\text{”}\, \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}[x]/(x^n)\right),$$

которая является инд-замкнутой подсхемой в аффинном пространстве $\mathbb{A}^1 \simeq \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}[x]\right)$, представляющем групповой функтор $\mathbb{G}_a$. Инд-замкнутая подсхема Nil абсолютна плотна в аффинной схеме $\mathbb{G}_a$. Действительно, для любого кольца R естественный гомоморфизм R-алгебр

$$\mathcal{O}\big((\mathbb{G}_a)_R\big) \simeq R[x] \longrightarrow \mathcal{O}(\mathrm{Nil}_R) \simeq R[[x]]$$

инъективен. Аналогично, для любого натурального числа N инд-замкнутая подсхема $\mathrm{Nil}^{\times N}$ абсолютно плотна в аффинном пространстве $(\mathbb{G}_a)^{\times N} \simeq \mathbb{A}^N$.

(ii) Групповой подфунктор $1 + \mathrm{Nil} \subset \mathbb{G}_m$ представим инд-замкнутой подсхемой в схеме $\mathbb{G}_m$, абсолютно плотной в ней. Действительно, для любого кольца R естественный гомоморфизм R-алгебр

$$\mathcal{O}\big((\mathbb{G}_m)_R\big) \simeq R[y, y^{-1}] \simeq R[x, (1+x)^{-1}] \longrightarrow \mathcal{O}\big((1 + \mathrm{Nil})_R\big) \simeq R[[x]]$$

инъективен, где $y = 1 + x$. Аналогично, для любого натурального числа N инд-замкнутая подсхема $(1 + \mathrm{Nil})^{\times N}$ абсолютна плотна в аффинной схеме $(\mathbb{G}_m)^{\times N}$.

Следующее предложение обобщает пример 4.3.33(i).

Предложение 4.3.34. *Пусть E — строгое инд-множество, и пусть $X \subset \mathbb{A}^E$ — инд-замкнутая подсхема соответствующего инд-аффинного пространства. Предположим, что выполнено $\widehat{\mathbb{A}}^{E_f} \subset X$ (см. определения 4.3.6 и 4.3.8). Тогда инд-замкнутая подсхема X абсолютна плотна в инд-аффинном пространстве $\mathbb{A}^E$.*

Доказательство. Имеются вложения инд-замкнутых подсхем в аффинном пространстве $\mathbb{A}^{\overline{E}}$

$$\widehat{\mathbb{A}}^{E_f} \subset X \subset \mathbb{A}^E\,,$$

индуцирующие гомоморфизмы колец

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}^E) \longrightarrow \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{A}}^{E_f}) \simeq \mathbb{Z}[[\overline{E}]]\,.$$

Так как композиция этих гомоморфизмов инъективна (см. замечание 4.3.12), то первый гомоморфизм также инъективен. Отсюда получаем, что инд-замкнутая подсхема X плотна в инд-аффинном пространстве $\mathbb{A}^E$. Аналогичное рассуждение применимо к вложению $X_R \subset \mathbb{A}^E_R$ над произвольным кольцом R. □

В частности, из предложения 4.3.34 следует, что любая толстая инд-замкнутая подсхема в инд-аффинном пространстве $\mathbb{A}^E$ (см. определение 4.3.16) абсолютно плотна в нем.

4.4. Геометрические свойства некоторых итерированных групп петель

4.4.1. **Упорядоченное произведение строгих инд-множеств.** Определим операцию на строгих инд-множествах, которая позволит нам работать с представимостью итерированных функторов петель. Напомним, что с любым строгим инд-множеством E связано множество $\overline{E}$ (см. определение 4.3.6).

Определение 4.4.1. *Упорядоченное произведение* $E_1 * E_2$ строгих инд-множеств $E_1 = \text{“}\varinjlim_{i_1 \in I_1}\text{”} E_{1,i_1}$ и $E_2 = \text{“}\varinjlim_{i_2 \in I_2}\text{”} E_{2,i_2}$ — это строгое инд-множество

$$E_1 * E_2 := \text{“}\varinjlim_{\lambda \in \Lambda}\text{”} (E_1 * E_2)_\lambda\,,$$

где

$$\Lambda := \big\{(\lambda_1, \lambda_2) \;\mid\; \lambda_1 \colon \overline{E}_2 \to I_1, \quad \lambda_2 \in I_2\big\}\,,$$

а для элемента $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$ множество $(E_1 * E_2)_\lambda$ определено по формуле

$$(E_1 * E_2)_\lambda := \left\{(e_1, e_2) \in \overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \;\mid\; e_2 \in E_{2,\lambda_2},\, e_1 \in E_{1,\lambda_1(e_2)}\right\}.$$

Частичный порядок на множестве Λ определяется так: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \leqslant \lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2)$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1 \leqslant \lambda'_1$ и $\lambda_2 \leqslant \lambda'_2$, где порядок на функциях определяется поточечно, т.е. $\lambda_1 \leqslant \lambda'_1$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1(e_2) \leqslant \lambda'_1(e_2)$ для всех элементов $e_2 \in \overline{E}_2$.

Отметим, что $\overline{E_1 * E_2} = \overline{E}_1 \times \overline{E}_2$, т.е. строгое инд-множество $E_1 * E_2$ состоит из подмножеств множества $\overline{E}_1 \times \overline{E}_2$.

Пример 4.4.2.

(i) Пусть M является множеством, и пусть $E = \text{“}\varinjlim_{i\in I}\text{”} E_i$ является строгим инд-множеством. Тогда имеются канонические изоморфизмы строгих инд-множеств

$$M * E \simeq \text{“}\varinjlim_{i\in I}\text{”} M \times E_i\,,$$

$$E * M \simeq \text{“}\varinjlim_{\lambda\in\Lambda}\text{”} (E * M)_\lambda\,,$$

где $\Lambda := \left\{\lambda\colon M \to I\right\}$ и $(E * M)_\lambda := \left\{(e, m) \in \overline{E} \times M \;\mid\; e \in E_{\lambda(m)}\right\}$.

(ii) Из пункта (i) следует, что для множеств E_1 и E_2 их упорядоченное произведение $E_1 * E_2$ совпадает с обычным произведением множеств $E_1 \times E_2$.

(iii) Обозначим через U множество, состоящее из одного элемента. Тогда из пункта (i) следует, что для любого строгого инд-множества E имеются канонические изоморфизмы $U * E \simeq E * U \simeq E$.

Ясно, что упорядоченное произведение функториально относительно изоморфизмов между строгими инд-множествами. Непосредственно проверяется также, что упорядоченное произведение $E_1 * E_2$ функториально относительно произвольных морфизмов между строгими инд-множествами по первому аргументу, т.е. любой морфизм строгих инд-множеств $E_1 \to E'_1$ определяет естественным образом морфизм строгих инд-множеств $E_1 * E_2 \to E'_1 * E_2$. Также, упорядоченное произведение $E * M$ между строгим инд-множеством E и множеством M функториально относительно инъективных отображений между множествами, т.е. инъективное отображение множеств $M \to M'$ определяет естественным образом морфизм строгих инд-множеств $E * M \to E * M'$.

Замечание 4.4.3. Легко проверяется, что для строгих инд-множеств E_1 и E_2 имеется канонический изоморфизм строгих инд-множеств

$$E_1 * E_2 \simeq \varinjlim_{i_2 \in I_2} E_1 * E_{2,i_2}\,,$$

где направленный предел в правой стороне формулы берется в категории строгих инд-множеств.

Однако, как видно из следующего примера, упорядоченное произведение не функториально относительно произвольных морфизмов между строгими инд-множествами.

Пример 4.4.4. Пусть I является направленным частично упорядоченным множеством без наибольшего элемента (в частности, множество I бесконечно), и пусть $E = \text{“}\varinjlim_{i \in I}\text{”} E_i$ является строгим инд-множеством, для которого $E_i \neq E_j$ при $i \neq j$. Как и выше, пусть U является множеством, состоящим из одного элемента. Единственное отображение множеств $I \to U$ индуцирует проекцию $p\colon \overline{E} \times I \to \overline{E} \times U \simeq \overline{E}$. Мы утверждаем, что проекция p не продолжается до морфизма строгих инд-множеств из $E * I$ в $E * U \simeq E$. Действительно, пусть λ является тождественной функцией из множества I в себя. Тогда подмножество $(E * I)_\lambda$ множества $\overline{E} \times I$ (см. пример 4.4.2(i)) равно множеству

$$\big\{(e, i) \in \overline{E} \times I \;\mid\; e \in E_i\big\}\,.$$

В частности, множество $(E * I)_\lambda$ отображается сюръективно на множество $\overline{E}$ при проекции p в то время, как ни одно из множеств E_i, $i \in I$, не отображается на $\overline{E}$ сюръективно. Поэтому не существует морфизмов инд-множеств из $E * I$ в E.

Упорядоченное произведение определяет тензорную структуру на категории строгих инд-множеств с изоморфизмами. Другими словами, если заданы три строгих инд-множества $E_1 = \text{“}\varinjlim_{i_1 \in I_1}\text{”} E_{1,i_1}$, $E_2 = \text{“}\varinjlim_{i_2 \in I_2}\text{”} E_{2,i_2}$, и $E_3 = \text{“}\varinjlim_{i_3 \in I_3}\text{”} E_{3,i_3}$, то имеется функториальный изоморфизм

$$(E_1 * E_2) * E_3 \simeq E_1 * (E_2 * E_3)\,,$$

удовлетворяющий стандартным условиям согласованности (единичный объект здесь является множеством U, состоящим из одного элемента). Данный изоморфизм следует из того, что оба строгих инд-множества $(E_1 * E_2) * E_3$ и $E_1 * (E_2 * E_3)$ функториально изоморфны строгому инд-множеству $\text{“}\varinjlim_{\delta \in \Delta}\text{”}(E_1 * E_2 * E_3)_\delta$, где

$$\Delta := \big\{(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \;\mid\; \delta_1\colon \overline{E}_2 \times \overline{E}_3 \to I_1, \quad \delta_2\colon \overline{E}_3 \to I_2, \quad \delta_3 \in I_3\big\}\,,$$

а для элемента $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3) \in \Delta$ множество $(E_1 * E_2 * E_3)_\delta$ задается по формуле

$$(E_1 * E_2 * E_3)_\delta := \left\{(e_1, e_2, e_3) \in \overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \times \overline{E}_3 \mid e_3 \in E_{3,\delta_3},\, e_2 \in E_{2,\delta_2(e_3)},\, e_1 \in E_{1,\delta_1(e_2,e_3)}\right\}.$$

В частности, корректно определены упорядоченные степени строгих инд-множеств.

Пример 4.4.5. Определим следующее строгое инд-множество:

$$D := \text{“}\varinjlim_{m\in\mathbb{Z}}\text{”}\, \mathbb{Z}_{\geqslant -m}\,,$$

где $\mathbb{Z}_{\geqslant -m}$ обозначает множество всех целых чисел l, таких что $l \geqslant -m$. Очевидно, что имеется равенство $\overline{D} = \mathbb{Z}$. Мы будем использовать обозначения из § 1.5.1. Легко видеть, что n-ая упорядоченная степень D^{*n} строгого инд-множества D канонически изоморфна строгому инд-множеству “ $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda_n}$ ” $\mathbb{Z}^n_\lambda$. Также имеем, что $\overline{D^{*n}} = \mathbb{Z}^n$.

Отметим, что функтор $E \mapsto \overline{E}$ из категории строгих инд-множеств с изоморфизмами в категорию множеств обладает естественной тензорной структурой, где мы рассматриваем упорядоченное произведение строгих инд-множеств и декартово произведение множеств.

Подчеркнем, что упорядоченное произведение не является естественно коммутативным. Более точно, описанный выше тензорный функтор $E \mapsto \overline{E}$ не является симметрическим, т.е. для заданных строгих инд-множеств E_1 и E_2 каноническая биекция $\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \simeq \overline{E}_2 \times \overline{E}_1$ не обязательно соответствует изоморфизму строгих инд-множеств между $E_1 * E_2$ и $E_2 * E_1$. Например, это происходит в примера 4.4.2(i) для общих M и E, или для случая $E_1 = E_2 = D$. Данная некоммутативность объясняет термин “упорядоченный”.

4.4.2. **Представимость функторов петель.** Обсудим представимость функторов петель (см. определение 4.2.1). Ниже мы рассматриваем аффинные пространства над $\mathbb{Z}$.

Функтор $L\mathbb{A}^1 \simeq L\mathbb{G}_a$ представим инд-аффинным пространством $\mathbb{A}^D$ (см. § 4.3.3 и пример 4.4.5). Действительно, если задано кольцо A, то A-точка на инд-аффинном пространстве $\mathbb{A}^D$ задается набором $(a_l)_{l\in\mathbb{Z}}$, где $a_l \in A$, и существует такое число $m \in \mathbb{Z}$, что $a_l = 0$ при $l < -m$. Точка $(a_l)_{l\in\mathbb{Z}}$ соответствует ряду Лорана $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} a_l t^l \in \mathcal{L}(A)$.

Предложение 4.4.6.

(i) *Для произвольного строгого инд-множества E (см. определение 4.3.6) функтор $L\mathbb{A}^E$ представим инд-аффинным пространством $\mathbb{A}^{D*E}$ (см. определение 4.4.1).*

(ii) *Пусть E является строгим инд-множеством, а $X \subset \mathbb{A}^E$ является инд-замкнутой подсхемой. Тогда функтор LX представим инд-замкнутой подсхемой инд-аффиного пространства $\mathbb{A}^{D*E}$ (ср. с работой Паппаса–Раппопорта* [113, § 1a]*).*

(iii) *В обозначениях пункта (ii), если инд-замкнутая подсхема X является толстой (соответственно инд-конусом) в инд-аффинном пространстве $\mathbb{A}^E$, то инд-замкнутая подсхема LX также является толстой (соответственно, инд-конусом) в инд-аффинном пространстве $\mathbb{A}^{D*E}$ (см. определения 4.3.13 и 4.3.16).*

Доказательство. (i) Легко проверяется, что соответствие $F \mapsto LF$ коммутирует с прямыми пределами функторов. Поэтому, по замечанию 4.4.3 можно считать, что E является некоторым множеством M, и достаточно показать изоморфизм $L\mathbb{A}^M \simeq \mathbb{A}^{D*M}$. Для произвольного кольца A элемент из множества $L\mathbb{A}^M(A)$ — это тоже самое, что набор $\{f_m\}$, $m \in M$, рядов Лорана из кольца $\mathcal{L}(A)$. Ясно, что такой набор определяет функцию $\lambda\colon M \to \mathbb{Z}$ и A-точку на аффинном пространстве $\mathbb{A}^{(D*M)_\lambda}$, и также верно обратное.

(ii) Как и в доказательстве пункта (i), можно считать, что X является замкнутой подсхемой V в аффинном пространстве $\mathbb{A}^M$, где M — некоторое множество. Отметим, что подсхема V является слоем над точкой $(0,0,0,\ldots)$ морфизма $\mathbb{A}^M \to \mathbb{A}^{M'}$, где M' является множеством уравнений, определяющих подсхему V в аффинном пространстве $\mathbb{A}^M$. Так как соответствие $F \mapsto LF$ коммутирует с расслоенными произведениями функторов, то мы видим из пункта (i), что функтор LV является слоем над точкой $(0,0,0,\ldots)$ соответствующего морфизма между инд-аффинными пространствами $\mathbb{A}^{D*M} \to \mathbb{A}^{D*M'}$. Отсюда получаем, что функтор LV представим инд-замкнутой подсхемой в инд-аффинном пространстве $\mathbb{A}^{D*M}$.

(iii) Отметим, что для рядов Лорана $f_1, \ldots, f_d$ коэффициенты их произведения $f_1 \cdot \ldots \cdot f_d$ являются однородными многочленами степени d от коэффициентов рядов f_i. Это влечет утверждение пункта (iii), касающееся инд-конусов. Далее, для любого множества M, имеем вложение $\mathbb{A}^{D*M}_{(d)} \subset L\mathbb{A}^M_{(d)}$ в инд-аффинном пространстве $\mathbb{A}^{D*M} \simeq L\mathbb{A}^M$, что влечет утверждение пункта (iii), касающееся свойства быть толстой инд-замкнутой подсхемой. □

Пример 4.4.7. Применяя последовательно несколько раз предложение 4.4.6(i) к $\mathbb{A}^1$, мы получаем, что функтор $L^n\mathbb{A}^1 \simeq L^n\mathbb{G}_a$ представим инд-аффинным пространством $\mathbb{A}^{D^{*n}}$ (см. пример 4.4.5). Это можно также показать непосредственно: в соответствии с описанием итерированных рядов Лорана в терминах множеств $\mathbb{Z}^n_\lambda$, $\lambda \in \Lambda_n$, приведенным в § 1.5.1, для произвольного кольца A итерированный ряд Лорана $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t^l \in \mathcal{L}^n(A)$ соответствует точке $(a_l) \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}^n}(A)$, $l \in \mathbb{Z}^n$, лежащей на инд-замкнутой подсхеме

$$\mathbb{A}^{D^{*n}} \simeq \text{“}\varinjlim_{\lambda\in\Lambda_n}\text{”}\, \mathbb{A}^{\mathbb{Z}^n_\lambda} \subset \mathbb{A}^{\mathbb{Z}^n}.$$

4.4.3. **Представимость группового функтора $L^n\mathbb{G}_m$ и его специальных групповых подфункторов.** В этом параграфе мы показываем, что групповой функтор $L^n\mathbb{G}_m$, его

групповые подфункторы $(L^n\mathbb{G}_m)^0$ и $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp$ (см. определение 4.2.13) и групповой функтор $(L^n\mathbb{G}_a)^\sharp$ (см. определение 4.2.20) представимы инд-аффинными схемами над $\mathbb{Z}$, являющимися произведением толстых инд-конусов и инд-плоских схем над $\mathbb{Z}$.

Пусть $\mathbb{Z}^n_{>0}$ обозначает множество таких элементов $l \in \mathbb{Z}^n$, что $l > 0$ (см. определение лексикографического порядка на $\mathbb{Z}^n$ в § 4.2.2). Определим строгое инд-множество $D^{*n}_{>0} := D^{*n} \cap \mathbb{Z}^n_{>0}$ (см. определение строгого инд-множества D^{*n} в примере 4.4.5). Аналогично определим множества $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, $\mathbb{Z}^n_{<0}$, $\mathbb{Z}^n_{\leqslant 0}$ и строгие инд-множества $D^{*n}_{\geqslant 0}$, $D^{*n}_{<0}$, $D^{*n}_{\leqslant 0}$. Имеются разложения

$$\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n_{>0} \coprod \mathbb{Z}^n_{\leqslant 0}\,, \qquad D^{*n} = D^{*n}_{>0} \coprod D^{*n}_{\leqslant 0}\,.$$

Предложение 4.4.8.

(i) *Функтор $\mathbb{V}_{n,+}$ (см. формулу (4.2.5)) представим инд-аффинным пространством $\mathbb{A}^{D^{*n}_{>0}}$, а функтор $\mathbb{V}_{n,-}$ (см. формулу (4.2.6)) представим толстым инд-конусом в инд-аффином пространстве $\mathbb{A}^{D^{*n}_{<0}}$.*

(ii) *Изоморфные функторы $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp$ и $(L^n\mathbb{G}_a)^\sharp$ представимы толстым инд-конусом в инд-аффинном пространстве $\mathbb{A}^{D^{*n}} \simeq L^n\mathbb{G}_a$ (см. пример 4.4.7).*

(iii) *Функторы $(L^n\mathbb{G}_m)^0$ и $L^n\mathbb{G}_m$ представимы инд-аффинными схемами вида $X \times X'$, где X — толстый инд-конус в инд-аффинном пространстве над $\mathbb{Z}$, а X' — инд-плоская инд-аффинная схема над $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. (i) Утверждение про $\mathbb{V}_{n,+}$ вытекает непосредственно из его определения. Докажем утверждение про $\mathbb{V}_{n,-}$. Напомним, что функтор Nil представим инд-замкнутой подсхемой схемы $\mathbb{A}^1$

$$\widehat{\mathbb{A}}^1 \simeq \text{“}\varinjlim_{d\in\mathbb{N}}\text{”} \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}[x]/(x^d)\right),$$

которая безусловно является толстым инд-конусом в $\mathbb{A}^1$. По предложению 4.4.6(iii) и примеру 4.4.7 функтор $L^n\mathrm{Nil}$ представим толстым инд-конусом в инд-аффинном пространстве $L^n\mathbb{A}^1 \simeq \mathbb{A}^{D^{*n}}$ над $\mathbb{Z}$.

Далее, определим $L^n\mathrm{Nil}_{\geqslant 0}$ как пересечение $L^n\mathrm{Nil} \cap \mathbb{A}^{D^{*n}_{\geqslant 0}}$ между инд-замкнутыми подсхемами в схеме $\mathbb{A}^{D^{*n}} \simeq L^n\mathbb{G}_a$. Аналогично определим $L^n\mathrm{Nil}_{<0}$. Из леммы 1.5.3(i) следует равенство

$$L^n\mathrm{Nil} = L^n\mathrm{Nil}_{\geqslant 0} \times L^n\mathrm{Nil}_{<0}$$

между инд-замкнутыми подсхемами в $\mathbb{A}^{D^{*n}} = \mathbb{A}^{D^*_{\geqslant 0}} \times \mathbb{A}^{D^*_{<0}}$. Теперь требуемые результат следует из леммы 4.3.19 и изоморфизма функторов $\mathbb{V}_{n,-} \simeq L^n\mathrm{Nil}_{<0}$.

(ii) По определениям 4.2.13 и 4.2.20, имеются разложения

$$(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp \simeq \mathbb{V}_{n,-} \times (1 + \mathrm{Nil}) \times \mathbb{V}_{n,+}\,, \qquad (L^n\mathbb{G}_a)^\sharp \simeq \mathbb{V}_{n,-} \times \mathrm{Nil} \times \mathbb{V}_{n,+}\,.$$

Также, имеется разложение $\mathbb{A}^{D^{*n}} = \mathbb{A}^{D^{*n}_{<0}} \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{D^{*n}_{>0}}$, где средний сомножитель $\mathbb{A}^1$ соответствует элементу $0 \in \mathbb{Z}^n = \overline{D^{*n}}$. Таким образом, все следует из пункта (i) и леммы 4.3.19.

(iii) По определению 4.2.13, имеем разложение $(L^n\mathbb{G}_m)^0 \simeq \mathbb{V}_{n,-} \times \mathbb{V}_{n,+} \times \mathbb{G}_m$, а по предложению 4.2.8, имеем разложение $L^n\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{V}_{n,-} \times \mathbb{V}_{n,+} \times \mathbb{G}_m \times \underline{\mathbb{Z}}^n$. Ясно, что инд-аффинное пространство $\mathbb{V}_{n,+} \simeq \mathbb{A}^{D^{*n}_{>0}}$ и инд-аффинная схема $\underline{\mathbb{Z}}$ (см. § 4.3.1) инд-плоские над $\mathbb{Z}$. Следовательно инд-аффинная схема $\mathbb{V}_{n,+} \times \mathbb{G}_m \times \underline{\mathbb{Z}}^n$ также инд-плоская над $\mathbb{Z}$, что завершает доказательство по пункту (i). □

Замечание 4.4.9.

(i) Из предложений 4.4.8(i) и 4.3.17 следует, что кольцо регулярных функций $\mathcal{O}(\mathbb{V}_{n,-}) \simeq \mathcal{A}(\mathbb{V}_{n,-})$ плоско над $\mathbb{Z}$, или, что равносильно, свободно от кручения над $\mathbb{Z}$, поскольку оно является подкольцом в кольце степенных рядов над $\mathbb{Z}$. С другой стороны, в предложении 4.4.8(i) фиксируется представление функтора $\mathbb{V}_{n,-}$ как инд-аффинной схемы "$\varinjlim_{i\in I}$"X_i, однако кольца $\mathcal{O}(X_i)$ не плоски над $\mathbb{Z}$, см. комментарий после [111, Lem. 3.4] (данное свойство быть плоской схемой отсутствует для такого представления даже в случае $n = 1$).

(ii) Является ли инд-схема $\mathbb{V}_{n,-}$ инд-плоской над $\mathbb{Z}$ — интересный открытый вопрос. Иными словами, вопрос заключается в существовании другого представления "$\varinjlim_{j\in J}$"Y_j функтора $\mathbb{V}_{n,-}$ как инд-аффинной схемы, для которой все кольца $\mathcal{O}(Y_j)$, $j \in J$, плоские $\mathbb{Z}$ (отметим, что в случае $n = 1$ ответ на данный вопрос положителен, см. например, [111, § 2]). Именно отсутствие ответа над данный вопрос явилось мотивировкой создания теории толстых инд-конусов.

Объединяя предложение 4.4.8 с различными свойствами толстых инд-конусов из § 4.3, мы получаем ряд важных приложений. Пусть N — натуральное число. Рассмотрим множество $M := \coprod_{i=1}^{N} \mathbb{Z}^n$ и соответствующее множество формальных переменных $x_{i,l}$, где $1 \leqslant i \leqslant N$, $l \in \mathbb{Z}^n$, являющихся координатами в аффинном пространстве $\mathbb{A}^M$ (см. § 4.3.2). Для краткости, обозначим через X инд-аффинную схему $\left((L^n\mathbb{G}_a)^\sharp\right)^{\times N}$. Таким образом, X является инд-замкнутой подсхемой в аффинном пространстве $\mathbb{A}^M$, а набор итерированных рядов Лорана $(f_1, \ldots, f_N)$ соответствует точке $(a_{i,l})$, где $f_i = \sum_{l\in\mathbb{Z}^N} a_{i,l}t^l$ для $1 \leqslant i \leqslant N$.

Теорема 4.4.10. *Пусть дано вложение колец $R \subset S$. Рассмотрим степенной ряд (см. определение 4.3.1)*

$$\varphi \in S[[x_{i,l};\, 1 \leqslant i \leqslant N,\, l \in \mathbb{Z}^N]]$$

и регулярную функцию $\phi \in \mathcal{O}(X_R)$. Предположим, что для любой S-алгебры A и любого набора многочленов Лорана (а не просто рядов) $f_1, \ldots, f_N$ с нильпотентными коэффициентами из A выполнено равенство

$$\varphi(f_1, \ldots, f_N) = \phi(f_1, \ldots, f_N) \in A\,.$$

Тогда ряд φ имеет коэффициенты из R, алгебраически сходится на X_R (см. определение 4.3.3(iii)) и отображается в ϕ при каноническом гомоморфизме $\mathcal{A}(X_R) \to \mathcal{O}(X_R)$ (см. формулу (4.3.5)*).*

Доказательство. Рассмотрим строгое инд-множество $E := \coprod_{i=1}^{N} D^{*n}$. Из предложения 4.4.8(ii) и леммы 4.3.19 следует, что X является толстым инд-конусом в $\mathbb{A}^E$. Из леммы 4.3.20 следует, что X_R является толстым инд-конусом в $\mathbb{A}^E_R$. Таким образом, мы завершаем доказательство по предложению 4.3.22(ii). □

Замечание 4.4.11. Объединяя предложения 4.4.8(ii) и 4.3.21, можно также получить многомерное обобщение утверждения, содержащегося в [111, Prop. 3.7].

Теорема 4.4.12. *Пусть даны вложение колец $R \subset S$, инд-плоская инд-аффинная схема Y над R, аффинная схема Z над R и натуральное число N. Тогда естественное отображение*

$$\mathrm{Hom}_R\left((L^n\mathbb{G}_m)_R^{\times N} \times Y, Z\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S\left((L^n\mathbb{G}_m)_S^{\times N} \times Y_S, Z_S\right)$$

инъективно.

Доказательство. Из предложения 4.4.8(iii) и леммы 4.3.19 следует, что функтор $(L^n\mathbb{G}_m)^{\times N}$ представим инд-аффинной схемой вида $X \times X'$, где X является толстым инд-конусом в инд-аффинном пространстве над $\mathbb{Z}$, а X' является инд-плоской инд-аффинной схемой над $\mathbb{Z}$. По лемме 4.3.20 функтор $(L^n\mathbb{G}_m)_R^{\times N}$ также представим инд-схемой над R подобного вида. Таким образом, мы завершаем доказательство по предложению 4.3.23. □

Приведем некоторые дополнительные геометрические свойства группового функтора $L^n\mathbb{G}_a$ и специальных групповых подфункторов в $L^n\mathbb{G}_m$.

Предложение 4.4.13. *Для любого натурального числа N вполняется следующее:*

(i) *инд-замкнутая подсхема $\left((L^n\mathbb{G}_a)^\sharp\right)^{\times N} \subset (L^n\mathbb{G}_a)^{\times N}$ абсолютно плотна;*

(ii) *инд-схема* $\left((L^n\mathbb{G}_a)^\sharp\right)^{\times N}$ *абсолютно связна над* $\mathbb{Z}$*;*

(iii) *инд-замкнутая подсхема* $\left((L^n\mathbb{G}_m)^\sharp\right)^{\times N} \subset \left((L^n\mathbb{G}_m)^0\right)^{\times N}$ *абсолютно плотна;*

(iv) *инд-схемы* $\left((L^n\mathbb{G}_m)^\sharp\right)^{\times N}$ *и* $\left((L^n\mathbb{G}_m)^0\right)^{\times N}$ *абсолютно связны над* $\mathbb{Z}$*.*

Доказательство. (i) Инд-замкнутая подсхема $(L^n\mathbb{G}_a)^\sharp$ в $L^n\mathbb{G}_a \simeq \mathbb{A}^{D^{*n}}$ содержит инд-замкнутую подсхему $\mathbb{A}^{(D^{*n})_f}$ (см. определение 4.3.6), поскольку $\mathbb{A}^{(D^{*n})_f}$ соответствует многочленам Лорана с нильпотентными коэффициентами. Поэтому из предложения 4.3.34 следует, что инд-замкнутая подсхема $(L^n\mathbb{G}_a)^\sharp$ абсолютно плотна в $(L^n\mathbb{G}_a)$. Случай произвольного натурального числа N разбирается аналогично.

(ii) Ясно, что инд-замкнутая подсхема $(L^n\mathbb{G}_a)^\sharp$ в инд-аффинном пространстве $L^n\mathbb{G}_a \simeq \mathbb{A}^{D^{*n}}$ является инд-конусом. Это следует из комментария после определения 4.3.13, а также из предложения 4.4.8(ii). Таким образом, доказательство завершается по лемме 4.3.28.

(iii) Доказательство получается в результате объединения определения 4.2.13 с примером 4.3.33(ii) и леммой 4.3.31.

(iv) По пункту (iii) достаточно доказать, что инд-схема $\left((L^n\mathbb{G}_m)^\sharp\right)^{\times N}$ абсолютно связна над $\mathbb{Z}$. Это следует из пункта (ii) и изоморфизма инд-схем $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp \simeq (L^n\mathbb{G}_a)^\sharp$. □

Замечание 4.4.14. Все понятия из § 4.3.5 и § 4.3.6 продолжают иметь смысл после замены инд-схем на произвольные функторы (см. § 4.1). Более того, все утверждения из § 4.3.5 и § 4.3.6 в такой степени общности остаются верными. Таким образом, на самом деле, предложение 4.4.13 не основывается ни на представимости итерированных групп петель, ни на теории толстых инд-конусов.

4.4.4. **Касательное пространство к** $L^n\mathbb{G}_m$**.** В этом параграфе мы обсуждаем касательное пространство в единице к групповой инд-схеме $L^n\mathbb{G}_m$. В дальнейшем мы будем также рассматривать касательные пространства к групповым функторам, поэтому мы даем более общее определение касательного пространства. Ниже ε является формальной переменной, удовлетворяющей соотношению $\varepsilon^2 = 0$. Таким образом, для любого кольца A имеется изоморфизм $A[\varepsilon] \simeq A[x]/(x^2)$, где x — формальная переменная.

Определение 4.4.15. Для группового функтора F над кольцом R (см. § 4.1), *касательное пространство* TF к F является групповым функтором над R, определенным по формуле

$$TF(A) := \mathrm{Ker}\left(F\big(A[\varepsilon]\big) \to F(A)\right),$$

где A является произвольной R-алгеброй.

В частности, имеется разложение $F\big(A[\varepsilon]\big) \simeq F(A) \times TF(A)$. Для морфизма групповых функторов $\Phi\colon F' \to F$ над R определен его *дифференциал* $T\Phi\colon TF' \to TF$, который также является морфизмом групповых функторов над R.

Пример 4.4.16.

(i) Имеется изоморфизм групповых функторов $T\mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_a$, $a\,\varepsilon \mapsto a$, где a является элементом кольца A.

(ii) Имеется изоморфизм групповых функторов $T\mathbb{G}_m \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_a$, $1 + a\,\varepsilon \mapsto a$, где a является элементом кольца A.

Лемма 4.4.17.

(i) *Для любого группового функтора F имеется канонический изоморфизм групповых функторов $TLF \simeq LTF$.*

(ii) *Имеется изоморфизм групповых функторов*

$$T(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp \simeq T(L^n\mathbb{G}_m)^0 \simeq TL^n\mathbb{G}_m \simeq L^n\mathbb{G}_a\,.$$

(iii) *Имеется изоморфизм групповых функторов*

$$T(L^n\mathbb{G}_a)^\sharp \simeq T(L^n\mathbb{G}_a) \simeq L^n\mathbb{G}_a\,.$$

Доказательство. Пусть A является произвольным кольцом.

(i) Имеется изоморфизм колец $A[\varepsilon]((t)) \simeq A((t))[\varepsilon]$. Это влечет следующую последовательность изоморфизмов групп:

$$TLF(A) \simeq \operatorname{Ker}\big(LF(A[\varepsilon]) \to LF(A)\big) \simeq \operatorname{Ker}\big(F\big(A[\varepsilon]((t))\big) \to F\big(A((t))\big)\big) \simeq$$

$$\simeq \operatorname{Ker}\big(F\big(A((t))[\varepsilon]\big) \to F\big(A((t))\big)\big) \simeq LTF(A)\,.$$

(ii) Пусть $f \in TL^n\mathbb{G}_m(A)$. В явном виде, $f \in \operatorname{Ker}\big(L^n\mathbb{G}_m(A[\varepsilon]) \to L^n\mathbb{G}_m(A)\big)$. Следовательно, постоянный член ряда f принадлежит подгруппе $1 + A\,\varepsilon \subset A[\varepsilon]^*$, а все остальные коэффициенты ряда f нильпотентны. Из леммы 4.2.15(iii) следует, что $f \in (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp\big(A[\varepsilon]\big)$. Это доказывает первый и второй изоморфизмы в пункте (ii). Чтобы доказать третий изоморфизм, воспользуемся пунктом (i) и изоморфизмом групповых функторов $T\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{G}_a$ (см. пример 4.4.16(ii)).

(iii) Доказательство аналогично как для пункта (ii). □

Замечание 4.4.18. Первый и второй изоморфизмы в лемме 4.4.17(ii) объясняются геометрически тем, что инд-замкнутая подсхема $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp$ абсолютно плотна в $(L^n\mathbb{G}_m)^0$ (см. предложение 4.4.13(iii)), и фактор $L^n\mathbb{G}_m/(L^n\mathbb{G}_m)^0 \simeq \underline{\mathbb{Z}}^n$ дискретен (см. формулу (4.2.14) в § 4.2.3), соответственно. Первый изоморфизм в лемме 4.4.17(iii) соответствует тому, что инд-замкнутая подсхема $(L^n\mathbb{G}_a)^\sharp$ абсолютно плотна в $L^n\mathbb{G}_a$ (см. предложение 4.4.13(i)).

4.4.5. **Характеры группового функтора** $(L^n\mathbb{G}_m)^0$**.** Для группового функтора F над кольцом R определены группа *характеров* $\mathrm{Hom}_R^{gr}\big(F,(\mathbb{G}_m)_R\big)$, и группа *линейных функционалов* $\mathrm{Hom}_R^{gr}\big(F,(\mathbb{G}_a)_R\big)$ (см. обозначение Hom^{gr} в § 4.1). Напомним следующие хорошо известные факты.

Лемма 4.4.19.

(i) *Если кольцо R не содержит $\mathbb{Z}$-кручения, то имеется изоморфизм групп $R \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R^{gr}\big((\mathbb{G}_a)_R,(\mathbb{G}_a)_R\big)$, $r \longmapsto \big(a \mapsto ar\big)$, где a является элементом R-алгебры A.*

(ii) *Для любого кольца R имеется изоморфизм групп $\underline{\mathbb{Z}}(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R^{gr}\big((\mathbb{G}_m)_R,(\mathbb{G}_m)_R\big)$, $\underline{i} \longmapsto \big(a \mapsto a^{\underline{i}}\big)$, где a является обратимым элементом R-алгебры A.*

(iii) *Для любой $\mathbb{Q}$-алгебры R имеется изоморфизм групп $\mathrm{Nil}(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R^{gr}\big((\mathbb{G}_a)_R,(\mathbb{G}_m)_R\big)$, $r \longmapsto \big(a \mapsto \exp(ar)\big)$, где a является элементом R-алгебры A. Обратный изоморфизм сопоставляет характеру $\chi\colon (\mathbb{G}_a)_R \to (\mathbb{G}_m)_R$ его дифференциал (см. пункт (i))*

$$T\chi \in \mathrm{Hom}_R^{gr}\big(T(\mathbb{G}_a)_R, T(\mathbb{G}_m)_R\big) \simeq \mathrm{Hom}_R^{gr}\big((\mathbb{G}_a)_R,(\mathbb{G}_a)_R\big) \simeq R\,,$$

который всегда является нильпотентным элементом в R.

Доказательство. (i) Линейный функционал $(\mathbb{G}_a)_R \to (\mathbb{G}_a)_R$ задается таким многочленом $f \in R[x]$, что $f(0) = 0$ и $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Таким образом, все следует из формулы бинома Ньютона.

(ii) Характер $(\mathbb{G}_m)_R \to (\mathbb{G}_m)_R$ задается таким многочленом Лорана $f = \sum_i a_i x^i$ из кольца $R[x,x^{-1}]^*$, что $f(1) = 1$ и $f(x)\cdot f(y) = f(x\cdot y)$. Из этих равенств моментально следует, что коэффициенты a_i являются ортогональными идемпотентами в кольце R, а их сумма равна 1.

(iii) Характер $(\mathbb{G}_a)_R \to (\mathbb{G}_m)_R$ задается таким многочленом $f \in R[x]^*$, что $f(0) = 1$ и $f(x)\cdot f(y) = f(x+y)$. Применя log, получаем равенство $\log(f)(x) + \log(f)(y) = \log(f)(x+y)$ между степенными рядами из $R[[x]]$. Так же как и в пункте (i), мы получаем равенство $\log(f)(x) = rx$ для произвольного элемента $r \in R$. Поскольку $f = \exp\big(\log(f)\big)$ является многочленом, элемент r нильпотентен. □

Предложение 4.4.20. *Пусть R является $\mathbb{Q}$-алгеброй и пусть $\chi \in \mathrm{Hom}_R^{gr}\big((L^n\mathbb{G}_m)^\sharp_R, (\mathbb{G}_m)_R\big)$ является характером. Тогда подфунктор (см. лемму 4.4.17(ii))*

$$(L^n\mathbb{G}_a)^\sharp_R \subset (L^n\mathbb{G}_a)_R \simeq T(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp_R$$

отображается дифференциалом $T\chi$ в подфунктор

$$\mathrm{Nil}_R \subset (\mathbb{G}_a)_R \simeq T(\mathbb{G}_m)_R\,,$$

и следующая диаграмма коммутативна (см. отображение exp *в предложении 4.2.21):*

$$\begin{array}{ccc} (L^n\mathbb{G}_a)^\sharp_R & \xrightarrow{T\chi} & \mathrm{Nil}_R \\ {\scriptstyle\exp}\big\downarrow & & {\scriptstyle\exp}\big\downarrow \\ (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp_R & \xrightarrow{\chi} & (\mathbb{G}_m)_R\,. \end{array}$$

Доказательство. Рассмотрим R-алгебру A и итерированный ряд Лорана $g \in (L^n\mathbb{G}_a)^\sharp(A)$. Возникает характер

$$\kappa \;:\; (\mathbb{G}_a)_A \xrightarrow{g} (L^n\mathbb{G}_a)^\sharp_A \xrightarrow{\exp} (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp_A \xrightarrow{\chi} (\mathbb{G}_m)_A\,,$$

где первый морфизм групповых инд-схем отображает элемент b из A-алгебры B в итерированный ряд Лорана $bg \in \mathcal{L}^n(B)^\sharp$. Таким образом, имеется равенство $\kappa(b) = \chi\big(\exp(bg)\big) \in B^*$. Опишем дифференциал $T\kappa \in \mathrm{Nil}(A)$ (см. пример 4.4.16 и лемму 4.4.19(i)).

Напомним, что по примеру 4.4.16 и по лемме 4.4.17 имеются изоморфизмы

$$T\mathbb{G}_a \simeq \mathbb{G}_a\,, \qquad T(L^n\mathbb{G}_a)^\sharp \simeq L^n\mathbb{G}_a\,, \qquad T(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp \simeq L^n\mathbb{G}_a\,, \qquad T\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{G}_a\,.$$

Легко показать, что относительно данных изоморфизмов дифференциал Tg соответствует морфизму g, а дифференциал $T\exp$ соответствует тождественному морфизму. Действительно, для любого кольца C и любого итерированного ряда Лорана $h \in L^n\mathbb{G}_a(C)$ выполняется равенство $\exp(h\,\varepsilon) = 1 + h\,\varepsilon$ в $L^n\mathbb{G}_m\big(C[\varepsilon]\big)$, где $\varepsilon^2 = 0$. Из этого следует, что дифференциал $T\kappa$ соответствует элементу $(T\chi)(g) \in A$. Применяя лемму 4.4.19(iii) над кольцом A, мы получаем, что элемент $(T\chi)(g)$ нильпотентен, и имеется равенство $\kappa(1) = \exp\big((T\chi)(g)\big)$. С другой стороны, выполнено равенство $\kappa(1) = \chi\big(\exp(g)\big)$, что доказывает предложение. $\square$

Замечание 4.4.21. Предложение 4.4.20 является частным случаем общего алгебраического аналога хорошо известного аналитического утверждения о том, что гомоморфизм между группами Ли коммутирует с дифференциалом через экспоненциальное отображение.

Предложение 4.4.22. *Пусть R является $\mathbb{Q}$-алгеброй. Тогда естественный гомоморфизм групп*

$$\mathrm{Hom}_R^{gr}\left((L^n\mathbb{G}_m)^0_R, (\mathbb{G}_m)_R\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R^{gr}\left((L^n\mathbb{G}_a)_R, (\mathbb{G}_a)_R\right), \qquad \chi \longmapsto T\chi\,,$$

инъективен. Кроме того, для любого характера $\chi\colon (L^n\mathbb{G}_m)^0_R \to (\mathbb{G}_m)_R$, R-алгебры A и элемента $f \in (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$ выполнено равенство в A^*

$$\chi(f) = \exp(a)\,,$$

где нильпотентный элемент $a \in \mathrm{Nil}(A)$ определяется равенством в $A[\varepsilon]^*$

$$\chi\big(1 + \log(f)\,\varepsilon\big) = 1 + a\,\varepsilon\,.$$

Доказательство. Из предложения 4.4.13(iii) и леммы 4.3.31 следует, что отображение ограничения

$$\mathrm{Hom}_R^{gr}\left((L^n\mathbb{G}_m)^0_R, (\mathbb{G}_m)_R\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R^{gr}\left((L^n\mathbb{G}_m)^\sharp_R, (\mathbb{G}_m)_R\right)$$

инъективно. Далее все следует из предложений 4.2.21 и 4.4.20. □

4.4.6. **Линейный функционалы на групповом функторе $L^n\Omega^i$.** Определим следующий морфизм групповых функторов:

$$\Delta \;:\; L^n\mathbb{G}_a \longrightarrow L^n\Omega^1\,, \quad f \longmapsto df - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i\,,$$

где $f \in L^n\mathbb{G}_a(A) = \mathcal{L}^n(A)$ для произвольного кольца A.

Лемма 4.4.23. *Для любого кольца R, элемента $g \in \mathcal{L}^n(R)$ и морфизма функторов $\alpha\colon (L^n\Omega^1)_R \to \mathbb{A}^1_R$ над R (не обязательно согласованного с групповыми структурами) композиция*

$$(L^n\mathbb{G}_a)_R \xrightarrow{g\cdot\Delta} (L^n\Omega^1)_R \xrightarrow{\alpha} \mathbb{A}^1$$

является постоянным морфизмом, т.е. для любой R-алгебры A и любого итерированного ряда Лорана $f \in \mathcal{L}^n(A)$ выполняется равенство $\alpha\big(g \cdot \Delta(f)\big) = \alpha(0)$.

Доказательство. Мы будем использовать обозначения из § 1.5.1. Напомним, что согласно примеру 4.4.7 функтор $L^n\mathbb{G}_a$ представим инд-аффинной схемой $\mathbb{A}^{D^*n} \simeq \text{“}\varinjlim_{\lambda\in\Lambda_n}\text{”}\, \mathbb{A}^{\mathbb{Z}^n_\lambda}$. Пусть элемент $\lambda \in \Lambda_n$ таков, что $f \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}^n_\lambda}(A)$, т.е. имеется равенство $f = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n_\lambda} a_l t^l$, где $a_l \in A$. Ограничение композиции $\phi := \alpha \circ (g \cdot \Delta)$ на аффинное пространство $(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}^n_\lambda})_R$ над R задается некоторым многочленом $\phi_\lambda \in R[\mathbb{Z}^n_\lambda]$. Пусть $T \subset \mathbb{Z}^n_\lambda$ — носитель многочлена ϕ_λ, т.е. ϕ_λ зависит только от переменных, которые соответствуют элементам множества T. Определим многочлен Лорана $f' = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n_\lambda} a'_l t^l$ условиями $a'_l = a_l$ для $l \in T$ и $a'_l = 0$ для $l \notin T$. По построению

имеем равенство $\phi(f) = \phi(f')$. С другой стороны, легко проверить, что $\Delta(f') = \Delta(0) = 0$, откуда следует равенство $\phi(f') = \phi(0)$. Это завершает доказательство. □

Для целого числа $i \geqslant 0$ обозначим через $\widetilde{L^n\Omega^i}$ групповой функтор, который сопоставляет кольцу A группу $\widetilde{\Omega}^i_{\mathcal{L}^n(A)}$ (см. определение 1.5.14). Заметим, что имеется канонический морфизм групповых функторов $L^n\Omega^i \to \widetilde{L^n\Omega}^i$.

Предложение 4.4.24. *Для любого кольца R и целого числа $i \geqslant 0$ естественный гомоморфизм групп*

$$\mathrm{Hom}^{gr}_R\left((\widetilde{L^n\Omega}^i)_R, (\mathbb{G}_a)_R\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{gr}_R\left((L^n\Omega^i)_R, (\mathbb{G}_a)_R\right)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Это следует непосредственно из определения 1.5.14 и леммы 4.4.23. □

4.5. Непрерывные гомоморфизмы между алгебрами итерированных рядов Лорана

Пусть A является произвольным кольцом.

4.5.1. **Непрерывные и функториальные аддитивные гомоморфизмы.** В этом параграфе мы сравниваем непрерывные аддитивные гомоморфизмы $\mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^m(A)$ с морфизмами групповых функторов $L^n\mathbb{G}_a \to L^m\mathbb{G}_a$, см. предложение 4.5.3 и следствие 4.5.5. В качестве приложения мы описываем в предложении 4.5.8 как меняется гомоморфизм $\nu\colon \mathcal{L}^n(A)^* \to \underline{\mathbb{Z}}(A)^n$ при непрерывных гомоморфизмах A-алгебр итерированных рядов Лорана.

Определим инд-аффинную групповую схему $\mathbb{G}_a^{\oplus\mathbb{N}} := \text{“}\varinjlim\text{”}(\mathbb{G}_a)^i$. Заметим, что групповой функтор $\mathbb{G}_a^{\oplus\mathbb{N}}$ имеет естественную структуру $\mathbb{G}_a$-модуля в следующем смысле: для любого кольца B группа $(\mathbb{G}_a^{\oplus\mathbb{N}})(B) \simeq B^{\oplus\mathbb{N}}$ имеет каноническую структуру B-модуля, функториальную относительно кольца B. Аналогично, групповой функтор $L^n\mathbb{G}_a$ также имеет естественную структуру $\mathbb{G}_a$-модуля. Морфизм групповых функторов $L^n\mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a^{\oplus\mathbb{N}}$ называется $\mathbb{G}_a$-*линейным*, если он уважает соответствующие структуры B-модуля для любого кольца B. Определим аналогично $(\mathbb{G}_a)_A$-линейные морфизмы групповых функторов $(L^n\mathbb{G}_a)_A \to (\mathbb{G}_a^{\oplus\mathbb{N}})_A$.

Для $(\mathbb{G}_a)_A$-линейного морфизма групповых функторов

$$\xi : (L^n\mathbb{G}_a)_A \longrightarrow (\mathbb{G}_a^{\oplus\mathbb{N}})_A$$

определено его вычисление $\xi(A)$ в A:

$$\xi(A) \,:\, (L^n\mathbb{G}_a)_A(A) = \mathcal{L}^n(A) \longrightarrow (\mathbb{G}_a^{\oplus\mathbb{N}})_A(A) = A^{\oplus\mathbb{N}},$$

являющееся морфизмом A-модулей. В частности, ядро $\operatorname{Ker}\big(\xi(A)\big) \subset \mathcal{L}^n(A)$ является A-подмодулем в $\mathcal{L}^n(A)$. Следующее утверждение обнаруживает важную связь между инд-аффинной схемой $(L^n\mathbb{G}_a)_A$ и топологией на $\mathcal{L}^n(A)$.

Лемма 4.5.1. *Набор подгрупп* $\operatorname{Ker}\big(\xi(A)\big) \subset \mathcal{L}^n(A)$, *где* $\xi\colon (L^n\mathbb{G}_a)_A \to (\mathbb{G}_a^{\oplus\mathbb{N}})_A$ *пробегает все* $(\mathbb{G}_a)_A$*-линейные морфизмы групповых функторов, образует базу открытых окрестностей нуля в топологической группе* $\mathcal{L}^n(A)$.

Доказательство. Покажем, что для любого ξ как в лемме ядро $\operatorname{Ker}\big((\xi(A)\big)$ является открытой подгруппой в $\mathcal{L}^n(A)$. Для произвольного множества M любой $(\mathbb{G}_a)_A$-линейный морфизм групповых схем $(\mathbb{A}^M)_A \to (\mathbb{G}_a)_A$ над A задается линейным функционалом $(x_m) \mapsto \sum\limits_{m\in M} c_m x_m$, где $c_m \in A$ являются скалярами, x_m являются координатами на $\mathbb{A}^M$ и все c_m, кроме конечного числа, равны нулю, т.е. $(c_m) \in A^{\oplus M}$.

Поскольку функтор $L^n\mathbb{G}_a$ представлен формальным направленным пределом групповых схем $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}^n_\mu}$, где $\mu \in \Lambda_n$, мы видим, что произвольный $(\mathbb{G}_a)_A$-линейный морфизм групповых функторов $\chi\colon (L^n\mathbb{G}_a)_A \to (\mathbb{G}_a)_A$ задается линейным функционалом $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t^l \mapsto \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n} c_l a_l$, где $c_l \in A$ и для любого $\mu \in \Lambda_n$ пересечение $\operatorname{Supp}(\chi) \cap \mathbb{Z}^n_\mu$ конечно. Здесь $\operatorname{Supp}(\chi) \in \mathbb{Z}^n$ является множеством всех $l \in \mathbb{Z}^n$, для которых $c_l \neq 0$.

Из этого следует, что $(\mathbb{G}_a)_A$-линейный морфизм групповых функторов $\xi\colon (L^n\mathbb{G}_a)_A \to (\mathbb{G}_a^{\oplus\mathbb{N}})_A$ задается набором $(\mathbb{G}_a)_A$-линейных морфизмов групповых функторов $(\chi_1, \ldots, \chi_i, \ldots)$, где $\chi_i\colon (L^n\mathbb{G}_a)_A \to (\mathbb{G}_a)_A$, $i \geqslant 1$. Заметим, что не любой набор $(\chi_1, \ldots, \chi_i, \ldots)$ соответствует морфизму групповых функторов ξ как выше. В частности, для любого $\mu \in \Lambda_n$ пересечение множества $M := \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{Supp}(\chi_i)$ с $\mathbb{Z}^n_\mu$ должно быть конечно. Это следует из того, что ограничения всех χ_i, кроме конечного числа, на $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}^n_\mu}$ равно нулю. По лемме 1.5.1 мы видим, что $(-M) \subset \mathbb{Z}^n_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda_n$ или, что равносильно, $M \subset (-\mathbb{Z}^n_\lambda)$. Следовательно ядро $\operatorname{Ker}\big((\xi(A)\big)$ содержит открытую подгруппу $U_\lambda \subset \mathcal{L}^n(A)$, и ядро $\operatorname{Ker}\big(\xi(A)\big)$ открыто.

Наконец, рассмотрим открытое подмножество U_λ, где $\lambda \in \Lambda_n$, и выберем произвольную биекцию между $-\mathbb{Z}^n_\lambda$ и $\mathbb{N}$. Тогда набор линейных функционалов $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t^l \mapsto a_l$, где $l \in -\mathbb{Z}^n_\lambda$, определяет морфизм групповых функторов $\xi\colon (L^n\mathbb{G}_a)_A \to (\mathbb{G}_a^{\oplus\mathbb{N}})_A$, для которого $\operatorname{Ker}\big(\xi(A)\big) = U_\lambda$. Это доказывает лемму. $\square$

Определение 4.5.2. Обозначим через

$$\mathrm{Hom}_A^c\left(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^m(A)\right)$$

множество всех непрерывных A-линейных гомоморфизмов аддитивных топологических групп $\mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^m(A)$. Обозначим через

$$\mathrm{Hom}_A^{c,alg}\left(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^m(A)\right)$$

множество всех непрерывных гомоморфизмов A-алгебр $\mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^m(A)$.

Также, пусть $\mathrm{Hom}\left((L^n\mathbb{G}_a)_A, (L^m\mathbb{G}_a)_A\right)$ является множеством всех $(\mathbb{G}_a)_A$-линейных морфизмов групповых функторов $(L^n\mathbb{G}_a)_A \to (L^m\mathbb{G}_a)_A$, и пусть $\mathrm{Hom}^{rg}\left((L^n\mathbb{G}_a)_A, (L^m\mathbb{G}_a)_A\right)$ является множеством всех $(\mathbb{G}_a)_A$-линейных морфизмов кольцевых функторов $(L^n\mathbb{G}_a)_A \to (L^m\mathbb{G}_a)_A$.

Предложение 4.5.3. *Вычисление в A определяет биекцию*

$$\mathrm{Hom}\left((L^n\mathbb{G}_a)_A, (L^m\mathbb{G}_a)_A\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A^c\left(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^m(A)\right), \qquad \alpha \longmapsto \alpha(A)\,.$$

Доказательство. Из леммы 4.5.1 непосредственно следует, что для любого $(\mathbb{G}_a)_A$-линейного морфизма групповых функторов $\alpha\colon (L^n\mathbb{G}_a)_A \to (L^m\mathbb{G}_a)_A$ вычисление $\alpha(A)\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^m(A)$ в A непрерывно. Также, очевидна A-линейность гомоморфизма $\alpha(A)$. Таким образом, отображение в предложении корректно определено.

По аналогичной причине для любой A-алгебры B вычисление $\alpha(B)$ принадлежит $\mathrm{Hom}_B^c\left(\mathcal{L}^n(B), \mathcal{L}^m(B)\right)$. По лемме 1.5.12(ii) гомоморфизм $\alpha(B)$ однозначно определяется его значениями $\alpha(B)(bt^l) = b\,\alpha(B)(t^l)$, где $b \in B$, $l \in \mathbb{Z}^n$. Следовательно, $\alpha(B)$ однозначно определяется гомоморфизмом $\alpha(A)$. Это доказывает, что отображение в предложении инъективно.

Наконец, докажем сюръективность. Рассмотрим произвольный гомоморфизм $\phi \in \mathrm{Hom}_A^c\left(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^m(A)\right)$. Для любого $\lambda \in \Lambda_n$ счетное множество $\{t^l\}$, $l \in \mathbb{Z}^n_\lambda$, стремится к нулю в $\mathcal{L}^n(A)$. Поскольку гомоморфизм ϕ непрерывен, счетное множество $\{\phi(t^l)\}$, $l \in \Lambda_n$, тоже стремится к нулю в $\mathcal{L}^m(A)$. Пусть B является произвольной A-алгеброй. Для любого элемента $f = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n} b_l t^l \in \mathcal{L}^n(B)$ положим $\alpha(B)(f) := \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n} b_l \phi(t^l)$, что является сходящимся рядом в топологической группе $\mathcal{L}^m(B)$, так как счетное множество $\{\phi(t^l)\}$, $l \in \Lambda_n$, стремится к нулю также и в $\mathcal{L}^m(B)$. Это определяет морфизм $\alpha \in \mathrm{Hom}\left((L^n\mathbb{G}_a)_A, (L^m\mathbb{G}_a)_A\right)$. По лемме 1.5.12(i) имеем $\alpha(A) = \phi$. Это завершает доказательство. □

Теперь рассмотрим гомоморфизмы, уважающие произведения итерированных рядов Лорана. Мы будем использовать следующее простое наблюдение.

Лемма 4.5.4. *Непрерывный A-линейный гомоморфизм $\phi \in \mathrm{Hom}_A^c\left(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^m(A)\right)$ является гомоморфизмом колец тогда и только тогда, когда*

$$\phi(t^l) = \phi(t_1)^{l_1} \dots \phi(t_n)^{l_n}$$

для любого элемента $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Доказательство. Необходимость приведенного условия очевидна. Докажем достаточность. Из условия леммы следует, что ϕ уважает произведение многочленов Лорана. По следствию 1.5.7(i) произведение с фиксированным итерированным рядом Лорана непрерывно, а по лемме 1.5.12(ii) множество многочленов Лорана плотно в $\mathcal{L}^n(A)$. Применяя это дважды, мы получаем сначала, что ϕ уважает произведения многочленов Лорана с итерированными рядами Лорана, а затем, что ϕ уважает произведения произвольных элементов из $\mathcal{L}^n(A)$. $\square$

Из предложения 4.5.3 вытекает следующий факт.

Следствие 4.5.5. *Вычисление в A определяет биекцию*

$$\mathrm{Hom}^{rg}\left((L^n\mathbb{G}_a)_A, (L^m\mathbb{G}_a)_A\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A^{c,alg}\left(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^m(A)\right), \qquad \alpha \longmapsto \alpha(A)\,.$$

Доказательство. По предложению 4.5.3 данное отображение корректно определено. Также по предложению 4.5.3 для любого $\phi \in \mathrm{Hom}_A^{c,alg}\left(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^m(A)\right)$ существует морфизм $\alpha \in \mathrm{Hom}\left((L^n\mathbb{G}_a)_A, (L^m\mathbb{G}_a)_A\right)$, такой что $\alpha(A) = \phi$. Поскольку ϕ является гомоморфизмом колец, из леммы 4.5.4 следует, что для любой A-алгебры B непрерывное B-линейное отображение $\alpha(B)\colon \mathcal{L}^n(B) \to \mathcal{L}^m(B)$ также является гомоморфизмом колец, и поэтому имеем $\alpha \in \mathrm{Hom}^{rg}\left((L^n\mathbb{G}_a)_A, (L^m\mathbb{G}_a)_A\right)$. $\square$

Замечание 4.5.6. Если кольцо A плоское над $\mathbb{Z}$, то по лемме 4.4.19(i) свойство $(\mathbb{G}_a)_A$-линейности выполяется для любого эндоморфизма группового функтора $(\mathbb{G}_a)_A$. Из этого следует, что в этом случае в лемме 4.5.1, предложении 4.5.3 и следствии 4.5.5 можно убрать условие, что морфизмы групповых (или кольцевых) функторов $(\mathbb{G}_a)_A$-линейны (см. начало доказательства леммы 4.5.1).

Приведем другое приложение предложения 4.5.3 и следствия 4.5.5. Для произвольного кольца R через $\mathrm{M}_{m\times n}(R)$ обозначим множество всех $(m \times n)$-матриц с матричными элементами из R. Будем рассматривать элементы из R^n как столбцы.

Определение 4.5.7. Для любого $\phi \in \mathrm{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^m(A)\big)$ положим

$$\Upsilon(\phi) := \big(\nu(\phi(t_1)), \ldots, \nu(\phi(t_n))\big) \in \mathrm{M}_{m\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)\,.$$

Предложение 4.5.8. *Для любого* $\phi \in \mathrm{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^m(A)\big)$ *и любого* $f \in \mathcal{L}^n(A)^*$ *имеется равенство в* $\underline{\mathbb{Z}}(A)^n$

$$\nu\big(\phi(f)\big) = \Upsilon(\phi)\cdot\nu(f)\,.$$

Доказательство. По следствию 4.5.5, существует единственный морфизм $\alpha \in \mathrm{Hom}^{rg}\big((L^n\mathbb{G}_a)_A, (L^m\mathbb{G}_a)_A\big)$, для которого $\alpha(A) = \phi$. Поскольку α является морфизмом кольцевых функторов, α индуцирует морфизм групповых функторов $(L^n\mathbb{G}_m)_A \to (L^m\mathbb{G}_m)_A$, который, для простоты, мы обозначим также через α.

Покажем, что морфизм $\alpha\colon (L^n\mathbb{G}_m)_A \to (L^m\mathbb{G}_m)_A$ переводит групповой подфунктор $(L^n\mathbb{G}_m)^0_A \subset (L^n\mathbb{G}_m)_A$ в групповой подфунктор $(L^m\mathbb{G}_m)^0_A \subset (L^m\mathbb{G}_m)_A$. По предложению 4.4.13(iv) функтор $(L^n\mathbb{G}_m)^0$ представлен абсолютно связной инд-аффинной групповой схемой над $\mathbb{Z}$ (см. определение 4.3.24). В частности, групповой функтор $(L^n\mathbb{G}_m)^0_A$ также представлен абсолютно связной инд-аффинной схемой над A. Значит, по предложению 4.3.29 любой морфизм групповых функторов $(L^n\mathbb{G}_m)^0_A \to \underline{\mathbb{Z}}_A$ над A равен нулю. Следовательно, композиция

$$(L^n\mathbb{G}_m)^0_A \xrightarrow{\alpha} (L^m\mathbb{G}_m)_A \xrightarrow{\nu} \underline{\mathbb{Z}}^m_A$$

также равна нулю. Поэтому α переводит $(L^n\mathbb{G}_m)^0_A$ в $(L^m\mathbb{G}_m)^0_A$.

Мы получаем, что α определяет гомоморфизм групповых функторов из фактора

$$\nu\,:\,(L^n\mathbb{G}_m)_A/(L^n\mathbb{G}_m)^0_A \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{Z}}^n_A$$

в фактор

$$\nu\,:\,(L^m\mathbb{G}_m)_A/(L^m\mathbb{G}_m)^0_A \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{Z}}^m_A\,,$$

задаваемый некоторой матрицей из $\mathrm{M}_{m\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)$. Легко видеть, что эта матрица есть не что иное, как $\Upsilon(\phi)$, что заканчивает доказательство. □

Следствие 4.5.9. *При* $m = n$ *отображение*

$$\Upsilon\,:\,\mathrm{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\big) \longrightarrow \mathrm{M}_{n\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)$$

является гомоморфизмом моноидов. В частности, если эндоморфизм $\phi \in \mathrm{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\big)$ *обратим, то матрица* $\Upsilon(\phi) \in \mathrm{M}_{n\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)$ *также обратима.*

4.5.2. **Непрерывные гомоморфизмы и замены параметров.** В этом параграфе мы описываем все возможные замены параметров $t_1, \ldots, t_n$ относительно непрерывных гомоморфизмов A-алгебр $\phi\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^m(A)$, т.е. мы описываем все возможные наборы $\bigl(\phi(t_1), \ldots, \phi(t_n)\bigr)$ элементов из $\mathcal{L}^m(A)^*$, см. теорему 4.5.14. Заметим, что такой набор однозначно определяет исходный гомоморфизм ϕ.

Мы будем использовать следующий элементарный факт о матрицах с целыми элементами.

Лемма 4.5.10. *Для любой матрицы $M \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$ следующие условия равносильны:*

(i) *отображение*

$$M \,:\, \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^m\,, \qquad l \longmapsto M\cdot l\,,$$

строго сохраняет лексикографический порядок, т.е. если $l > 0$, то $M\cdot l > 0$;

(ii) *матрица M имеет ступенчатый вид по столбцам с положительными ведущими элементами, т.е. матрица M имеет вид*

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p_1,1} & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_{p_2,2} & & \vdots \\ \vdots & 0 & & x_{p_n,n} \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

где $1 \leqslant p_1 < \ldots < p_n \leqslant m$ и $x_{p_i,i} > 0$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$;

(iii) *отображение $M\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ инъективно и для любого $\lambda \in \Lambda_n$ существует такой элемент $\mu \in \Lambda_m$, что $M\cdot\mathbb{Z}^n_\lambda \subset \mathbb{Z}^m_\mu$.*

Доказательство. (i)⇒(ii) Доказательство проводится индукцией по n. База $n = 1$ очевидна. Совершим переход индукции от $n-1$ к n, где $n \geqslant 2$. Из неравенства

$$(0,\ldots,0,1,0) < (0,\ldots,0,0,1)$$

следует, что либо $p_n > p_{n-1}$ и $x_{p_n,n} > 0$, либо $p_n = p_{n-1} = p$ и $x_{p,n} > x_{p,n-1}$. Предположим, что имеет место второй случай. Так как $x_{p,n-1} \neq 0$ (на самом деле, $x_{p,n-1} > 0$), то существует $k \in \mathbb{Z}$, для которого $kx_{p,n-1} + x_{p,n} < 0$. Тогда мы получаем противоречие, поскольку $(0,\ldots,0,k,1) > 0$ и $M\cdot(0,\ldots,0,k,1)^\top < 0$.

(ii)⇒(iii) Из явного вида матрицы M в пункте (ii) следует, что ранг матрицы M (над $\mathbb{Q}$) равен n. Таким образом отображение $M\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ инъективно.

Докажем индукцией по m, что выполняется также и второе условие пункта (iii). При этом мы рассматриваем базу $m = 0$, для которой требуемое утверждение выполняется, будучи пустым. Совершим переход индукции от $m-1$ к m, где $m \geqslant 1$.

Предположим, что $p_n < m$. Тогда образ отображения $M\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ содержится в подгруппе $\mathbb{Z}^{m-1} = \{(*, \ldots, *, 0)\}$. По предположению индукции существует такой элемент $\kappa \in \Lambda_{m-1}$, что $M \cdot \mathbb{Z}^n_\lambda \subset \mathbb{Z}^{m-1}_\kappa$. Положим $\mu = (\mu', 0) \in \Lambda_m$, где $\mu'\colon \mathbb{Z} \to \Lambda_{m-1}$ является произвольным отображением, для которого $\mu'(0) = \kappa$.

Теперь предположим, что $p_n = m$. По определению имеем $\lambda = (\lambda', \lambda_n)$, где $\lambda'\colon \mathbb{Z} \to \Lambda_{n-1}$ и $\lambda_n \in \mathbb{Z}$. Положим $\mu_m := \lambda_n x_{mn} \in \mathbb{Z}$. Пусть M' является $(m-1) \times (n-1)$-матрицей, равной M без последней строки и последнего столбца. По предположению индукции для любого $l \geqslant \lambda_n$ существует такой элемент $\rho(l) \in \Lambda_{m-1}$, что $M' \cdot \mathbb{Z}^{n-1}_{\lambda'(l)} \subset \mathbb{Z}^{m-1}_{\rho(l)}$. Теперь пусть $\mu'\colon \mathbb{Z} \to \Lambda_{m-1}$ является таким отображением, что для любого $l \geqslant \lambda_n$ элемент $\mu'(lx_{mn}) \in \Lambda_{m-1}$ удовлетворяет условию

$$\mathbb{Z}^{m-1}_{\rho(l)} + l \cdot (x_{1n}, \ldots, x_{m-1,n}) \subset \mathbb{Z}^{m-1}_{\mu'(lx_{mn})}\,.$$

Мы получаем, что $M \cdot \mathbb{Z}^n_\lambda \subset \mathbb{Z}^m_\mu$, где $\mu = (\mu', \mu_m)$.

(iii)⇒(i) Заметим, что элемент $l \in \mathbb{Z}^n$ удовлетворяет условию $l > 0$ тогда и только тогда, когда $l \neq 0$ и существует элемент $\lambda \in \Lambda_n$, для которого подмножество $\{kl \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}^n$ содержится в $\mathbb{Z}^n_\lambda$ (это можно легко показать индукцией по n). Это доказывает требуемую импликацию. □

Определение 4.5.11. Обозначим через

$$\mathrm{M}^+_{m\times n}(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$$

множество всех $(m \times n)$-матриц, удовлетворяющих равносильным условиям леммы 4.5.10. Аналогично, пусть $\mathrm{M}^+_{m\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)$ является множеством всех $(m \times n)$-матриц с элементами из $\underline{\mathbb{Z}}(A)$, которые поточечно на $\mathrm{Spec}(A)$ принадлежат $\mathrm{M}^+_{m\times n}(\mathbb{Z})$.

Заметим, что если $\mathrm{M}^+_{m\times n}(\mathbb{Z})$ непусто, то $n \leqslant m$.

Определение 4.5.12. Обозначим через

$$\mathbb{H}_{m,n}(A) \subset \big(\mathcal{L}^m(A)^*\big)^{\times n}$$

множество всех наборов $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ обратимых итерированных рядов Лорана от $t_1, \ldots, t_m$, для которых матрица $\big(\nu(\varphi_1), \ldots, \nu(\varphi_n)\big) \in \mathrm{M}_{m\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)$ принадлежит множеству $\mathrm{M}^+_{m\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)$.

Для произвольного набора $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, где $\varphi_i \in \mathcal{L}^n(A)$, и для элемента $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$, положим $\varphi^l := \varphi_1^{l_1} \ldots \varphi_n^{l_n}$, обобщая обозначение $t^l = t_1^{l_1} \ldots t_n^{l_n}$.

Предложение 4.5.13. *Набор $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \big(\mathcal{L}^m(A)^*\big)^{\times n}$ принадлежит множеству $\mathbb{H}_{m,n}(A)$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $\lambda \in \Lambda_n$ счетное множество $\{\varphi^l\}$, $l \in \mathbb{Z}^n_\lambda$, стремится к нулю в группе $\mathcal{L}^m(A)$.*

Доказательство. Переходя при необходимости к разложению кольца A в конечное произведение колец, мы можем предполагать, что все $\nu(\varphi_i) \in \underline{\mathbb{Z}}^n(A)$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, являются постоянными функциями, т.е. элементами из группы $\mathbb{Z}^n$.

Предположим, что $\varphi \in \mathbb{H}_{m,n}(A)$. Положим $M := \big(\nu(\varphi_1), \ldots, \nu(\varphi_n)\big) \in \mathrm{M}^+_{m\times n}(\mathbb{Z})$. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, зададим элемент $f_i \in \mathcal{L}^m(A)^*$ равенством

$$\varphi_i = t^{\nu(\varphi_i)} \cdot f_i \,.$$

В частности, имеем $\nu(f_i) = 0$. Тогда для любого элемента $l \in \mathbb{Z}^n$, выполнено равенство $\varphi^l = t^{M\cdot l} \cdot f^l$, где $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Так как матрица M удовлетворяет условию (iii) леммы 4.5.10, то имеем вложение $M \cdot \mathbb{Z}^n_\lambda \subset \mathbb{Z}^m_\mu$ для некоторого элемента $\mu \in \Lambda_m$. По лемме 1.5.1 для любого элемента $\rho \in \Lambda_m$ множество

$$\mathbb{Z}^m_\mu \smallsetminus \big(\mathbb{Z}^m_\mu \cap \mathbb{Z}^m_{(\rho)}\big) = \mathbb{Z}^m_\mu \cap (-\mathbb{Z}^m_\rho)$$

конечно. Поэтому счетное множество $\{t^{M\cdot l}\}$, $l \in \mathbb{Z}^n_\lambda$, стремится к нулю.

По следствию 4.2.17 счетное множество $\{f^l\}$, $l \in \mathbb{Z}^n$, ограничено. Таким образом, из следствия 1.5.7(iv) получаем, что счетное множество $\{t^{M\cdot l} \cdot f^l\}$, $l \in \mathbb{Z}^n_\lambda$, стремится к нулю.

Теперь предположим, что счетное множество $\{\varphi^l\}$, $l \in \mathbb{Z}^n_\lambda$, стремится к нулю. Тогда по следствию 1.5.7(iii) это множество ограничено. Значит, по лемме 1.5.6 существует такой элемент $\mu \in \Lambda_m$, что $\mathrm{Supp}(\varphi^l) \in \mathbb{Z}^m_\mu$ для любого $l \in \mathbb{Z}^n_\lambda$. Так как $\nu(\varphi^l) \in \mathrm{Supp}(\varphi^l)$ и $\nu(\varphi^l) = M \cdot l \in \mathbb{Z}^m$, то мы получаем вложение $M \cdot \mathbb{Z}^n_\lambda \subset \mathbb{Z}^m_\mu$.

Предположим, что отображение $M\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ имеет ненулевое ядро. Тогда найдется такой элемент $\lambda \in \Lambda_n$, что для бесконечного множества элементов $l \in \mathbb{Z}^n_\lambda$ выполнено $M \cdot l = 0$. Следовательно, счетное множество $\{\varphi^l\}$, $l \in \mathbb{Z}^n_\lambda$, содержит бесконечное множество элементов g, для которых $\nu(g) = 0$. Это противоречит тому, что счетное множество $\{\varphi^l\}$, $l \in \mathbb{Z}^n_\lambda$, стремится к нулю. Таким образом, отображение $M\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ инъективно, и матрица M удовлетворяет условию (iii) леммы 4.5.10. □

Теперь докажем главный результат этого параграфа.

Теорема 4.5.14. *Имеется биекция (см. определение 4.5.2)*

$$\mathrm{Hom}_A^{c,alg}\left(\mathcal{L}^n(A),\mathcal{L}^m(A)\right)\xrightarrow{\sim}\mathbb{H}_{m,n}(A)\,,\qquad \phi\longmapsto\big(\phi(t_1),\dots\phi(t_n)\big)\,.$$

Доказательство. Рассмотрим элемент $\phi\in\mathrm{Hom}_A^{c,alg}\left(\mathcal{L}^n(A),\mathcal{L}^m(A)\right)$. Для любого элемента $\lambda\in\Lambda_n$ счетное множество $\{t^l\}$, $l\in\mathbb{Z}^n_\lambda$, стремится к нулю в группе $\mathcal{L}^n(A)$. Поэтому счетное множество $\{\phi(t^l)\}$, $l\in\mathbb{Z}^n_\lambda$, стремится к нулю в группе $\mathcal{L}^m(A)$. Для любого элемента $l\in\mathbb{Z}^n$ выполнено равенство $\phi(t^l)=\varphi^l$, где $\varphi_i:=\phi(t_i)$, $1\leqslant i\leqslant n$, и $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$. Таким образом, по предложению 4.5.13 отображение из условия теоремы определено корректно. Инъективность этого отображения следует непосредственно из леммы 1.5.12(ii).

Теперь докажем сюръективность. Рассмотрим набор $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\in\mathbb{H}_{m,n}(A)$. По предложению 4.5.13 для любого $\lambda\in\Lambda_n$ счетное множество $\{\varphi^l\}$, $l\in\mathbb{Z}^n_\lambda$, стремится к нулю. Следовательно, ряд $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n_\lambda}a_l\varphi^l$ сходится в $\mathcal{L}^m(A)$, и мы имеем корректно определенное отображение

$$\phi\,:\,\mathcal{L}^n(A)\longrightarrow\mathcal{L}^m(A)\,,\qquad f=\sum_{l\in\mathbb{Z}^n_\lambda}a_lt^l\longmapsto f(\varphi_1,\dots,\varphi_n)=\sum_{l\in\mathbb{Z}^n_\lambda}a_l\varphi^l\,.$$

Ясно, что $\phi(t_i)=\varphi_i$, $1\leqslant i\leqslant n$, и что отображение ϕ является A-линейным аддитивным гомоморфизмом. Аналогично, для любой A-алгебры B, набор $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ определяет B-линейный гомоморфизм аддитивных групп $\mathcal{L}^n(B)\to\mathcal{L}^m(B)$. Это определяет $(\mathbb{G}_a)_A$-линейный морфизм групповых функторов $\alpha\colon(L^n\mathbb{G}_a)_A\to(L^m\mathbb{G}_a)_A$, такой что $\alpha(A)=\phi$. Поэтому по предложению 4.5.3 отображение ϕ непрерывно. Далее, по лемме 4.5.4 отображение ϕ является гомоморфизмом колец, что завершает доказательство. □

Следствие 4.5.15. *При $n>m$ не существует непрерывных гомоморфизмов A-алгебр из $\mathcal{L}^n(A)$ в $\mathcal{L}^m(A)$.*

Следствие 4.5.16. *Гомоморфизм моноидов (см. следствие 4.5.9)*

$$\Upsilon\,:\,\mathrm{Hom}_A^{c,alg}\left(\mathcal{L}^n(A),\mathcal{L}^n(A)\right)\longrightarrow\mathrm{M}^+_{n\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)$$

имеет естественное моноидное сечение, переводящее матрицу $M\in\mathrm{M}^+_{n\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)$ в эндоморфизм ϕ, для которого $\phi(t_i)=t^{l_i}$, $1\leqslant i\leqslant n$, где $M=(l_1,\dots,l_n)$ и $l_i\in\mathbb{Z}^n$.

Следствие 4.5.17. *Для любого обратимого непрерывного эндоморфизма A-алгебры $\phi\colon\mathcal{L}^n(A)\to\mathcal{L}^n(A)$ выполняется равенство $d(\phi)=1$.*

Из теоремы 4.5.14 также следует, что можно определить следующим образом ассоциативную композицию $\circ$ для наборов из $\mathbb{H}_{p,m}$ и $\mathbb{H}_{m,n}$.

Следствие 4.5.18. *Для всех наборов* $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\in\mathbb{H}_{m,n}(A)$ *и* $(\vartheta_1,\dots,\vartheta_m)\in\mathbb{H}_{p,m}(A)$ *композиция*

$$(\vartheta_1,\dots,\vartheta_m)\circ(\varphi_1,\dots,\varphi_n):=\big(\varphi_1(\vartheta_1,\dots,\vartheta_m),\dots,\varphi_n(\vartheta_1,\dots,\vartheta_m)\big)\in\big(\mathcal{L}^p(A)\big)^{\times n}$$

принадлежит $\mathbb{H}_{p,n}(A)\subset\big(\mathcal{L}^p(A)^*\big)^{\times n}\subset\big(\mathcal{L}^p(A)\big)^{\times n}$. *Более того, имеется равенство матриц из* $\mathrm{M}_{p\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)$

$$\big(\nu(\varphi_1(\vartheta_1,\dots,\vartheta_m)),\dots,\nu(\varphi_n(\vartheta_1,\dots,\vartheta_m))\big)=\big(\nu(\vartheta_1),\dots,\nu(\vartheta_m)\big)\cdot\big(\nu(\varphi_1),\dots,\nu(\varphi_n)\big)\,.$$

Доказательство. По теореме 4.5.14 наборы $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ и $(\vartheta_1,\dots,\vartheta_m)$ задаются гомоморфизмами $\phi\in\mathrm{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A),\mathcal{L}^m(A)\big)$ и $\theta\in\mathrm{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^m(A),\mathcal{L}^p(A)\big)$, соответственно. Также для любого i, $1\leqslant i\leqslant n$, имеются равенства

$$(\theta\circ\phi)(t_i)=\theta(\varphi_i)=\varphi_i(\vartheta_1,\dots,\vartheta_m)\,.$$

Следовательно композиция $\theta\circ\phi\in\mathrm{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A),\mathcal{L}^p(A)\big)$ соответствует набору $(\vartheta_1,\dots,\vartheta_m)\circ(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$. Поэтому, снова применяя теорему 4.5.14, получаем, что набор $(\vartheta_1,\dots,\vartheta_m)\circ(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ принадлежит множеству $\mathbb{H}_{p,n}(A)$. Равенство между матрицами следует из предложения 4.5.8. □

4.5.3. **Представимость функторов.** В этом параграфе показывается представимость функторов, задаваемых множествами непрерывных гомоморфизмов, см. предложение 4.5.19 и следствие 4.5.20.

Определим функтор на категории колец (см. определение 4.5.2)

$$\mathcal{H}om^{c,alg}(\mathcal{L}^n,\mathcal{L}^m)\,:\,A\longmapsto\mathrm{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A),\mathcal{L}^m(A)\big)\,.$$

Это действительно является функтором по следствию 4.5.5 (ср. с замечанием 4.5.33 ниже). Ясно, что функтор (см. определение 4.5.11)

$$\mathrm{M}^+_{m\times n}(\underline{\mathbb{Z}})\,:\,A\longmapsto\mathrm{M}^+_{m\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)$$

представлен инд-схемой, являющейся формальным прямым пределом конечных дизъюнктных объединений схем $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Теорема 4.5.14 непосредственно влечет следующий результат о представимости.

Предложение 4.5.19. *Функтор* $\mathcal{H}om^{c,alg}(\mathcal{L}^n,\mathcal{L}^m)$ *представлен инд-аффинной схемой над кольцом* $\mathbb{Z}$

$$\mathrm{M}^+_{m\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}\big)\times\big((L^m\mathbb{G}_m)^0\big)^{\times n}\,,$$

причем для любого кольца A, соответствующая биекция переводит элемент $\phi \in \mathrm{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^m(A)\big)$ в элемент

$$\big(\Upsilon(\phi), (f_1, \dots, f_n)\big) \in \mathrm{M}^+_{m\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big) \times \big((L^m\mathbb{G}_m)^0\big)^{\times n}(A)\,,$$

где $f_i := \phi(t_i)\cdot t^{-\nu(\phi(t_i))}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ (см. определение 4.5.7 для $\Upsilon(\phi)$).

Напомним, что при $m = n$ по следствию 4.5.9 имеем морфизм моноидных функторов

$$\Upsilon \,:\, \mathcal{H}om^{c,alg}(\mathcal{L}^n, \mathcal{L}^n) \longrightarrow \mathrm{M}^+_{n\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}\big)\,.$$

Обозначим ядро этого морфизма через $\mathrm{Ker}(\Upsilon)_n$. Определим подфунктор

$$\mathrm{Ker}(\Upsilon)_n^{nil} \subset \mathrm{Ker}(\Upsilon)_n\,,$$

который сопоставляет кольцу A множество всех таких элементов $\phi \in \mathrm{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\big)$, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, выполнено $\phi(t_i) = t_i + h_i$, где $h_i \in \mathcal{L}^n(A)$ является многочленом Лорана (а не только рядом) с нильпотентными коэффициентами.

Из предложения 4.5.19 вытекает много полезных свойств регулярных функций на функторе $\mathcal{H}om^{c,alg}(\mathcal{L}^n, \mathcal{L}^m)$. Следствие 4.5.20 ниже содержит два из них. Первое из них заключается в том, что для проверки равенства между регулярными функциями на функторе $\mathcal{H}om^{c,alg}(\mathcal{L}^n, \mathcal{L}^m) \times L^n\mathbb{G}_a$ достаточно рассматривать их вычисления только на $\mathbb{Q}$-алгебрах. Второе свойство заключается в том, что для проверки равенства между регулярными функциями на функторе $\mathrm{Ker}(\Upsilon)_n \times L^n\mathbb{G}_a$ достаточно рассматривать для произвольного кольца A только элементы из $\mathrm{Ker}(\Upsilon)_n^{nil}(A) \times \mathcal{L}^n(A) \subset \mathrm{Ker}(\Upsilon)_n(A) \times \mathcal{L}^n(A)$, с которыми работать намного проще. Доказательство следствия 4.5.20 существенно основывается на теории толстых инд-конусов, см. § 4.3.4.

Следствие 4.5.20.

(i) *Естественный гомоморфизм колец*

$$\mathcal{O}\big(\mathcal{H}om^{c,alg}(\mathcal{L}^n, \mathcal{L}^m) \times L^n\mathbb{G}_a\big) \longrightarrow \mathcal{O}\big(\mathcal{H}om^{c,alg}(\mathcal{L}^n, \mathcal{L}^m)_{\mathbb{Q}} \times (L^n\mathbb{G}_a)_{\mathbb{Q}}\big)$$

инъективен.

(ii) *Гомоморфизм колец*

$$\mathcal{O}\big(\,\mathrm{Ker}(\Upsilon)_n \times L^n\mathbb{G}_a\big) \longrightarrow \mathcal{O}\big(\,\mathrm{Ker}(\Upsilon)_n^{nil} \times L^n\mathbb{G}_a\big)\,,$$

являющийся отображением ограничения, инъективен.

Доказательство. (i) По предложению 4.5.19 имеем изоморфизм

$$\mathcal{H}om^{c,alg}(\mathcal{L}^n,\mathcal{L}^m)\times L^n\mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}^+_{m\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}\big)\times\big((L^m\mathbb{G}_m)^0\big)^{\times n}\times L^n\mathbb{G}_a\,.$$

Ясно, что инд-аффинная схема $\mathrm{M}^+_{m\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}\big)$ инд-плоская над $\mathbb{Z}$. По предложению 4.4.8(iii) и по лемме 4.3.19 инд-аффинная схема $\big((L^n\mathbb{G}_m)^0\big)^{\times m}$ изоморфна произведению инд-плоской схемы над $\mathbb{Z}$ и толстого инд-конуса (см. определения 4.3.13 и 4.3.16). Согласно примеру 4.4.7 инд-аффинная схема $L^n\mathbb{G}_a$ является инд-аффинным пространством и, в частности, инд-аффинная схема $L^n\mathbb{G}_a$ инд-плоская над $\mathbb{Z}$. Наконец, по предложению 4.3.23 для любой инд-схемы X, являющейся произведением толстого инд-конуса и инд-плоской схемы над $\mathbb{Z}$, гомоморфизм $\mathcal{O}(X)\to\mathcal{O}(X_{\mathbb{Q}})$ инъективен.

(ii) По предложению 4.5.19 имеем изоморфизм

$$\mathrm{Ker}(\Upsilon)_n\times L^n\mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} \big((L^n\mathbb{G}_m)^0\big)^{\times n}\times L^n\mathbb{G}_a\,.$$

Из предложения 4.4.13(iii) следует, что инд-схема $\big((L^n\mathbb{G}_m)^0\big)^{\times n}$ содержит абсолютно плотную инд-замкнутую подсхему $\big((L^n\mathbb{G}_m)^\sharp\big)^{\times n}$ (см. определение 4.3.30). По лемме 4.3.31 отображение ограничения

$$\mathcal{O}\big(\big((L^n\mathbb{G}_m)^0\big)^{\times n}\times L^n\mathbb{G}_a\big)\longrightarrow\mathcal{O}\big(\big((L^n\mathbb{G}_m)^\sharp\big)^{\times n}\times L^n\mathbb{G}_a\big)$$

инъективно.

Напомним, что по лемме 4.2.15(iii) для любого кольца A множество (на самом деле, группа) $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$ состоит из всех таких элементов $1+\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n}a_lt^l\in(L^n\mathbb{G}_m)(A)$, что $\sum\limits_{l\leqslant 0}a_lt^l$ является нильпотентным элементом в $\mathcal{L}^n(A)$. Поэтому образ функтора $\mathrm{Ker}(\Upsilon)^{nil}_n$ при изоморфизме $\mathrm{Ker}(\Upsilon)_n\xrightarrow{\sim}\big((L^n\mathbb{G}_m)^0\big)^{\times n}$ из предложения 4.5.19 является подфунктором функтора $\big((L^n\mathbb{G}_m)^\sharp\big)^{\times n}$. Более того, образ данного вложения $\mathrm{Ker}(\Upsilon)^{nil}_n\subset\big((L^n\mathbb{G}_m)^\sharp\big)^{\times n}$ после вычисления на произвольном кольце A задается рядами из $\mathcal{L}^n(A)$ вида $1+h$, где h является многочленом Лорана с нильпотентными коэффициентами.

Далее, по предложению 4.4.8(ii) инд-схема $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp$ является толстым инд-конусом, и по лемме 4.3.19 и примеру 4.4.7 инд-схема $\big((L^n\mathbb{G}_m)^\sharp\big)^{\times n}\times L^n\mathbb{G}_a$ также является толстым инд-конусом. Теперь из предложения 4.3.21 следует, что отображение ограничения

$$\mathcal{O}\big(\big((L^n\mathbb{G}_m)^\sharp\big)^{\times n}\times L^n\mathbb{G}_a\big)\longrightarrow\mathcal{O}\big(\,\mathrm{Ker}(\Upsilon)^{nil}_n\times L^n\mathbb{G}_a\big)$$

инъективно. Это завершает доказательство. □

4.5.4. **Инвариантность вычета.** В этом параграфе исследуется, как меняется отображение вычета при непрерывных гомоморфизмах, см. предложение 4.5.25 и следствие 4.5.27.

Сначала приведем одно утверждение, которое будет нам полезно также и в дальнейшем.

Предложение 4.5.21. *Для любой $\mathbb{Q}$-алгебры A и любого набора $f_1, \dots, f_n \in L^n\mathbb{G}_m(A)$ обратимых рядов Лорана имеет место равенство в A*

$$\det\big(\nu(f_1), \dots, \nu(f_n)\big) = \operatorname{res}\left(\frac{df_1}{f_1} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n}\right).$$

Доказательство. Обе части данной формулы являются полилинейными альтернированными отображениями. Следовательно, можно предполагать, что f_i принадлежат подгруппам группы $L^n\mathbb{G}_m(A)$ из разложения (4.2.14) из § 4.2.3. Случай $f_1 \in \mathbb{G}_m(A)$ тривиален. Предположим, что $f_1 \in (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$. Тогда по определению 4.2.13 имеем, что $\nu(f_1) = 0$, и, таким образом, $\det\big(\nu(f_1), \dots, \nu(f_n)\big) = 0$. С другой стороны, используя леммы 1.5.16(i) и 1.5.18, получаем равенства

$$\operatorname{res}\left(\frac{df_1}{f_1} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n}\right) = \operatorname{res}\left(d\left(\log(f_1)\frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n}\right)\right) = 0\,.$$

Остается рассмотреть случай, когда все элементы f_i принадлежат подгруппе $\underline{\mathbb{Z}}^n(A) \subset L^n\mathbb{G}_m(A)$. По полилинейности и альтернированности, достаточно рассмотреть случай $f_1 = t_1, \dots, f_n = t_n$. Ясно, что тогда имеются равенства

$$\det\big(\nu(t_1), \dots, \nu(t_n)\big) = 1 = \operatorname{res}\left(\frac{dt_1}{t_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_n}{t_n}\right),$$

что завершает доказательство. □

Замечание 4.5.22.

(i) При $n = 2$ предложение 4.5.21 совпадает с [111, Lem. 4.1].

(ii) На самом деле, верен также аналог предложения 4.5.21 для произвольных колец. А именно, имеется естественный морфизм групповых функторов $\zeta\colon \underline{\mathbb{Z}} \to \mathbb{G}_a$. Отметим, что если кольцо A имеет положительную характеристику, то отображение $\zeta\colon \underline{\mathbb{Z}}(A) \to A$ не инъективно. Утверждается, что для любого кольца A и любого набора $f_1, \dots, f_n \in L^n\mathbb{G}_m(A)$ обратимых рядов Лорана имеет место равенство в A

$$\zeta\Big(\det\big(\nu(f_1), \dots, \nu(f_n)\big)\Big) = \operatorname{res}\left(\frac{df_1}{f_1} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n}\right).$$

Действительно, обе части данной формулы определяют морфизмы инд-схем из $(L^n\mathbb{G}_m)^{\times n}$ в $\mathbb{G}_a$. Поэтому по теореме 4.4.12, примененной к $R = \mathbb{Z}$ и $S = \mathbb{Q}$, все сводится к предложению 4.5.21.

Теперь опишем, как меняется отображение вычета при непрерывных гомоморфизмах. До конца этого параграфа зафиксируем непрерывный гомоморфизм A-алгебр

$\phi\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^m(A)$. По теореме 4.5.14 матрица $\Upsilon(\phi)$ принадлежит $\mathrm{M}^+_{m\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)$. В частности, имеем $n \leqslant m$.

Для двух локально постоянных функций $p, q \in \underline{\mathbb{Z}}(A)$ на схеме $\mathrm{Spec}(A)$ будем говорить, что $p < q$ или $p \leqslant q$, если это выполнено поточечно на схеме $\mathrm{Spec}(A)$. Пусть

$$1 \leqslant p_1 < \ldots < p_n \leqslant m \quad \text{и} \quad x_{p_i,i} > 0 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

являются элементами из $\underline{\mathbb{Z}}(A)$, соответствующими матрице $\Upsilon(\phi) \in \mathrm{M}^+_{m\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)$ как в условии (ii) леммы 4.5.10. Пусть

$$1 \leqslant q_1 < \ldots < q_{m-n} \leqslant m$$

является набором элементов из $\underline{\mathbb{Z}}(A)$, дополнительным к набору $(p_1, \ldots, p_n)$, т.е. для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ поточечно на схеме $\mathrm{Spec}(A)$ выполняется $p_i \neq q_j$ (другими словами, для любой точки из $\mathrm{Spec}(A)$ значения функций p_i и q_j в этой точке не равны). Пусть $\mathrm{sgn}(\phi) \in \underline{\mathbb{Z}}(A)$ является локально постоянной функцией знака локально постоянной подстановки, переводящей набор $(1, 2, \ldots, n)$ в набор $(p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_{m-n})$. Также положим

$$0 < d(\phi) := \prod_{i=1}^{n} x_{p_i,i} \in \underline{\mathbb{Z}}(A)\,. \tag{4.5.23}$$

Например, если $m = n$, то выполнено $\mathrm{sgn}(\phi) = 1$ и $d(\phi) = \det\big(\Upsilon(\phi)\big)$.

Лемма 4.5.24. *Индуцированный непрерывным гомоморфизмом A-алгебр $\phi\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^m(A)$ морфизм $\mathcal{L}^n(A)$-модулей $\Omega^1_{\mathcal{L}^n(A)} \to \Omega^1_{\mathcal{L}^m(A)}$ корректно определяет морфизмы $\mathcal{L}^n(A)$-модулей*

$$\widetilde{\Omega}^i_{\mathcal{L}^n(A)} \longrightarrow \widetilde{\Omega}^i_{\mathcal{L}^m(A)}\,, \qquad i \geqslant 0\,.$$

Доказательство. Пусть $K^n \subset \Omega^1_{\mathcal{L}^n(A)}$ и $K^m \subset \Omega^1_{\mathcal{L}^m(A)}$ обозначают подмодули как в определении 1.5.14, т.е. имеются равенства $\widetilde{\Omega}^1_{\mathcal{L}^n(A)} = \Omega^1_{\mathcal{L}^n(A)}/K^n$ и $\widetilde{\Omega}^1_{\mathcal{L}^m(A)} = \Omega^1_{\mathcal{L}^m(A)}/K^m$. Нам надо показать, что естественное отображение $\Omega^1_{\mathcal{L}^n(A)} \to \Omega^1_{\mathcal{L}^m(A)}$ переводит K^n в K^m. Положим $\varphi_i = \phi(t_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Рассмотрим произвольный элемент $f \in \mathcal{L}^n(A)$. Из непрерывности гомоморфизма ϕ следует, что $\phi(f) = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Поэтому порождающий элемент $df - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i$ модуля K^n переходит в

$$d\big(f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\big) - \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial f}{\partial t_i}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) d\varphi_i =$$

$$= d\big(f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\big) - \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial f}{\partial t_i}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\big(d\varphi_i - \sum_{j=1}^{m} \tfrac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j + \sum_{j=1}^{m} \tfrac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j\big) =$$

$$= d\big(f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\big) - \sum_{j=1}^{m} \tfrac{\partial}{\partial t_j}\big(f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\big) - \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial f}{\partial t_i}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\big(d\varphi_i - \sum_{j=1}^{m} \tfrac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j\big)\,.$$

Мы видим, что последнее выражение принадлежит подмодулю $K^m \subset \Omega^1_{\mathcal{L}^m(A)}$. □

Для простоты мы будем обозначать также через ϕ индуцированные морфизмы $\mathcal{L}^n(A)$-модулей $\widetilde{\Omega}^i_{\mathcal{L}^n(A)} \to \widetilde{\Omega}^i_{\mathcal{L}^m(A)}$, $i \geqslant 0$, из леммы 4.5.24.

Предложение 4.5.25. *Для любой дифференциальной формы $\omega \in \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)}$ имеется равенство*

$$\operatorname{res}\left(\phi(\omega) \wedge \frac{dt_{q_1}}{t_{q_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_{q_{m-n}}}{t_{q_{m-n}}}\right) = \operatorname{sgn}(\phi) d(\phi) \operatorname{res}(\omega)\,. \tag{4.5.26}$$

Доказательство. Обе стороны формулы (4.5.26) являются функциями со значениями в кольце A, зависящими от гомоморфизма $\phi \in \mathcal{H}om^{c,alg}(\mathcal{L}^n, \mathcal{L}^m)(A)$ и дифференциальной формы $\omega \in \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)}$. Ясно, что функтор $A \mapsto \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)}$ изоморфен функтору $L^n\mathbb{G}_a$. Таким образом, обе стороны формулы (4.5.26) являются регулярными функциями из кольца $\mathcal{O}\big(\mathcal{H}om^{c,alg}(\mathcal{L}^n, \mathcal{L}^m) \times L^n\mathbb{G}_a\big)$. Поэтому по следствию 4.5.20(i) достаточно доказать равенство между образами этих функций в кольце $\mathcal{O}\big(\mathcal{H}om^{c,alg}(\mathcal{L}^n, \mathcal{L}^m)_{\mathbb{Q}} \times (L^n\mathbb{G}_a)_{\mathbb{Q}}\big)$. Другими словами, достаточно доказать предложение в случае, когда кольцо A является $\mathbb{Q}$-алгеброй, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Левая сторона формулы (4.5.26) равна нулю, если форма ω точна. Поэтому левая сторона формулы (4.5.26) при фиксированном гомоморфизме ϕ определяет A-линейное отображение из факторгруппы

$$\widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)} / d\widetilde{\Omega}^{n-1}_{\mathcal{L}^n(A)} \xrightarrow{\sim} A$$

в группу A. Таким образом, данное отображение переводит любую дифференциальную форму $\omega \in \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)}$ в $c \cdot \operatorname{res}(\omega) \in A$, где элемент $c \in A$ может быть вычислен для отдельной дифференциальной формы $\frac{dt_1}{t_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_n}{t_n}$. В явном виде, имеем

$$c = \operatorname{res}\left(\phi\left(\frac{dt_1}{t_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_n}{t_n}\right) \wedge \frac{dt_{q_1}}{t_{q_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_{q_{m-n}}}{t_{q_{m-n}}}\right) =$$

$$= \operatorname{res}\left(\frac{d\phi(t_1)}{\phi(t_1)} \wedge \ldots \wedge \frac{d\phi(t_n)}{\phi(t_n)} \wedge \frac{dt_{q_1}}{t_{q_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_{q_{m-n}}}{t_{q_{m-n}}}\right).$$

Из предложения 4.5.21 получаем, что элемент c есть образ в кольце A определителя $(m \times m)$-матрицы

$$\big(\Upsilon(\phi), \nu(t_{q_1}), \ldots, \nu(t_{q_{m-n}})\big) \in \mathrm{M}_{m\times m}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)\,.$$

Очевидно, что данный определитель равен $\operatorname{sgn}(\phi)d(\phi)$. □

Следствие 4.5.27. *Предположим, что $m = n$. Тогда для любой дифференциальной формы $\omega \in \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)}$ имеем*

$$\operatorname{res}\big(\phi(\omega)\big) = d(\phi) \operatorname{res}(\omega)\,.$$

В частности, если ϕ обратим, то $\operatorname{res}\big(\phi(\omega)\big) = \operatorname{res}(\omega)$ *(см. следствие 4.5.17).*

Предложение 4.5.25 имеет также следующее применение для исследования инъективности гомоморфизмов.

Следствие 4.5.28. *Предположим, что образ элемента $d(\phi)$ при естественном гомоморфизме $\underline{\mathbb{Z}}(A) \to A$ не является делителем нуля в кольце A. Тогда непрерывный гомоморфизм $\phi\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^m(A)$ инъективен.*

Доказательство. Покажем, что для любого ненулевого элемента $f \in \mathcal{L}^n(A)$ его образ $\phi(f)$ также не равен нулю. Рассмотрим элемент $l \in \mathbb{Z}^n$, такой что l-ый коэффициент итерированного ряда Лорана f не равен нулю. Определим дифференциальную форму

$$\omega := ft^{-l}\,\frac{dt_1}{t_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_n}{t_n} \in \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)}\,.$$

Из конструкции получаем, что $\mathrm{res}(\omega) \neq 0$. Поэтому по условию следствия и по предложению 4.5.25 имеем (в обозначениях предложения), что $\mathrm{res}\left(\phi(\omega) \wedge \frac{dt_{q_1}}{t_{q_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_{q_{m-n}}}{t_{q_{m-n}}}\right) \neq 0$. Отсюда $\phi(\omega) \neq 0$, и следовательно $\phi(f) \neq 0$. □

Замечание 4.5.29. Предположим, что $\phi(f) = 0$ для элемента $f \in \mathcal{L}^n(A)$. Тогда все коэффициенты итерированного ряда Лорана f являются нильпотентными элементами кольца A, что может быть доказано следующим образом. Во-первых, не трудно показать, что для любого замкнутого (по отношению к топологии на группе $\mathcal{L}^n(A)$) простого идеала $I \subset \mathcal{L}^n(A)$ имеется простой идеал $\mathfrak{p} \subset A$, такой что идеал I состоит из всех итерированных рядов Лорана с коэффициентами из идеала $\mathfrak{p}$. Для этого надо использовать следующий факт: если кольцо A является областью, то локализация $(A \setminus \{0\})^{-1} \cdot \mathcal{L}^n(A)$ является полем. Теперь заметим, что любой непрерывный гомоморфизм A-алгебр $\phi\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^m(A)$ индуцирует биекцию между множеством замкнутых простых идеалов, так как эти идеалы определены при помощи простых идеалов кольца A как выше. Отсюда получаем, что элемент f принадлежит пересечению всех замкнутых простых идеалов кольца $\mathcal{L}^n(A)$, так как тоже самое выполнено для элемента $\phi(f) = 0$ в кольце $\mathcal{L}^m(A)$. Остается воспользоваться тем, что пересечение всех простых идеалов в кольце A совпадает с нильрадикалом кольца A.

Интересный вопрос заключается в том, существует ли неинъективный непрерывный гомоморфизм A-алгебр $\phi\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^m(A)$. Из следствия 4.5.28 и замечания 4.5.29 видим, что для такого гомоморфизма ϕ образ элемента $d(\phi) \in \underline{\mathbb{Z}}(A)$ в кольце A должен быть делителем нуля в кольце A, и если $\phi(f) = 0$ для элемента $f \in \mathcal{L}^n(A)$, то все коэффициенты итерированного ряда Лорана f являются нильпотентными элементами кольца A.

4.5.5. **Критерий обратимости.** В этом параграфе сначала описывается самодвойственность топологического A-модуля $\mathcal{L}^n(A)$, см. предложение 4.5.30. Затем изучается сопряженное отображение $\phi^\vee$ к отображению $\mathcal{L}^n(A)$-модулей старших дифференциальных форм, индуцированному непрерывным гомоморфизмом ϕ, см. предложение 4.5.34 и замечание 4.5.35. В конце в теореме 4.5.40 доказывается критерий обратимости непрерывного эндоморфизма A-алгебры $\mathcal{L}^n(A)$.

Через $\mathcal{L}^n(A)^\vee$ обозначим A-модуль всех непрерывных A-линейных отображений $\mathcal{L}^n(A) \to A$, где на A рассматривается дискретная топология. Заметим, что A-модуль $\mathcal{L}^n(A)^\vee$ снабжен естественной топологией, относительно которой $\mathcal{L}^n(A)^\vee$ является топологической группой. База открытых окрестностей нуля в A-модуле $\mathcal{L}^n(A)^\vee$ задается аннуляторами компактных подмножеств в $\mathcal{L}^n(A)$.

Для $f \in \mathcal{L}^n(A)$ и элемента $k \in \mathbb{Z}^n$ через $[f]_k \in A$ обозначим k-ый коэффициент итерированного ряда Лорана f.

Предложение 4.5.30. *Для любого элемента $k \in \mathbb{Z}^n$ спаривание*

$$\mathcal{L}^n(A) \times \mathcal{L}^n(A) \longrightarrow A\,, \qquad (f,g) \longmapsto [fg]_k\,,$$

определяет изоморфизм топологических A-модулей

$$\tau \,:\, \mathcal{L}^n(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^n(A)^\vee\,, \qquad f \longmapsto \big(g \mapsto [fg]_k\big)\,.$$

Доказательство. Напомним, что по следствию 1.5.7(i) произведение с фиксированным итерированным рядом Лорана является непрерывным отображением. Примененяя к одному из аргументов спаривания непрерывный автоморфизм, заданный произведением с t^k, мы видим, что достаточно доказать предложение при $k = 0$, что мы и предполагаем в дальнейшем.

Так как отображение $\mathcal{L}^n(A) \to A$, $f \mapsto [f]_0$, непрерывно, то τ является корректно определенным A-линейным отображением.

Если $m \in \mathbb{Z}^n$ — такой элемент, что m-ый коэффициент итерированного ряда Лорана $f \in \mathcal{L}^n(A)$ не равен нулю, то для $g := t^{-m}$ имеем $[fg]_0 \neq 0$. Отсюда получаем, что отображение τ инъективно.

Пусть $\chi\colon \mathcal{L}^n(A) \to A$ — непрерывное A-линейное отображение. Тогда существует элемент $\lambda \in \Lambda_n$, для которого выполнено $\chi(U_\lambda) = 0$. Положим теперь $a_l := \chi(t^{-l})$ для $l \in \mathbb{Z}^n$. Из определения множества U_λ следует, что $a_l = 0$, если $-l \notin (-\mathbb{Z}^n_\lambda)$, т.е. если $l \notin \mathbb{Z}^n_\lambda$. Отсюда получаем, что $f := \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l t^l$ является корректно определенным элементом из кольца $\mathcal{L}^n(A)$ с $\mathrm{Supp}(f) \subset \mathbb{Z}^n_\lambda$. Мы утверждаем, что для любого элемента $g \in \mathcal{L}^n(A)$ выполнено $\chi(g) = [fg]_0$. В самом деле, по непрерывности и A-линейности достаточно проверить этот факт для случая,

когда итерированный ряд Лорана g является мономом. Последнее выполнено по построению элемента f. Таким образом, мы показали, что отображение τ сюръективно.

Наконец покажем, что отображение τ является гомеоморфизмом. Отображение τ устанавливает изоморфизм между множеством U_λ и аннулятором множества K_λ, состоящего из всех элементов $f \in \mathcal{L}^n(A)$ с условием $\mathrm{Supp}(f) \subset \mathbb{Z}^n_\lambda$. Заметим, что A-подмодуль K_λ является замыканием в $\mathcal{L}^n(A)$ подмодуля, порожденного компактным множеством, состоящим из всех итерированных рядов Лорана из K_λ, чьи коэффициенты принимают только значения 0 и 1. С другой стороны, по лемме 1.5.6 и по следствию 1.5.7(vi) любое компактное подмножество в $\mathcal{L}^n(A)$ содержится в K_λ для некоторого $\lambda \in \Lambda_n$. Это доказывает, что τ гомеоморфизм. $\square$

Так как имеется изоморфизм $\widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)} \simeq \mathcal{L}^n(A) dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n$, то из предложения 4.5.30 для $k = (-1, \ldots, -1)$ следует, что спаривание

$$\mathcal{L}^n(A) \times \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)} \longrightarrow A\,, \qquad (f, \omega) \longmapsto \mathrm{res}(f\omega)\,, \tag{4.5.31}$$

определяет изоморфизм топологических A-модулей

$$\mathcal{L}^n(A) \xrightarrow{\sim} \left(\widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)}\right)^\vee, \qquad \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^n(A)^\vee\,. \tag{4.5.32}$$

Эти изоморфизмы более удобно использовать, чем изоморфизмы из предложения 4.5.30, поскольку изоморфизмы (4.5.32) хорошо себя ведут относительно непрерывных эндоморфизмов A-алгебры $\mathcal{L}^n(A)$, как показано ниже в предложении 4.5.34.

Для любого эндоморфизма $\phi \in \mathrm{Hom}_A^{c,alg}\left(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\right)$ пусть $\phi^\vee \in \mathrm{Hom}_A^{c}\left(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\right)$ (см. определение 4.5.2) является сопряженным отображением к непрерывному A-линейному отображению $\phi\colon \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)} \to \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)}$ относительно спаривания (4.5.31) (см. также первый изоморфизм из формулы (4.5.32)). Равносильно, для любых элементов $f \in \mathcal{L}^n(A)$ и $\omega \in \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)}$ имеется равенство

$$\mathrm{res}\left(\phi^\vee(f)\,\omega\right) = \mathrm{res}\left(f\phi(\omega)\right).$$

Замечание 4.5.33. Легко проверяется, что соответствие $\phi \mapsto \phi^\vee$ функториально относительно кольца A, т.е. для заданного гомоморфизма колец $A \to B$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A^{c,alg}\left(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\right) & \xrightarrow{\vee} & \mathrm{Hom}_A^{c}\left(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_B^{c,alg}\left(\mathcal{L}^n(B), \mathcal{L}^n(B)\right) & \xrightarrow{\vee} & \mathrm{Hom}_B^{c}\left(\mathcal{L}^n(B), \mathcal{L}^n(B)\right), \end{array}$$

где горизонтальные отображения заданы по формуле $\phi \mapsto \phi^\vee$, а вертикальные отображения получаются при помощи взятия продолжения непрерывного A-линейного эндоморфизма A-модуля $\mathcal{L}^n(A)$ до непрерывного B-линейного эндоморфизма B-модуля $\mathcal{L}^n(B)$. Такое

расширение существует и единственно по предложению 4.5.3 и лемме 1.5.12(ii) (см. также следствие 4.5.5 и лемму 4.5.4).

Предложение 4.5.34. *Для любого элемента* $\phi \in \operatorname{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\big)$ *в моноиде* $\operatorname{Hom}_A^{c}\big(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\big)$ *выполняется равенство (см. определение 4.5.7 для* $\Upsilon(\phi)$*)*

$$\phi^\vee \circ \phi = \det\big(\Upsilon(\phi)\big)\,\mathrm{id}\,.$$

В частности, если $\det\big(\Upsilon(\phi)\big) = 1$*, то* $\phi^\vee \circ \phi = \mathrm{id}$.

Доказательство. По определению отображения $\phi^\vee$ и следствию 4.5.27 для всех элементов $f \in \mathcal{L}^n(A)$ и $\omega \in \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)}$ имеем равенства

$$\operatorname{res}\big((\phi^\vee \circ \phi)(f)\,\omega\big) = \operatorname{res}\big(\phi(f)\phi(\omega)\big) = \det\big(\Upsilon(\phi)\big)\operatorname{res}(f\omega)\,.$$

Таким образом, применяя теперь первый из изоморфизмов (4.5.32), получаем доказательство предложения. □

Замечание 4.5.35. Приведем явную формулу для сопряженного отображения. Для заданного элемента $\phi \in \operatorname{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\big)$ положим $\varphi_i := \phi(t_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Для краткости, обозначим $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^n$ просто через 1. В частности, для элемента $l = (l_1, \ldots, l_n)$ имеется равенство $l - 1 = (l_1 - 1, \ldots, l_n - 1)$. Также положим $\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{d\varphi_1}{\varphi_1} \wedge \ldots \wedge \frac{d\varphi_n}{\varphi_n}$. В явном виде, имеется равенство $\frac{d\varphi}{\varphi} = \varphi^{-1}J(\varphi)dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n$, где $J(\varphi) \in \mathcal{L}^n(A)$ является якобианом набора $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, т.е. определителем матрицы

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right) \in \mathrm{M}_{n\times n}\big(\mathcal{L}^n(A)\big)\,.$$

Тогда для любого элемента $f \in \mathcal{L}^n(A)$ выполняется равенство

$$\phi^\vee(f) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \operatorname{res}\big(f\varphi^{-l}\tfrac{d\varphi}{\varphi}\big)t^l\,. \tag{4.5.36}$$

Действительно, для любого $l \in \mathbb{Z}^n$ коэффициент итерированного ряда Лорана $\phi^\vee(f)$ с индексом l равен

$$\operatorname{res}\big(\phi^\vee(f)t^{-l-1}dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n\big) =$$

$$= \operatorname{res}\big(f\varphi^{-l-1}\phi(dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n)\big) = \operatorname{res}\big(f\varphi^{-l-1}\tfrac{d\varphi}{\varphi}\big)\,.$$

В частности, правая часть формулы (4.5.36) является корректно определенным итерированным рядом Лорана из $\mathcal{L}^n(A)$.

Замечание 4.5.37. В общем случае, сопряженное отображение $\phi^\vee$ не обязательно является гомоморфизмом колец. Например, если $n = 1$ и $\phi(t) = \varphi = t^2$, то из замечания 4.5.35 следует, что $\phi^\vee(t) = 0$ и $\phi^\vee(t^2) = 2t$. Однако, если выполнено $\det\big(\Upsilon(\phi)\big) = 1$, то апостериори получаем из теоремы 4.5.40 ниже, что $\phi^\vee$ является гомоморфизмом колец. Отметим, что доказательство теоремы 4.5.40 основано на теории толстых инд-конусов. Мы не знаем, как можно было бы получить непосредственно из определения сопряженного отображения, что $\phi^\vee$ является гомоморфизмом колец при условии, что выполнено $\det\big(\Upsilon(\phi)\big) = 1$.

Теперь перейдем к исследованию обратимости непрерывных эндоморфизмов A-алгебры $\mathcal{L}^n(A)$. Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4.5.38. *Эндоморфизм* $\phi \in \mathrm{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\big)$ *с условием* $\det\big(\Upsilon(\phi)\big) = 1$ *обратим тогда и только тогда, когда имеется равенство* $\phi \circ \phi^\vee = \mathrm{id}$ *в моноиде* $\mathrm{Hom}_A^c\big(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\big)$.

Доказательство. Предположим, что эндоморфизм ϕ обратим. Тогда из предложения 4.5.34 получаем, что $\phi^\vee = \phi^{-1}$. Отсюда имеем $\phi \circ \phi^\vee = \mathrm{id}$.

Теперь предположим, что выполнено $\phi \circ \phi^\vee = \mathrm{id}$. Тогда из предложения 4.5.34 следует, что ото отображение ϕ является биекцией множества $\mathcal{L}^n(A)$ в себя. Отсюда получаем, что отображение ϕ обратимо в моноиде $\mathrm{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\big)$. □

Отметим, что теорема 4.5.40 ниже утверждает, что, на самом деле, равносильные условия леммы 4.5.38 выполнены для любого $\phi \in \mathrm{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\big)$ с $\det\big(\Upsilon(\phi)\big) = 1$.

Лемма 4.5.39. *Любой эндоморфизм* $\phi \in \mathrm{Ker}(\Upsilon)_n^{nil}(A)$ *обратим.*

Доказательство. По определению функтора $\mathrm{Ker}(\Upsilon)_n^{nil}$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, имеется равенство $\phi(t_i) = t_i + h_i$, где h_i является многочленом Лорана с нильпотентными коэффициентами из кольца A. Пусть $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал, порожденный всеми коэффициентами многочленов Лорана h_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Определим также идеал $I := \mathfrak{a}\,\mathcal{L}^n(A)$ в кольце $\mathcal{L}^n(A)$.

Ясно, что образ элемента ϕ при естественном отображении

$$\mathrm{Hom}_A^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{a}}^{c,alg}\big(\mathcal{L}^n(A/\mathfrak{a}), \mathcal{L}^n(A/\mathfrak{a})\big)$$

совпадает с тождественным отображением. Так как идеал $\mathfrak{a}$ конечно порожден, то имеется изоморфизм $\mathcal{L}^n(A)/I \simeq \mathcal{L}^n(A/\mathfrak{a})$. Поэтому получаем, что $\phi = \mathrm{id} + h$, где $h\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^n(A)$ является непрерывным A-линейным отображением, таким что $h\big(\mathcal{L}^n(A)\big) \subset I$.

Более того, мы утверждаем, что $h(I^k) \subset I^{k+1}$ для любого целого числа $k \geqslant 0$. В самом деле, имеем $I^k = \mathfrak{a}^k\, \mathcal{L}^n(A)$, и для всех элементов $a \in \mathfrak{a}^k$ и $f \in \mathcal{L}^n(A)$ имеем $h(af) = ah(f) \in I^{k+1}$, так как $h(f) \in I$.

Идеал I нильпотентен, так как он конечно порожден нильпотентными элементами. Следовательно, отображение h нильпотентно, а отображение $\phi = \mathrm{id} + h$ обратимо. □

Докажем главный результат этого параграфа.

Теорема 4.5.40. *Непрерывный эндоморфизм A-алгебры $\phi\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^n(A)$ обратим тогда и только тогда, когда обратима матрица $\Upsilon(\phi) \in \mathrm{M}^+_{n\times n}\big(\underline{\mathbb{Z}}(A)\big)$, т.е. у верхнетреугольной матрицы с (локально постоянными на схеме $\mathrm{Spec}(A)$) целыми элементами*

$$\Upsilon(\phi) = \big(\nu(\phi(t_1)), \dots, \nu(\phi(t_n))\big)$$

на диагонали стоят единицы. Более того, если эндоморфизм ϕ обратим, то выполняется равенство

$$\phi^{-1} = \phi^\vee .$$

Доказательство. Из следствия 4.5.9 и теоремы 4.5.14 сразу получается одна из импликаций. Предположим теперь, что матрица $\Upsilon(\phi)$ обратима, и покажем тогда обратимость непрерывного эндоморфизма ϕ. По следствию 4.5.16 достаточно рассмотреть случай, когда $\phi \in \mathrm{Ker}(\Upsilon)_n(A)$, т.е. случай, когда матрица $\Upsilon(\phi)$ единичная, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

По лемме 4.5.38 достаточно показать, что для любого эндоморфизма $\phi \in \mathrm{Ker}(\Upsilon)_n(A)$ имеется равенство $\phi \circ \phi^\vee = \mathrm{id}$ в моноиде $\mathrm{Hom}^c_A\big(\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(A)\big)$. Другими словами, достаточно показать, что для любых элементов $\phi \in \mathrm{Ker}(\Upsilon)_n(A)$ и $f \in \mathcal{L}^n(A)$ в кольце $\mathcal{L}^n(A)$ имеется равенство

$$(\phi \circ \phi^\vee)(f) - f = 0\,. \tag{4.5.41}$$

Из замечания 4.5.33 следует, что для каждого элемента $l \in \mathbb{Z}^n$ имеем, что l-ый коэффициент итерированного ряда Лорана, получающегося в левой части формулы (4.5.41), задается регулярной функцией $\delta_l \in \mathcal{O}\big(\mathrm{Ker}(\Upsilon)_n \times L^n\mathbb{G}_a\big)$. При этом равенство (4.5.41) равносильно счетному набору равенств $\delta_l = 0$, где $l \in \mathbb{Z}^n$. Отсюда по следствию 4.5.20(ii) можем предположить, что $\phi \in \mathrm{Ker}(\Upsilon)^{nil}_n(A)$.

Наконец, по лемме 4.5.39 любой эндоморфизм $\phi \in \mathrm{Ker}(\Upsilon)^{nil}_n(A)$ обратим. Отсюда снова по лемме 4.5.38 имеем равенство $\phi \circ \phi^\vee = \mathrm{id}$. Это завершает доказательство. □

Отметим, что так как $\phi^{-1} = \phi^{\vee}$, то мы получаем явную формулу для обратного автоморфизма вследствие замечания 4.5.35. В частности, для всех элементов $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbb{H}_{n,n}(A)$ и $f \in \mathcal{L}^n(A)$ выполнено равенство

$$f = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \operatorname{res}\left(f \varphi^{-l} \tfrac{d\varphi}{\varphi}\right) \varphi^l \,, \tag{4.5.42}$$

которое соответствует равенству $f = (\phi \circ \phi^{-1})(f) = (\phi \circ \phi^{\vee})(f)$. Неясно, как доказать равенство (4.5.42) непосредственно, без использования теории толстых инд-конусов. Заметим, что это дало бы другое, явное доказательство теоремы 4.5.40.

Замечание 4.5.43.

(i) Пусть $n = 1$, и пусть $\varphi = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l t^l \in \mathcal{L}(A)$ — ряд Лорана, для которого $\nu(\varphi) = 1$. Легко проверить, что его производная $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in \mathcal{L}(A)$ является обратимым рядом Лорана. Применяя формулу (4.5.42) для ряда Лорана $f = \varphi(\varphi')^{-1} t^{-1}$, получаем равенство

$$\varphi(\varphi')^{-1} t^{-1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} [\varphi^{-l}]_0 \, \varphi^l \,. \tag{4.5.44}$$

(ii) Предположим, что $A = k$ — поле нулевой характеристики. В этом случае хорошо известно, см., например, [121], что ряд Лорана $\varphi \in k((t))$ с $\nu(\varphi) = 1$ определяет автоморфизм поля $k((t))$ (ср. с теоремой 4.5.40) и что отображение вычета инвариантно относительно такого автоморфизма (ср. с предложением 4.5.25 и следствием 4.5.27). По лемме 4.5.38 это доказывает формулы (4.5.42) и (4.5.44) в этом случае без теории толстых инд-конусов, которая использовалась при доказательствах теоремы 4.5.40 и предложения 4.5.25. Более того, положительные степени ряда Лорана φ имеют нулевой постоянный член. Поэтому формула (4.5.44) превращается в формулу

$$\varphi(\varphi')^{-1} t^{-1} = 1 + \sum_{l \geqslant 1} [\varphi^{-l}]_0 \, \varphi^l \,.$$

Заметим, что левая часть в данной формуле равна 1, т.е. $\varphi = \varphi' t$, только когда $\varphi = ct$, $c \in k^*$. Таким образом, после замены ряда Лорана φ его обратным получаем следующее утверждение.

Пусть $F \in k((t))$ — такой ряд Лорана, что $\nu(F) = -1$ и $F \neq ct^{-1}$, где $c \in k^*$. Тогда существует $l \geqslant 1$, для которого постоянный член $[F^l]_0$ не равен нулю. Когда F является многочленом Лорана, последнее утверждение есть частный случай [36, Theor. 2].

Глава 5. Многомерный символ Конту-Каррера

5.1. Построение многомерного символа Конту-Каррера

Для краткости мы будем использовать следующее выражение: для заданных множеств P, Q и отображения $\alpha\colon P \to Q$ будем говорить, что "элемент $p \in P$ однозначно определяется элементом $\alpha(p) \in Q$" если выполняется равенство $\alpha^{-1}\big(\alpha(p)\big) = \{p\}$. В частности, отображение α инъективно тогда и только тогда, когда это условие выполнено для всех элементов $p \in P$. В тех ситуациях, которые будут возникать ниже, множества P, Q и отображение α будут ясны из контекста и не будут упоминаться явно.

5.1.1. **Многомерный аддитивный символ.** Сначала обсудим существенно более простой вариант того, что будет сделано далее для многомерного символа Конту-Каррера. План рассуждений в этом более простом случае отчасти похож на план рассуждений в случае символа Конту-Каррера.

Символ $\{t_1, \dots, t_n\}$ задает морфизм групповых функторов

$$\Xi \,:\, \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow L^n K_n^M\,, \qquad \underline{i} \longmapsto \underline{i} \cdot \{t_1, \dots, t_n\}\,.$$

Заметим, что для любого кольца R имеется канонический изоморфизм групп $\mathrm{Hom}_R^{gr}(\underline{\mathbb{Z}}_R, \underline{\mathbb{Z}}_R) \simeq \underline{\mathbb{Z}}(R)$.

Предложение 5.1.1.

(i) *(Аддитивный символ) Полилинейный морфизм функторов*

$$\nu_n \,:\, (L^n\mathbb{G}_m)^{\times n} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}\,, \qquad (f_1, \dots, f_n) \longmapsto \det\big(\nu(f_1), \dots, \nu(f_n)\big)\,,$$

однозначно пропускается через обозначаемый таким же морфизм групповых функторов $\nu_n\colon (L^n K_n^M) \to \underline{\mathbb{Z}}$, который мы будем называть многомерным аддитивным символом.

(ii) *(Инвариантность) Для любого кольца A, непрерывного эндоморфизма A-алгебры $\phi\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^n(A)$ и для любых элементов $f_1, \dots, f_{n+1} \in \mathcal{L}^n(A)^*$ выполняется равенство в $\underline{\mathbb{Z}}(A)$ (для определения $d(\phi)$ см. формулу (4.5.23) в § 4.5.4 и комментарий после нее)*

$$\nu_n\big(\phi(f_1), \dots, \phi(f_{n+1})\big) = d(\phi)\nu_n(f_1, \dots, f_{n+1})\,.$$

В частности, если ϕ обратим, то $\nu_n\big(\phi(f_1), \dots, \phi(f_{n+1})\big) = \nu_n(f_1, \dots, f_{n+1})$ (см. следствие 4.5.17).

(iii) *(Универсальное свойство) Для любого кольца R естественный гомоморфизм*

$$\Xi_R^* \,:\, \mathrm{Hom}_R^{gr}\left((L^nK_n^M)_R, \underline{\mathbb{Z}}_R\right) \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}(R)\,, \qquad \Phi \longmapsto \Phi \circ \Xi_R\,,$$

является изоморфизмом, причем $\Xi_R^*(\nu_n) = 1$.

(iv) *(Сравнение с K-теорией) Аддитивный символ ν_n совпадает с композицией граничных отображений ∂_i для алгебраических K-групп (см. § 1.2.2)*

$$L^nK_n^M \longrightarrow L^nK_n \xrightarrow{\partial_1\cdot\ldots\cdot\partial_n} K_0 \xrightarrow{\mathrm{rk}} \underline{\mathbb{Z}}\,.$$

В явном виде, предложение 5.1.1(iii) означает следующее. Для произвольного кольца R пусть $\Psi\colon (L^n\mathbb{G}_m)_R^{\times n} \to \underline{\mathbb{Z}}_R$ — полилинейный морфизм функторов на категории R-алгебр, для которого выполняется соотношение Стейнберга. Тогда морфизм Φ однозначно определяется своим значением на наборе $(t_1, \ldots, t_n)$ и существует такое локально постоянное целое число $\underline{i} \in \underline{\mathbb{Z}}(R)$, что $\Phi = \underline{i} \cdot \nu_n$.

Доказательство предложения 5.1.1 основано на абсолютной связности инд-аффинной схемы $(L^n\mathbb{G}_m)^0$ над $\mathbb{Z}$ (см. предложение 4.4.13(iv)).

Доказательство предложения 5.1.1. (i) Надо показать, что выполняется соотношение Стейнберга. А именно, для произвольного кольца A и набора обратимых итерированных рядов Лорана $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}(A)^*$, удовлетворяющего условию $f_i + f_{i+1} = 1$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, надо показать, что выполняется равенство $\det\big(\nu(f_1), \ldots, \nu(f_n)\big) = 0$. Заменяя при необходимости кольцо A на его сомножители, можно считать, что A не разлагается в произведение колец. Тогда все следует из леммы 4.2.19(ii).

(ii) Это следует из определения многомерного аддитивного символа ν_n в пункте (i) и из предложения 4.5.8. Отметим, что доказательство данного предложения основано на абсолютной связности инд-аффинной схемы $(L^n\mathbb{G}_m)^0$ над $\mathbb{Z}$.

(iii) Сначала покажем, что гомоморфизм Ξ_R^* инъективен. Другими словами, покажем, что любой морфизм групповых функторов $\Phi\colon (L^nK_n^M)_R \to \underline{\mathbb{Z}}_R$ однозначно определяется композицией $\Phi \circ \Xi_R$.

Рассмотрим следующую композицию морфизмов функторов:

$$\widetilde{\Phi} \,:\, (L^n\mathbb{G}_m)_R^{\times n} \longrightarrow (L^nK_n^M)_R \xrightarrow{\Phi} \underline{\mathbb{Z}}_R\,,$$

где первый морфизм отображает набор обратимых итерированных рядов Лорана $(f_1, \ldots, f_n)$ в символ $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Ясно, что морфизм Φ однозначно определяется морфизмом $\widetilde{\Phi}$.

Заметим, что $\widetilde{\Phi}$ является морфизмом инд-схем над R. В частности, для любой R-алгебры A набор $f_2, \dots, f_n \in L^n\mathbb{G}_m(A)$ определяет морфизм инд-схем над A

$$\alpha \ : \ (L^n\mathbb{G}_m)^0_A \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_A \,, \qquad f \longmapsto \widetilde{\Phi}(f, f_2, \dots, f_n) \,.$$

По предложению 4.4.13(iv) инд-схема $(L^n\mathbb{G}_m)^0$ абсолютна связна над $\mathbb{Z}$. Таким образом, по предложению 4.3.29 морфизм α равен нулю. Следовательно, ограничение морфизма $\widetilde{\Phi}$ на инд-замкнутую подсхему $(L^n\mathbb{G}_m)^0_R \times (L^n\mathbb{G}_m)^{\times(n-1)}_R$ также равно нулю.

Из примера 5.3.2(iii) и леммы 5.3.20 следует, что символы в $L^nK^M_n(A) = K^M_n\big(\mathcal{L}^n(A)\big)$ антисимметричны. Таким образом, мы получаем, что морфизм $\widetilde{\Phi}$ пропускается через композицию морфизмов

$$(L^n\mathbb{G}_m)^{\times n}_R \xrightarrow{\nu^{\times n}} (\underline{\mathbb{Z}}^n_R)^{\times n} \xrightarrow{\det} \underline{\mathbb{Z}}_R \,, \tag{5.1.2}$$

потому что по определению 4.2.13 имеется изоморфизм $\nu\colon L^n\mathbb{G}_m/(L^n\mathbb{G}_m)^0 \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{Z}}^n$. Здесь для любого кольца A мы рассматриваем элементы из $\underline{\mathbb{Z}}^n(A)$ как столбцы, элементы которых являются (локально постоянными) целыми числами, а элементы из $(\underline{\mathbb{Z}}^n)^{\times n}(A)$ как матрицы размера $n \times n$, элементы которых являются (локально постоянными) целыми числами.

Морфизм $\widetilde{\Phi}$ однозначно определяется своим значением на наборе $(t_1, \dots, t_n)$, поскольку данный набор отображается в $1 \in \underline{\mathbb{Z}}_R(R)$ относительно определенной выше композиции морфизмов (5.1.2). Это доказывает инъективность гомоморфизма Ξ^*_R.

С другой стороны, ясно, что $\Xi^*_R(\nu_n) = 1$. Это доказывает сюръективность гомоморфизма Ξ^*_R.

(iv) Из формулы (1.2.11) в § 1.2.2 следует, что рассматриваемая композиция граничных отображений между K-группами отображает символ $\{t_1, \dots, t_n\}$ в 1. По пункту (iii) это завершает доказательство. □

Отметим, что доказательство инъективности отображения Ξ^*_R в пункте (iii) предложения 5.1.1 само воспроизводит явную формулу из пункта (i).

5.1.2. **Многомерный символ Конту-Каррера для $\mathbb{Q}$-алгебр.** В этом параграфе мы определим многомерный символ Конту-Каррера для $\mathbb{Q}$-алгебр. Для этого нам потребуется следующий факт.

Лемма 5.1.3. *Существует единственное полилинейное антисимметричное (или, что равносильно, симметричное) отображение*

$$\operatorname{sgn} \ : \ (\mathbb{Z}^n)^{\times(n+1)} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

такое, что для любых элементов $l \in \mathbb{Z}^n$ *и* $r \in (\mathbb{Z}^n)^{\times(n-1)}$ *выполняется равенство* $\operatorname{sgn}(l,l,r) \equiv \det(l,r) \pmod 2$.

Ясно, что по принципу Дирихле указанные выше свойства однозначно определяют значения отображения sgn на элементах стандартного базиса в $(\mathbb{Z}^n)^{\otimes(n+1)}$. Существование можно показать при помощи любой из двух известных явных формул для sgn. Первая из них приведена в введении в статье Паршина [115], где она приписывается Востокову и Фесенко:

$$\operatorname{sgn}(l_1,\dots,l_{n+1}) \equiv \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} \det(l_1,\dots,\hat{l}_i,\dots,\hat{l}_j,\dots,l_{n+1},l_i\cdot l_j) \pmod 2\,,$$

где $l_i \cdot l_j$ обозначает покоординатное произведение элементов l_i и l_j из $\mathbb{Z}^n$, а крышка соответствует пропусканию элемента. Легко проверить, что это отображение удовлетворяет всем условиям леммы 5.1.3. Вторая формула для sgn дана Хованским [81] (см. также препринт Осипова [110, Prop. 11] в случае $n=2$):

$$\operatorname{sgn}(l_1,\dots,l_{n+1}) \equiv 1 + \sum_{i=1}^{n+1} \det(l_1,\dots,\hat{l}_i,\dots,l_{n+1}) + \prod_{i=1}^{n+1} \bigl(1+\det(l_1,\dots,\hat{l}_i,\dots,l_{n+1})\bigr) \pmod 2$$

Равенство между двумя формулами доказано в [81, § 1].

Теорема 5.1.4. *Пусть* A *является произвольной* $\mathbb{Q}$*-алгеброй.*

(i) *Существует единственное полилинейное антисимметричное отображение*

$$(CC_n)_{\mathbb{Q}} \;:\; L^n\mathbb{G}_m(A)^{\times(n+1)} \longrightarrow A^*\,,$$

для которого выполняются следующие условия:

(1) *если* $f_1 \in (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$, *то*

$$(f_1,f_2,\dots,f_{n+1}) \longmapsto \exp \operatorname{res}\left(\log(f_1)\,\frac{df_2}{f_2}\wedge\ldots\wedge\frac{df_{n+1}}{f_{n+1}}\right)\,, \tag{5.1.5}$$

где ряд exp *применяется к нильпотентному элементу кольца* A*;*

(2) *если* $f_1 \in A^*$, *то (см. предложение 5.1.1(i))*

$$(f_1,f_2\dots,f_{n+1}) \longmapsto f_1^{\nu_n(f_2,\dots,f_{n+1})}\,; \tag{5.1.6}$$

(3) *если* $f_1 = t^{\underline{l}_1},\dots,f_{n+1} = t^{\underline{l}_{n+1}}$, *где* $\underline{l}_i \in \underline{\mathbb{Z}}^n(A)$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, *то*

$$(f_1,\dots,f_{n+1}) \longmapsto (-1)^{\operatorname{sgn}(\underline{l}_1,\dots,\underline{l}_{n+1})}\,. \tag{5.1.7}$$

(ii) *Отображение* $(CC_n)_{\mathbb{Q}}$ *из пункта (i) однозначно пропускается через обозначаемый таким же образом морфизм групповых функторов*

$$(CC_n)_{\mathbb{Q}} \ : \ (L^n K^M_{n+1})_{\mathbb{Q}} \longrightarrow (\mathbb{G}_m)_{\mathbb{Q}}\,,$$

который мы будем называть многомерным символом Конту-Каррера для $\mathbb{Q}$*-алгебр.*

При $n = 1$ правые части формул (5.1.5), (5.1.6) и (5.1.7) были приведены в [34, § 2.9]. (Точнее говоря, в формуле из [34, § 2.9] содержится обратное отображение к заданному данными формулами.) Другая, равносильная, формула для $\mathbb{Q}$-алгебр в одномерном случае была приведена в [31, § 6] и (с опечаткой) в работе [30]. При $n = 2$ теорема 5.1.4 была доказана в [111, § 3.3].

Доказательство теоремы 5.1.4. (i) Единственность отбражения $(CC_n)_{\mathbb{Q}}$ следует из разложения (4.2.14) в § 4.2.3. Таким образом, нам надо показать, что отображение $(CC_n)_{\mathbb{Q}}$ корректно определено, что делается при помощи следующих шагов.

Шаг 1. Сначала проверим, что правая сторона формулы (5.1.5) корректно определена. Из предложения 4.2.21 следует, что отображение log в формуле (5.1.5) определено корректно. Таким образом, нам надо доказать, что значение выражения $\mathrm{res}(\cdots)$ в формуле (5.1.5) принадлежит группе $\mathrm{Nil}(A)$, т.е. что выражение $\exp \mathrm{res}(\cdots)$ имеет смысл.

Выражение $\mathrm{res}(\cdots)$ определяет полилинейное отображение

$$\Psi_n \ : \ (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A) \times L^n\mathbb{G}_m(A)^{\times n} \longrightarrow A\,,$$

$$(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}) \longmapsto \mathrm{res}\left(\log(f_1)\,\frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_{n+1}}{f_{n+1}}\right)\,.$$

Используя определение 4.2.13 группы $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$ в терминах явного разложения, а также разложение (4.2.9) группы $L^n\mathbb{G}_m(A)$ из предложения 4.2.8, мы видим, что можно предполагать, что все f_i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, принадлежат подгруппам из указанных выше разложений.

Сначала предположим, что для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, выполняется условие $f_i \in (1 + \mathrm{Nil})(A) \times \mathbb{V}_{n,-}(A)$. Тогда по лемме 1.5.3(ii) итерированный ряд Лорана $\log(f_i) \in L^n\mathbb{G}_a(A)$ имеет нильпотентные коэффициенты, и, следовательно, по лемме 1.5.16(i) выполняется условие $\Psi_n(f_1, \ldots, f_{n+1}) \in \mathrm{Nil}(A)$.

Теперь предположим, что ряд f_1 принадлежит подгруппе $\mathbb{V}_{n,+}(A)$, и что каждый ряд f_i, $2 \leqslant i \leqslant n+1$, принадлежит либо подгруппе $G(A) := \mathbb{G}_m(A) \times \mathbb{V}_{n,+}(A) \times \underline{\mathbb{Z}}^{n-1}(A)$, где $\underline{\mathbb{Z}}^{n-1}(A)$ состоит из элементов $t_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot t_{n-1}^{l_{n-1}}$, либо подгруппе $\underline{\mathbb{Z}}(A) = (t_n)^{\mathbb{Z}(A)}$, состоящей из элементов $t_n^{\underline{l}_n}$, где $\underline{l}_i \in \underline{\mathbb{Z}}(A)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Покажем индукцией по n, что $\Psi_n(f_1, \ldots, f_{n+1}) = 0$. Очевидной базой индукции является случай $n = 0$, для которого, по определению, $\mathbb{V}_{0,+}(A) = \{1\}$.

Если все ряды f_i, $2 \leqslant i \leqslant n+1$, принадлежат подгруппе $G(A)$, то

$$\log(f_1)\,\frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_{n+1}}{f_{n+1}} \in A((t_1))\ldots((t_{n-1}))[[t_n]]dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n\,.$$

Следовательно, $\Psi_n(f_1, \ldots, f_{n+1}) = 0$.

Предположим, что некоторый ряд f_i, $2 \leqslant i \leqslant n+1$, принадлежит подгруппе $\underline{\mathbb{Z}}(A) = (t_n)^{\underline{\mathbb{Z}}(A)}$. Используя полилинейность и альтернированное свойство внешнего произведения дифференциальных форм, мы можем предполагать, что, более того, имеется равенство $f_{n+1} = t_n$, и что все ряды f_i, $2 \leqslant i \leqslant n$, принадлежат подгруппе $G(A)$, потому что в противном случае вновь имеем $\Psi_n(f_1, \ldots, f_{n+1}) = 0$.

При сделанных выше предположениях выполняется равенство

$$\Psi_n(f_1, \ldots, f_n, t_n) = \Psi_{n-1}(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n)\,,$$

где отображение Ψ_{n-1} определено для наборов обратимых элементов кольца $A((t_1))\ldots((t_{n-1}))$, а через $f \mapsto \bar{f}$ мы обозначаем естественный гомоморфизм из кольца $A((t_1))\ldots((t_{n-1}))[[t_n]]$ в кольцо $A((t_1))\ldots((t_{n-1}))$. Непосредственно проверяется, что гомоморфизм $f \mapsto \bar{f}$ отображает подгруппу $\mathbb{V}_{n,+}(A)$ в подгруппу $\mathbb{V}_{n-1,+}(A)$, где $n \geqslant 1$ и, как было положено выше, $\mathbb{V}_{0,+}(A) = \{1\}$. Следовательно по предположению индукции имеем $\Psi_{n-1}(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n) = 0$.

Таки образом, мы получаем корректно определенное полилинейное отображение

$$(CC_n)_{\mathbb{Q}} \;:\; (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A) \times L^n\mathbb{G}_m(A)^{\times n} \longrightarrow A^*\,,$$
$$(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}) \longmapsto \exp \operatorname{res}\left(\log(f_1)\,\frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_{n+1}}{f_{n+1}}\right).$$

Шаг 2. Из леммы 4.2.15(iii) следует, что правые стороны формул (5.1.5) и (5.1.6) пересекаются при $f_1 \in 1 + \mathrm{Nil}(A)$. Проверим, что в этом случае значения этих формул совпадают. Действительно, из предложения 4.5.21 следует, что

$$\exp \operatorname{res}\left(\log(f_1)\,\frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_{n+1}}{f_{n+1}}\right) = \exp\left(\log(f_1) \operatorname{res}\left(\frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_{n+1}}{f_{n+1}}\right)\right) =$$
$$= \exp\left(\log(f_1) \cdot \det\left(\nu(f_2), \ldots, \nu(f_{n+1})\right)\right) = f_1^{\nu_n(f_2, \ldots, f_{n+1})}\,.$$

Используя разложение (4.2.14) в § 4.2.3, мы получаем, что формулы (5.1.5) и (5.1.6) корректно определяют полилинейное отображение

$$(CC_n)_{\mathbb{Q}} \;:\; (L^n\mathbb{G}_m)^0(A) \times L^n\mathbb{G}_m(A)^{\times n} \longrightarrow A^*\,. \tag{5.1.8}$$

Шаг 3. Теперь проверим антисимметричное свойство для отображения из формулы (5.1.8).

Формулы (5.1.5) и (5.1.6) антисимметричны относительно рядов $f_2, \dots, f_{n+1}$, потому что внешнее произведение дифференциальных форм и определитель альтернированы.

Далее, формула (5.1.5) антисимметрична относительно рядов f_1 и f_2. А именно, если $f_1, f_2 \in (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$, то по леммам 1.5.16(i) и 1.5.18 имеются равенства

$$0 = \operatorname{res}\left(d\left(\log(f_1)\log(f_2)\frac{df_3}{f_3}\wedge\ldots\wedge\frac{df_{n+1}}{f_{n+1}}\right)\right) = \\ = \operatorname{res}\left(\log(f_1)\frac{df_2}{f_2}\wedge\frac{df_3}{f_3}\wedge\ldots\wedge\frac{df_{n+1}}{f_{n+1}}\right) + \operatorname{res}\left(\log(f_2)\frac{df_1}{f_1}\wedge\frac{df_3}{f_3}\wedge\ldots\wedge\frac{df_{n+1}}{f_{n+1}}\right).$$

Наконец, формула (5.1.6) также антисимметрична относительно f_1 и f_2. Действительно, если $f_1, f_2 \in A^*$, то имеется равенство

$$f_1^{\nu_n(f_2,\,f_3,\,\ldots,\,f_{n+1})} = f_2^{\nu_n(f_1,\,f_3,\,\ldots,\,f_{n+1})} = 1\,,$$

потому что $\nu(f_2) = \nu(f_1) = 0$.

Шаг 4. Формула (5.1.7) антисимметрична по лемме 5.1.3. Объединяя это с шагом 3 и разложением (4.2.14) из § 4.2.3, мы получаем корректно определенное полилинейное антисимметричное отображение $(CC_n)_\mathbb{Q}\colon L^n\mathbb{G}_m(A)^{\times(n+1)} \to A^*$.

(ii) Из функториальности разложения (4.2.9) относительно $\mathbb{Q}$-алгебры A следует, что отображение $(CC_n)_\mathbb{Q}$ также функториально относительно A. Нам надо доказать, что для отображения $(CC_n)_\mathbb{Q}$ выполняется соотношение Стейнберга. Доказательство аналогично доказательству случая $n = 2$ в [111, Prop. 4.2]. Для полноты изложения мы кратко повторим данное рассуждение для произвольного n (наши обозначения будут отличаться от обозначений из [111]).

Вследствие антисимметричного свойства отображения $(CC_n)_\mathbb{Q}$, нам надо доказать, что для любого набора $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}^n(A)^*$, удовлетворяющего условию $1 - f_1 \in \mathcal{L}^n(A)^*$, выполняется равенство $(CC_n)_\mathbb{Q}(f_1, 1-f_1, f_2, \dots, f_n) = 1$. Заменяя при необходимости $\mathbb{Q}$-алгебру A на ее сомножители, можно считать, что A не разлагается в произведение колец и $\underline{\mathbb{Z}}^n(A) = \mathbb{Z}^n$. Вновь пользуясь антисимметричным свойством отображения $(CC_n)_\mathbb{Q}$, можно считать, что $\nu(f_1) \geqslant \nu(1-f_1)$. Рассмотрим следующие случаи.

Сначала предположим, что $\nu(f_1) > 0$. По лемме 4.2.19(ii) имеем $1 - f_1 \in (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$. По леммам 1.5.16(ii) и 1.5.18 имеются равенства

$$(CC_n)_\mathbb{Q}(f_1, 1-f_1, f_2, \dots, f_n) = (CC_n)_\mathbb{Q}(1-f_1, f_1, f_2, \dots, f_n)^{-1} = \\ = \exp\operatorname{res}\left(-\log(1-f_1)\,\frac{df_1}{f_1}\wedge\frac{df_2}{f_2}\wedge\ldots\wedge\frac{df_n}{f_n}\right) = \\ = \exp\operatorname{res}\left(d\left(\operatorname{Li}_2(f_1)\frac{df_2}{f_2}\wedge\ldots\wedge\frac{df_n}{f_n}\right)\right) = 1\,.$$

Теперь предположим, что $\nu(f_1) = 0$. По лемме 4.2.19(ii) имеем $\nu(1 - f_1) = 0$. Из разложения (4.2.14) в § 4.2.3 следует, что $f_1 = a(1 - h)$, где $a \in A^*$, $1 - a \in A^*$ и $h \in \mathcal{L}^n(A)^\sharp$. По формуле (5.1.6) имеются равенства

$$(CC_n)_{\mathbb{Q}}(a, 1 - f_1, f_2, \dots, f_n) = a^{\nu_n(1-f_1, f_2, \dots, f_n)} = 1\,.$$

По формуле (5.1.5) имеется равенство

$$(CC_n)_{\mathbb{Q}}(1 - h, 1 - f_1, f_2, \dots, f_n) = \exp \operatorname{res}\left(\log(1 - h)\,\frac{dh}{a^{-1} - 1 + h} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \dots \wedge \frac{df_n}{f_n}\right),$$

потому что $1 - f_1 = 1 - a + ah$. Из леммы 1.5.16(iii) и леммы 1.5.18 следует, что последнее выражение равно нулю.

Наконец, предположим, что $\nu(f_1) < 0$. По полилинейности имеется равенство

$$(CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1, 1 - f_1, f_2, \dots, f_n) = \\ = (CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1, -f_1, f_2, \dots, f_n) \cdot (CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1^{-1}, 1 - f_1^{-1}, f_2, \dots, f_n)^{-1}\,.$$

Так как $\nu(f_1^{-1}) > 0$, то вследствие рассмотренного выше первого случая все сводится к приведенной ниже лемме 5.1.9. □

Лемма 5.1.9. *Для любой $\mathbb{Q}$-алгебры и любых элементов $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}^n(A)^*$ выполняется равенство*

$$(CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1, -f_1, f_2, \dots, f_n) = 1\,, \tag{5.1.10}$$

где $(CC_n)_{\mathbb{Q}}$ определяется в пункте (i) теоремы 5.1.4.

Доказательство. Ясно, что левая сторона формулы (5.1.10) полилинейна по $f_2, \dots, f_n$. Из антисимметричности отображения $(CC_n)_{\mathbb{Q}}$ следует, что левая сторона также линейна по f_1. Действительно, для любого набора $f_1, f_1', f_2, \dots, f_n$ элементов группы $L^n\mathbb{G}_m(A)$ имеем равенства (ср. с комментарием после леммы 5.3.20)

$$(CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1 f_1', -f_1 f_1', f_2, \dots, f_n) = (CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1, -f_1, f_2, \dots, f_n) \cdot \\ \cdot (CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1, f_1', f_2, \dots, f_n) \cdot (CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1', f_1, f_2, \dots, f_n) \cdot (CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1', -f_1', f_2, \dots, f_n)\,.$$

Таким образом, мы можем использовать разложение (4.2.14) в § 4.2.3.

Предположим, что $f_i \in (L^n\mathbb{G}_m)^0(A)$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Если $f_i \in \mathbb{G}_m(A) = A^*$, то равенство $(CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1, -f_1, f_2, \dots, f_n) = 1$ следует из антисимметричного свойства и формулы (5.1.6). Теперь предположим, что $f_i \in (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$. Если при этом $2 \leqslant i \leqslant n$, то равенство

$(CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1, -f_1, f_2 \dots, f_n) = 1$ следует из антисимметричного свойства и формулы (5.1.5). Если $i = 1$, т.е. $f_1 \in (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$, то $f_1 = 1 - h$, где $h \in \mathcal{L}^n(A)^\sharp$. Тогда по формуле (5.1.5) имеем

$$(CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1, -f_1, f_2, \dots, f_n) = \exp \operatorname{res}\left(\log(1-h)\,\frac{dh}{-1+h} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n}\right) = \\ = \exp \operatorname{res}\left(d\left(\varphi(h)\frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n}\right)\right) = 1\,,$$

где степенной ряд $\varphi \in A[[x]]$ существует по лемме 1.5.16(iii), а последнее равенство вытекает из леммы 1.5.18.

Остается рассмотреть случай, когда все элементы $f_i \in L^n\mathbb{G}_m(A)$ принадлежат подгруппе $\underline{\mathbb{Z}}(A)^n$. По полилинейности и антисимметричному свойству имеется равенство

$$(CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1, -f_1, f_2, \dots, f_n) = (CC_n)_{\mathbb{Q}}(-1, f_1, f_2, \dots, f_n)^{-1} \cdot (CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1, f_1, f_2, \dots, f_n)\,.$$

Таким образом, мы заключаем по формулам (5.1.6), (5.1.7) и лемме 5.1.3. □

Нам также понадобится следующее свойство инвариантности многомерного символа Конту-Каррера для $\mathbb{Q}$-алгебр.

Предложение 5.1.11. *Пусть A является $\mathbb{Q}$-алгеброй, а $\phi\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^n(A)$ — непрерывный эндоморфизм A-алгебры $\mathcal{L}^n(A)$. Тогда для всех элементов $f_1, \dots, f_{n+1} \in \mathcal{L}^n(A)^*$ выполняется равенство в A^* (для определения $d(\phi)$ см. формулу (4.5.23) в § 4.5.4 и комментарий после нее)*

$$(CC_n)_{\mathbb{Q}}\big(\phi(f_1), \dots, \phi(f_{n+1})\big) = (CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1, \dots, f_{n+1})^{d(\phi)}\,. \tag{5.1.12}$$

В частности, если ϕ обратим, то $CC_n\big(\phi(f_1), \dots, \phi(f_{n+1})\big) = CC_n(f_1, \dots, f_{n+1})$ (см. следствие 4.5.17).

Доказательство. Обе части формулы (5.1.12) полилинейны и антисимметричны относительно $f_1, \dots, f_{n+1}$. Поэтому из формулы (4.2.14) в § 4.2.3 следует, что формулу (5.1.12) достаточно доказать в следующих трех случаях:

(i) имеем $f_1 \in (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$;

(ii) имеем $f_1 \in A^*$;

(iii) существует набор $\underline{l}_1, \dots, \underline{l}_{n+1} \in \underline{\mathbb{Z}}^n(A)$, для которого $f_i = t^{\underline{l}_i}$, где $1 \leqslant i \leqslant n+1$.

Предположим, что выполняется условие (i). Так как ϕ непрерывен, то из равенства $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A) = 1 + \mathcal{L}^n(A)^\sharp$ и определения 1.5.8 следует, что подгруппа $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$ инвариантна относительно ϕ, т.е. $\phi(f_1) \in (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$. Следовательно, по формуле (5.1.5) и предложению 4.5.25 левая часть формулы (5.1.12) равна

$$\exp \operatorname{res}\left(\log\left(\phi(f_1)\right)\frac{d\phi(f_2)}{\phi(f_2)}\wedge\ldots\wedge\frac{d\phi(f_{n+1})}{\phi(f_{n+1})}\right) = \exp \operatorname{res}\left(\phi\left(\log(f_1)\,\frac{df_2}{f_2}\wedge\ldots\wedge\frac{df_{n+1}}{f_{n+1}}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(d(\phi)\operatorname{res}\left(\log(f_1)\,\frac{df_2}{f_2}\wedge\ldots\wedge\frac{df_{n+1}}{f_{n+1}}\right)\right) = \exp\left(\operatorname{res}\left(\log(f_1)\,\frac{df_2}{f_2}\wedge\ldots\wedge\frac{df_{n+1}}{f_{n+1}}\right)\right)^{d(\phi)}.$$

Вновь по формуле (5.1.5) это равно правой части формулы (5.1.12).

Теперь предположим, что выполняется условие (ii). Поскольку ϕ является A-линейным отображением, имеем $\phi(f_1) = f_1$. По предложению 4.5.21 имеются равенства

$$\det\left(\nu(f_2),\,\ldots,\,\nu(f_{n+1})\right) = \operatorname{res}\left(\frac{df_2}{f_2}\wedge\ldots\wedge\frac{df_{n+1}}{f_{n+1}}\right),$$

$$\det\left(\nu(\phi(f_2)),\,\ldots,\,\nu(\phi(f_{n+1}))\right) = \operatorname{res}\left(\frac{d\phi(f_2)}{\phi(f_2)}\wedge\ldots\wedge\frac{d\phi(f_{n+1})}{\phi(f_{n+1})}\right).$$

По формуле (5.1.6) и предложению 4.5.25 это доказывает (5.1.12), когда $f_1 \in A^*$.

Наконец, предположим, что выполняется условие (iii). Существует такое разложение в конечное произведение колец

$$A \simeq \prod_{j=1}^{N} A_j\,, \tag{5.1.13}$$

что для всех i и j, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, $1 \leqslant j \leqslant N$, ограничение функции $\underline{l}_i$ на $\operatorname{Spec}(A_j)$ постоянно. Поскольку обе части формулы (5.1.12) функториальны относительно A-алгебр, достаточно доказать формулу (5.1.12) для каждого кольца A_j в отдельности. Поэтому мы можем предполагать, что все $\underline{l}_i$ постоянны, т.е. являются элементами из $\mathbb{Z}^n \subset \underline{\mathbb{Z}}^n(A)$.

Из полилинейности и антисимметричности следует, что достаточно рассмотреть случай, когда набор $(f_1, \ldots, f_{n+1})$ имеет вид $(t_{p_1}, t_{p_1}, t_{p_2}, \ldots, t_{p_n})$ для некоторых $1 \leqslant p_1, \ldots, p_n \leqslant n$. По лемме 5.1.9 значения обеих частей формулы (5.1.12) на таком наборе совпадают с их значениями на наборе $(-1, t_{p_1}, t_{p_2}, \ldots, t_{p_n})$. Таким образом все сводится к рассмотренному выше случаю (ii). □

5.1.3. **Многомерный символ Конту-Каррера для всех колец.** В этом параграфе мы докажем, что многомерный символ Конту-Каррера для $\mathbb{Q}$-алгебр однозначно продолжается до аналогичного символа для всех колец. При этом единственность такого продолжения, его полилинейность и соотношение Стейнберга для него будут напрямую следовать из теоремы 5.1.4 и теории толстых инд-конусов, развитой в §§ 4.3, 4.4. Для доказательства существования мы построим новую явную формулу для многомерного символа Конту-Каррера,

определенную для всех колец. В данную формулу будут входит дифференциалы ряды, вычеты форм старшей степени, а также гомоморфизм π из формулы (4.2.11) в § 4.2.3.

Теорема 5.1.14.

(i) *Существует продолжение морфизма функторов $(CC_n)_{\mathbb{Q}}$ на категории $\mathbb{Q}$-алгебр до морфизма функторов на категории всех колец*

$$CC_n \,:\, (L^n\mathbb{G}_m)^{\times(n+1)} \longrightarrow \mathbb{G}_m\,.$$

(ii) *Продолжение CC_n из пункта (i) единственно и однозначно пропускается через обозначаемый таким же образом морфизм групповых функторов*

$$CC_n \,:\, L^nK^M_{n+1} \longrightarrow \mathbb{G}_m\,,$$

который мы будем называть многомерным символом Конту-Каррера.

Доказательство теоремы 5.1.14(ii). Из теории толстых инд-конусов, а именно, из теоремы 4.4.12 следует инъективность естественного отображения

$$\mathrm{Hom}\left((L^n\mathbb{G}_m)^{\times(n+1)}, \mathbb{G}_m\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}\left((L^n\mathbb{G}_m)^{\times(n+1)}_{\mathbb{Q}}, (\mathbb{G}_m)_{\mathbb{Q}}\right).$$

Таким образом, существует не более одного морфизма функторов $CC_n\colon (L^n\mathbb{G}_m)^{\times(n+1)} \to \mathbb{G}_m$, совпадающего с $(CC_n)_{\mathbb{Q}}$ после ограничения на $\mathbb{Q}$-алгебры.

Предположим, что такой морфизм CC_n существует. Точно таким же образом, как доказывается единственность, доказывается, что морфизм CC_n полилинеен и антисимметричен. А именно, данные свойства выражаются в терминах равенств между морфизмами функторов из степеней $L^n\mathbb{G}_m$ в $\mathbb{G}_m$, которые выполняются после перехода к $\mathbb{Q}$-алгебрам по теореме 5.1.4(i).

Таким образом, нам надо показать, что для CC_n выполняется соотношение Стейнберга. Вследствие антисимметричного свойства отображения CC_n, достаточно доказать, что для любого кольца A и для любого набора $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}(A)^*$, удовлетворяющего условию $1 - f_1 \in \mathcal{L}^n(A)^*$, выполняется равенство $CC_n(f_1, 1-f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}) = 1$. Заменяя при необходимости кольцо A на его сомножители, можно считать, что A не разлагается в произведение колец и $\underline{\mathbb{Z}}^n(A) = \mathbb{Z}^n$. Вновь пользуясь антисимметричным свойством отображения CC_n, можно считать, что $\nu(f_1) \geqslant \nu(1-f_1)$. Таким образом, надо показать, что морфизм функторов

$$(L^n\widetilde{\mathbb{G}}_m)' \times (L^n\mathbb{G}_m)^{\times(n-1)} \longrightarrow \mathbb{G}_m\,, \qquad (f_1, f_2, \ldots, f_n) \longmapsto CC_n(f_1, 1-f_1, f_2, \ldots, f_n)\,,$$

равен 1, где функтор $(L^n\widetilde{\mathbb{G}}_m)'$ определен формулой (4.2.18) в § 4.2.3. Из следствия 4.2.19, предложения 4.4.8(i),(iii) и леммы 4.3.19 видно, что функтор $(L^n\widetilde{\mathbb{G}}_m)' \times (L^n\mathbb{G}_m)^{\times(n-1)}$ представим дизъюнктным объединением двух инд-аффинных схем, являющихся произведениями инд-плоской инд-аффинной схемы над $\mathbb{Z}$ и толстого инд-конуса. Поэтому по предложению 4.3.23 все следует из соотношения Стейнберга для $(CC_n)_{\mathbb{Q}}$, установленного в теореме 5.1.4(ii). $\square$

Теперь докажем теорему 5.1.14(i), т.е. докажем существование продолжения морфизма функторов $(CC_n)_{\mathbb{Q}}$. Мы будем использовать следующий простой факт. Пусть L — свободный $\mathbb{Z}$-модуль ранга $2n$ с базисом $\{e_1, \dots, e_n, x_1, \dots, x_n\}$. Пусть $\mathcal{K}$ — множество всех пар (K, κ), где K является (возможно, пустым) подмножеством множества $\{1, \dots, n\}$, а $\kappa\colon K \hookrightarrow \{1, \dots, n\}$ является сохраняющим порядок вложением (которое может отличаться от первоначального вложения). Для каждой пары $(K, \kappa) \in \mathcal{K}$ определим элемент

$$v_{(K,\kappa)} := v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \Lambda^n L\,, \tag{5.1.15}$$

где для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, положим

$$v_i := \begin{cases} e_i, & \text{если} \quad i \notin K\,, \\ e_i + x_{\kappa(i)}, & \text{если} \quad i \in K\,. \end{cases}$$

Например, имеем

$$v_\varnothing = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n\,, \qquad v_{(\{1,\dots,n\},\mathrm{id})} = (e_1 + x_1) \wedge \ldots \wedge (e_n + x_n)\,. \tag{5.1.16}$$

Лемма 5.1.17. *Множество $\{v_{(K,\kappa)}\}$, где $(K, \kappa) \in \mathcal{K}$, является базисом $\mathbb{Z}$-модуля $\Lambda^n L$.*

Доказательство. Мы утверждаем, что множество $\mathcal{K}$ находится в естественной биекции с множеством n-элементных подмножеств $2n$-элементного множества. В самом деле, пара (K, κ) соответствует подмножеству

$$K \sqcup \overline{\kappa(K)} \subset \{1, \dots, n\} \sqcup \{1, \dots, n\} \simeq \{1, \dots, 2n\}\,,$$

где $\overline{\kappa(K)} := \{1, \dots, n\} \smallsetminus \kappa(K)$. Следовательно множество $\mathcal{K}$ имеет $\binom{2n}{n}$ элементов, что также равно рангу модуля $\Lambda^n L$ над кольцом $\mathbb{Z}$.

Мы видим, что достаточно показать, что множество $\{v_{(K,\kappa)}\}$, где $(K, \kappa) \in \mathcal{K}$, порождает $\mathbb{Z}$-модуль $\Lambda^n L$. Рассмотрим элемент $e_{p_1} \wedge \ldots \wedge e_{p_m} \wedge x_{r_1} \wedge \ldots \wedge x_{r_{n-m}} \in \Lambda^n L$, где $0 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant p_1 < \ldots < p_m \leqslant n$ и $1 \leqslant r_1 < \ldots < r_{n-m} \leqslant n$ (в частности, если $m = 0$, то нет сомножителей вида e_{p_i}, а если $m = n$, то нет сомножителей вида x_{r_j}). Пусть $1 \leqslant q_1 < \ldots < q_{n-m} \leqslant n$ является дополнительным подмножеством к подмножеству $\{p_1, \dots, p_m\}$ в множестве $\{1, \dots, n\}$.

Пусть σ — перестановка, которая переводит набор $(1,\dots,n)$ в набор $(p_1,\dots,p_m,q_1,\dots,q_{n-m})$. Определим элемент $(M,\mu)\in\mathcal{K}$, где $M:=\{q_1,\dots,q_{n-m}\}$, и $\mu(q_i):=r_i$, где $1\leqslant i\leqslant n-m$.

Тогда имеется равенство в $\Lambda^n L$

$$e_{p_1}\wedge\ldots\wedge e_{p_m}\wedge x_{r_1}\wedge\ldots\wedge x_{r_{n-m}}=(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)+n-m}\sum_{K\subset M}(-1)^{|K|}v_{(K,\kappa)}\,, \tag{5.1.18}$$

где K пробегает все подмножества множества M (включая пустое множество), κ является ограничением отображения μ на множество K, а $|K|$ обозначает количество элементов в множестве K. Данное равенство получается непосредственным раскрытием скобок после замены элемента x_{r_i} на равное выражение $(e_{q_i}+x_{r_i})-e_{q_i}$ для всех i, $1\leqslant i\leqslant n-m$.

Так как элементы $e_{p_1}\wedge\ldots\wedge e_{p_m}\wedge x_{r_1}\wedge\ldots\wedge x_{r_{n-m}}$ порождают модуль $\Lambda^n L$, то доказательство закончено. $\square$

Для набора $e=(e_1,\dots,e_n)\in L^n$ элементов в L, рассматриваемого как строка, и элемента $l=(l_1,\dots,l_n)\in\mathbb{Z}^n$, рассматриваемого как столбец, определим элемент $e\cdot l:=\sum\limits_{i=1}^{n}l_ie_i\in L$.

Ясно, что для любого кольца A все приведенные выше обозначения и факты, в частности, лемма 5.1.17, обобщаются заменой $\mathbb{Z}$-модуля L на свободный $\underline{\mathbb{Z}}(A)$-модуль $\underline{L}(A)$ ранга $2n$ с базисом $\{e_1,\dots,e_n,x_1,\dots,x_n\}$, изоморфный $\underline{\mathbb{Z}}(A)\otimes_{\mathbb{Z}}L$.

Пусть теперь $g=(g_1,\dots,g_n)$ — набор обратимых итерированных рядов Лорана из $\mathcal{L}^n(A)^*$, для которого $(n\times n)$-матрица $\big(\nu(g)\big):=\big(\nu(g_1),\dots,\nu(g_n)\big)$ является верхнетреугольной с единицами на диагонали. По теореме 4.5.40 существует единственный непрерывный автоморфизм A-алгебры $\phi_g\colon\mathcal{L}^n(A)\to\mathcal{L}^n(A)$, такой что $\phi_g(t_i)=g_i$ для всех i, $1\leqslant i\leqslant n$. Для любого элемента $f\in\mathcal{L}^n(A)^*$ положим

$$\langle f,g\rangle=\langle f,g_1,\dots,g_n\rangle:=\pi\big(\phi_g^{-1}(f)\big)\,,$$

где морфизм π определен по формуле (4.2.11) в § 4.2.3. В частности, имеем равенство $\langle f,t_1,\dots,t_n\rangle=\pi(f)$.

Заметим, что в соответствии с замечанием 4.5.35 и теоремой 4.5.40 для обратного автоморфизма к произвольному непрерывному автоморфизму A-алгебры $\mathcal{L}^n(A)$ имеется явная формула, из которой следует равенство

$$\langle f,g\rangle=\pi\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}\operatorname{res}\big(fg^{-l}\tfrac{dg}{g}\big)t^l\right)\,, \tag{5.1.19}$$

где $g^{-l}:=g_1^{-l_1}\dots g_n^{-l_n}$ и $\frac{dg}{g}=\frac{dg_1}{g_1}\wedge\ldots\wedge\frac{dg_n}{g_n}$.

Определение 5.1.20. Для любого кольца A и любого набора элементов $f_1,\dots,f_{n+1}\in\mathcal{L}^n(A)^*$ определим элемент из A^*

$$CC_n(f_1,\dots,f_{n+1}):=(-1)^{\operatorname{sgn}(\nu(f_1),\dots,\nu(f_{n+1}))}\prod_{(K,\kappa)\in\mathcal{K}}\langle f_1,g_{(K,\kappa)}\rangle^{C(K,\kappa)}\,, \tag{5.1.21}$$

где для каждого $(K,\kappa) \in \mathcal{K}$ элемент $C(K,\kappa) \in \underline{\mathbb{Z}}(A)$ однозначно задается равенством в свободном $\underline{\mathbb{Z}}(A)$-модуле $\Lambda^n \underline{L}(A)$ с базисом $v_{(K,\kappa)}$ (см. формулу (5.1.15) и лемму 5.1.17)

$$\big(e \cdot \nu(f_2) + x_1\big) \wedge \ldots \wedge \big(e \cdot \nu(f_{n+1}) + x_n\big) = \sum_{(K,\kappa)\in\mathcal{K}} C(K,\kappa) v_{(K,\kappa)}\,,$$

и $g_{(K,\kappa)} := (g_1, \ldots, g_n)$ с элементами g_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, определенными по формуле

$$g_i := \begin{cases} t_i, & \text{если} \quad i \notin K\,, \\ t_i \cdot f_{\kappa(i)+1} \cdot t^{-\nu(f_{\kappa(i)+1})}, & \text{если} \quad i \in K\,. \end{cases}$$

Легко видеть, что $(n \times n)$-матрица $\big(\nu(g_{(K,\kappa)})\big)$ является единичной для каждого элемента $(K,\kappa) \in \mathcal{K}$, и поэтому $\langle f, g_{(K,\kappa)}\rangle$ является корректно определенным элементом из A^*.

В частности, имеются равенства (ср. с формулой (5.1.16))

$$g_\varnothing = (t_1, \ldots, t_n)\,, \qquad g_{(\{1,\ldots,n\},\mathrm{id})} = (t_1 \cdot f_2 \cdot t^{-\nu(f_2)}, \ldots, t_n \cdot f_{n+1} \cdot t^{-\nu(f_{n+1})})\,. \tag{5.1.22}$$

Пример 5.1.23.

(i) Рассмотрим случай кольца рядов Лорана $\mathcal{L}(A) = A((t))$, т.е. $n = 1$. Тогда выполняется сравнение $\mathrm{sgn}\big(\nu(f_1), \nu(f_2)\big) \equiv \nu(f_1)\nu(f_2) \pmod 2$. Кроме того, $L = \mathbb{Z}e \oplus \mathbb{Z}x$, а множество $\mathcal{K}$ состоит из двух элементов: пустое множество $\varnothing$ и $(\{1\}, \mathrm{id})$. Из формулы (5.1.16) и из равенства $e \cdot \nu(f_2) + x = e\big(\nu(f_2) - 1\big) + (e + x)$ следует, что $C_\varnothing = \nu(f_2) - 1$, $C_{(\{1\},\mathrm{id})} = 1$. Применяя также формулу (5.1.22), мы видим, что для всех элементов $f_1, f_2 \in A((t))^*$ имеется равенство

$$CC_1(f_1, f_2) = (-1)^{\nu(f_1)\nu(f_2)} \langle f_1, t\rangle^{\nu(f_2)-1} \langle f_1, t^{1-\nu(f_2)} \cdot f_2\rangle = \tag{5.1.24}$$

$$= (-1)^{\nu(f_1)\nu(f_2)} \pi(f_1)^{\nu(f_2)-1} \langle f_1, t^{1-\nu(f_2)} \cdot f_2\rangle\,.$$

(ii) Для произвольного $n \geqslant 1$ если $(n \times n)$-матрица $\big(\nu(f_2), \ldots, \nu(f_{n+1})\big)$ единичная, то выполняется равенство

$$CC_n(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}) = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{l}_i} \langle f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}\rangle\,,$$

где $\nu(f_1) = (\underline{l}_1, \ldots, \underline{l}_n)$, $\underline{l}_i \in \underline{\mathbb{Z}}(A)$. Действительно, в этом случае имеется сравнение $\mathrm{sgn}\big(\nu(f_1), \ldots, \nu(f_{n+1})\big) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \underline{l}_i \pmod 2$ (достаточно это проверить, когда $\nu(f_1)$ является элементом стандартного базиса в $\mathbb{Z}^n$), а по формуле (5.1.16) имеется равенство

$$\big(e \cdot \nu(f_2) + x_1\big) \wedge \ldots \wedge \big(e \cdot \nu(f_{n+1}) + x_n\big) = v_{(\{1,\ldots,n\},\mathrm{id})}\,.$$

Теперь мы готовы доказать теорему 5.1.14(i).

Доказательство теоремы 5.1.14(i). Ясно, что отображение CC_n из определения 5.1.20 функториально относительно кольца A. Докажем, что для любой $\mathbb{Q}$-алгебры A и любого набора элементов $f_1, \ldots, f_{n+1} \in \mathcal{L}^n(A)^*$ выполняется равенство

$$CC_n(f_1, \ldots, f_{n+1}) = (CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1, \ldots, f_{n+1})\,.$$

Мы будем использовать следующее вспомогательное полилинейное антисимметрическое отображение: для произвольного набора элементов $f_1, \ldots, f_{n+1} \in \mathcal{L}^n(A)^*$ положим

$$F(f_1, \ldots, f_{n+1}) := (-1)^{\mathrm{sgn}(\nu(f_1), \ldots, \nu(f_{n+1}))}\,(CC_n)_{\mathbb{Q}}(f_1, \ldots, f_{n+1}) \in A^*\,.$$

Нам надо доказать, что выполняется равенство

$$F(f_1, \ldots, f_{n+1}) = \prod_{(K,\kappa)\in\mathcal{K}} \langle f_1, g_{(K,\kappa)}\rangle^{C(K,\kappa)}\,.$$

Утверждается, что отображение $F\colon \big(\mathcal{L}^n(A)^*\big)^{\times(n+1)} \to A^*$ является альтернированным, т.е. для любого набора элементов $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}^n(A)^*$ выполняется равенство $F(f_1, f_1, f_2, \ldots, f_n) = 1$. Действительно, из леммы 5.1.9 и формулы (5.1.6) следует равенство

$$F(f_1, f_1, f_2, \ldots, f_n) = (-1)^{\mathrm{sgn}(\nu(f_1), \nu(f_1), \ldots, \nu(f_n))}\,(-1)^{\nu_n(f_1, \ldots, f_n)}\,,$$

а по лемме 5.1.3 правая сторона последней формулы равна

$$(-1)^{\det(\nu(f_1), \ldots, \nu(f_n))}\,(-1)^{\nu_n(f_1, \ldots, f_n)} = 1\,.$$

Далее, на группе $\mathcal{L}^n(A)^*$ имеется естественная структура $\underline{\mathbb{Z}}(A)$-модуля, заданная по формуле $f \mapsto f^{\underline{l}}$ для любых элементов $f \in \mathcal{L}^n(A)^*$ и $\underline{l} \in \underline{\mathbb{Z}}(A)$. Для произвольного набора элементов $f_1, \ldots, f_{n+1} \in \mathcal{L}^n(A)^*$ рассмотрим морфизм $\underline{\mathbb{Z}}(A)$-модулей

$$\alpha : \underline{L}(A) \longrightarrow \mathcal{L}^n(A)^*\,, \qquad e_i \longmapsto t_i\,, \quad x_i \longmapsto f_{i+1}\cdot t^{-\nu(f_{i+1})}\,, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n\,. \tag{5.1.25}$$

Поскольку отображение F полилинейно и альтернировано, возникает морфизм $\underline{\mathbb{Z}}(A)$-модулей

$$\beta : \Lambda^n\underline{L}(A) \longrightarrow A^*\,, \qquad u_1 \wedge \ldots \wedge u_n \longmapsto F\big(f_1, \alpha(u_1), \ldots, \alpha(u_n)\big)\,,$$

где $u_1, \ldots, u_n \in \underline{L}(A)$. По построению имеются равенства в группе A^*

$$\beta\big((e\cdot\nu(f_2) + x_1) \wedge \ldots \wedge (e\cdot\nu(f_{n+1}) + x_n)\big) = F(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1})\,,$$

$$\beta(v_{(K,\kappa)}) = F(f_1, g_{(K,\kappa)})$$

для любого элемента $(K,\kappa)\in\mathcal{K}$. Это влечет равенство

$$F(f_1,\dots,f_{n+1})=\prod_{(K,\kappa)\in\mathcal{K}}F(f_1,g_{(K,\kappa)})^{C(K,\kappa)}\,.$$

Таким образом, для доказательства теоремы нам достаточно установить равенства

$$F(f_1,g_{(K,\kappa)})=\langle f_1,g_{(K,\kappa)}\rangle\,,\qquad (K,\kappa)\in\mathcal{K}\,.$$

Из леммы 5.1.3 следует, что отображение sgn инвариантно относительно автоморфизмов группы $\mathbb{Z}^n$. Объединяя это с предложением 4.5.8 и предложением 5.1.11, мы получаем, что отображение F инвариантно относительно непрерывных автоморфизмов A-алгебры $\mathcal{L}^n(A)$. Таким образом, для любого элемента $(K,\kappa)\in\mathcal{K}$ выполняется равенство

$$F(f_1,g_{(K,\kappa)})=F\big(\phi^{-1}_{g_{(K,\kappa)}}(f_1),t_1,\dots,t_n\big)\,.$$

Поэтому вследствие определения элементов $\langle f_1,g_{(K,\kappa)}\rangle\in A^*$ нам остается доказать, что для любого $f\in\mathcal{L}^n(A)^*$ выполняется равенство

$$F(f,t_1,\dots,t_n)=\pi(f)\,. \tag{5.1.26}$$

Если $f\in A^*$, то по формуле (5.1.6) обе стороны формулы (5.1.26) равны самому f. Если $f=t^l$ для некоторого элемента $l\in\underline{\mathbb{Z}}^n(A)$, или $f\in\mathbb{V}_{n,+}$, или $f\in\mathbb{V}_{n,-}$, то по формуле (5.1.7) или, соответственно, по формуле (5.1.5) обе стороны формулы (5.1.26) равны 1. Теперь формула (5.1.26) следует из разложения (4.2.9) в предложении 4.2.8. Это завершает доказательство теоремы. □

Имеет место следующее обобщение предложения 5.1.11 на случай произвольных колец.

Теорема 5.1.27. *Пусть $\phi\colon\mathcal{L}^n(A)\to\mathcal{L}^n(A)$ является непрерывным эндоморфизмом A-алгебры $\mathcal{L}^n(A)$ для произвольного кольца A. Тогда для всех элементов $f_1,\dots,f_{n+1}\in\mathcal{L}^n(A)^*$ выполняется равенство в A^* (для определения $d(\phi)$ см. формулу* (4.5.23) *в* § *4.5.4 и комментарий после нее)*

$$CC_n\big(\phi(f_1),\dots,\phi(f_{n+1})\big)=CC_n(f_1,\dots,f_{n+1})^{d(\phi)}\,. \tag{5.1.28}$$

В частности, если ϕ обратим, то $CC_n\big(\phi(f_1),\dots,\phi(f_{n+1})\big)=CC_n(f_1,\dots,f_{n+1})$ (см. следствие 4.5.17).

Доказательство. Обе части формулы (5.1.28) являются регулярными функциями на индаффинной схеме $X=\mathcal{H}om^{c,alg}(\mathcal{L}^n,\mathcal{L}^n)\times(L^n\mathbb{G}_m)^{\times(n+1)}$ (см. § 4.5.3). По предложению 4.5.19,

предложению 4.4.8(iii) и по лемме 4.3.19 инд-схема X изоморфна произведению инд-плоской инд-аффинной схемы над $\mathbb{Z}$ и толстого инд-конуса. Следовательно, по предложению 4.3.23 естественный гомоморфизм между алгебрами регулярных функций $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X_{\mathbb{Q}})$ инъективен, и все сводится к предложению 5.1.11. □

Замечание 5.1.29. Теорема 5.1.27 имеет следующее обобщение. Пусть $\phi\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^m(A)$ является непрерывным гомоморфизмом A-алгебр (в частности, по следствию 4.5.15 имеем $n \leqslant m$). Подобное рассуждение как в доказательстве теоремы 5.1.27 и предложении 5.1.11 с использованием предложения 4.5.25 показывает, что существует такой набор $q_1, \dots, q_{m-n}$ элементов из $\underline{\mathbb{Z}}(A)$, что для всех $f_1, \dots, f_{n+1} \in \mathcal{L}^n(A)^*$ выполняется равенство в A^* (см. определение $\operatorname{sgn}(\phi)$ в § 4.5.4)

$$CC_m\big(\phi(f_1), \dots, \phi(f_{n+1}), t_{q_1}, \dots, t_{q_{m-n}}\big) = CC_n(f_1, \dots, f_{n+1})^{\operatorname{sgn}(\phi)d(\phi)}\,.$$

Ниже мы покажем в предложении 5.2.12 и примере 5.2.13, что в общем случае многомерный символ Конту-Каррера не инвариантен относительно не непрерывных автоморфизмов A-алгебры $\mathcal{L}^n(A)$.

5.2. Явные формулы для многомерного символа Конту-Каррера

5.2.1. **Целочисленность и сходимость формулы с экспонентой вычета.** Для $\mathbb{Q}$-алгебр символ Конту-Каррера задается явными формулами (5.1.5), (5.1.6), (5.1.7) в теореме 5.1.4(i). Удобство этих формул было продемонстрировано в доказательствах утверждений из § 5.1.2. На самом деле, формулы (5.1.6) и (5.1.7) верны для произвольных колец.

Замечание 5.2.1. Многомерный символ Конту-Каррера CC_n из теоремы 5.1.14 удовлетворяет формулам (5.1.6) и (5.1.7) для произвольных колец. Это следует из того, что $\mathbb{G}_m$ является плоской схемой над $\mathbb{Z}$, инд-аффинная схема $\underline{\mathbb{Z}}^n$ является инд-плоской над $\mathbb{Z}$ и из того, что по определению морфизм $(CC_n)_{\mathbb{Q}}$, являющийся расширением скаляров морфизма CC_n с $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Q}$, удовлетворяет данным формулам. Таким образом, при специальном значении аргументов для многомерного символа Конту-Каррера имеется явная формула над всеми кольцами. Аналогичным образом, при помощи теоремы 4.4.12 показывается, что лемма 5.1.9 верна над любым кольцом.

Оказывается, что правая сторона формулы (5.1.5) из теоремы 5.1.4(i) задается некоторым универсальным степенным рядом с целыми коэффициентами. Переменными этого универсального ряда являются коэффициенты итерированных рядов Лорана, к которым применяется многомерный символ Конту-Каррера.

Рассмотрим положительные натуральные числа $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant n$, где $1 \leqslant q \leqslant n$. Положим $p := n + 1 - q$. Пусть $\mathbb{Q}[[x_{i,l}]]$ является кольцом степенных рядов от формальных переменных $x_{i,l}$, где $1 \leqslant i \leqslant p$ и $l \in \mathbb{Z}^n$ (см. определение 4.3.1). Рассмотрим бесконечные "во всех направлениях" ряды $f_i := 1 + \sum\limits_{l \in \mathbb{Z}^n} x_{i,l} t^l$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Формально раскрывая скобки в выражении (ср. с правой стороной формулы (5.1.5))

$$\exp \operatorname{res} \left(\log(f_1) \, \frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_p}{f_p} \wedge \frac{dt_{j_1}}{t_{j_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_{j_q}}{t_{j_q}} \right) , \tag{5.2.2}$$

мы получаем некоторый степенной ряд $\varphi_{n,j_1,\ldots,j_q} \in \mathbb{Q}[[x_{i,l}]]$.

Более точно, для каждого конечного подмножества $M \subset \{1, \ldots, p\} \times \mathbb{Z}^n$ и $d \in \mathbb{N}$, через $f \mapsto \bar{f}$ обозначим естественный гомоморфизм колец

$$\mathbb{Q}((t_1)) \ldots ((t_n))[[x_{i,l}]] \longrightarrow \mathbb{Q}((t_1)) \ldots ((t_n))[M]/(M)^d \simeq \big(\mathbb{Q}[M]/(M)^d\big)((t_1)) \ldots ((t_n)) \, .$$

Рассмотрим правую часть формулы (5.2.2) над кольцом $\big(\mathbb{Q}[M]/(M)^d\big)((t_1)) \ldots ((t_n))$. Ряд $\log(\bar{f}_1) = \sum\limits_{m \geqslant 1} (-1)^{m+1} \frac{(\bar{f}_1 - 1)^m}{m}$ является конечной суммой в данном кольце, выражение $\operatorname{res}(\cdots)$ является элементом идеала $(M)/(M)^d \subset \mathbb{Q}[M]/(M)^d$, и правая сторона формулы (5.2.2), примененная над кольцом $\big(\mathbb{Q}[M]/(M)^d\big)((t_1)) \ldots ((t_n))$, корректно определяет элемент

$$\varphi^{(M,d)}_{n,j_1,\ldots,j_q} \in \mathbb{Q}[M]/(M)^d \, .$$

Переходя к пределу по всем (M, d), получаем ряд $\varphi_{n,j_1,\ldots,j_q} = \varprojlim\limits_{(M,d)} \varphi^{(M,d)}_{n,j_1,\ldots,j_q}$.

Теорема 5.2.3. *Степенной ряд $\varphi_{n,j_1,\ldots,j_q} \in \mathbb{Q}[[x_{i,l}]]$ имеет целые коэффициенты, алгебраически сходится (см. определение 4.3.3) на инд-замкнутой подсхеме $((L^n\mathbb{G}_a)^\sharp)^{\times p} \subset (\mathbb{A}^{\mathbb{Z}^n})^{\times p}$, и для любого кольца A и набора $g_1, \ldots, g_p \in (L^n\mathbb{G}_a)^\sharp(A)$ выполняется равенство в группе A^**

$$CC_n\{1 + g_1, \ldots, 1 + g_p, t_{j_1}, \ldots, t_{j_q}\} = \varphi_{n,j_1 \ldots j_s}(g_1, \ldots, g_p) \, .$$

Доказательство. Пусть A является $\mathbb{Q}$-алгеброй, а $g_1, \ldots, g_p$ являются многочленами Лорана (а не просто рядами) с нильпотентными коэффициентами из кольца A. Ясно, что тогда в группе A^* имеется равенство

$$(CC_n)_{\mathbb{Q}}(1 + g_1, \ldots, 1 + g_p, t_{j_1}, \ldots, t_{j_q}) = \varphi_{n,j_1 \ldots j_q}(g_1, \ldots, g_p) \, .$$

По теореме 5.1.14(i) многомерный символ Конту-Каррера определен для всех колец. Поэтому все следует из теории толстых инд-конусов, а именно, из теоремы 4.4.10. □

Таким образом, Теорема 5.2.3 дает еще одну формулу для символа Конту-Каррера для произвольных колец. Коэффициенты ряда $\varphi_{n,q_1,\ldots,q_n}$ некоторым явным образом выражаются

через биномиальные коэффициенты. Ключевым ингридиентом в нашем доказательстве целости данных коэфициентов является существование многомерного символа Конту-Каррера для всех колец. Нам неизвестен ни один прямой комбинаторный способ установить целость, кроме следующего случая.

Пример 5.2.4. Рассмотрим ряд $f = 1 + \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}^n} x_l t^l$ в $\mathbb{Z}((t_1))\dots((t_n))[[x_l; l \in \mathbb{Z}^n]]$. Тогда ряд $\varphi_{n,1,\dots,n} \in \mathbb{Z}[[x_l]]$ получается формальным раскрытием скобок в выражении

$$\exp \operatorname{res}\left(\log(f)\,\frac{dt_1}{t_1}\wedge\ldots\wedge\frac{dt_n}{t_n}\right) = \exp\left(\sum_{m\geqslant 1}(-1)^{m+1}\frac{[(f-1)^m]_0}{m}\right),$$

где $[g]_0$ обозначает постоянный член итерированного ряда Лорана g. Целость коэффициентов этого ряда была доказана Концевичем [75, p. 2, Step 1] при помощи одного комбинаторного метода.

5.2.2. **Явные формулы для произвольных колец.** При $n = 1$ для символа Конту-Каррера над произвольным кольцом A существует явная формула для любых аргументов, см. введение в статье Андерсона–Паблоса Рома [2], а также статью Осипова–Жу [111, § 2]. Данная формула основана на том факте, что любой обратимый ряд Лорана из $A((t))^*$ может быть разложен в бесконечное произведение, для которого почти все сомножители имеют вид $1 + a_l t^l$, где $l \in \mathbb{Z}$, $a_l \in A$.

При $n = 2$ ситуация более тонкая (ср. с замечанием 4.4.9(ii)). Разложение произвольного элемента из $A((t_1))((t_2))^*$ в бесконечное произведение, для которого почти все сомножители имеют вид $1 + a_{l_1,l_2} t_1^{l_1} t_2^{l_2}$, где $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$, $a_{l_1,l_2} \in A$, было получено в [111, Prop. 3.14] лишь для случая, когда нильрадикал кольца A является нильпотентным идеалом (например, это выполняется, если A нетерово). Соответственно, явная формула для двумерного символа Конту-Каррера была получена в работе [111] лишь над такими кольцами, см. [111, Def. 3.5, Prop. 3.16].

В нашем подходе многомерный символ Конту-Каррера задан в определении 5.1.20 явной формулой (5.1.21) над произвольным кольцом A. Заметим, что (локально постоянные) целые числа $C(K,\kappa)$ в формуле (5.1.21) не единственные возможные.

Замечание 5.2.5. Из доказательства теоремы 5.1.14(i) следует, что выполняется равенство

$$CC_n(f_1,\dots,f_{n+1}) = (-1)^{\operatorname{sgn}(\nu(f_1),\dots,\nu(f_{n+1}))} \prod_{(K,\kappa)\in\mathcal{K}} \langle f_1, g_{(K,\kappa)}\rangle^{D(K,\kappa)},$$

где

$$u_1\wedge\ldots\wedge u_n = \sum_{(K,\kappa)\in\mathcal{K}} D(K,\kappa) v_{(K,\kappa)} \in \Lambda^n \underline{L}(A),$$

а $u_1, \dots, u_n \in \underline{L}(A)$ являются любыми элементами, удовлетворяющими условию $\alpha(u_i) = \alpha\big(e \cdot \nu(f_{i+1}) + x_i\big)$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$, где отображение $\alpha\colon \underline{L}(A) \to \mathcal{L}^n(A)^*$ определено по формуле (5.1.25).

Приведем примеры такого рода.

Пример 5.2.6.

(i) При $n = 1$ правая сторона формулы (5.1.24) из примера 5.1.23(i) для $f_2 = t^{\underline{l}}$, $\underline{l} \in \underline{\mathbb{Z}}(A)$, принимает вид

$$(-1)^{\nu(f_1)\nu(f_2)}\pi(f_1)^{\nu(f_2)-1}\langle f_1, t\rangle = (-1)^{\nu(f_1)\nu(f_2)}\pi(f_1)^{\nu(f_2)}\,.$$

Это согласуется в замечанием 5.2.5, поскольку в этом случае выполняются равенство $\alpha\big(e \cdot \nu(f_2)\big) = \alpha\big(e \cdot \nu(f_2) + x\big)$ и $e \cdot \nu(f_2) = \nu(f_2)v_\varnothing$.

(ii) Предположим, что имеется набор натуральных чисел $1 \leqslant p_1 < \ldots < p_m \leqslant n$ с $0 \leqslant m \leqslant n$, такой что $f_2 = t_{p_1}, \dots, f_{m+1} = t_{p_m}$ и $\nu(f_{m+2}) = \ldots = \nu(f_{n+1}) = 0$. Пусть $1 \leqslant q_1 < \ldots < q_{n-m} \leqslant n$ является дополнительным подмножеством к подмножеству $\{p_1, \dots, p_m\}$ в множестве $\{1, \dots, n\}$. Пусть σ является перестановкой, переводящей набор $(1, \dots, n)$ в набор $(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_{n-m})$. Определим элемент $(M, \mu) \in \mathcal{K}$, где $M := \{q_1, \dots, q_{n-m}\}$ и $\mu(q_i) := m + i$, $1 \leqslant i \leqslant n - m$. Тогда имеется равенство

$$CC_n(f_1, f_2, \dots, f_{n+1}) = (-1)^{\operatorname{sgn}(\nu(f_1), \dots, \nu(f_{n+1}))} \prod_{K \subset M} \langle f_1, g_{(K,\kappa)}\rangle^{(-1)^{(|K| + \operatorname{sgn}(\sigma) + n - m)}}\,, \tag{5.2.7}$$

где K пробегает все подмножества множества M (включая пустое множество), а κ является ограничением отображения μ на множество K. Действительно, в этом случае выполнены равенства

$$\alpha(e_{p_i}) = \alpha\big(e \cdot \nu(f_{i+1}) + x_i\big)\,, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m\,,$$

$$\alpha(x_i) = \alpha\big(e \cdot \nu(f_{i+1}) + x_i\big)\,, \qquad m + 1 \leqslant i \leqslant n\,,$$

и остается применить замечание 5.2.5 и формулу (5.1.18).

Отметим, что если $m < n$, то $\operatorname{sgn}\big(\nu(f_1), \dots, \nu(f_{n+1})\big) \equiv 0 \pmod 2$, так как $\nu(f_{n+1}) = 0$.

Теперь приведем более явный чем формула (5.1.21) способ вычисления многомерного символа Конту-Каррера, использующий пример 5.2.6(ii). Пусть A — произвольное кольцо и пусть $f_1, \dots, f_{n+1} \in \mathcal{L}^n(A)^*$. Для вычисления $CC_n(f_1, \dots, f_{n+1}) \in A^*$ необходимо проделать следующие шаги.

(1) Разложим кольцо A в конечное произведение колец $\prod_{j=1}^{N} A_j$ так, чтобы функции $\nu(f_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, были постоянны на схемах $\mathrm{Spec}(A_j)$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Ясно, что такое разложение будет определено однозначно, если еще потребовать, чтобы целочисленные матрицы $\big(\nu(f_1), \dots, \nu(f_n)\big)$ были различны на схемах $\mathrm{Spec}(A_j)$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Из функториальности отображения CC_n имеется равенство

$$CC_n(f_1, \dots, f_{n+1}) = \prod_{j=1}^{N} CC_n(f_{1,j}, \dots, f_{n+1,j}),$$

где для каждого $1 \leqslant i \leqslant n+1$ имеем $f_i = \prod_{j=1}^{N} f_{i,j}$, $f_{i,j} \in \mathcal{L}^n(A_j)^*$. Заменив кольцо A на любое из колец A_j, будем предполагать с этого момента, что все функции $\nu(f_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, постоянны.

(2) Из разложения (4.2.14) в § 4.2.3 и полилинейности отображения CC_n получаем, что $CC_n(f_1, \dots, f_{n+1})$ однозначно раскладывается в произведение символов $CC_n(g_1, \dots, g_{n+1})$, где для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, либо $g_i \in \{t_1, \dots, t_n\}$, либо $\nu(g_i) = 0$. Заменим набор элементов $(f_1, \dots, f_{n+1})$ на любой из наборов такого типа.

(3) Предположим, что $f_i = f_j$ для некоторых $i < j$. Ясно, что такая пара (i, j) будет определена однозначно, если потребовать, например, ее минимальность относительно лексикографического порядка. Тогда

$$CC_n(f_1, \dots, f_{n+1}) = (-1)^{\det(\nu(f_1), \dots, \nu(f_{j-1}), \nu(f_{j+1}), \dots, \nu(f_{n+1}))}.$$

Здесь мы используем антисимметричное свойство отображения CC_n, а также то, что по замечанию 5.2.1 лемма 5.1.9 верна над любым кольцом.

(4) Предположим, что все элементы $f_1, \dots, f_{n+1}$ различны. Тогда существует единственная перестановка σ набора элементов $(f_2, \dots, f_{n+1})$, сохраняющая порядок между элементами f_i со свойством $\nu(f_i) = 0$, такая, что результат перестановки σ имеет вид $(t_{p_1}, \dots, t_{p_m}, g_{m+1}, \dots, g_n)$, где $0 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant p_1 < \dots < p_m \leqslant n$, и $\nu(g_i) = 0$ для всех i, $m+1 \leqslant i \leqslant n$. Используя антисимметричное свойство отображения CC_n, положим

$$CC_n(f_1, f_2, \dots, f_{n+1}) = CC_n(f_1, t_{p_1}, \dots, t_{p_m}, g_{m+1}, \dots, g_n)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}$$

и заменим набор $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ на набор $(f_1, t_{p_1}, \dots, t_{p_m}, g_{m+1}, \dots, g_n)$.

(5) Для набора $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ вида $(f_1, t_{p_1}, \dots, t_{p_m}, f_{m+2}, \dots, f_{n+1})$, где $\nu(f_{m+1}) = \dots = \nu(f_{n+1}) = 0$ символ $CC_n(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ задается по формуле (5.2.7).

5.2.3. **Многомерный символ Конту-Каррера для специальных колец.** Приведем примеры вычисления многомерного символа Конту-Каррера, основанные на явной формуле над $\mathbb{Q}$-алгебрами из теоремы 5.1.4(i) и на некоторых аргументах, позволяющих все свести к $\mathbb{Q}$-алгебрам.

Предложение 5.2.8. *Пусть A является кольцом, а ε является формальной переменной, удовлетворяющей соотношению $\varepsilon^2 = 0$. Определим кольцо $B := A[\varepsilon]$. Тогда для любого набора обратимых итерированных рядов Лорана $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}^n(A)^*$ и для любого ряда Лорана $g \in \mathcal{L}^n(A)$ выполняется равенство в B^**

$$CC_n(1 + g\,\varepsilon, f_1, \dots, f_n) = 1 + \operatorname{res}\left(g\,\frac{df_1}{f_1} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n}\right)\varepsilon\,, \tag{5.2.9}$$

где символ CC_n применяется к элементам из $\mathcal{L}^n(B)^*$.

Доказательство. Обе части формулы (5.2.9) определяют морфизмы инд-схем из $(L^n\mathbb{G}_m)^{\times n} \times L^n\mathbb{G}_a$ в $(\mathbb{G}_a)^{\times 2}$, задаваемые коэффициентами при степенях элемента ε в кольце $B = A[\varepsilon]$. Легко проверить, что по формуле (5.1.5) в теореме 5.1.4(i) значения обеих частей формулы (5.2.9) совпадают, когда A является $\mathbb{Q}$-алгеброй. Из примера 4.4.7 следует, что функтор $L^n\mathbb{G}_a$ представим инд-аффинным пространством, которое является инд-плоской инд-аффинной схемой над $\mathbb{Z}$. Следовательно, из теоремы 4.4.12, примененной к $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Q}$ и $Y = L^n\mathbb{G}_a$, следует, что указанные выше морфизмы совпадают. □

Предложение 5.2.10. *Пусть A является кольцом, а η является формальной переменной, удовлетворяющей соотношению $\eta^{n+2} = 0$. Определим кольцо $B := A[\eta]$. Тогда для любого набора $g_1, \dots, g_{n+1} \in \mathcal{L}^n(A)$ итерированных рядов Лорана выполняется равенство в B^**

$$CC_n(1 + g_1\eta, \dots, 1 + g_{n+1}\eta) = 1 + \operatorname{res}(g_1 dg_2 \wedge \ldots \wedge dg_{n+1})\eta^{n+1}\,, \tag{5.2.11}$$

где символ CC_n применяется к элементам из $\mathcal{L}^n(B)^*$.

Доказательство. Обе части формулы (5.2.11) определяют морфизмы инд-схем $(L^n\mathbb{G}_a)^{n+1} \to (\mathbb{G}_a)^{\times(n+2)}$, заданные коэффициентами при степенях элемента η в кольце $B = A[\eta]$. Легко проверить, что по формуле (5.1.5) в теореме 5.1.4(i) значения обеих частей формулы (5.2.11) совпадают, когда A является $\mathbb{Q}$-алгеброй. Из предложения 4.4.6(i) следует, что функтор $(L^n\mathbb{G}_a)^{n+1}$ представим инд-аффинным пространством, которое является инд-плоской инд-аффинной схемой над $\mathbb{Z}$. Таким образом, естественный гомоморфизм $\mathcal{O}(L^n\mathbb{A}^{n+1}) \to \mathcal{O}\big((L^n\mathbb{A}^{n+1})_{\mathbb{Q}}\big)$ инъективен. Это доказывает предложение. □

В качестве приложения предложения 5.2.8 покажем, что если автоморфизм кольца итерированных рядов Лорана не непрерывен, то, в общем случае, он не сохраняет многомерный символ Конту-Каррера (ср. с теоремой 5.1.27).

Предложение 5.2.12. *Пусть $\phi\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^n(A)$ — автоморфизм A-алгебры $\mathcal{L}^n(A)$, для которого существует такая (абсолютная) дифференциальная форма $\omega \in \Omega^n_{\mathcal{L}^n(A)}$, что*

$$\operatorname{res}\big(\phi(\omega)\big) \neq \operatorname{res}(\omega)\,.$$

Тогда существует набор $f_1, \dots, f_{n+1} \in \mathcal{L}^n\big(A[\varepsilon]\big)^*$, для которого

$$CC_n\big(\phi_\varepsilon(f_1), \dots, \phi_\varepsilon(f_{n+1})\big) \neq CC_n(f_1, \dots, f_{n+1})\,,$$

где ϕ_ε обозначает индуцированный автоморфизмом ϕ автоморфизм $A[\varepsilon]$-алгебры $\mathcal{L}^n\big(A[\varepsilon]\big) \simeq \mathcal{L}^n(A)[\varepsilon]$.

Доказательство. Предположим, что ϕ_ε сохраняет многомерный символ Конту-Каррера. Тогда по предложению 5.2.8 для любых $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}^n(A)^*$ и $g \in \mathcal{L}^n(A)$ автоморфизм ϕ сохраняет вычет дифференциальной формы $g\frac{df_1}{f_1} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n}$. Легко видеть, что $\mathcal{L}^n(A)$ аддитивно порождается обратимыми элементами, и поэтому аддитивная группа $\Omega^n_{\mathcal{L}^n(A)/A}$ порождается дифференциальными формами такого вида. Следовательно, ϕ сохраняет вычет всех дифференциальных форм в $\Omega^n_{\mathcal{L}^n(A)}$, что противоречит условию предложения. □

Пример 5.2.13. Йекутиели привел в [149, Ex. 2.4.24] следующую конструкцию не непрерывного автоморфизма ϕ поля $k((t_1))((t_2))$ над полем k характеристики нуль, не сохраняющего вычет. Рассмотрим элемент $f \in k((t_1))$, трансцендентный над подполем $k(t_1) \subset k((t_1))$. Из леммы Гензеля следует, что имеется (не единственное) сечение $\phi_0\colon k((t_1)) \to k((t_1))[[t_2]]$ естественного гомоморфизма $k((t_1))[[t_2]] \to k((t_1))$, так что ϕ_0 тождественно на поле $k(t_1)$ и выполнено $\phi_0(f) = f + t_2$. Можно непосредственно показать, что ϕ_0 продолжается до автоморфизма кольца $k((t_1))[[t_2]]$, оставляющего элемент t_2 на месте. Таким образом, возникает автоморфизм ϕ поля $k((t_1))((t_2))$ над полем k, для которого выполнено

$$\phi(t_1) = t_1\,, \qquad \phi(t_2) = t_2\,, \qquad \phi(f) = f + t_2\,.$$

Мы получаем, что

$$\phi\left(\frac{dt_1}{t_1} \wedge \frac{df}{t_2}\right) = \frac{dt_1}{t_1} \wedge \frac{df}{t_2} + \frac{dt_1}{t_1} \wedge \frac{dt_2}{t_2}\,.$$

Так как $f \in k((t_1))$, то образ дифференциальной формы $\frac{dt_1}{t_1} \wedge \frac{df}{t_2}$ при естественном отображении $\Omega^2_{k((t_1))((t_2))} \to \widetilde{\Omega}^2_{k((t_1))((t_2))}$ равен нулю. Отсюда имеем

$$\operatorname{res}\left(\frac{dt_1}{t_1} \wedge \frac{df}{t_2}\right) = 0\,, \qquad \operatorname{res}\,\phi\left(\frac{dt_1}{t_1} \wedge \frac{df}{t_2}\right) = 1\,.$$

Значит, из предложения 5.2.12 следует, что автоморфизм ϕ_ε не сохраняет двумерный символ Конту-Каррера, определенный над кольцом $k[\varepsilon]((t_1))((t_2))$. В явном виде, имеем

$$CC_2\left(1+\phi\left(\frac{f}{t_2}\right)\varepsilon, \phi(t_1), \phi(f)\right) \neq CC_2\left(1+\frac{f}{t_2}\,\varepsilon, t_1, f\right),$$

что следует из формулы (5.2.9).

Теперь объясним, как многомерный символ Конту-Каррера позволяет строить билинейное спаривание групповых функторов $L^nK_n^M \times L^nW_S \to W_S$, где W_S является групповым функтором векторов Витта, зависящим от множества положительных целых чисел S, замкнутым относительно взятия делителей.

Сначала напомним некоторые основные факты о векторах Витта (см., например [102, Lect. 26]). Пусть A является кольцом, и пусть S является множеством целых чисел, замкнутым относительно взятия делителей. Множество векторов Витта $W_S(A)$ определяется по формуле

$$W_S(A) := \left\{w = (w_i) \mid i \in S,\ w_i \in A\right\}.$$

Призрачные (или вспомогательные) координаты $w(i)$ вектора Витта $w \in W_S(A)$ определяются следующими многочленами w_i с целыми коэффициентами:

$$w(i) := \sum_{d|i} d w_d^{i/d}, \qquad i \in S.$$

Заметим, что, наоборот, координаты w_i выражаются как многочлены от призрачных координат $w(i)$ с рациональными коэффициентами, имеющими нетривиальные делители.

По определению, сложение и умножение векторов Витта покоординатны в призрачных координатах $w(i)$. Удивительным образом, соответствующие сложение и умножение в координатах w_i задаются многочленами от w_i с *целыми* коэффициентами (ср. с § 5.2.1). Таким образом, W_S является кольцевым функтором, т.е. функтором из категории колец в категорию колец. Для краткости положим $W(A) := W_{\mathbb{N}}(A)$. Для простого числа p и целого числа $r \geqslant 1$ кольцо $W_{p^r}(A) := W_{\{1,p,\ldots,p^{r-1}\}}(A)$ называется кольцом r-обрезанных p-векторов Витта.

Замечание 5.2.14. Пусть дано вложение $S' \subset S$ подмножеств в $\mathbb{N}$, и при этом подмножества S и S' замкнуты относительно взятия делителей. Тогда естественная проекция $W_S \to W_{S'}$ является морфизмом кольцевых функторов. В призрачных координатах этот гомоморфизм также является естественной проекцией.

Мы будем использовать только аддитивную структуру на векторах Витта и будем, таким образом, рассматривать W_S как групповой функтор (см. § 4.1). Легко проверяется, что при

$S = \mathbb{N}$ для $\mathbb{Q}$-алгебры A и любого вектора Витта $w \in W(A)$ имеется равенство в $A[[x]]$

$$-\log \prod_{i\geqslant 1}(1 - w_i x^i) = \sum_{i\geqslant 1} w(i)\frac{x^i}{i}\,. \tag{5.2.15}$$

Из этого следует, что для произвольного кольца A имеется функториальный изоморфизм групп

$$\Upsilon \,:\, W(A) \xrightarrow{\sim} 1 + xA[[x]]\,, \qquad w = (w_i) \longmapsto \prod_{i\geqslant 1}(1 - w_i x^i)\,,$$

где групповая структура на $1+xA[[x]]$ задается произведением степенных рядов. В частности, имеется функториальное вложение групп $W(A) \hookrightarrow A[[x]]^*$.

Теперь рассмотрим композицию отображений

$$K_n^M\big(\mathcal{L}^n(A)\big) \times W\big(\mathcal{L}^n(A)\big) \longrightarrow K_n^M\big(\mathcal{L}^n(A)[[x]]\big) \times \mathcal{L}^n(A)[[x]]^* \xrightarrow{\sim}$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^n(A)[[x]]^* \times K_n^M\big(\mathcal{L}^n(A)[[x]]\big) \longrightarrow K_{n+1}^M\big(\mathcal{L}^n(A)[[x]]\big) \longrightarrow A[[x]]^*\,,$$

где первое отображение индуцировано естественным гомоморфизмом колец $\mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^n(A)[[x]]$ и изоморфизмом групп $\Upsilon\colon W\big(\mathcal{L}^n(A)\big) \xrightarrow{\sim} 1 + x\mathcal{L}^n(A)[[x]]$, второе отображение является перестановкой, третье отображение задается произведением между K-группами Милнора, а последнее отображение является обратным пределом по $d \in \mathbb{N}$ многомерных символов Конту-Каррера

$$CC_n \,:\, K_{n+1}^M\big(\mathcal{L}^n\big(A[x]/(x)^d\big)\big) \longrightarrow \big(A[x]/(x)^d\big)^*\,,$$

где мы используем естественный изоморфизм колец $\mathcal{L}^n(A)[[x]]/(x)^d \simeq \mathcal{L}^n(A[x]/(x)^d)$. Легко видеть, что образ этой композиции содержится в подгруппе $1 + xA[[x]] \simeq W(A)$ в $A[[x]]^*$. Таким образом, мы получаем билинейное спаривание

$$K_n^M\big(\mathcal{L}^n(A)\big) \times W\big(\mathcal{L}^n(A)\big) \longrightarrow W(A)\,,$$

функториальное относительно кольца A. Пусть $\{f_1, \ldots, f_n\}$, $f_i \in \mathcal{L}^n(A)^*$, является символом в группе $K_n^M\big(\mathcal{L}^n(A)\big)$, и пусть $(g_1, g_2, \ldots)$, $g_i \in \mathcal{L}^n(A)$, является элементов в $W\big(\mathcal{L}^n(A)\big)$. Следуя Витту [146], мы обозначаем через $(f_1, \ldots, f_n \mid g_1, g_2, \ldots]$ спаривание элементов $\{f_1, \ldots, f_n\}$ и $(g_1, g_2, \ldots)$.

Лемма 5.2.16. *Если A является $\mathbb{Q}$-алгеброй, то для любых $\{f_1, \ldots, f_n\} \in K_n^M\big(\mathcal{L}^n(A)\big)$, $(g_1, g_2, \ldots) \in W\big(\mathcal{L}^n(A)\big)$ и $i \in \mathbb{N}$ имеется равенство в A для призрачной координаты с номером i*

$$(f_1, \ldots, f_n \mid g_1, g_2, \ldots](i) = \operatorname{res}\left(g(i)\,\frac{df_1}{f_1} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n}\right)\,. \tag{5.2.17}$$

Доказательство. Используя формулу (5.1.5) в теореме 5.1.4(i) и формулу (5.2.15), получаем равенства

$$-\log \Upsilon(f_1,\dots,f_n \mid g_1,g_2,\dots] = -\operatorname{res}\Big(\log\Big(\prod_{i\geqslant 1}(1-g_i x^i)\Big)\frac{df_1}{f_1}\wedge\dots\wedge\frac{df_n}{f_n}\Big) =$$
$$= \operatorname{res}\Big(\Big(\sum_{i\geqslant 1} g(i)\frac{x^i}{i}\Big)\frac{df_1}{f_1}\wedge\dots\wedge\frac{df_n}{f_n}\Big) = \sum_{i\geqslant 1}\operatorname{res}\Big(g(i)\,\frac{df_1}{f_1}\wedge\dots\wedge\frac{df_n}{f_n}\Big)\frac{x^i}{i}\,.$$

□

Пусть теперь S является подмножеством в $\mathbb{N}$, замкнутым относительно взятия делителей. Определим групповой функтор U_S по формуле

$$U_S := \operatorname{Ker}\big(W \longrightarrow W_S\big)\,.$$

Предложение 5.2.18. *Имеется билинейный морфизм функторов*

$$L^n K_n^M \times L^n W_S \longrightarrow W_S\,, \tag{5.2.19}$$

заданный в призрачных координатах по формуле (5.2.17).

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого кольца A, любого символа $\{f_1,\dots,f_n\}$ из $K_n^M\big(\mathcal{L}^n(A)\big)$ и любого вектора Витта $(g_1,g_2,\dots)$ из $U_S\big(\mathcal{L}^n(A)\big)$ спаривание $(f_1,\dots,f_n \mid g_1,g_2\dots]$ принадлежит подгруппе $U_S(A)$. Если A является $\mathbb{Q}$-алгеброй, то это мгновенно следует из замечания 5.2.14 и леммы 5.2.16.

В общем случае нам надо показать, что композиция морфизмов функторов

$$(L^n\mathbb{G}_m)^{\times n}\times L^n U_S \longrightarrow L^n K_n^M \times L^n W \longrightarrow W \longrightarrow W_S$$

равна нулю. Ясно, что функтор U_S представим аффинным пространством $\mathbb{A}^{\mathbb{N}\smallsetminus S}$. Следовательно, по предложению 4.4.6(i), $L^n U_S$ представим инд-аффинным пространством, которое является инд-плоской инд-аффинной схемой над $\mathbb{Z}$. Таким образом, мы заключаем по теореме 4.4.12, примененной к вложению колец $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$. □

Замечание 5.2.20. Когда $S=\{1,\dots,p^{r-1}\}$, $r\geqslant 1$, спаривание (5.2.19), вычисленное при $A=\mathbb{F}_q$, принимает вид

$$K_n^M(K)\times W_{p^r}(K)\longrightarrow W_{p^r}(\mathbb{F}_q)\,, \tag{5.2.21}$$

где $K=\mathbb{F}_q((t_1))\dots((t_n))$ является n-мерным локальным полем. Из формулы (5.2.17) и из функториальности спаривания (5.2.19) следует, что спаривание (5.2.21) совпадает со спариванием из [114, § 3, Def. 5]. Вместе с многомерным символом Гильберта $K_n^M(K)\to\mathbb{F}_q^*$, совпадающим с символом Конту-Каррера $CC_n\colon K_{n+1}^M\big(\mathcal{L}^n(\mathbb{F}_q)\big)\to\mathbb{F}_q^*$ для поля $\mathbb{F}_q$, это позволяет строить явным образом локальное отображение взаимности $K_n^M(K)\to\operatorname{Gal}(K^{ab}/K)$, где K^{ab} обозначает максимальное абелево расширение поля K, см. работу Паршина [114].

5.3. Касательное пространство к K-группам Милнора

Для доказательства универсального свойства многомерного символа Конту-Каррера, см. теорему 5.4.1 ниже, нам понадобится описание касательного пространства к K-группам Милнора в терминах дифференциальных форм, представляющее также независимый интерес. Пусть R является кольцом.

5.3.1. **Слабо стабильные кольца.** Напомним следующее определение, введенное Морроу в [101, Def. 3.1] (мы приведем его в слегка измененной, но равносильной оригинальному определению форме).

Определение 5.3.1. Зафиксируем натуральное число $k \geqslant 2$. Кольцо R называется *слабо k-стабильным*, если для любого набора элементов $r_1, \ldots, r_{k-1} \in R$ существует обратимый элемент $r \in R^*$, для которого элементы $r_1 + r, \ldots, r_{k-1} + r$ обратимы в кольце R.

Пример 5.3.2.

(i) Кольцо R слабо 2-стабильно тогда и только тогда, когда любой элемент из кольца R является суммой двух обратимых элементов.

(ii) Полулокальное кольцо слабо k-стабильно тогда и только тогда, когда каждое из его полей вычетов содержит не менее, чем $k+1$ элемент, см. [101, Rem. 3.3].

(iii) Для любого кольца A кольцо рядов Лорана $A((t))$ слабо k-стабильно при всех $k \geqslant 2$. В самом деле, обратимый элемент r в определении 5.3.1 можно взять равным элементу t^i для подходящего $i \in \mathbb{Z}$.

Замечание 5.3.3.

(i) Пусть $k \geqslant 1$. Напомним из [69], что кольцо R называется *k-стабильным*, если для любого набора элементов $r_1, s_1, \ldots, r_k, s_k$, где $r_i, s_i \in R$, удовлетворяющего условию

$$r_1R + s_1R = \ldots = r_kR + s_kR = R\,,$$

существует элемент $r \in R$, такой что $r_1 + rs_1, \ldots, r_k + rs_k \in R^*$. Отметим, что если $k \geqslant 2$, то k-стабильность влечет $(k-1)$-стабильность, а также влечет слабую k-стабильность, см. [101, § 3.1].

(ii) Используя идею из [101, Rem. 3.5], покажем, что кольцо рядов Лорана $A((t))$ может не быть даже 1-стабильным и следовательно не быть k-стабильным ни для какого

$k \geqslant 1$. Для этого предположим, что схема $\mathrm{Spec}(A)$ связна, кольцо A не имеет нильпотентных элементов и содержит необратимый элемент $a \in A$ (например, A является областью целостности, но не является полем). Тогда пара $a, at^{-1}+1$ нарушает условие 1-стабильности для кольца $A((t))$, т.е. нельзя найти ряд Лорана $f \in A((t))$, такой что $a + f(at^{-1}+1) \in A((t))^*$. В самом деле, можно показать, что первый ненулевой коэффициент в ряде $a + f(at^{-1}+1)$ принадлежит идеалу $(a) \subset A$, и поэтому этот коэффициент необратим в кольце A. Напомним, что для кольца A с вышеперечисленными условиями ряд Лорана из кольца $A((t))$ обратим тогда и только тогда, когда обратим его первый ненулевой коэффициент, см. [30, Lem. 1.3], [31, Lem. 0.8], а также замечание 4.2.16 в многомерном случае. Из этого следует, что ряд $a + f(at^{-1}+1)$ необратим.

5.3.2. **Формулировка основного результата.** Далее символ ε обозначает формальную переменную, удовлетворяющую тождеству $\varepsilon^2 = 0$. Зафиксируем целое число $n \geqslant 0$. Приведем несколько примеров касательных пространств к групповым функторам (см. определение 4.4.15).

Пример 5.3.4.

(i) Имеем равенство $d(\varepsilon^2) = 2\varepsilon d\varepsilon = 0$ в группе $\Omega^1_{R[\varepsilon]}$. Поэтому простое вычисление показывает, что имеется изоморфизм R-модулей

$$T\Omega^{n+1}(R) \simeq \big(\varepsilon\,\Omega^{n+1}_R\big) \oplus \big(d\varepsilon \wedge \Omega^n_R\big) \oplus \big(\big(\varepsilon d\varepsilon \wedge \Omega^n_R\big)/2\big(\varepsilon d\varepsilon \wedge \Omega^n_R\big)\big)\ . \tag{5.3.5}$$

В частности, если $\frac{1}{2} \in R$, то последнее слагаемое равно нулю.

(ii) Имеется групповое разложение $R[\varepsilon]^* \simeq R^* \times (1 + R\,\varepsilon)$ (ср. с примером 4.4.16(ii)). Отсюда следует, что подгруппа $TK^M_{n+1}(R) \subset K^M_{n+1}(R)$ порождена символами $\{u_1, \ldots, u_n\}$, где каждый элемент $u_i \in R[\varepsilon]^*$ принадлежит либо подгруппе R^*, либо подгруппе $1 + R\,\varepsilon$, и при этом по крайней мере один элемент u_i принадлежит подгруппе $1 + R\,\varepsilon$.

Следуя конструкции Блоха из [12], дадим такое определение.

Определение 5.3.6. Обозначим через

$$B\ :\ TK^M_{n+1} \longrightarrow \Omega^n$$

морфизм групповых функторов, являющийся композицией морфизма $d\log\colon TK^M_{n+1} \to T\Omega^{n+1}$ и проекции на прямое слагаемое $\Omega^n \simeq d\varepsilon \wedge \Omega^n$ в разложении (5.3.5).

Пример 5.3.7. Для любого набора обратимых элементов $r_1, \dots, r_n \in R^*$ и любого элемента $s \in R$ выполнено равенство

$$B\{1 + sr_1 \dots r_n\,\varepsilon, r_1, \dots, r_n\} = s dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n\,.$$

Действительно, имеем

$$\frac{d(1 + sr_1 \dots r_n\,\varepsilon)}{1 + sr_1 \dots r_n\,\varepsilon} = (1 - sr_1 \dots r_n\,\varepsilon) d(sr_1 \dots r_n\,\varepsilon) =$$
$$= \varepsilon d(sr_1 \dots r_n) + sr_1 \dots r_n d\varepsilon - (sr_1 \dots r_n)^2 \varepsilon d\varepsilon\,.$$

Следовательно, выполняются равенства

$$d\log\{1 + sr_1 \dots r_n\,\varepsilon, r_1, \dots, r_n\} = \frac{d(1 + sr_1 \dots r_n\,\varepsilon)}{1 + sr_1 \dots r_n\,\varepsilon} \wedge \frac{dr_1}{r_1} \wedge \dots \wedge \frac{dr_n}{r_n} =$$

$$= \varepsilon \left(d(sr_1 \dots r_n) \wedge \frac{dr_1}{r_1} \wedge \dots \wedge \frac{dr_n}{r_n} \right) + d\varepsilon \wedge (s dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n) - \varepsilon d\varepsilon \wedge \left(s^2 r_1 \dots r_n dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n \right)\,.$$

Проекция этого элемента на прямое слагаемое $\Omega^n_R \simeq d\varepsilon \wedge \Omega^n_R$ в разложении (5.3.5) равна $s dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n$.

Теорема 5.3.8. *Пусть R — слабо 5-стабильное кольцо, содержащее элемент $\frac{1}{2}$. Тогда гомоморфизм $B\colon TK^M_{n+1}(R) \to \Omega^n_R$ является изоморфизмом.*

Нам неизвестно, верна ли теорема 5.3.8 для слабо 4-стабильных колец, содержащих элемент $\frac{1}{2}$.

5.3.3. **Доказательство основного результата.** Начнем со следующей элементарной леммы.

Лемма 5.3.9. *Пусть G — абелева группа. Предположим, что существует автоморфизм $\varphi\colon G \to G$, такой что группа G порождена элементами $g \in G$, удовлетворяющими условию $\varphi(g) = 2^i \cdot g$ для некоторого натурального числа $i \geqslant 1$, зависящего от элемента g. Тогда группа G однозначно 2-делима.*

Доказательство. Нужно показать, что умножение на 2 есть биекция группы G с собой. Определим следующую возрастающую фильтрацию на группе G: положим $F_0 G = \{0\}$, и пусть $F_l G$, $l \geqslant 1$, является подгруппой, порожденной элементами $g \in G$, удовлетворяющими условию $\varphi(g) = 2^i \cdot g$ для некоторого натурального числа i, $1 \leqslant i \leqslant l$. Достаточно показать, что умножение на 2 есть биекция на каждом присоединенном факторе $F_l G / F_{l-1} G$, где $l \geqslant 1$. Из конструкции следует, что данная фильтрация сохраняется автоморфизмом φ, а также, что автоморфизм φ действует на группе $F_l G / F_{l-1} G$ как умножение на 2^l. Это завершает доказательство. □

Лемма 5.3.9 влечет следующий полезный результат.

Предложение 5.3.10. *Пусть R — кольцо, содержащее элемент $\frac{1}{2}$. Тогда группа $TK^M_{n+1}(R)$ однозначно 2-делима.*

Доказательство. Рассмотрим автоморфизм кольца $R[\varepsilon]$, который переводит элемент ε в элемент 2ε и действует тождественно на кольце R. Данный автоморфизм индуцирует автоморфизм $\varphi\colon K^M_{n+1}\big(R[\varepsilon]\big) \to K^M_{n+1}\big(R[\varepsilon]\big)$. При помощи равенства $1+2r\varepsilon = (1+r\varepsilon)^2$, где $r \in R$, из примера 5.3.4(ii) следует, что автоморфизм φ действует на символы из $TK^M_{n+1}(R)$ как умножение на положительные степени числа 2. По лемме 5.3.9 это доказывает предложение. □

Теперь докажем две леммы о K-группе Милнора $K^M_2\big(R[\varepsilon]\big)$.

Лемма 5.3.11. *Пусть R — любое кольцо.*

(i) *Для всех элементов $a \in R^*$ и $b \in R$, таких что $1-a \in R^*$, в группе $K^M_2\big(R[\varepsilon]\big)$ выполнено равенство*

$$2\left\{1+\frac{b}{a}\,\varepsilon, 1+\frac{b}{1-a}\,\varepsilon\right\} = 0\,.$$

(ii) *Для всех элементов $r_1, r_2 \in R^*$, таких что $r_1+r_2 \in R^*$, в группе $K^M_2\big(R[\varepsilon]\big)$ выполнено равенство*

$$2\{1+r_1\varepsilon, 1+r_2\,\varepsilon\} = 0\,.$$

(iii) *Предположим, что $\frac{1}{2} \in R$, и что кольцо R слабо 4-стабильно. Тогда в группе $K^M_2\big(R[\varepsilon]\big)$ для всех элементов $r_1, r_2 \in R$ выполнено равенство*

$$\{1+r_1\,\varepsilon, 1+r_2\,\varepsilon\} = 0\,.$$

Доказательство. (i) В группе $K^M_2\big(R[\varepsilon]\big)$ выполнено соотношение Стейнберга

$$\{a+b\,\varepsilon, 1-a-b\,\varepsilon\} = 0\,. \tag{5.3.12}$$

Заметим, что имеются равенства

$$a+b\,\varepsilon = a\left(1+\frac{b}{a}\,\varepsilon\right), \qquad 1-a-b\,\varepsilon = (1-a)\left(1-\frac{b}{1-a}\,\varepsilon\right). \tag{5.3.13}$$

Используя полилинейность и соотношение Стейнберга $\{a, 1-a\} = 0$ в группе $K^M_2(R)$, мы видим, что формулы (5.3.12) и (5.3.13) влекут равенство

$$\left\{a, 1-\frac{b}{1-a}\,\varepsilon\right\} + \left\{1+\frac{b}{a}\,\varepsilon, 1-a\right\} + \left\{1+\frac{b}{a}\,\varepsilon, 1-\frac{b}{1-a}\,\varepsilon\right\} = 0\,. \tag{5.3.14}$$

Применяя автоморфизм кольца $R[\varepsilon]$, который отображает элемент ε в элемент $-\varepsilon$ и действует тождественно на кольце R, получаем равенство

$$\left\{a, 1+\frac{b}{1-a}\,\varepsilon\right\}+\left\{1-\frac{b}{a}\,\varepsilon, 1-a\right\}+\left\{1-\frac{b}{a}\,\varepsilon, 1+\frac{b}{1-a}\,\varepsilon\right\}=0\,. \tag{5.3.15}$$

Так как для любого элемента $r\in R$ выполнено $(1+r\varepsilon)^{-1}=1-r\varepsilon$, то сумма выражений (5.3.14) и (5.3.15) приводит к равенству

$$2\left\{1+\frac{b}{a}\,\varepsilon, 1-\frac{b}{1-a}\,\varepsilon\right\}=0\,.$$

Взятием обратного элемента в группе $K_2\big(R[\varepsilon]\big)$ мы получаем пункт (i).

(ii) Доказательство этого пункта следует из пункта (i), если положить

$$a=\frac{r_2}{r_1+r_2}\,,\qquad b=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}\,.$$

(iii) Так как для всех элементов $s_1, s_2 \in R$ выполняется равенство $(1+s_2\,\varepsilon)\cdot(1+s_2\,\varepsilon)=1+(s_1+s_2)\,\varepsilon$, то из примера 5.3.2(i) следует, что можно предполагать выполненным условие $r_1, r_2\in R^*$. Поскольку кольцо R слабо 4-стабильно, существует элемент $r\in R^*$, такой что

$$r_1+r,\ r_2+r,\ \frac{r_1+r_2}{2}+r\in R^*\,.$$

В частности получаем, что $r_1+r_2+2r\in R^*$ и $2r\in R^*$. Из пункта (ii) следует, что имеются равенства

$$0=2\{1+(r_1+r)\varepsilon, 1+(r_2+r)\varepsilon\}=2\{1+r_1\,\varepsilon, 1+r_2\,\varepsilon\}+2\{1+r\,\varepsilon, 1+r_2\,\varepsilon\}+$$

$$+2\{1+r_1\,\varepsilon, 1+r\,\varepsilon\}+2\{1+r\,\varepsilon, 1+r\,\varepsilon\}=2\{1+r_1\,\varepsilon, 1+r_2\,\varepsilon\}\,.$$

Принимая во внимание предложение 5.3.10, получаем доказательство пункта (iii). □

Лемма 5.3.16. *Пусть R — слабо 4-стабильное кольцо, содержащее элемент $\frac{1}{2}$. Предположим, что элементы $r_1,\dots,r_N\in R^*$, где $N\geqslant 2$, удовлетворяют соотношению $r_1+\ldots+r_N=0$. Тогда в группе $K_2^M\big(R[\varepsilon]\big)$ выполнено равенство*

$$\{1+r_1\,\varepsilon, r_1\}+\ldots+\{1+r_N\,\varepsilon, r_N\}=0\,.$$

Доказательство. Проведем индукцию по N. Для доказательства леммы в случае $N=2$ заметим, что

$$\{1+r_1\,\varepsilon, r_1\}+\{1+r_2\,\varepsilon, r_2\}=\{1+r_1\,\varepsilon, r_1\}+\{1-r_1\,\varepsilon, -r_1\}=$$

$$=\{1+r_1\,\varepsilon, r_1\}-\{1+r_1\,\varepsilon, -r_1\}=\{1+r_1\,\varepsilon, -1\}\,,$$

и воспользуемся предложением 5.3.10.

Докажем лемму в случае $N = 3$. Из случая $N = 2$ мы видим, что достаточно доказать равенство

$$\{1 + (r_1 + r_2)\,\varepsilon, r_1 + r_2\} - \{1 + r_1\,\varepsilon, r_1\} - \{1 + r_2\,\varepsilon, r_2\} = 0\,.$$

Оно равносильно равенству

$$\{1 + (r_1 + r_2)\,\varepsilon, r_1 + r_2 - r_1 r_2\,\varepsilon\} - \{1 + r_1\,\varepsilon, r_1\} - \{1 + r_2\,\varepsilon, r_2\} = 0\,, \tag{5.3.17}$$

потому что символ $\left\{1 + (r_1 + r_2)\,\varepsilon, 1 - \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\,\varepsilon\right\}$ равен нулю по лемме 5.3.11(iii). По существу формула (5.3.17) была доказана Суслиным и Ярошем в [127, Lem. 3.5] (см. также статью Керца [74, Sublem. 3.3]). А именно, по полилинейности левая часть формулы (5.3.17) равна

$$\left\{1 + r_1\,\varepsilon, 1 + \frac{r_2}{r_1} - r_2\,\varepsilon\right\} + \left\{1 + r_2\,\varepsilon, 1 + \frac{r_1}{r_2} - r_1\,\varepsilon\right\}\,. \tag{5.3.18}$$

Дважды применяя соотношение Стейнберга, получаем равенства

$$\left\{1 + r_1\,\varepsilon, 1 + \frac{r_2}{r_1} - r_2\,\varepsilon\right\} = \left\{(1 + r_1\,\varepsilon)\left(-\frac{r_2}{r_1} + r_2\,\varepsilon\right), 1 + \frac{r_2}{r_1} - r_2\,\varepsilon\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{r_2}{r_1}, 1 + \frac{r_2}{r_1} - r_2\,\varepsilon\right\} = \left\{-\frac{r_2}{r_1}, \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)\left(1 - \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\,\varepsilon\right)\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{r_2}{r_1}, 1 - \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\,\varepsilon\right\}\,.$$

Поскольку последнее выражение кососимметрично по отношению к r_1 и r_2, мы получаем, что выражение (5.3.18) равно нулю. Это доказывает случай $N = 3$.

Теперь проведем индуктивный шаг при $N \geqslant 4$. Для краткости положим $\langle s\rangle := \{1 + s\,\varepsilon, s\}$, где $s \in R^*$. Из случая $N = 2$ имеем, что $\langle -s\rangle = -\langle s\rangle$ для любого элемента $s \in R^*$. Из случая $N = 3$ имеем, что $\langle s_1 + s_2\rangle = \langle s_1\rangle + \langle s_2\rangle$ для всех элементов $s_1, s_2 \in R^*$, таких что $s_1 + s_2 \in R^*$. Так как кольцо R слабо 4-стабильно, то существует элемент $r \in R^*$, такой что

$$r + r_1,\ r + r_1 + r_2,\ r + r_1 + r_2 + r_3 \in R^*\,.$$

Получаем равенства

$$\langle r_1\rangle + \ldots + \langle r_N\rangle = -\langle r\rangle + \langle r\rangle + \langle r_1\rangle + \ldots + \langle r_N\rangle =$$

$$= \langle -r\rangle + \langle r + r_1\rangle + \langle r_2\rangle + \ldots + \langle r_N\rangle = \langle -r\rangle + \langle r + r_1 + r_2\rangle + \langle r_3\rangle + \ldots + \langle r_N\rangle =$$

$$= \langle -r\rangle + \langle r + r_1 + r_2 + r_3\rangle + \langle r_4\rangle + \ldots + \langle r_N\rangle\,. \tag{5.3.19}$$

Выражение (5.3.19) содержит $N-1$ слагаемых, при этом элементы в угловых скобках принадлежат группе R^*. Кроме того, выполнено соотношение

$$(-r)+(r+r_1+r_2+r_3)+r_4+\ldots+r_N=0\,.$$

Поэтому по предположению индукции получаем, что выражение (5.3.19) равно нулю. Это доказывает лемму. □

В заключение напомним следующий результат, доказанный в [101, Lem. 3.6] методом Нестеренко и Суслина из [105, Lem. 3.2] (см. также [74, Lem. 2.2]).

Лемма 5.3.20. *Пусть R — слабо 5-стабильное кольцо. Тогда в группе $K_2^M(R)$ для всех элементов $r,s\in R^*$ выполнены равенства*

$$\{r,-r\}=0\,,\qquad \{r,s\}=-\{s,r\}\,.$$

Заметим, что второе равенство следует стандартным образом из первого равенства и тождества

$$\{r,s\}+\{s,r\}=\{rs,-rs\}-\{r,-r\}-\{s,-s\}\,.$$

Из примера 5.3.2(i) мы получаем, что для слабо 2-стабильного кольца R группа Ω_R^n порождена дифференциальными формами вида $sdr_1\wedge\ldots\wedge dr_n$, где $r_1,\ldots,r_n\in R^*$, $s\in R$. Следующая лемма подобна [12, Lem. 1.8]. Ее доказательство очевидно.

Лемма 5.3.21. *Пусть R — слабо 2-стабильное кольцо. Пусть даны R-модуль M и отображение множеств $f\colon (R^*)^{\times n}\to M$, такое что*

(i) *отображение f кососимметрично, а именно: для всех элементов $r_1,\ldots,r_n\in R^*$ и индекса $1\leqslant i\leqslant n-1$ выполнено равенство*

$$f(r_1,\ldots,r_i,r_{i+1},\ldots,r_n)=-f(r_1,\ldots,r_{i+1},r_i,\ldots,r_n)\,,$$

а также если $r_i=r_{i+1}$, то $f(r_1,\ldots,r_i,r_{i+1},\ldots,r_n)=0$;

(ii) *отображение f удовлетворяет правилу Лейбница, а именно: для всех элементов $r_1,r_1',r_2,\ldots,r_n\in R^*$ выполнено равенство*

$$f(r_1r_1',r_2,\ldots,r_n)=r_1f(r_1',r_2,\ldots,r_n)+r_1'f(r_1,r_2,\ldots,r_n)\,;$$

(iii) *отображение f аддитивно полилинейно, а именно: для всех элементов $r_{11},\ldots,r_{1N},r_2\ldots,r_n\in R^*$, где $N\geqslant 2$, таких что $r_{11}+\ldots+r_{1N}=0$, выполнено равенство*

$$f(r_{11},r_2,\ldots,r_n)+\ldots+f(r_{1N},r_2,\ldots,r_n)=0\,.$$

Тогда существует единственный гомоморфизм R-модулей $F\colon \Omega^n_R \to M$, такой что для любых элементов $r_1, \dots, r_n \in R^*$ и $s \in R$ выполнено равенство $F(sdr_1 \wedge \dots \wedge dr_n) = sf(r_1, \dots, r_n)$.

Чтобы применить лемму 5.3.21, определим структуру R-модуля на группе $TK^M_{n+1}(R)$ (ср. с [12, Lem. 1.4, 1.5]).

Предложение 5.3.22. *Пусть R — слабо 5-стабильное кольцо, такое что $\frac{1}{2} \in R$. Тогда выполнено следующее:*

(i) *Группа $TK^M_{n+1}(R)$ порождена символами вида $\{1 + sr_1 \dots r_n\, \varepsilon, r_1, \dots, r_n\}$, где $r_1, \dots, r_n \in R^*$, $s \in R$.*

(ii) *Действие кольца R на кольце $R[\varepsilon]$, заданное эндоморфизмами, которые отображают элемент ε в элемент $a\,\varepsilon$, где $a \in R$, и действуют тождественно на кольце R, определяет структуру R-модуля на группе $TK^M_{n+1}(R)$, такую что выполнено условие*

$$a \ :\ \{1 + sr_1 \dots r_n\, \varepsilon, r_1, \dots, r_n\} \longmapsto \{1 + asr_1 \dots r_n\, \varepsilon, r_1, \dots, r_n\}\,. \tag{5.3.23}$$

Доказательство. (i) Легко видеть, что если кольцо R является слабо k-стабильным, то это же верно и для кольца $R[\varepsilon]$. Поэтому лемма 5.3.20 выполнена для слабо 5-стабильного кольца $R[\varepsilon]$. Объединим теперь это с примером 5.3.4(ii) и леммой 5.3.11(iii).

(ii) Единственное нетривиальное утверждение в этом пункте — это дистрибутивность по отношению к элементам из R, т.е. выполнение равенства $(a + b)v = av + bv$ для всех элементов $a, b \in R$, $v \in TK^M_{n+1}(R)$. Это следует из пункта (i) и формулы (5.3.23). □

Из формулы (5.3.23) следует, что отображение B (см. определение 5.3.6) является гомоморфизмом R-модулей.

Теперь мы готовы доказать основной результат этого параграфа.

Доказательство теоремы 5.3.8. Следуя стратегии из [12], построим обратное отображение к отображению B. Вследствие предложения 5.3.22(ii) группа $TK^M_{n+1}(R)$ является R-модулем. Применим лемму 5.3.21 к отображению

$$f \ :\ (R^*)^{\times n} \longrightarrow TK^M_{n+1}(R)\,, \qquad (r_1, \dots, r_n) \longmapsto \{1 + r_1 \dots r_n\, \varepsilon, r_1, \dots, r_n\}\,.$$

Для этого нужно проверить, что отображение f удовлетворяет всем условиям из леммы 5.3.21. Будем использовать обозначения из этой леммы. Отображение f кососимметрично

в силу предложения 5.3.10 и леммы 5.3.20. Правило Лейбница для отображения f следует из равенств (см. также формулу (5.3.23))

$$\{1 + r_1 r_1' r_2 \dots r_n\,\varepsilon, r_1 r_1', r_2, \dots, r_n\} =$$

$$= \{1 + r_1 r_1' r_2 \dots r_n\,\varepsilon, r_1', r_2, \dots, r_n\} + \{1 + r_1 r_1' r_2 \dots r_n\,\varepsilon, r_1, r_2, \dots, r_n\} =$$

$$= r_1\{1 + r_1' r_2 \dots r_n\,\varepsilon, r_1', r_2, \dots, r_n\} + r_1'\{1 + r_1 r_2 \dots r_n\,\varepsilon, r_1, r_2, \dots, r_n\}\,.$$

Наконец покажем, что отображение f аддитивно полилинейно. В самом деле, из леммы 5.3.16 следует равенство в группе $K_2^M\big(R[\varepsilon]\big)$

$$\{1 + r_{11}\,\varepsilon, r_{11}\} + \ldots + \{1 + r_{1N}\,\varepsilon, r_{1N}\} = 0\,.$$

Применяя действие элемента $r_2 \dots r_n \in R$ (см. формулу (5.3.23)), получаем равенство

$$\{1 + r_{11} r_2 \dots r_n\,\varepsilon, r_{11}\} + \ldots + \{1 + r_{1N} r_2 \dots r_n\,\varepsilon, r_{1N}\} = 0\,.$$

Взяв произведение с символом $\{r_2, \dots, r_n\} \in K_{n-1}^M(R)$, получаем требуемое равенство.

Таким образом, по лемме 5.3.21 мы получаем гомоморфизм R-модулей $F\colon \Omega_R^n \to TK_{n+1}^M(R)$, такой что для всех элементов $r_1, \dots, r_n \in R^*$ и $s \in R$ выполнено условие

$$F(s dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_n) = \{1 + s r_1 \dots r_n\,\varepsilon, r_1, \dots, r_n\}\,. \tag{5.3.24}$$

В силу предложения 5.3.22(i), группа $TK_{n+1}^M(R)$ порождена символами из правой части формулы (5.3.24). Кроме того, группа Ω_R^n порождена дифференциальными формами из левой части формулы (5.3.24). Поэтому формула (5.3.24) вместе с примером 5.3.7 влекут, что отображения B и F взаимно обратны. Это завершает доказательство теоремы 5.3.8. □

5.4. Универсальное свойство многомерного символа Конту-Каррера

Оказывается, что все характеры группового функтора $L^n K_{n+1}^M$ могут быть явно описаны следующим образом. Определим морфизм групповых функторов

$$\Theta \,:\, \mathbb{G}_m \longrightarrow L^n K_{n+1}^M\,, \qquad a \longmapsto \{a, t_1, \dots, t_n\}\,,$$

где $a \in A^*$ для кольца A. Напомним, что для любого кольца R имеется изоморфизм групп $\mathrm{Hom}_R^{gr}\left((\mathbb{G}_m)_R, (\mathbb{G}_m)_R\right) \simeq \underline{\mathbb{Z}}(R)$ (см. лемму 4.4.19(ii)).

Теорема 5.4.1. *Для любого кольца R, не содержащего $\mathbb{Z}$-кручения, естественный гомоморфизм групп*

$$\Theta_R^* \,:\, \mathrm{Hom}_R^{gr}\left((L^n K_{n+1}^M)_R, (\mathbb{G}_m)_R\right) \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}(R)\,, \qquad \Phi \longmapsto \Phi \circ \Theta_R\,,$$

является изоморфизмом, причем $\Theta^*(CC_n) = 1$.

Заметим, что условие, что кольцо R не содержит $\mathbb{Z}$-кручения, равносильно тому, что R плоско над $\mathbb{Z}$, а также тому, что естественный гомоморфизм колец $R \to R_{\mathbb{Q}}$ инъективен. В частности, если это выполняется, то естественный гомоморфизм колец $\mathbb{Z} \to R$ также инъективен, однако последнее условие не равносильно тому, что кольцо R не содержит $\mathbb{Z}$-кручения.

В явном виде, теорема 5.4.1 означает следующее. Для любого свободного от $\mathbb{Z}$-кручения кольца R пусть $\Psi\colon (L^n\mathbb{G}_m)_R^{\times n} \to (\mathbb{G}_m)_R$ — полилинейный морфизм функторов на категории R-алгебр, для которого выполняется соотношение Стейнберга. Тогда морфизм Ψ однозначно определяется своим значением на наборе $(r, t_1, \dots, t_n)$, где r — фиксированный обратимый элемент в R, не являющийся делителем. Кроме того, существует такое локально постоянное целое число $\underline{i} \in \underline{\mathbb{Z}}(R)$, что $\Psi = (CC_n)^{\underline{i}}$.

Следствие 5.4.2. *Многомерный символ Конту-Каррера CC_n совпадает с композицией граничных отображений ∂_i для алгебраических K-групп (см. § 1.2.2)*

$$L^nK^M_{n+1} \longrightarrow L^nK_{n+1} \xrightarrow{\partial_2\cdot\ldots\cdot\partial_{n+1}} K_1 \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m\,.$$

Доказательство. Из формулы (1.2.11) в § 1.2.2 следует, что для любого кольца A и элемента $a \in A^*$ рассматриваемая композиция граничных отображений между K-группами отображает символ $\{a, t_1, \dots, t_n\}$ в $a \in A^*$. Теперь все следует из теоремы 5.4.1. □

Для доказательства теоремы 5.4.1 мы будем использовать несколько вспомогательных результатов. Ниже R является кольцом, а $\Phi\colon (L^nK^M_{n+1})_R \to (\mathbb{G}_m)_R$ является произвольным характером. Определим композицию морфизмов функторов

$$\widetilde{\Phi} \;:\; (L^n\mathbb{G}_m)_R^{\times(n+1)} \longrightarrow (L^nK_M^{n+1})_R \xrightarrow{\Phi} (\mathbb{G}_m)_R\,,$$

где первый морфизм сопоставляет набору обратимых итерированных рядов Лорана $(f_1, \dots, f_{n+1})$ символ $\{f_1, \dots, f_{n+1}\}$. Заметим, что $\widetilde{\Phi}$ является морфизмом инд-аффинных схем.

Следующий результат основан на теории толстых инд-конусов (см. предложение 4.3.23 и теорему 4.4.12).

Лемма 5.4.3. *Предположим, что кольцо R не содрежит $\mathbb{Z}$-кручения. Тогда любой характер Φ как выше однозначно определяется морфизмом групповых функторов $\Phi_S\colon (L^nK^M_{n+1})_S \to (\mathbb{G}_m)_S$ над кольцом $S := R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.*

Доказательство. Ясно, что Φ однозначно определяется морфизмом $\widetilde{\Phi}$. По условию кольцо R не содержит $\mathbb{Z}$-кручения, т.е. естественный гомоморфизм колец $R \to S$ инъективен.

Следовательно по теореме 4.4.12 морфизм функторов $\widetilde{\Phi}$ однозначно определяется морфизмом функторов $\widetilde{\Phi}_S$. Поэтому Φ однозначно определяется морфизмом Φ_S. $\square$

Следующий результат основан на антисимметричном свойстве символов в K-группах Милнора колец итерированных рядов Лорана (см. замечание 5.3.2 и лемму 5.3.20).

Лемма 5.4.4. *Для любого кольца R имеем, что любой характер Φ как выше однозначно определяется ограничением морфизма $\widetilde{\Phi}$ на инд-замкнутую подсхему $(L^n\mathbb{G}_m)^0_R \times (L^n\mathbb{G}_m)^{\times n}_R \subset (L^n\mathbb{G}_m)^{\times(n+1)}_R$.*

Доказательство. Из замечания 5.3.2 и леммы 5.3.20 следует, что символы в K-группе Милнора $L^nK^M_m(A) = K^M_m\big(\mathcal{L}^n(A)\big)$, $m \geqslant 2$, антисимметричны. Таким образом, разложение (4.2.14) в § 4.2.3 влечет, что Φ однозначно определяется ограничениями морфизма $\widetilde{\Phi}$ на инд-замкнутые подсхемы $(L^n\mathbb{G}_m)^0_R \times (L^n\mathbb{G}_m)^{\times n}_R$ и $(\underline{\mathbb{Z}}^n)^{\times(n+1)}_R$ инд-аффинной схемы $(L^n\mathbb{G}_m)^{\times(n+1)}_R$.

Используя полилинейность, мы видим, что ограничение морфизма $\widetilde{\Phi}$ на инд-замкнутую подсхему $(\underline{\mathbb{Z}}^n)^{\times(n+1)}_R$ однозначно определяется значениями морфизма Φ на символах $\{f_1, \dots, f_{n+1}\}$, где каждый f_i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, равен некоторому t_j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Из принципа Дирихле следует, что выполняется равенство $f_i = f_j$ для некоторых $i \neq j$. По указанному выше антисимметричному свойству символов можно считать, что $f_1 = f_2$. Вновь применяя замечание 5.3.2 и лемму 5.3.20, мы видим, что для любого элемента $f \in L^n\mathbb{G}_m(A)$ имеется равенство $\{f, f\} = \{-1, f\}$ в группе $K^M_2\big(\mathcal{L}^n(A)\big)$. Следовательно, $\{f_1, f_2, \dots, f_{n+1}\} = \{-1, f_2, \dots, f_{n+1}\}$. Поскольку $-1 \in \mathbb{G}_m(A) \subset (L^n\mathbb{G}_m)^0(A)$, это доказывает лемму. $\square$

Следующий результат основан на абсолютной связности инд-схемы $(L^n\mathbb{G}_m)^0$ над $\mathbb{Z}$ (см. предложение 4.4.13(iv)).

Лемма 5.4.5. *Для любого кольца R и любого характера Φ как выше ограничение морфизма $\widetilde{\Phi}$ на инд-замкнутую подсхему $(\mathbb{G}_m)_R \times \big((L^n\mathbb{G}_m)^0_R\big)^{\times n}$ инд-схемы $(L^n\mathbb{G}_m)^{\times(n+1)}_R$ является постоянным морфизмом, значение которого равно $1 \in \mathbb{G}_m(R)$.*

Доказательство. Используя полилинейность, получаем, что ограничение морфизма $\widetilde{\Phi}$ на инд-замкнутую подсхему $(\mathbb{G}_m)_R \times \big((L^n\mathbb{G}_m)^0_R\big)^{\times n}$ определяет морфизм групповых инд-схем

$$\alpha \ : \ \big((L^n\mathbb{G}_m)^0_R\big)^{\times n} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{gr}_R\big((\mathbb{G}_m)_R, (\mathbb{G}_m)_R\big) \simeq \underline{\mathbb{Z}}_R\,,$$

где $\underline{\mathrm{Hom}}^{gr}$ является внутренним Hom-функтором для групповых функторов (см. § 4.1 и лемму 4.4.19(ii)). Из предложения 4.4.13(iv) следует, что инд-схема $\big((L^n\mathbb{G}_m)^0_R\big)^{\times n}$ связна над R. Таким образом, из предложения 4.3.29 получаем равенство $\alpha = 0$. Это доказывает лемму. $\square$

Теперь мы готовы доказать теорему 5.4.1.

Доказательство теоремы 5.4.1. Разделим доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Из замечания 5.2.1 и формулы (5.1.6) следует равенство $\Theta^*(CC_n) = 1$, где морфизм $CC_n \in \mathrm{Hom}^{gr}(L^n K^M_{n+1}, \mathbb{G}_m)$ существует по теореме 5.1.14. Таким образом, отображение Θ^*_R сюръективно, и нам надо показать, что отображение Θ^*_R инъективно. Другими словами, нам надо показать, что морфизм групповых функторов $\Phi\colon (L^n K^M_{n+1})_R \to (\mathbb{G}_m)_R$ однозначно определяется композицией $\Phi \circ \Theta_R$.

Шаг 2. По лемме 5.4.3 мы можем считать, что R является $\mathbb{Q}$-алгеброй, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Пусть A является R-алгеброй, и пусть $f_2, \dots, f_{n+1} \in L^n\mathbb{G}_m(A)$ — набор из n обратимых итерированных рядов Лорана. Возникает характер

$$\chi \ : \ (L^n\mathbb{G}_m)^0_A \longrightarrow (\mathbb{G}_m)_A\,, \qquad f \longmapsto \Phi\{f, f_2, \dots, f_{n+1}\}\,.$$

Из леммы 5.4.4 следует, что характер Φ однозначно определяется всеми характерами χ такого типа.

Поскольку R является $\mathbb{Q}$-алгеброй, кольцо A также является $\mathbb{Q}$-алгеброй. Таким образом, свойство экспоненциального отображения из предложения 4.4.22 влечет, что любой характер χ как выше однозначно определяется его дифференциалом $T\chi$. Из этого следует, что Φ однозначно определяется его дифференциалом $T\Phi\colon (TL^n K^M_{n+1})_R \to T(\mathbb{G}_m)_R$.

Теперь будем использовать описание касательного пространства к K-группам Милнора в терминах дифференциальных форм (см. § 5.3). Пусть

$$\Psi\colon (L^n\Omega^n)_R \longrightarrow (\mathbb{G}_a)_R$$

является морфизмом групповых функторов, соответствующим дифференциалу $T\Phi$ при изоморфизме из теоремы 5.3.8 и изоморфизме из примера 4.4.16(ii) (здесь мы используем, что элемент 2 обратим в $\mathbb{Q}$-алгебре R). Из сказанного выше следует, что Φ однозначно определяется морфизмом Ψ.

Шаг 3. Применяя лемму 5.4.5, мы покажем на этом шаге, что морфизм Ψ равен нулю на точных дифференциальных формах, т.е. что следующий морфизм инд-аффинных схем

$$\psi \ : \ (L^n\mathbb{G}_a)^{\times n}_R \longrightarrow (\mathbb{G}_a)_R\,, \qquad (g_1, \dots, g_n) \longmapsto \Psi(dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_n)$$

равен нулю.

По определению ψ является регулярной функцией из $\mathcal{O}\big((L^n\mathbb{G}_a)_R^{\times n}\big)$. Из предложения 4.4.13(i) следует, что функция ψ однозначно определяется ее ограничением на плотную инд-замкнутую подсхему $\big((L^n\mathbb{G}_a)_R^\sharp\big)^{\times n} \subset (L^n\mathbb{G}_a)_R^{\times n}$. Таким образом, достаточно показать, что для любой R-алгебры A и элементов $g_1, \dots, g_n \in (L^n\mathbb{G}_a)^\sharp(A)$ имеется равенство $\Psi(dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_n) = 0$.

Из леммы 1.5.16(i) и предложения 4.2.21 легко следует, что для любого элемента $g \in (L^n\mathbb{G}_a)^\sharp(A)$ имеется равенство $\frac{d\exp(g)}{\exp(g)} = dg$. Следовательно, изоморфизм из теоремы 5.3.8 сопоставляет символу $\{1+\varepsilon, \exp(g_1), \dots, \exp(g_n)\}$ дифференциальную форму $dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_n$, где $\varepsilon^2 = 0$. Вместе с примером 4.4.16(ii) это влечет следующее равенство в кольце $A[\varepsilon]^*$:

$$1 + \Psi(dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_n)\,\varepsilon = \Phi\{1+\varepsilon, \exp(g_1), \dots, \exp(g_n)\}\,.$$

Поскольку $1+\varepsilon \in \mathbb{G}_m\big(A[\varepsilon]\big)$ и $\exp(g_i) \in (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A) \subset (L^n\mathbb{G}_m)^0\big(A[\varepsilon]\big)$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, мы получаем равенство $\Psi(dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_n) = 0$, применяя лемму 5.4.5.

Шаг 4. Из предложения 4.4.24 следует, что Ψ однозначно пропускается через естественный морфизм групповых функторов $(L^n\Omega^n)_R \to (\widetilde{L^n\Omega^n})_R$. Объединяя шаг 3 с леммой 1.5.18, мы получаем, что морфизм групповых функторов $\Psi\colon (L^n\Omega^n)_R \to (\mathbb{G}_a)_R$ пропускается через морфизм, являющийся отображением вычета $\operatorname{res}\colon (L^n\Omega^n)_R \to (\mathbb{G}_a)_R$. В частности, морфизм Ψ однозначно определяется композицией

$$\lambda \;:\; (\mathbb{G}_a)_R \longrightarrow (L^n\Omega^n)_R \xrightarrow{\Psi} (\mathbb{G}_a)_R\,,$$

где первый морфизм сопоставляет элементу $a \in A$ дифференциальную форму $a\,\frac{dt_1}{t_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dt_n}{t_n}$ для произвольной R-алгебры A.

Изоморфизм из теоремы 5.3.8 сопоставляет символу $\{1+a\,\varepsilon, t_1, \dots, t_n\}$ дифференциальную форму $a\,\frac{dt_1}{t_1}\wedge\ldots\wedge\frac{dt_n}{t_n}$. Это влечет равенство $\lambda = T\big(\Phi \circ \Theta_R\big)$, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Отметим, что в течение доказательства теоремы 5.4.1 мы по существу получили явные формулы из теоремы 5.4.3(i) для многомерного символа Конту-Каррера для $\mathbb{Q}$-алгебр.

Замечание 5.4.6. При доказательстве инъективности в теореме 5.4.1 мы не использовали теорему 5.1.14 о существовании многомерного символа Конту-Каррера для всех колец. Напротив, теорема 5.1.14 напрямую выводится инъективности в теореме 5.4.1 и из существования граничных отображений для алгебраических K-групп, см. § 1.2.2. Это дает еще одно доказательство теоремы 5.2.3, т.е. целости коэффициентов явного ряда $\varphi_{n,j_1,\dots,j_q}$ в ней, при помощи алгебраической K-теории.

Сравним наше определение символа Конту-Каррера с другими известными определениями. Для простоты ниже мы будем рассматривать различные полилинейные морфизмы в $\mathbb{G}_m$ с точностью до взятия обратного.

Замечание 5.4.7.

(i) Классический одномерный символ был построен самим Конту-Каррером в работе [30] как неявно определенный билинейный морфизм функторов $(L\mathbb{G}_m)^{\times 2} \to \mathbb{G}_m$, причем над $\mathbb{Q}$-алгебрами была дана явная формула. Делинь [34, § 2.9] привел эквивалентную явную формулу над $\mathbb{Q}$-алгебрами, совпадающую с формулами из теоремы 5.1.4(i) при $n = 1$. Бейлинсон, Блох и Эно построили в [8, § 3.1] билинейный морфизм функторов $(L\mathbb{G}_m)^{\times 2} \to \mathbb{G}_m$, используя коммутатор в супер-центральном расширении группового функтора $L\mathbb{G}_m$. Также в [8, Prop. 3.3] было показано, что данный морфизм совпадает с символом Конту-Каррера. Независимо от работы [8] Андерсон и Паблос Ромо [2] изучали подобным образом частный случай для рядов Лорана над артиновыми алгебрами. Осипов и Жу [111, Theor. 7.2] показали, что одномерный символ Конту-Каррера равен граничному отображению между K-группами, т.е. получили следствие 5.4.2 при $n = 1$.

(ii) В [111, Def. 3.4] был определен полилинейный морфизм функторов $(L^2\mathbb{G}_m)^{\times 3}_{\mathbb{Q}} \to (\mathbb{G}_m)_{\mathbb{Q}}$ на категории $\mathbb{Q}$-алгебр при помощи явной формулы, совпадающей с формулами из теоремы 5.1.4(i) при $n = 2$. Кроме того, в [111, § 5.3] был определен полилинейный морфизм функторов $(L^2\mathbb{G}_m)^{\times 3} \to \mathbb{G}_m$ при помощи коммутатора в центральном расширении группового функтора $L^2\mathbb{G}_m$ категорией Пикара. Равенство между этим морфизмом и указанным выше морфизмом над $\mathbb{Q}$-алгебрами было доказано в [111, Theor. 5.9]. Равенство между этими морфизмами и композицией граничных отображений между K-группами как в следствие 5.4.2 при $n = 2$ было доказано в [111, Theor. 7.2]. Оба этих равенства могут быть также легко выведены из теоремы 5.4.1.

(iii) Браунлинг, Грехениг и Вольфсон построили в [23, Def. 4.9] полилинейный морфизм функторов $(\cdot, \dots, \cdot)\colon (L^n\mathbb{G}_m)^{\times(n+1)} \to \mathbb{G}_m$ при помощи коммутатора в спектральном расширении группового функтора $L^n\mathbb{G}_m$, приведенного в их предыдущей работе [24]. Из построения морфизма $(\cdot, \dots, \cdot)$ следует, что для него выполняется соотношение Стейнберга. Таким образом, теорема 5.4.1 влечет, что морфизм $(\cdot, \dots, \cdot)$ равен многомерному символу Конту-Каррера CC_n.

Список работ, в которых опубликованы основные результаты диссертации

(1) S. Gorchinskiy, V. Guletskii, *Motives and representability of algebraic cycles on threefolds over a field*, Journal of Algebraic Geometry, **21**:2 (2012).

(2) S. Gorchinskiy, V. Guletskii, *Transcendence degree of zero-cycles and the structure of Chow motives*, Cent. Eur. J. Math., **10**:2 (2012), 559–568.

(3) S. Gorchinskiy, D. Orlov, *Geometric Phantom Categories*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, **117**:1 (2013), 329–349.

(4) С. О. Горчинский, *Порождаемость модулей и трансцендентность нуль-циклов*, Изв. РАН. Сер. матем., **77**:4 (2013), 55–58.

(5) S. Gorchinskiy, A. Rosly, *A polar complex for locally free sheaves*, International Mathematics Research Notices, **2015**:10 (2015), 27840–2829.

(6) С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, *Явная формула для многомерного символа Конту–Каррера*, УМН, **70**:1(421) (2015), 183–184.

(7) С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, *Касательное пространство к K-группам Милнора колец*, Современные проблемы математики, механики и математической физики, Сборник статей, Тр. МИАН, **290**, МАИК, М., 2015, 34–42.

(8) С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, *Многомерный символ Конту-Каррера: локальная теория*, Матем. сб., **206**:9 (2015), 21–98.

(9) С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, *Непрерывные гомоморфизмы между алгебрами итерированных рядов Лорана над кольцом*, Современные проблемы математики, механики и математической физики. II, Сборник статей, Тр. МИАН, **294**, МАИК, М., 2016, 54–75.

(10) С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, *Многомерный символ Конту-Каррера и непрерывные автоморфизмы*, Функц. анализ и его прил., **50**:4 (2016), 26–42.

(11) S. Gorchinskiy, *Integral Chow motives of threefolds with K-motive of unit type*, Bull. of Korean Math. Soc., **54**:5 (2017), 1827–1849.

Список литературы

[1] V. Alexeev, D. Orlov, *Derived categories of Burniat surfaces and exceptional collections*, Math. Ann., **357**:3 (2013), 743–759.

[2] G. Anderson, F. Pablos Romo, *Simple proofs of classical explicit reciprocity laws on curves using determinant groupoids over an artinian local ring*, Comm. Algebra, **32**:1, 79–102 (2004).

[3] M. Artin, B. Mazur, *Étale homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, **100** (1969).

[4] M. Atiyah, F. Hirzebruch, *Vector bundles and homogeneous spaces*, Proc. Sympos. Pure Math., **3** (1961), 7–38, American Mathematical Society, Providence, R.I.

[5] M. Atiyah, F. Hirzebruch, *The Riemann–Roch theorem for analytic embeddings*, Topology, **1** (1962), 151–166.

[6] M. Atiyah, *Green's Functions for Self-Dual Four-Manifolds*, Adv. Math., Suppl. Stud., **7A** (1981), 129–158.

[7] A. A. Beilinson, *Coherent sheaves on $\mathbb{P}^n$ and problems of linear algebra*, Functional Analysis and Its Applications, **12**:3 (1978), 214–216.

[8] A. Beilinson, S. Bloch, H. Esnault, *ε-factors for Gauss–Manin determinants*, Mosc. Math. J., **2**:3 (2002), 477–532.

[9] D. Bergh, S. Gorchinskiy, M. Larsen, V. Lunts, *Categorical measures for finite group actions*, preprint arXiv:1709.00620.

[10] M. Bernardara, G. Tabuada, *Relations between the Chow motive and the noncommutative motive of a smooth projective variety*, Journal of Pure and Applied Algebra, **219**:11 (2015), 5068–5077.

[11] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, *Théorie des intersections et théorème de Riemann–Roch*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966–1967 (SGA 6), Lecture Notes in Mathematics, **225** (1971).

[12] S. Bloch, *On the tangent space to Quillen K-theory*, Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, **341** (1973), 205–210.

[13] S. Bloch, *Lectures on algebraic cycles*, Duke Univ. Math. Series IV (1980).

[14] S. Bloch, V. Srinivas, *Remarks on correspondences and algebraic cycles*, American Journal of Mathematics, **105**:5 (1983), 1235–1253.

[15] Ch. Böhning, H-Ch. Graf von Bothmer, P. Sosna, *On the derived category of the classical Godeaux surface*, Adv. Math., **243** (2013), 203–231.

[16] Ch. Böhning, H-Ch. Graf von Bothmer, L. Katzarkov, P. Sosna *Determinantal Barlow surfaces and phantom categories*, J. Eur. Math. Soc., **17**:7 (2015), 1569–1592.

[17] A. I. Bondal, *Representations of associative algebras and coherent sheaves*, Mathematics of the USSR-Izvestiya, **34**:1 (1990), 23–42.

[18] A. Bondal, M. Kapranov, *Representable functors, Serre functors, and reconstructions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **53**:4 (1989), 1183–1205.

[19] A. Bondal, M. Kapranov, *Enhanced triangulated categories*, Mat. Sb., **181**:5 (1990), 669–683.

[20] A. Bondal, M. Larsen, V. Lunts, *Grothendieck ring of pretriangulated categories*, Int. Math. Res. Not., **2004**:29 (2004), 1461–1495.

[21] A. Bondal, D. Orlov, *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, preprint MPIM 95/15 (1995), arXiv:math.AG/9506012.

[22] Z. I. Borevich, I. R. Shafarevich, *Number theory*, Pure and Applied Mathematics, **20** Academic Press, New York–London (1966).

[23] O. Braunling, M. Groechenig, J. Wolfson, *A generalized Contou-Carrère symbol and its reciprocity laws in higher dimensions*, e-print arXiv:1410.3451v2.

[24] O. Braunling, M. Groechenig, J. Wolfson, *The index map in algebraic K-theory*, Selecta Math. (N.S.), **24**:2 (2018), 1039–1091.

[25] P. Brosnan, *A short proof of Rost nilpotence via refined correspondences*, Doc. Math. **8** (2003), 69–78.

[26] K. S. Brown, S. M. Gersten, *Algebraic K-theory as generalized sheaf cohomology*, Lecture Notes in Mathematics, **341** (1973), 266–292.

[27] A. Căldăraru, S. Willerton, *The Mukai pairing, I: a categorical approach*, New York J. Math., **16** (2010), 61–98.

[28] Y. Cho, Y. Lee, *Exceptional collections on Dolgachev surfaces associated with degenerations*, Adv. Math., **324** (2018), 394–436.

[29] J.-L. Colliot-Thélène, *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **58**, Part I (1995), 1–64.

[30] C. Contou-Carrère, *Jacobienne locale, groupe de bivecteurs de Witt universel, et symbole modéré*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **318**:8 (1994), 743–746.

[31] C. Contou-Carrère, *Jacobienne locale d'une courbe formelle relative*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **130** (2013), 1–106.

[32] V. I. Danilov, *Cohomology of algebraic varieties*, (Russian) Current problems in mathematics. Fundamental directions, **35**, VINITI, Moscow (1989) 5–130; English translation: *Cohomology of algebraic varieties*, Algebraic geometry, II, Encyclopaedia Math. Sci., **35**, Springer, Berlin (1996) 1–125.

[33] P. Deligne, *Théorie de Hodge: II*, Publ. Math. de l'I.H.É.S., **40** (1971) 5–57.

[34] P. Deligne, *Le symbole modéré*, Publ. Math. IHES, **73** (1991), 147–181.

[35] S. K. Donaldson, R. P. Thomas, *Gauge theory in higher dimensions*, The geometric universe (Oxford, 1996), Oxford Univ. Press, Oxford (1998), 31–47.

[36] J. J. Duistermaat, W. van der Kallen, *Constant terms in powers of a Laurent polynomial*, Indag. Math. (N.S.), **9**:2 (1998), 221–231.

[37] I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, I. B. Zhukov, *On the theory of multidimensional local fields. Methods and constructions*, (Russian) Algebra i Analiz, **2**:4 (1990), 91–118; translation in Leningrad Math. J., **2**:4 (1991), 775–800.

[38] O. Forster, *Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring*, Mathematische Zeitschrift, **84** (1964), 80–87.

[39] I. B. Frenkel, B. A. Khesin, *Four-dimensional realization of two-dimensional current groups*, Comm. Math. Phys., **178**:3 (1996), 541–562.

[40] E. Friedlander, *Etale K-theory. I. Connections with etale cohomology and algebraic vector bundles*, Invent. Math., **60**:2 (1980), 105–134.

[41] E. Friedlander, *Etale K-theory. II. Connections with algebraic K-theory*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **15**:2 (1982), 231–256.

[42] W. Fulton, *Intersection theory*, Results in Mathematics and Related Areas (3), **2**, Springer-Verlag, Berlin (1984).

[43] D. Gaitsgory, *Affine grassmannian and the loop group*, seminar notes written by D. Gaitsgory and N. Rozenblyum (2009), 12 pp.; available at http://www.math.harvard.edu/∼gaitsgde/grad_2009/SeminarNotes/Oct13(AffGr).pdf

[44] S. Galkin, E. Shinder, *Exceptional collection on the Beauville surface*, Adv. Math., **244** (2013), 1033–1050.

[45] S. Galkin, L. Katzarkov, A. Mellit, E. Shinder, *Minifolds and phantoms*, Advances in Mathematics, **278** (2015), 238–253.

[46] S. M. Gersten, *The localization theorem for projective modules*, Comm. Algebra, **2** (1974), 317–350.

[47] H. Gillet, *Comparison of K-theory spectral sequences, with applications*, Algebraic K-theory (Evanston, IL 1980), Lecture Notes in Math., **854**, Springer-Verlag, Berlin–New York (1981), 141–167.

[48] H. Gillet, *K-theory and intersection theory*, Handbook of K-theory. Vol. 1, 2, Springer, Berlin (2005), 235–293.

[49] S. O. Gorchinskiy, *Adelic resolution for homology sheaves*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., **72**:6 (2008), 133–202; translation in Izv. Math., **72**:6 (2008), 1187–1252.

[50] S. Gorchinskiy, V. Guletskii, *Motives and representability of algebraic cycles on threefolds over a field*, Journal of Algebraic Geometry, **21**:2 (2012).

[51] S. Gorchinskiy, V. Guletskii, *Transcendence degree of zero-cycles and the structure of Chow motives*, Cent. Eur. J. Math., **10**:2 (2012), 559–568.

[52] S. O. Gorchinskiy, D. N. Tyurin, *Relative Milnor K-groups and differential forms of split nilpotent extensions*, Izv. Math., **82**:5 (2018), 880–913.

[53] H. Grauert and O. Riemenschneider, *Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen*, Inventiones Math., **11** (1970) 263–292.

[54] D. Grayson, *Higher algebraic K-theory. II (after Daniel Quillen)*, Algebraic K-theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1976), Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, **551** (1976), 217–240.

[55] D. Grayson, *Products in K-theory and intersecting algebraic cycles*, Invent. Math., **47**:1 (1978), 71–83.

[56] J. P. C. Greenlees, J. P. May, *Generalized Tate cohomology*, Mem. Amer. Math. Soc., **113**:543 (1995).

[57] P. A. Griffiths, *Variations on a Theorem of Abel*, Invent. Math., **35** (1976) 321–390.

[58] P. A. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, NY (1978).

[59] A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1: Théorie des topos.* (French) Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-1964 (SGA 4). Lecture Notes in Mathematics, **269** (1972).

[60] V. Guletskii, C. Pedrini, *The Chow motive of the Godeaux surface*, Algebraic geometry, 179–195, de Gruyter, Berlin (2002).

[61] R. Hartshorne, *Residues and duality*, Lecture Notes in Math., **20** (1966).

[62] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I*, Ann. of Math. (2), **79** (1964) 109–203;
H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, II*, Ann. of Math. (2), **79** (1964) 205–326.

[63] L. Illusie, M. Temkin, *Exposé X. Gabber's modification theorem (log smooth case)*, Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents, Astérisque **363-364** (2014), 167–212.

[64] H. Inose, M. Mizukami, *Rational equivalence of* 0*-cycles on some surfaces of general type with $p_g = 0$*, Math. Ann., **244**:3 (1979), 205–217.

[65] U. Jannsen, S. Kleiman, J.-P. Serre, *Motives* (Seattle, WA, 1991) Proc. Sympos. Pure Math., **55**, Part 1, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1994).

[66] B. Kahn, J. P. Murre, C. Pedrini, *On the transcendental part of the motive of a surface*, London Math. Soc. Lecture Notes Ser., **344**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2004), 143–202.

[67] B. Kahn, R. Sujatha, *Birational motives I: Pure birational motives*, Ann. K-Theory, **1**:4 (2016), 379–440.

[68] W. van der Kallen, *Le K_2 des nombres duaux*, (French) C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, **273** (1971), 1204–1207.

[69] W. van der Kallen, *The K_2 of rings with many units*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), **10**:4 (1977), 473–515.

[70] K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups. II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **27**:3 (1980), 603–683.

[71] K. Kato, *Residue homomorphisms in Milnor K-theory*, Galois groups and their representations (Nagoya, 1981), 153–172, Adv. Stud. Pure Math., **2**, North-Holland, Amsterdam, (1983).

[72] B. Keller, *Invariance and Localization for Cyclic Homology of DG algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra, **123**, (1998), 223–273.

[73] B. Keller, *On differential graded categories*, International Congress of Mathematicians. Vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich, (2006), 151–190.

[74] M. Kerz, *The Gersten conjecture for Milnor K-theory*, Invent. Math., **175**:1 (2009), 1–33.

[75] M. Kontsevich, *Noncommutative identities*, e-print arXiv:1109.2469v1.

[76] B. Khesin, A. Rosly, *Symplectic geometry on moduli spaces of holomorphic bundles over complex surfaces*, The Arnoldfest (Toronto, ON, 1997), Fields Inst. Commun., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1999) 311–323.

[77] B. Khesin, A. Rosly, *Polar homology and holomorphic bundles*, R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., **359**:1784 (2001), 1413–1427.

[78] B. Khesin, A. Rosly, *Polar homology*, Canad. J. Math. **55** (2003) 1100–1120.

[79] B. Khesin, A. Rosly, *Polar Linkings, Intersections, and Weil Pairing*, Proc. Roy. Soc. Lond., **A461** (2005), 3505–3524.

[80] B. Khesin, A. Rosly, R. Thomas, *A Polar de Rham Theorem,* Topology, **43** (2004) 1231–1246.

[81] A. G. Khovanskii, *An analogue of the determinant associated with the Parshin–Kato theory, integral polytopes*, (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen., **40**:2 (2006), 55–64; translation in Funct. Anal. Appl., **40**:2 (2006), 126–133.

[82] Hyun Kyu Kim, Yun-Hwan Kim, Kyoung-Seog Lee, *Quasiphantom categories on a family of surfaces isogenous to a higher product*, J. Algebra, **473** (2017), 591–606.

[83] S.-I. Kimura, *Chow groups are finite dimensional, in some sense*, Math. Ann., **331**:1 (2005), 173–201.

[84] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Notes on A_∞-algebras, A_∞-categories and non-commutative geometry*, Homological mirror symmetry, 153–219, Lecture Notes in Phys., **757**, Springer, Berlin (2009).

[85] A. Kuznetsov, *Hochschild homology and semiorthogonal decompositions*, preprint arXiv:0904.4330.

[86] A. Kuznetsov, *Height of exceptional collections and Hochschild cohomology of quasiphantom categories*, J. Reine Angew. Math., **708** (2015), 213–243.

[87] A. Kuznetsov, *Exceptional collections in surface-like categories*, preprint (2017).

[88] T. Y. Lam, *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*, Lecture Notes Series in Mathematics, Benjamin/Addison-Wesley (1973).

[89] Kyoung-Seog Lee, *Derived categories of surfaces isogenous to a higher product*, J. Algebra, **441** (2015), 180–195.

[90] Kyoung-Seog Lee, Exceptional sequences of maximal length on some surfaces isogenous to a higher product, J. Algebra, **454** (2016), 308–333.

[91] Kyoung-Seog Lee, T. Shabalin, Exceptional collections on some fake quadrics, Proc. Amer. Math. Soc., **146**:6 (2018), 2299–2313.

[92] J.-L. Loday, *K-théorie algébrique et représentations de groupes*, (French) Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **9**:3 (1976), 309–377.

[93] V. Lunts, D. Orlov, *Uniqueness of enhancement for triangulated categories*, J. Amer. Math. Soc., **23**:3 (2010), 853–908.

[94] V. A. Lunts, O. M. Schnürer, *Smoothness of equivariant derived categories*, Proc. Lond. Math. Soc. (3), **108**:5 (2014), 1226–1276.

[95] Yu. I. Manin, *Correspondences, motifs and monoidal transformations*, Math. USSR-Sb., **6** (1968), 439–470.

[96] N. Marakarian, *The Atiyah class, Hochschild cohomology and the Riemann-Roch theorem*, Journal of London Mathematical Society, **79**:2 (2009), 129–143.

[97] M. Marcolli, G. Tabuada, *From exceptional collections to motivic decompositions via noncommutative motives*, J. Reine Angew. Math., **701** (2015), 153–167.

[98] A. S. Merkurjev, A. A. Suslin, *K-cohomology of Severi–Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Math. USSR-Izv., **21**:2 (1983), 307–340.

[99] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, **33**, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1980).

[100] J. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Annals of Mathematics Studies, **72** Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo (1971).

[101] M. Morrow, *K_2 of localisations of local rings*, J. Algebra, **399** (2014), 190–204.

[102] D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*, With a section by G. M. Bergman. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, N.J., **59** (1966).

[103] J. Murre, *On the motive of an algebraic surface*, J. Reine Angew. Math., **409** (1990), 190–204.

[104] A. Musicantov, A. Yom Din, *Reciprocity laws and K-theory*, Annals of K-theory, **2-1** (2017), 27–46.

[105] Yu. Nesterenko, A. Suslin, *Homology of the general linear group over a local ring, and Milnor's K-theory* (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **53**:1 (1989), 121–146; translated in *Math. USSR-Izv.*, **34**:1 (1990), 121–145.

[106] D. O. Orlov *Derived categories of coherent sheaves and equivalences between them*, Russian Math. Surveys, **58** (2003), 3, 511–591.

[107] D. O. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves and motives*, Russian Math. Surveys, **60**:6 (2005), 1242–1244.

[108] D. Orlov, *Smooth and proper noncommutative schemes and gluing of DG categories*, Adv. Math., **302** (2016), 59–105.

[109] D. V. Osipov, *Adelic constructions of direct images of differentials and symbols*, (Russian) Mat. Sb. **188**:5 (1997), 59–84; translation in Sb. Math. **188**:5 (1997), 697–723.

[110] D. Osipov, *To the multidimensional tame symbol*, preprint 03-13 of the Humboldt University of Berlin (2003); e-print arXiv:1105.1362v1.

[111] D. Osipov, X. Zhu, *The two-dimensional Contou-Carrère symbol and reciprocity laws*, J. Algebraic Geom., **25** (2016), 703–774.

[112] I. A. Panin, *On the algebraic K-theory of twisted flag varieties*, K-Theory, **8**:6 (1994), 541–585.

[113] G. Pappas, M. Rappoport, *Twisted loop groups and their affine flag varieties*, Adv. Math., **219**:1 (2008), 118-–198.

[114] A. N. Parshin, *Local class field theory*, (Russian) Algebraic geometry and its applications. Trudy Mat. Inst. Steklov., **165** (1984), 143–170; translation in Proc. Steklov Inst. Math., **165** (1985), 157–185.

[115] A. N. Parshin, *Galois cohomology and the Brauer group of local fields*, (Russian) Galois theory, rings, algebraic groups and their applications. Trudy Mat. Inst. Steklov., **183** (1990), 159–169; translation in Proc. Steklov Inst. Math., **183** (1991), 191–201.

[116] M. Perling, *Combinatorial aspects of exceptional sequences on (rational) surfaces*, Math. Z., **288**:1-2 (2018), 243–286.

[117] D. Quillen, *Algebraic K-theory I*, Lecture Notes in Mathematics, **341** (1973), 85–147.

[118] A. Roitman, *The torsion of the group of* 0*-cycles modulo rational equivalence*, Ann. of Math., **111** (1980), 553–569.

[119] M. Rost, *Chow groups with coefficients*, Doc. Math., **1**:16 (1996) 319–393.

[120] A. Scholl, *Classical motives*, Proc. Sympos. Pure Math., **55**:1, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1994), 163–187.

[121] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Publications de l'institut de mathématique de l'université de Nancago, VII. Hermann, Paris (1959).

[122] T. I. Shabalin, *Homology of some surfaces with $p_g = q = 0$ that are isogenous to a product*, Izv. Math., **78**:6 (2014), 1261–1270.

[123] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry 1*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin (1994).

[124] C. Soulé, *K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale*, Invent. Math., **55**:3 (1979), 251–295.

[125] V. Srinivas, *Algebraic K-theory*, Second edition, Progress in Mathematics, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, **90** (1996).

[126] A. Suslin, *Algebraic K-theory*, Journal of Soviet Mathematics, **28**:6 (1985), 870–923.

[127] A. Suslin, V. Yarosh, *Milnor's K3 of a discrete valuation ring*, Algebraic K-theory, Adv. Soviet Math., **4** (1991), 155–170.

[128] R. Swan, *Vector bundles and projective modules*, Transactions of the American Mathematical Society, **105**:2 (1962), 264–277.

[129] R. Swan, *The number of generators of a module*, Mathematische Zeitschrift, **102** (1967), 318–322.

[130] G. Tabuada, *Invariants additifs de dg-catégories*, Int. Math. Res. Notices, **53** (2005), 3309–3339.

[131] G. Tabuada, *Chow motives versus noncommutative motives*, Journal of Noncommutative Geometry, **7**:3 (2013), 767–786.

[132] R. Thomason, *Riemann–Roch for algebraic versus topological K-theory*, J. Pure Appl. Algebra, **27**:1 (1983), 87–109.

[133] R. Thomason, *Algebraic K-theory and étale cohomology*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **18**:3 (1985), 437–552.

[134] R. Thomason, *Lefschetz–Riemann–Roch theorem and coherent trace formula*, Invent. Math., **85**:3 (1986), 515–543.

[135] R. W. Thomason, T. Trobaugh, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*, The Grothendieck Festschrift, vol. III, Progr. Math. Birkhäuser, **88** (1990), 247–435.

[136] B. Toën, *The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory*, Invent. Math., **167**:3 (2007), 615–667.

[137] B. Toën, M. Vaquié, *Moduli of objects in dg-categories*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **40**:3 (2007), 387–444.

[138] C. Vial, *Pure motives with representable Chow groups*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **348**:21-22 (2010), 1191–1195.

[139] C. Vial, *Niveau and coniveau filtrations on cohomology groups and Chow groups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3), **106**:2 (2013), 410–444.

[140] C. Vial, *Projectors on the intermediate algebraic Jacobians*, New York J. Math., **19** (2013), 793–822.

[141] C. Vial, *Exceptional collections, and the Néron–Severi lattice for surfaces*, Advances in Math., **305** (2017), 895–934.

[142] O. Ya. Viro, D. B. Fuchs, *Homology and cohomology* (Russian), Current problems in mathematics. Fundamental directions, **24**, VINITI, Moscow (1988), 123–240; English translation: *Homology and cohomology*, Topology, II, Encyclopaedia Math. Sci., **24**, Springer, Berlin (2004), 95–196.

[143] V. Voevodsky, *Triangulated categories of motives over a field*, Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., **143** (2000), 188–238.

[144] C. Voisin, *Hodge theory and complex algebraic geometry I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **76**, Cambridge: Cambridge University Press, (2007).

[145] C. Voisin, *Unirational threefolds with no universal codimension* 2 *cycle*, Invent. Math., **201**:1 (2015), 207–237.

[146] E. Witt, *Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n*, J. Reine Angew. Math., **176** (1936), 126–140.

[147] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Commun. Math. Phys., **121**:3 (1989), 351–399.

[148] E. Witten, *Chern–Simons gauge theory as a string theory*, The Floer memorial volume, Progr. Math., **133**, Birkhäuser, Basel (1995), 637–678.

[149] A. Yekutieli, *An explicit construction of the Grothendieck residue complex*, with an appendix by P. Sastry, Astérisque, **208** (1992).

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
119991, ул. Губкина д. 8, Москва, Россия

GORCHINS@MI.RAS.RU