ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Быкова Дмитрия Владимировича "Двумерные сигма-модели и пространства флагов", представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 - теоретическая физика

Нелинейные сигма-модели - теории поля, описывающие отображение мировой поверхности в некоторое многообразие полей с той или иной внутренней геометрией. Такие теории обладают массой приложений в разнообразных областях современной теоретической и математической физики, от релятивистской физики частиц и теории интегрируемых систем до теории конденсированных сред. Особый интерес вызывают модели, в которых многообразия отображения являются групповыми, т.е. фактор-пространствами подходящих групп или супергрупп. К этому типу относятся различные лагранжианы струн и суперструн, включая лагранжианы суперструн на различных фонах в формулировке Грина-Шварца, играющие основополагающую роль в концепции AdS/CFT соответствия. Сигма-модели на кэлеровых, гиперкэлеровых и кватернион-кэлеровых многообразиях естественно возникают в рамках суперсимметрии и супергравитации. Хотя геометрический подход к сигма-моделям разрабатывался в течение многих лет многими авторами, в этой области остаётся большое число проблем, как физических, так и математических, еще ожидающих своего решения,

В диссертации Д.В. Быкова поднимается целый пласт таких проблем. Основное новое направление, в ней развиваемое, состоит в установлении связей таких популярных одномерных моделей статистической физики, как $SU(N)$ инвариантные спиновые цепочки, с определённым классом групповых двумерных сигма-моделей, возникающих к непрерывном пределе этих дискретных систем. Обобщая старый результат Холдейна, показавшего, что в случае $SU(2)$ цепочки возникает CP^1 модель, автор находит, что в общем случае эти пределы описываются сигма-моделями на так называемых флаговых многообразиях групп $SU(N)$. При этом наиболее интересный предел вблизи анти-ферромагнитного основного состояния связан с несимметрическими многообразиями, отличными от хорошо изученных симметрических пространств типа CP^{N-1}. Первый нетривиальный пример такого рода - модели на фактор-пространстве $SU(3)/[U(1) \times U(1)]$. Это многообразие является кэлеровым, в том смысле, что на нём можно определить кэлерову метрику и замкнутую симплектическую форму. Однако анти-ферромагнитноый непрерывный предел $SU(3)$ спиновой цепочки описывается $SU(3)/[U(1) \times U(1)]$ сигма-моделью с другим, некэлеровым типом метрики в пространстве отоб-

ражения. Аналогичный важный результат получен автором и в общем случае $SU(N)$ цепочек. Значительная часть диссертации посвящена детальному анализу геометрических свойств этого нового типа сигма-моделей. В частности, показано, что при определённом выборе весс-зуминовской части действия (фиксации B поля таким образом, что эта часть не сводится к топологическим членам) уравнения движения модели допускают представление нулевой кривизны. Это указывает на то, что модели из рассматриваемого класса интегрируемы, подобно моделям на симметрических пространствах. Также найден полный набор решений уравнений движения для $SU(3)/[U(1) \times U(1)]$ модели при частном выборе мировой поверхности как 2-сферы CP^1.

Ещё одно интересное направление исследований, вошедшее в диссертацию, касается нового интенсивно обсуждаемого в настоящее время класса деформированных сигма-моделей, содержащих в лагранжиане классические R матрицы, заданные на соответствующих групповые многообразиях. Оно развивает нетривиальное наблюдение автора, состоящее в том, что в качестве R матрицы можно выбрать интегрируемую комплексную структуру, известное условие Нийенхойса для которой играет роль классического уравнения Янга-Бакстера. Исследование такого типа деформаций открывает много новых возможностей в этой области, в том числе в плане установления связей с теорией струн и бран.

Структура диссертации. Диссертация Д.В. Быкова состоит из введения, семи глав, двух приложений, заключения и списка литературы из 120 неименований. Отдельно дан список из 13 работ автора, вошедших в диссертацию.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, очерчен круг основных теоретических положений, развитием которых она является, сформулированы полученные в ней новые результаты, перечислены примененные методы исследования, а также дан список семинаров и конференций, на которых эти результаты были доложены. Кратко излагается содержание диссертации.

В **первой главе** представлен обзор основных математических понятий и методов, применяемых в дальнейшем. В частности, дано определение пространства флагов группы $SU(N)$ и описаны его геометрические и топологичекие свойства. На этом важном примере изложен метод геометрического квантования в оригинальной трактовке автора и показано, как в его рамках воспроизводятся представления группы $SU(N)$.

Вторая и третья главы посвящены нахождению пределов Халдейна для $SU(N)$ спиновых цепочек. Вначале дано определение различных

вариантов этих дискретных моделей и построены соответствующие континуальные интегралы. Затем рассматриваются их ферромагнитный и антиферромагнитный пределы. В первом случае получаются нерелятивистские модели типа Ландау-Лифшица с пространствами CP^{N-1} в качестве многообразий отображения. Второй предел, для определённого типа $SU(N)$ цепочек, прямо обобщающих оригинальную $SU(2)$ модель Халдейна, был рассмотрен Аффлеком, и он приводит к релятивистской CP^{N-1} модели. В работах соискателя был предложен новый тип спиновых $SU(N)$ цепочек, антиферромагнитный предел которых описывается сигма-моделью на флаговых фактор-пространствах группы $SU(N)$. Вывод этого результата, одного из главных в диссертации, технически довольно сложен. Простейший $SU(3)$ случай рассмотрен в главе 2, а общий случай - в главе 3. Получены универсальные выражения для метрического и топологического членов лагранжиана. Из структуры топологического члена выведено свойство периодичности массовой щели данной спиновой цепочки, с периодом, равным числу групповых факторов в знаменателе соответствующего флагового $SU(N)$ косета. Хотя на флаговых многообразиях всегда можно определить кэлерову метрику, в моделях, следующих из спиновых цепочек, возникают некэлоровы метрики. Этот факт оказывется решающим для интернпретации таких моделей как интегрируемых в следующей главе.

Следующие **главы, с четвёртой по пятую**, посвящены исследованию различных динамических и геометрических аспектов сигма-моделей на пространствах флагов, рассмотренных в предыдущих главах, а также их некоторых обобщений. Основное свойство всех этих моделей состоит в том, что они определены на флагах, которые являются несимметрическими пространствами. До работ автора такие сигма-модели не исследовались, в отличие от моделей на симметрических пространствах.

В **главе 4** показано, что модели, представляющие собой модификацию моделей, рассмотренных ранее, такую, что B-член перестает быть топологическим, допускают представление нулевой кривизны для уравнений движения. Это очень важный результат, указывающий на интегрируемость нового класса сигма моделей. До этого интегрируемость была доказана только для моделей на симметрических пространствах.

В **главе 5** для простейшей сигма-модели на флаге $SU(3)/[U(1)xU(1)]$ и 2-сферы CP^1 в качестве мировой поверхности получен полный набор явных решений уравнений движения в терминах гармонических отображений $CP^1 \to CP^2$.

Глава 6 посвящена построению так называемого *квазилинейного* представления для рассматриваемого класса сигма-моделей, в котором исход-

ным лагранжианом является свободный $SU(N)$ инвариантный лагранжиан нскольких фундаментальных и синглетных мультиплетов, затем на поля накладываются подходящие $SU(N)$ ковариантные квадратичные связи, и ряд дополнительных "бонусных" симметрий лагранжиана калибруется нераспространяющимися калибровочными полями. После искключения посдедних их алгебраическими уравнениями движения воспроизводится нелинейный лагранжиан сигма-модели. Такое представление было хорошо известно для CP^N сигма моделей, однако для флаговых сигма-моделей, ввиду существования нескольких неэквивалентных выборов метрики на флагах $SU(N)$, процедура его построения не столь прямолинейна и потребовала от соискателя большой изобретательности. Квазилинейное представление может оказаться очень полезным при дальнейшем исследовании квантовых вариантов рассматриваемых моделей.

Глава 7 стоит несколько особняком. Она в основном посвящена очень горячей теме так называемых η - деформированных сигма моделей, в которых на групповом пространстве задаётся оператор, отождествляемый с классической R матрицей, решением классической версии уравнения Янга-Бакстера. В данной главе предлагается выбрать в качестве R матрицу интегрируемой комплексной структуры, существующей на флаговых многообразиях, и исследовать эффект такого выбора деформации для моделей, рассмотренных в предыдущих главах, и ряда других геометрически близких моделей. Интересным наблюдением автора является то, что уравнение Янга-Бакстера в данном случае эквивалентно обращению в нуль известного тензора Нийенхойса.

В **заключении** обсуждаются возможные пути применения и дальнейшего развития полученных в диссертации результатов. На мой взгляд, наиболее интересными направлениями из перечисленных в этом разделе могут быть выяснение возможных связей рассмотренных моделей с редукцией Полмайера, а также их суперсимметризация. Обобщение этих моделей на квантовый случай, особенно их интегрируемого класса, также представляет собой важную и, на мой взгляд, первоочередную задачу.

Помимо этих задач, в качестве предмета для будущих исследований, представляется интересным построить спиновые цепочки, связанные с другими классическими группами, например, симплектическими группами $Sp(N)$. Такие модели в непрерывном пределе могли бы воспроизводить другой важный класс двумерных сигма-моделей, а именно моделей, связанных с гиперкомплексными проективными пространствами HP^N kak естественным обобщением комплексных пространств CP^N. Такие сигма-модели относятся к множеству кватернион-кэлеровых сигма-моделей и естественно возникают в

различных вариантах расширенных супергравитаций. Применение развитой соискателем техники к таким системам могло бы привести к новым неизвестным ранее моделям и концепциям.

Резюмируя, я хотел бы подчеркнуть, что диссертация Д.В. Быкова, помимо новых интересных и глубоких продвижений на границе между физическими спиновыми моделями и такими математическими объектами, как разные варианты нелинейных $SU(N)$ сигма-моделей, также содержит новые чисто математические результаты. Например, предложено описывать флаговые многообразия как лагранжевы подмногообразия прямого произведения CP^N грассманианов. Эта интерпретация оказалась очень плодотворной в получении элегантных представлений для сигма-модельных лагранжианов и соответствующих топологических членов.

Вообще, диссертация написана на очень высоком математическом уровне, с использованием современного математического языка, что демонстрирует высокую математическую культуру соискателя. Как всегда, продолжением достоинств являются недостатки. Один из недостатков диссертации как раз состоит в излишней математизации изложения. Злоупотребление математической терминологией в ряде мест диссертации существенно затрудняет её чтение. Может быть также стоило уделить большее внимание квантовым аспектам исследуемых моделей. Однако эти замечания никак не могут умалить того факта, что рассматриваемая диссертация представляет собой значительный вклад в современную математическую физику.

Работы, на которых основана диссертация, хорошо известны, имеют высокий индекс цитируемости, неоднократно докладывались на представительных российских и международных конференциях, своевременно опубликованы в ведущих мировых журналах с высоким импакт-фактором. Ряд ее результатов был впоследствии переоткрыт другими авторами; они также уже послужили отправной точкой для исследований в ряде других работ. Всё это является очевидным свидетельством достоверности полученных в диссертации результатов и их значимости для дальнейших исследований в напрвлениях, которым посвящена диссертационная работа. Хотел бы отметить, что в диссертацию вошла лишь часть опубликованных работ Дмитрия Владимировича, видимо, выбранная им из соображений единства тематики и того факта, что он в них единственный автор.

Результаты диссертации Д.В. Быкова могут найти применение в исследованиях, проводимых в Математическом Институте им. В.А. Стеклова РАН (Москва), Боголюбовской Лаборатории теоретической физики ОИЯИ (Дубна), Физическом Институте им. П.Н. Лебедева РАН (Москва), Институте теоретической и экспериментальной физики (Москва) и многих других ин-

ститутах и лабораториях со сходной тематикой исследований в России и за рубежом. Автореферат диссертации правильно и полно отражает ее содеержание.

Все вышесказанное позволяет заключить, что диссертация "Двумерные сигма-модели и пространства флагов" полностью удовлетворяет требованиям пункта 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор Д.В. Быков несомненно заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 - теоретическая физика.

"__1__" ____октября_____ 2018 г.

Официальный оппонент
начальник сектора №2 ЛТФ ОИЯИ
доктор физ.-мат. наук, профессор Е.А. Иванов

ЛТФ ОИЯИ, ул. Жолио-Кюри 6,
141 980 Дубна М/о,
тел.: +7 496 21 65 539,
e-mail: eivanov@theor.jinr.ru

Подпись сотрудника ЛТФ ОИЯИ
Е.А. Иванова заверяю. Ученый
секретарь ЛТФ ОИЯИ А.В. Андреев