ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А.СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Быков Дмитрий Владимирович

ДВУМЕРНЫЕ СИГМА-МОДЕЛИ И ПРОСТРАНСТВА ФЛАГОВ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант доктор физ.-мат. наук, академик А. А. Славнов

Москва 2018

Оглавление

Введение **6**

1 Пространства флагов в $\mathbb{C}^N$ **29**
1.1 Общее описание 29
1.1.1 Пространство флагов как комплексное многообразие 29
1.1.2 Симплектическое многообразие 30
1.1.3 Комплексные структуры 33
1.1.4 Когомологии 37
1.2 Механическая частица, взаимодействующая с неабелевым внешним полем . . 41
1.2.1 'Квантование' симплектической формы пространства флагов 44
1.3 Представления алгебры $\mathfrak{su}_N$ 47
1.3.1 Пример 51
1.3.2 Когерентные состояния 52

2 Пределы Халдейна спиновых цепочек: $SU(3)$-случай **55**
2.1 Введение 55
2.2 Спиновые цепочки с $SU(N+1)$-симметрией 55
2.3 Когерентные состояния 58
2.4 Квантовая сфера S^2 59
2.5 Континуальный интеграл для спиновой цепочки 62
2.5.1 XXX-цепочка 62
2.5.2 Ферромагнитный предел 64
2.5.3 Модели Ландау-Лифшица. 65
2.6 Антиферромагнитный предел 67
2.6.1 Построение Аффлека 67
2.6.2 Антиферромагнитная конфигурация гамильтониана (2.2.2) 69
2.7 Непрерывный предел 73
2.7.1 Разложение вблизи "вакуумной" конфигурации 73
2.7.2 Метрики на пространствах флагов 77
2.8 Массовая щель и связь с тримеризацией 79
2.9 Обсуждение 80

3 Пределы Халдейна спиновых цепочек: общий случай **82**
3.1 Введение 82

3.2 Континуальные интегралы для спиновых цепочек . . . 82
3.2.1 Отображение момента для действия группы вращений петли . . . 83
3.2.2 Действие в суперсимметричном виде . . . 84
3.3 Динамический аспект . . . 85
3.3.1 Свойства отображения момента . . . 85
3.3.2 Гамильтониан . . . 87
3.3.3 Эквивариантные лагранжевы вложения общего вида: 'забывающие' расслоения . . . 88
3.4 Непрерывный предел и исключение вспомогательных переменных . . . 90
3.5 Метрика . . . 95
3.6 Топологический член . . . 96

4 Сигма-модели с комплексными таргет-пространствами и уравнения нулевой кривизны . . . 99
4.1 Рассматриваемые модели . . . 99
4.2 Структура таргет-пространства . . . 100
4.2.1 Симметрические пространства . . . 102
4.3 Сигма-модель пространства флагов . . . 104
4.3.1 Топологические члены . . . 104
4.3.2 Инвариантные метрики и формы . . . 104
4.4 Определение сигма-модели . . . 106
4.4.1 Локальные сохраняющиеся заряды . . . 108
4.5 Геометрия пространства флагов . . . 109
4.5.1 Комплексные структуры . . . 109
4.5.2 I_1, I_2, I_3-голоморфные кривые . . . 110
4.5.3 Пространство флагов как твисторное пространство . . . 113
4.5.4 Структуры, близкие к кэлеровым . . . 115
4.6 Обсуждение . . . 116

5 Явные решения уравнений движения . . . 117
5.1 $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ σ-модель . . . 117
5.2 σ-модель пространства флагов . . . 118
5.3 Критические отображения $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathcal{F}_3$ . . . 121
5.3.1 Гармонические отображения $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$ . . . 121
5.3.2 'Поднятие' в пространство флагов . . . 124
5.4 Резюме . . . 126

6 Квазилинейная формулировка для сигма-моделей пространств флагов . 128
6.1 Исследуемые модели . . . 128
6.2 Квазилинейная формулировка σ-моделей (GLSM) . . . 131
6.2.1 $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$-модель как прототип . . . 132

6.2.2 Многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^3$ . . . 133
6.2.3 Нётеровский ток . . . 136
6.3 Пространства флагов общего вида: кэлеров фактор, заданный колчанной диаграммой . . . 137
6.3.1 Квазилинейная формулировка . . . 143
6.4 Заключение и дальнейшие перспективы . . . 145

7 η-деформированные и $\mathbb{Z}_m$-градуированные модели . . . 146
7.1 η-деформация . . . 146
7.1.1 Симметрические пространства. . . . 147
7.1.2 Случай не простой группы симметрии: Двупараметрические деформации. . . . 149
7.2 Какова может быть R-матрица? Связь с комплексными структурами. . . . 150
7.2.1 Предел $\eta \to \pm i$. . . . 153
7.2.2 Комплексные структуры на группах Ли . . . 154
7.3 Модель с таргет-пространством $S^1 \times S^3$ . . . 156
7.3.1 Комплексные структуры на $\mathbb{R}^4$ . . . 156
7.3.2 $S^1 \times S^3$ как гипер-эрмитово многообразие . . . 157
7.3.3 Лагранжиан . . . 158
7.4 Модель с таргет-пространством $AdS_3 \times S^3 \times S^1$ . . . 160
7.4.1 Наш выбор R. . . . 162
7.4.2 Бозонная часть деформированного пространства. . . . 162
7.5 m-симметрические пространства . . . 164
7.6 Обсуждение . . . 169

Приложение А: Кэлеровы структуры на пространстве флагов $\mathcal{F}_3$ . . . 172
А.1 Нормальное расслоение к слою проекции $\mathcal{F}_3 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$ . . . 174

Приложение Б: Аспекты η-деформированных и квазилинейных σ-моделей . 176
Б.1 Исключение калибровочных полей из лагранжиана раздела 6.2.2 . . . 176
Б.2 Квазилинейная формулировка при $\kappa > 0$ . . . 178
Б.3 η-деформированная модель главного кирального поля как σ-модель со вспомогательными калибровочными полями . . . 179
Б.3.1 Исключение вспомогательных калибровочных полей . . . 179
Б.3.2 Вывод пары Лакса . . . 181
Б.4 Проверка интегрируемости комплексных структур на $S^1 \times S^3$ . . . 182
Б.5 'Сплющенная'-AdS метрика (а также метрика Гёделя) . . . 183

Заключение . . . 185

Список основных работ автора по теме диссертации **188**

Список литературы **189**

Список иллюстраций **197**

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Диссертация посвящена исследованию сигма-моделей пространств флагов. Такие модели возникают, например, при описании длинноволновых возбуждений спиновых цепочек вблизи анти-ферромагнитного состояния (предел Халдейна). Помимо исследования непрерывных пределов спиновых цепочек, в диссертации предложены сигма-модели пространств флагов, допускающие представление нулевой кривизны. Приводятся аргументы в пользу классической интегрируемости этих моделей.

Предмет исследования по существу находится на стыке между двумя важнейшими разделами теоретической физики – физикой твердого тела (спиновые цепочки) и физикой элементарных частиц (сигма-модели). Теория предела Халдейна устанавливает связь между этими двумя областями и расширяет возможности исследования как спиновых цепочек, так и сигма-моделей. В физике твердого тела обычно рассматриваются цепочки, в которых спины могут принимать значения в произвольном представлении соответствующей алгебры Ли, однако на практике лишь цепочки с наименьшими значениями спинов S оказываются интегрируемыми методами анзаца Бете [61]. Описание при помощи сигма-модели, наоборот, справедливо, строго говоря, в пределе $S \to \infty$. В исходном построении Халдейна, который рассматривал гейзенберговскую цепочку с $SU(2)$-симметрией, в непрерывном пределе возникала сигма-модель пространства S^2, которая, как известно, интегрируема при нулевом значении θ-угла [118]. Таким образом, Халдейн смог воспользоваться известными фактами о данной сигма-модели (например, существованием массовой щели в спектре частиц) для получения информации о неинтегрируемых спиновых цепочках с целыми спинами (целые спины соответствуют нулевому θ-углу). В случае полуцелых спинов в σ-модели возникает θ-угол $\theta = \pi$ – о таких моделях известно значительно меньше, зато при $S = \frac{1}{2}$ спиновая цепочка является интегрируемой, и из точного решения следует, что щель в спектре собственных значений гамильтониана отсутствует. Впоследствии были доказаны даже более сильные утверждения об отсутствии щели для спиновых цепочек с полуцелым спином и невырожденным основным состоянием [89] [18], а также предложены аргументы в пользу конформности и самой сигма-модели с топологическим углом $\theta = \pi$ [104]. Численные вычисления на решетке также подтверждают данную гипотезу [64].

Теория интегрируемых моделей уже долгие годы находится на передовом рубеже исследований как физике, так и в математике. В последние пятнадцать лет развитие данной области получило дополнительный импульс благодаря открытию интегрируемых структур в AdS/CFT-соответствии [90] [35] [92]. В результате серьезных усилий удалось по существу решить так называемую спектральную задачу для $\mathcal{N} = 4$ теории супер-Янга-Миллса в предел большого числа 'цветов', т.е. определить аномальные размерности составных калибровочно-инвариантных операторов теории для произвольных значений константы связи 'т Хоофта. Таких результатов удалось добиться в первую очередь в результате исследования сигма-модели Грина-Шварца пространства $AdS_5 \times S^5$, которая является интегрируемой в силу того, что данное таргет-пространство симметрическое[1]. Между тем, с точки зрения двойственной теории поля переход от максимально суперсимметричной теории к теориям с меньшим количеством симметрий означает, что пространство $AdS_5 \times S^5$ необходимо заменить на другое. В связи с этим естественно исследовать класс однородных пространств, не являющихся симметрическими. В общем случае даже столь незначительное ослабление требований приводит к тому, что интегрируемая структура теряется. Большая часть диссертационной работы посвящена исследованию сигма-моделей, таргет-пространства которых не являются симметрическими, но уравнения движения все же допускают так называемое представление нулевой кривизны, являющееся краеугольным камнем большинства классических интегрируемых моделей. Важнейшим требованием к таргет-пространствам моделей является наличие комплексной структуры. Основные рассматриваемые нами примеры – сигма-модели пространств флагов $\frac{U(N)}{U(n_1)\times\cdots\times U(n_m)}$ ($\sum\limits_i n_i = N$). Большое внимание уделено простейшему нетривиальному частному случаю – пространству $\frac{U(3)}{U(1)^3}$. Данное многообразие имеет вещественную размерность шесть и является допустимым для суперсимметричных компактификаций некоторых моделей теории гетеротических струн, так как допускает киллингов спинор (риманов конус над данным пространством представляет собой сингулярное пространство с голономией G_2).

Цели и задачи

Основная цель диссертации – исследование свойств сигма-моделей пространств флагов в $\mathbb{C}^N$. Как показано в диссертации, данные сигма-модели естественным образом возникают при описании длинноволновых возбуждений спиновых цепочек с группой симметрии $SU(N)$ вблизи анти-ферромагнитного состояния (обобщенный предел Халдейна). Также установлено, что сигма-модели пространств флагов при специальном выборе B-поля допускают представление нулевой кривизны. По всей видимости, это один из простейших примеров сигма-моделей с несимметрическими таргет-пространствами, которые допускают представление нулевой кривизны. В специальном случае явно получены все решения уравнений движения сигма-модели.

Основные задачи диссертации таковы:

[1]Если учесть фермионы, то полное суперпространство не симметрическое, а 'полусимметрическое'. Существует классификация таких пространств, являющихся решением уравнений супергравитации.

- Построение обобщений пределов Халдейна для $SU(N)$ спиновых цепочек. Определение взаимосвязи между (обобщенным) неелевским состоянием спиновой цепочки и таргет-пространством сигма-модели.

- Вычисление метрики и θ-члена на таргет-пространстве сигма-модели, возникающей в результате предела Халдейна.

- Построение сигма-моделей пространств флагов с ненулевым B-полем, уравнения движения которых допускают представление нулевой кривизны.

- Исследование полученных моделей. Установление связи с хорошо известным случаем, когда таргет-пространство симметрическое (грассманиан).

- Изучение вопроса об интегрируемости полученных моделей на простейшем примере. Явное решение уравнений движения в случае, когда мировая поверхность – сфера S^2.

- Установление связи между полученными новыми сигма-моделями и известными ранее интегрируемыми моделями, в частности сигма-моделями с $\mathbb{Z}_m$-градуированными таргет-пространствами и R-матричными деформациями модели главного кирального поля (η-деформация).

Научная новизна

Полученные результаты являются новыми. Перечислим основные из них:

- Показано, что пространство классических анти-ферромагнитных состояний спиновой цепочки (обобщение неелевского упорядочения) является лагранжевым подмногообразием фазового пространства элементарной ячейки.

- Рассматриваемое лагранжево подмногообразие является также пространством, на котором достигает минимума гамильтониан. Оно служит таргет-пространством сигма-модели, описывающей согласно Халдейну низкоэнергетические возбуждения в спиновой цепочке. Получены явные универсальные выражения для метрики и θ-члена данной сигма-модели (см. формулы (3.5.61), (3.6.69)).

- Если спины в узлах цепочки преобразуются по симметрическим представлениям ранга S, то из полученной формулы для θ-члена следует, что периодичность (по S) массовой щели имеет период m, где $m \leqslant N$ – длина элементарной ячейки (в оригинальном случае $SU(2)$-цепочки имеем $N = m = 2$).

- Предложен новый тип сигма-моделей, уравнения движения которых допускают представление нулевой кривизны. Таргет-пространства таких моделей – комплексные однородные многообразия (например, пространства флагов в $\mathbb{C}^N$), а B-поле модели пропорционально кэлеровой форме метрики Киллинга.

- Для случая таргет-пространства $\frac{U(3)}{U(1)^3}$ и мировой поверхности $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$ построены все реше-

ния уравнений движения. Они выражаются через гармонические отображения в $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$.

- Установлены взаимосвязи между предложенными σ-моделями, моделями с $\mathbb{Z}_m$-симметрическими пространствами и так называемыми η-деформированными моделями. С точки зрения теории янг-бакстеровской η-деформации основное наблюдение заключается в том, что комплексные структуры на таргет-пространстве представляют собой естественный класс решений классического модифицированного уравнения Янга-Бакстера, а само это уравнение является условием обращения в нуль тензора Нийенхейса комплексной структуры.

С момента написания работ, которые легли в основу диссертации, некоторые из полученных в них результатов получили независимое подтверждение и дальнейшее развитие. Так в работе [87] построены предела Халдейна $SU(3)$ спиновых цепочек, и результаты находятся в полном соответствии с результатами, полученными нами ранее [47][49]. В работе [24] в продолжение наших результатов о сигма-моделях с ненулевым B-полем [44] построены некоторые новые классические решения уравнений движения сигма-модели пространства флагов без B-поля.

Теоретическая и практическая значимость работы

Построенная в диссертации теория дает полное математическое описание пределов Халдейна. Данную теорию можно использовать для построения спиновых цепочек, непрерывные пределы которых описываются сигма-моделями с различными таргет-пространствами, метриками и B-полями. Халдейновская щель в спектре таких цепочек наблюдается в том числе в экспериментах по рассеянию нейтронов на анизотропных (эффективно одномерных) кристаллах [40] [81]. В будущем халдейновская фаза будет также реализована при помощи цепочек атомов, находящихся в узлах так называемых оптических решеток [65].

Описание пространства флагов как лагранжева подмногообразия в произведении грассманианов представляет интерес и как независимый математический факт: в частности, его удобно использовать для описания когомологий пространств флагов (данный факт нашел отражение в Главе 1). Кроме того, формула (3.5.61), дающая выражение для метрики на таргет-пространстве обобщенной халдейновской сигма-модели, является по существу универсальной формулой для метрики на лагранжевом подмногообразии, на котором достигает минимума некоторая функция, заданная на фазовом пространстве.

Предложенные в диссертации новые интегрируемые сигма-модели или их потенциальные обобщения могут найти применение в рамках AdS/CFT соответствия, а также, возможно, в описании моделей теории суперструн с компактифицированными дополнительными измерениями (как уже говорилось, например, пространство флагов $\frac{U(3)}{U(1)^3}$ является допустимым многообразием для суперсимметричных компактификаций). Данные модели, несомненно, представляют интерес для специалистов, занимающихся теоретическими и математическими вопросами теории интегрируемых моделей. Ввиду связи предложенных моделей с

топологическими теориями [113] было бы интересно также исследовать возможность существования дополнительных интегрируемых структур в этих топологических теориях (например, известна связь между теорией инвариантов Громова-Виттена пространств флагов и квантово-механическими цепочками Тоды [69]).

Методология и методы исследования

При исследовании пределов Халдейна спиновых цепочек используются методы теории геометрического квантования (когерентные состояния, теорема Бореля-Ботта-Вейля), методы симплектической, дифференциальной и алгебраической геометрии. В Главе 1 приведен весьма полный обзор используемых методов, при этом акцент сделан на естественном возникновении пространств флагов в теории представлений унитарной группы как пространств когерентных состояний. Построение теории представлений во многом сводится к описанию 'квантованных' симплектических форм на данных многообразиях, а само 'квантование' является естественным в рамках подхода, основанного на континуальном интеграле.

Ключевое наблюдение, обеспечившее возможность обобщения предела Халдейна на $SU(N)$-случай, связано с математическим описанием классического анти-ферромагнитного (неелевского) упорядочения в спиновой цепочке: показано, что классическая конфигурация соответствует лагранжеву подмногообразию в фазовом пространстве одной элементарной ячейки (в простейшем случае конфигурация из двух противоположно-направленных спинов в соседних узлах соответствует лагранжеву вложению $S^2 \hookrightarrow S^2 \times S^2$).

При изучении сигма-моделей пространств флагов с B-полем, пропорциональным кэлеровой форме, использовались методы теории интегрируемых моделей (представления нулевой кривизны, преобразования Бэклунда, классическая R-матрица), элементы дифференциальной геометрии (симметрические и $\mathbb{Z}_m$-градуированные пространства, эйнштейновы метрики, твисторные пространства, голоморфные кривые). При построении квазилинейной формулировки сигма-моделей использовались некоторые элементы теории 'колчанных многообразий'.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Построение непрерывного предела Халдейна для спиновых цепочек с группой симметрии $SU(N)$. Получены универсальные выражения для метрики и θ-члена результирующей двумерной сигма-модели, таргет-пространством которой является пространство флагов $\frac{U(N)}{U(n_1)\times\cdots\times U(n_m)}$ ($\sum\limits_i n_i = N$). Показано, что $\bmod 2$-периодичность (по спину S) массовой щели, имевшая место в рассмотренном Халдейном простейшем случае, обобщается до $\bmod m$-периодичности.

2. Предложены двумерные сигма-модели пространств флагов, уравнения движения ко-

торых допускают представление нулевой кривизны. В случае, когда рассматриваемое пространство флагов – грассманиан, т.е. симметрическое пространство, построенное семейство плоских связностей калибровочно-эквивалентно стандартному, однако в общем случае является новым. Ключевым элементом предложенных моделей является ненулевое B-поле, пропорциональное кэлеровой форме на таргет-пространстве, которая в общем случае незамкнута.

3. Для сигма-модели с таргет-пространством $\mathcal{F}_3 = \frac{U(3)}{U(1)^3}$ и мировой поверхности $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$ при помощи преобразований Бэклунда получены *все* решения уравнений движения. Их проще всего описать, используя тот факт, что $\mathcal{F}_3$ – твисторное пространство для проективной плоскости $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$, т.е. существует расслоение $\mathcal{F}_3 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$ со слоем $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Решения уравнений движения рассматриваемой сигма-модели можно выразить через гармонические отображения в базу $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ и голоморфные отображения в слой $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$.

4. Построена квазилинейная формулировка (gauged linear σ-model) для предложенных σ-моделей пространств флагов. Данная конструкция опирается на тот факт, что пространство флагов – пример так называемого 'колчанного многообразия', допускающего представление в виде кэлерова фактора плоского пространства.

5. Обнаружены взаимосвязи между предложенными сигма-моделями с комплексными однородными таргет-пространствами и η-деформированными моделями, а также моделями с $\mathbb{Z}_m$-градуированными таргет-пространствами. Показано, что так называемое модифицированное классическое уравнение Янга-Бакстера в некоторых случаях можно интерпретировать как обращение в нуль тензора Нийенхейса, т.е. как условие интегрируемости комплексной структуры на таргет-пространстве σ-модели.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты представлялись соискателем на отечественных и международных конференциях и семинарах, в частности на семинаре отдела квантовой теории поля ИТФ им. Л.Д.Ландау (г. Черноголовка), семинаре лаборатории математических проблем физики ПОМИ РАН (г. Санкт-Петербург), семинаре по теоретической физике Тринити Колледжа (г.Дублин, Ирландия), семинаре по физике конденсированного состояния Университета Радбуд (г.Неймеген, Голландия), семинаре Института Нордита (г.Стокгольм, Швеция), семинаре Университета Людвига-Максимилиана (г.Мюнхен, Германия), совместном семинаре по теоретической физике университетов Боазичи и Мимар-Синан (г.Стамбул, Турция), семинаре Высшей Нормальной Школы (г. Лион, Франция), семинаре по математической физике Института Теоретической Физики (г. Сакле, Франция), семинаре по теоретической физике Университета Уппсалы (г. Уппсала, Швеция), семинаре Института Теоретической Физики Университета Сан Паулу (г. Сан Паулу, Бразилия), а также неоднократно докладывались на семинарах МИАН.

Содержание диссертации

Диссертационная работа посвящена исследованию спиновых цепочек и двумерных сигма-моделей специального вида, а также взаимосвязей между ними. Спиновые цепочки и сигма-модели – два колосса двумерной физики. Оба предмета имеют долгую и богатую историю. По определению спиновые цепочки – конечномерные объекты, и, следовательно, связанные с ними вопросы зачастую формулируются проще, и во многих случаях ответы на них могут быть получены с помощью численного моделирования. Сигма-модели – примеры взаимодействующих теорий поля и обладают всеми недостатками последних. В общем случае их можно определить лишь в рамках теории возмущений. Более того, в каждом порядке возникают бесконечности, которые должны быть устранены при помощи перенормировки, и в общем случае неизвестно, можно ли придать физический смысл расходящемуся ряду теории возмущений. Некоторые из этих трудностей удается преодолеть в случае интегрируемых моделей двумерной квантовой теории поля [1][118]. Заметим, что сигма-моделям уделено внимание во многих учебниках и монографиях по квантовой теории поля (см., например, [97], [120], [110]); имеются даже книги, посвященные преимущественно нелинейным сигма-моделям [11] [82]. С данной тематикой тесно связано также целое направление исследований, получившее название теории "нелинейных реализаций", целью которого является построение эффективных низкоэнергетических лагранжианов, описывающих фазы теорий с нарушенной симметрией. Рассматриваемая симметрия может быть как "зарядовой" (или "внутренней"), так и симметрией пространства-времени, см. обзор [78].

Естественными регуляторами, сохраняющими симметрии теории поля, могут служить спиновые цепочки, непрерывные пределы которых приводят к двумерным сигма-моделям. (Один из важных примеров такого подхода можно найти в [62].) Для любой данной спиновой цепочки могут существовать неэквивалентные непрерывные пределы, и получающиеся в результате модели будут существенно отличаться. Например, в наиболее стандартном случае $SU(2)$ спиновой цепочки с взаимодействиями вида $\vec{S}_i\vec{S}_{i+1}$ длинноволновые флуктуации над ферромагнитным вакуумом описываются моделью так называемого ферромагнетика Гейзенберга, распространение магнонов в которой подчиняется квадратичному (нерелятивистскому) закону дисперсии. Важный результат Халдейна состоит в том, что непрерывный предел около *антиферромагнитной* конфигурации дает *релятивистскую* сигма-модель. При этом таргет-пространством является сфера S^2 (с "тета-углом" $\theta = \pi m$, где m – положительное целое число, характеризующее представление, по которому преобразуется спин S в каждом узле спиновой цепочки: $S = \frac{m}{2}$). Принципиальное свойство сигма-моделей подобного вида с нулевым θ-углом (в данном случае это соответствует случаю четного m, или целому спину S), что для них неприменимо 'приближение среднего поля', так как возникающие в данном приближении голдстоуновские бозоны приводят в двумерном пространстве к появлению инфракрасных расходимостей (это подробно объяснено в обзоре [17] и в книге [32]). Физическая причина появления данных расходимостей состоит в том, что на самом деле спектр элементарных возбуждений является массивным – массовая 'щель' возникает в результате размер-

ной трансмутации. Более того, из ставших классическими работ братьев Замолодчиковых и других известно, что S^2-модель является типичным примером интегрируемой теории, в которой точно известна матрица рассеяния этих массивных частиц [118].

Интерес к спиновым цепочкам и сигма-моделям (а в особенности к взаимосвязи между ними) сильно возрос после появления AdS/CFT соответствия (см. обзоры [27][34]). Один из примеров AdS/CFT соответствия – двойственность (взаимно-однозначное соответствие) между суперсимметричной конформной теорией поля в трехмерном пространстве-времени и струнной сигма-моделью с таргет-пространством $AdS_4 \times \mathbf{C}\mathrm{P}^3$ [20] (Алгебра симметрии данной сигма-модели в калибровке светового конуса исследовалась в нашей работе [3]). В рамках описания аномальных размерностей 'длинных' операторов с большим лоренцевым спином в трехмерной теории естественным образом возникает двумерная сигма-модель пространства $\mathbf{C}\mathrm{P}^3$ (его тоже можно считать простейшим пространством флагов) с дополнительными фермионными степенями свободы [50]. При изучении $\mathcal{N} = 1$ суперконформных теорий в четырехмерном пространстве при помощи методов AdS/CFT соответствия также естественным образом возникают сигма-модели однородных пространств и пространств, близких к однородным [4].

Непрерывный предел Халдейна

В первой части диссертации мы исследуем непрерывный предел вблизи антиферромагнитного основного состояния для спиновых цепочек с группой симметрии $SU(N)$. Это обобщение на случай групп старшего ранга конструкции, исследованной ранее Халдейном [74] для группы $SU(2)$. Данное описание, строго говоря, справедливо в квазиклассическом пределе, когда спины в каждом узле спиновой цепочки преобразуются по представлению вида

$$V_S := \mathrm{Sym}(V^{\otimes S}), \qquad S \to \infty, \tag{0.0.1}$$

где V – фундаментальное представление кососимметрических тензоров произвольного ранга. Как и в теоретико-полевых моделях, для анализа квазиклассического предела удобно использовать представление в виде континуального интеграла. Однако задача построения континуального интеграла для спиновой цепочки не является тривиальной и с математической точки зрения приводит к теории геометрического квантования (этому во многом посвящена первая глава диссертации). Действительно, рассмотрим орбиту вектора старшего веса $|v\rangle$ в проективизации (пока произвольного) представления W:

$$g|v\rangle \in \mathrm{P}(W), \qquad g \in SU(N) \tag{0.0.2}$$

Точки этой орбиты – когерентные состояния данного представления, а вся орбита, согласно теореме Костанта-Стернберга, является кэлеровым (однородным) многообразием. В случае группы $SU(N)$ это многообразие – пространство комплексных флагов в $\mathbb{C}^N$, т.е. многообразие

вложенных друг в друга линейных подпространств

$$\mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m} = \{0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{m-1} \subset V_m = \mathbb{C}^N\}, \tag{0.0.3}$$

где $\dim V_i = d_i$. Обозначим $\dim V_i/V_{i-1} = n_i$. Тогда можно представить пространство флагов в форме фактор-пространства унитарной группы:

$$\mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m} = \frac{U(N)}{U(n_1) \times \ldots \times U(n_m)}, \quad \sum_{i=1}^{m} n_i = N\,. \tag{0.0.4}$$

Данная параметризация естественным образом связана с выбором евклидовой метрики в $\mathbb{C}^N$.

Пространство флагов – пространство когерентных состояний – является классическим фазовым пространством спина, преобразующегося по представлению W. Одно из основных утверждений теории геометрического квантования (теорема Бореля-Ботта-Вейля) состоит в том, что само представление W можно реализовать в пространстве голоморфных сечений $H^0(\mathcal{L})$ некоторого линейного расслоения $\mathcal{L}$ над $\mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m}$. И пространство флагов, и линейное расслоение над ним можно определить, например, из диаграммы Юнга данного представления.

Пусть $f : [0,1] \to \mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m}$ – траектория спина в фазовом пространстве. Классическое действие спина, находящегося в одном из узлов спиновой цепочки и преобразующегося по представлению W, можно записать в виде

$$\mathcal{S} = \int f^*\theta - \int dt\, \mathcal{H}, \tag{0.0.5}$$

где $\mathcal{H}$ – гамильтониан, а θ определяется из условия

$$d\theta = c_1(\mathcal{L})\,. \tag{0.0.6}$$

Данное построение легко обобщить на случай системы нескольких спинов, например, на спиновую цепочку. Рассмотрим простейшую ситуацию, когда в каждом узле находится спин в представлении, являющемся $\widetilde{m}$-й симметрической степенью N-мерного векторного представления $SU(N)$. В качестве гамильтониана возьмем гейзенберговский гамильтониан $\mathcal{H} = \sum\limits_i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}$. В результате континуальный интеграл, описывающий статистический оператор спиновой цепочки, имеет вид

$$\mathrm{tr}\,(e^{-\beta\mathcal{H}}) = \int \prod_{i,\, t\in[0,1]} d\mu(z_i(t), \bar{z}_i(t))\ \exp(-\mathcal{S}),\ \text{где} \tag{0.0.7}$$

$$z_i \in \mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1} \quad \text{и} \quad \mathcal{S} = \widetilde{m} \int_0^1 dt \sum_i \left(i\frac{\dot{z}_i \circ \bar{z}_i}{z_i \circ \bar{z}_i} + \beta \frac{z_i \circ \bar{z}_{i+1}}{z_i \circ \bar{z}_i} \frac{z_{i+1} \circ \bar{z}_i}{z_{i+1} \circ \bar{z}_{i+1}} \right) \tag{0.0.8}$$

Для построения непрерывного предела необходимо сначала определить классическое основ-

ное состояние. В нашей работе мы рассматриваем спиновые цепочки, обладающие ферромагнитным либо антиферромагнитным основным состоянием. Ферромагнитное состояние соответствует условию $z_{i+1} = z_i$. Непрерывный предел вблизи такой конфигурации дает действие магнетика Гейзенберга

$$\mathcal{S} = \widetilde{m} \int\limits_0^1 dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx \left[\mathrm{i} \, \frac{\dot{z}(t,x) \circ \bar{z}(t,x)}{1 + z(t,x) \circ \bar{z}(t,x)} - \left(\frac{\partial_x z \circ \partial_x \bar{z}}{1 + z \circ \bar{z}} - \frac{(z \circ \partial_x \bar{z})(\partial_x z \circ \bar{z})}{(1 + z \circ \bar{z})^2} \right) \right] \tag{0.0.9}$$

В простейшем случае группы $SU(2)$ таргет-пространство $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \simeq S^2$ можно параметризовать при помощи единичного вектор $\vec{n}$. Тогда уравнения движения, следующие из данного действия, принимают вид

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = \vec{n} \times \frac{\partial^2 \vec{n}}{\partial x^2}. \tag{0.0.10}$$

Чтобы получить анти-ферромагнитное основное состояние, можно рассмотреть спиновую цепочку с чередующимися фундаментальным/анти-фундаментальным представлениями в соседних узлах. Тогда анти-ферромагнитная конфигурация соответствует условию $z_{i+1} = \bar{z}_i$ (Данное условие $SU(N)$-инвариантно). Построение непрерывного предела вблизи данной конфигурации заметно отличается от ферромагнитного случая из-за того, что формально в конфигурации $z_{i+1} = \bar{z}_i$ кинетический член в действии (0.0.8) оказывается полной производной (т.е. сводится к граничному члену либо вообще равен нулю в случае периодических траекторий). Математически причина этого заключается в следующем. Так как элементарная ячейка в данном случае состоит из двух узлов, фазовое пространство элементарной ячейки – это $\mathbf{C}\mathrm{P}^N \times \mathbf{C}\mathrm{P}^N$. Условие антиферромагнитного состояния задает вложение

$$\mathbf{C}\mathrm{P}^N \hookrightarrow \mathbf{C}\mathrm{P}^N \times \mathbf{C}\mathrm{P}^N \,, \tag{0.0.11}$$

которое является лагранжевым относительно естественной симплектической формы на $\mathbf{C}\mathrm{P}^N \times \mathbf{C}\mathrm{P}^N$ (сумме двух форм Фубини-Штуди). Данное наблюдение является ключевым для дальнейших построений.

Для упомянутой гейзенберговской цепочки с чередующимися представлениями 'антиферро-магнитный' непрерывный предел был построен Аффлеком [17]: в результате возникает *релятивистская* сигма-модель пространства $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ с топологическим членом $\theta = \pi \, \widetilde{m}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \widetilde{m} \int\limits_0^1 dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx \, \Big[& \frac{1}{2} \partial_\mu z(x,t) \circ \Pi(z,\bar{z}) \circ \partial_\mu \bar{z}(x,t) - \\ & - \frac{\mathrm{i}}{2} \epsilon_{\mu\nu} \, \partial_\mu z(x,t) \circ \Pi(z,\bar{z}) \circ \partial_\nu \bar{z}(x,t) \Big] , \end{aligned} \tag{0.0.12}$$

где $\Pi = \mathbb{1} - \bar{z} \otimes z$ – проектор на плоскость, ортогональную вектору z (здесь мы полагаем $|z|^2 = 1$). В случае группы симметрии $SU(2)$ (т.е. когда $N = 2$) данная сигма-модель была впервые получена из гейзенберговской цепочки Халдейном (в этом специальном случае, так

как фундаментальное и сопряженное ему представления эквивалентны, цепочка с чередующимися представлениями эквивалентна цепочке с одинаковыми представлениями на всех узлах).

В наших работах [47; 49] мы обобщили описанное построение и показали, что существуют спиновые цепочки, непрерывные пределы которых дают сигма-модели произвольных пространств флагов (0.0.4). Взаимодействия в таких цепочках имеют радиус $m-1$, где m – число множителей в знаменателе фактор-пространства (0.0.4). Гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{m-1} d_k \, \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+k}, \qquad d_k = \sqrt{\frac{m-k}{k}} \tag{0.0.13}$$

В данной формуле $\vec{S}_i$ – генераторы представления алгебры $\mathfrak{su}_N$, соответствующего i-му узлу цепочки. Представления спинов, находящихся в m следующих друг за другом узлах, соответствуют диаграммам Юнга, состоящим из столбцов высоты $n_1, \cdots, n_m$, а перестановка этих узлов дает σ-модель с тем же таргет-пространством, но с другой метрикой и θ-членом.

Классическое фазовое пространство элементарной ячейки данной спиновой цепочки представляет собой произведение грассманианов

$$G_{n_1} \times \cdots \times G_{n_m} \,. \tag{0.0.14}$$

Так как симплектическая форма на данном многообразии инвариантна относительно действия $SU(N)$, можно построить соответствующее отображение моментов $\mu \in \mathfrak{su}_N$. Особенность рассматриваемой цепочки, которая принципиальна для нашего построения, состоит в том, что подмногообразие минимумов L гамильтониана является геометрическим местом точек, в которых обращается в нуль матрица отображений момента. Более того, эти точки лежат на одной орбите группы $SU(N)$, т.е.

$$L \simeq \mu^{-1}(0) \simeq \frac{SU(N)}{H} \,. \tag{0.0.15}$$

Можно показать, что в этом случае многообразие L лагранжево (обобщение вложения (0.0.11)). Более того, это многообразие является в точности таргет-пространством результирующей сигма-модели. Лагранжиан сигма-модели можно охарактеризовать в достаточно общих терминах. Оказывается, что метрика на L может быть описана следующей универсальной формулой:

$$g_{ij} = \omega_{im} \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2} \right)^{-1} \right]^{mn} \cdot \omega_{nj} = \omega_{im} \, h^{mn} \, \omega_{nj} \,. \tag{0.0.16}$$

Здесь ω – симплектическая форма объемлющего пространства (0.0.14), а $\mathcal{H}$ – функция, играющая роль классического гамильтониана спиновой цепочки. Заметим, что гамильтониан инвариантен относительно $SU(N)$, в связи с чем гессиан $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2}$ вырожден в направлениях вдоль

L. Чтобы показать, что метрика корректно определена, обозначим $u_i = \omega_{ij}\,\tilde{u}^j,\ v_i = \omega_{ij}\,\tilde{v}^j$, где векторы $\tilde{u}, \tilde{v}$ касательны к L. Тогда ввиду того, что v ортогонален ядру $\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial x^2}$ (т.к. L лагранжево), можно определить вектор $\left(\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial x^2}\right)^{-1}|v\rangle$. Этот вектор определен с точностью до слагаемых, лежащих в $\ker B$. Однако эти слагаемые не дают вклад в матричный элемент $\langle u|\left(\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial x^2}\right)^{-1}|v\rangle$ опять же в силу того, что L лагранжево, что доказывает утверждение.

Топологический член сигма-модели дается следующей формулой:

$$\Omega = \frac{\widetilde{m}}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} k\,\cdot\, r_k\right), \tag{0.0.17}$$

где $r_k = i^*\big(c_1(E_{n_k})\big)$ – ограничение первого класса Черна тавтологического расслоения ранга n_k над грассманианом (i – вложение $L \hookrightarrow G_{n_1}\times\cdots\times G_{n_m}$.). Заметим, что формы r_k удовлетворяют единственному условию

$$\sum_{k=1}^{m} r_k = 0\,, \tag{0.0.18}$$

вследствие чего топологический член инвариантен относительно сдвига $k \to k+1$. Это является отражением того факта, что то, как именно спиновая цепочка разделена на элементарные ячейки, несущественно.

В оригинальной работе Халдейна была выдвинута гипотеза (впоследствии проверенная экспериментально и численно) о зависимости массовой щели спиновой цепочки от топологического члена сигма-модели. Так как топологический член (0.0.17) входит под знак континуального интеграла в комбинации $e^{2\pi\, i\int\Omega}$, которая, согласно (0.0.17), периодична по $\widetilde{m}$ с периодом m, естественным образом следует гипотеза о периодичности массовой щели спиновой цепочки с периодом $m \leqslant N$. Другое интересное следствие (0.0.17) заключается в том, что простая перестановка узлов спиновой цепочки приводит к новому θ-члену. Это дает способ реализовать при помощи спиновых цепочек различные элементы группы когомологий $\mathrm{H}^2(L, \mathbf{Z}_m)$.

Сигма-модели, допускающие представление нулевой кривизны

Во второй части диссертации мы переходим к исследованию σ-моделей пространств флагов (а также некоторых более общих моделей), уравнения движения которых допускает представление нулевой кривизны. Данные сигма-модели являются обобщениями моделей, которые были рассмотрены в первой части диссертации. Напомним, что с математической точки зрения σ-модель – это теория поля, связанная с отображением $X : \Sigma \to \mathcal{M}$ мирового листа Σ в таргет-пространство $\mathcal{M}$. На таргет-пространство $\mathcal{M}$

мы наложим следующие требования[2]:

- $\mathcal{M}$ – однородное пространство G/H, G полупроста и компактна
- $\mathcal{M}$ обладает интегрируемой G-инвариантной комплексной структурой $\mathbb{I}$
- Киллингова метрика $\mathbb{G}$ на $\mathcal{M}$ эрмитова относительно $\mathbb{I}$

Для таргет-пространств с такими свойствами можно построить σ-модель, уравнения движения которой представимы в виде условия нулевой кривизны однопараметрического семейства связностей $A_u, u \in \mathbb{C}^*$. Данное наблюдение представляет собой распространение на более широкий класс таргет-пространств известного важного свойства σ-моделей симметрических пространств [60][96]. Существование представления нулевой кривизны является, как правило, важным признаком того, что модель интегрируемая: например, его можно использовать для нахождения преобразований Бэклунда [108][58], и оно является отправной точкой для построения решений классических уравнений движения модели при помощи так называемой спектральной кривой [75].

Комплексные односвязные однородные многообразия G/H полупростой группы G классифицированы [109]. Эта классификация сводится к следующей теореме: любое такое многообразие G/H соответствует подгруппе H, полупростая часть которой совпадает с полупростой частью централизатора торической подгруппы G. В случае $G = SU(N)$, например, инвариантные комплексные структуры существуют на тех из многообразий

$$\mathcal{M}_{n_1,\ldots,n_m|N} = \frac{SU(N)}{S(U(n_1)\times\ldots\times U(n_m))}, \qquad m \geqslant 0,\ \ n_i > 0,\ \ \sum_{i=1}^{m} n_i \leqslant N\,, \tag{0.0.19}$$

размерность которых четна. Если $\sum_{i=1}^{m} n_i = N$, то многообразие (0.0.19) – пространство флагов (В качестве обзоров, посвященных пространствам флагов, можно порекомендовать [22][28][38]). В остальных случаях это торическое расслоение над пространством флагов. Слой $U(1)^{2s}$ ($2s = N - \sum_{i=1}^{m} n_i$) имеет четную размерность, так как само пространство флагов также всегда имеет четную размерность.

Если отказаться от требования односвязности пространства G/H и полупростоты группы G, то будут также другие примеры, скажем $S^1 \times S^3 = U(2)$. Последнее многообразие является даже гиперкомплексным, т.е. на нем имеется непрерывное семейство инвариантных комплексных структур (такие многообразия были изучены и классифицированы в работах [79] и [105]). В этом случае вместо киллинговой метрики можно взять метрику $\widehat{\mathbb{G}}_{ij} := \mathrm{tr}\,(T_i T_j)$, где T_i – генераторы алгебры $\mathfrak{g}$ в представлении, подобранном таким образом, чтобы метрика $\widehat{\mathbb{G}}$ была невырожденной и эрмитовой относительно комплексной структуры $\mathbb{I}$.

Модели, которые исследуются в диссертационной работе, определены следующим дей-

[2]Обобщения на случай групп G, не являющихся полупростыми, также возможны.

ствием:

$$\mathcal{S}[\mathbb{G},\mathbb{I}] := \int_\Sigma d^2z\,\|\partial X\|^2_{\mathbb{G}} + \int_\Sigma X^*\omega, \tag{0.0.20}$$

где ω – кэлерова форма, отвечающая паре $(\mathbb{G},\mathbb{I})$, и определенная стандартной формулой

$$\omega = \mathbb{G}\circ\mathbb{I}\,. \tag{0.0.21}$$

В общем случае киллингова метрика $\mathbb{G}$ не кэлерова, и кэлерова форма не замкнута: $d\omega \neq 0$. Это вполне может иметь место, даже если многообразие $\mathcal{M}$ допускает кэлерову метрику – эта метрика, вообще говоря, отлична от $\mathbb{G}$. Пример такого явления доставляет пространство флагов $\frac{SU(3)}{S(U(1)^3)}$. σ-модель с действием (0.0.20) для случая пространства флагов подробно исследована в наших работах [44; 48].

Главная особенность моделей (0.0.20) заключается в том, что нетеровский ток K, следующий из $SU(N)$-инвариантности лагранжиана, оказывается плоским:

$$d*K = 0, \qquad dK - K\wedge K = 0\,. \tag{0.0.22}$$

Однопараметрическое семейство связностей может быть построено по формуле Полмейера:

$$A_u = \frac{1-u}{2}\,K_z\,dz + \frac{1-u^{-1}}{2}\,K_{\bar z}\,d\bar z\,. \tag{0.0.23}$$

Из (0.0.22) следует, что эти связности плоские:

$$dA_u - A_u\wedge A_u = 0 \quad \text{для всех} \quad u\in\mathbb{C}^*\,. \tag{0.0.24}$$

Интересно рассмотреть частный случай модели с действием (0.0.20), когда таргет-пространство симметрическое – грассманиан $\frac{U(N)}{U(n)\times U(N-n)}$. Грассманианы – кэлеровы многообразия, и инвариантная метрика на них по существу единственна (с точностью до растяжения) – отсюда следует, что форма ω замкнута: $d\omega = 0$. В результате второй член в действии (0.0.20) оказывается топологическим и не дает вклад в уравнения движения. Он, однако, дает вклад в нетеровский ток K. В силу того что пространство симметрическое, ток $\tilde K$, построенный по действию без топологического члена, также плоский:

$$\tilde K = -\widehat g^{-1}d\widehat g, \quad \text{где} \quad \widehat g = \sigma(g)g^{-1}\,. \tag{0.0.25}$$

Здесь σ – картановская инволюция на группе Ли G. По определению σ – групповой гомоморфизм, т.е. $\sigma(g_1g_2) = \sigma(g_1)\sigma(g_2)$, причем $\sigma(h) = h$ при $h\in H$. Формулу $\widehat g = \sigma(g)g^{-1}$ можно рассматривать как отображение $g\in G/H \to \widehat g\in G$ – она задает картановское вложение

$$G/H \hookrightarrow G\,. \tag{0.0.26}$$

Следовательно, в данной модели имеются два семейства плоских связностей: A_u и $\tilde A_\lambda$ =

$\frac{1-\lambda}{2}\,\tilde{K}_z\,dz + \frac{1-\lambda^{-1}}{2}\,\tilde{K}_{\bar{z}}\,d\bar{z}$. В диссертации показано, что они калибровочно-эквивалентны, если спектральные параметры связаны формулой

$$\lambda = u^{1/2}\,. \tag{0.0.27}$$

Калибровочное преобразование Ω, связывающее A_u и $\tilde{A}_\lambda$,

$$\tilde{A}_\lambda = \Omega A_u \Omega^{-1} - \Omega d\Omega^{-1}, \tag{0.0.28}$$

можно выписать явно. Будем считать, что комплексная структура на грассманиане выбрана так, что разбиение касательного пространства $\mathfrak{m}$ (предполагается стандартное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}$ алгебры Ли группы изометрий однородного пространства $\frac{G}{H}$) на голоморфное/антиголоморфное пространства имеет вид $\mathfrak{m} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathfrak{m}_+ \\ \mathfrak{m}_- & 0 \end{smallmatrix}\right)$, тогда

$$\Omega = g\Lambda g^{-1}, \quad \text{где} \quad \Lambda \sim \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda^{-1/2},\dots,\lambda^{-1/2}}_{n},\underbrace{\lambda^{1/2},\dots,\lambda^{1/2}}_{N-n}) \tag{0.0.29}$$

(Множитель пропорциональности несуществен.) В терминах 'динамических' проекторов Π_{n_1}, Π_{n_2} на подпространства пространства $\mathbb{C}^{n_1+n_2}$ соответствующей размерности Ω можно записать как

$$\Omega \sim \lambda^{-1/2}\,\Pi_{n_1} + \lambda^{1/2}\,\Pi_{n_2}\,. \tag{0.0.30}$$

Решения уравнений движения в случае, когда $\mathcal{M} = \frac{U(3)}{U(1)^3}$ и $\Sigma = \mathbf{C}\mathrm{P}^1$

Одна из глав диссертации посвящена явному решению уравнений движения в простейшем нетривиальном случае, когда таргет-пространство сигма-модели – пространство флагов $\frac{U(3)}{U(1)^3}$ (несимметрическое пространство), а мировая поверхность – сфера $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$ [44]. Заметим, что явные решения уравнений движения сигма-моделей зачастую бывают полезны в приложениях, например, с точки зрения AdS/CFT-соответствия площади минимальных поверхностей в пространствах $AdS_5\times S^5$ и подобных им связаны со средними значениями операторов Вильсона в двойственных калибровочных теориях [91] (Проверке данной гипотезы посвящено множество публикаций, в частности наша работа [43]).

Пространство флагов может быть параметризовано при помощи трех ортонормированных векторов u_i ($u_i\circ\bar{u}_j = \delta_{ij}$), определенных по модулю фазовых преобразований $u_k \to e^{i\alpha_k}\,u_k$. Введем токи

$$J_{mn} := u_m \circ d\bar{u}_n\,, \qquad m,n = 1,2,3. \tag{0.0.31}$$

Внедиагональные токи $\{J_{mn},\ m\neq n\}$ образуют тетраду (они определены с точностью до фазовых множителей).

Действие модели можно записать в виде

$$\mathcal{S}_{\mathcal{Q}} = \int\limits_{\Sigma} \frac{i}{2}\, dz \wedge d\bar{z}\, \left(\left|(J_{12})_{\bar{z}}\right|^2 + \left|(J_{23})_{\bar{z}}\right|^2 + \left|(J_{13})_{\bar{z}}\right|^2 \right) \tag{0.0.32}$$

Из него следуют уравнения движения

$$\mathscr{D}_z (J_{12})_{\bar{z}} = 0, \qquad \mathscr{D}_z (J_{31})_{\bar{z}} = 0, \qquad \mathscr{D}_z (J_{23})_{\bar{z}} = 0 \tag{0.0.33}$$

а также комплексно сопряженные им. Здесь $\mathscr{D}$ – $U(1)^3$-ковариантная производная, действующая по следующему правилу: $\mathscr{D} J_{mn} := dJ_{mn} + (J_{mm} - J_{nn}) \wedge J_{mn}$. Из уравнений (0.0.33) легко вывести закон сохранения

$$\partial_z \left((J_{12})_{\bar{z}} (J_{23})_{\bar{z}} (J_{31})_{\bar{z}} \right) = 0 \tag{0.0.34}$$

Заметим, что выражение в скобках представляет собой сечение куба канонического расслоения K над $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$, и из закона сохранения следует, что эта величина анти-голоморфна. Однако в силу того что $H^0(K^3, \mathbf{C}\mathrm{P}^1) = 0$, такие сечения с необходимостью равны нулю. Предположим, что

$$(J_{31})_{\bar{z}} = 0, \tag{0.0.35}$$

Тогда из оставшихся уравнений следует, что $u_2(z, \bar{z})$ – гармоническое отображение в $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$. Хорошо известно, как устроены гармонические отображения $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$. Замечательный факт состоит в том, что если задано одно такое отображение $u_2(z, \bar{z})$, его ковариантные производные (ассоциированные отображения) $D_{\bar{z}} u_2(z, \bar{z})$ и $D_z u_2(z, \bar{z})$ тоже являются гармоническими. Кроме того, если $u_2(z, \bar{z})$ не является ни голоморфным, ни (анти)-голоморфным, то ассоциированные отображения являются соответственно голоморфным и анти-голоморфным. Более того, из уравнений движения $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$-модели следует, что оператор $D_{\bar{z}}$ является по существу обратным к D_z. В результате можно утверждать, что все гармонические отображения $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$ строятся из голоморфных одно- или двукратным применением оператора ковариантной производной (это ставший классическим результат Дина и Закржевского [59]).

Чтобы превратить гармоническое отображение

$$v = u_2 : \mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2 \tag{0.0.36}$$

в решение уравнений движения нашей модели, мы должны показать, что его можно поднять до отображения в пространство флагов, удовлетворяющее оставшемуся уравнению (0.0.35): $(J_{31})_{\bar{z}} = u_3 \circ \partial_{\bar{z}} \bar{u}_1 = 0$, где u_1 и u_3 ортогональны друг другу и u_2. В предположении, что u_2 – отображение общего положения, можно доказать, что $D_z u_2$ и $D_{\bar{z}} u_2$ ортогональны друг другу

и искать u_1 и u_3 в виде

$$u_1 = a\, D_z u_2 + b\, D_{\bar{z}} u_2, \tag{0.0.37}$$

$$u_3 = c\, D_z u_2 + d\, D_{\bar{z}} u_2 \tag{0.0.38}$$

Из оставшегося уравнения движения следует, что в общем случае

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda(z,\bar{z}) \begin{pmatrix} f(z)\cdot \|D_{\bar{z}} u_2\|^2 \\ g(z) \end{pmatrix}, \tag{0.0.39}$$

где $(f(z) : g(z)) \in \mathbf{C}\mathrm{P}^1$ – две голоморфные функции. Оставшиеся неизвестные, такие как λ, a, b, можно теперь найти из условий нормировки $\bar{u}_1 \circ u_1 = \bar{u_3} \circ u_3 = 1$. Поэтому поднятие в пространство флагов определяется голоморфным отображением

$$(\mathbf{C}\mathrm{P}^1)_z \to (\mathbf{C}\mathrm{P}^1)_{(f:g)}\ . \tag{0.0.40}$$

Это отображение определяется рациональной функцией $\frac{f(z)}{g(z)}$.

Квазилинейная формулировка σ-моделей пространств флагов

К предложенным новым сигма-моделям пространств флагов должен быть применим хорошо известный метод $\frac{1}{N}$-разложения. В данном контексте имеется в виду, что, например, в случае пространства

$$\frac{U(N)}{U(n_1)\times\cdots\times U(n_{m-1})\times U(N-M),} \tag{0.0.41}$$

где $M = \sum_{j=1}^{m-1} n_j$, следует брать предел $N \to \infty$ при фиксированных $n_1 \ldots n_{m-1}$. Как правило, такой предел удобнее всего исследовать в так называемом GLSM-формализме (gauged linear sigma-model), в рамках которого сигма-модель описывается набором ‘полей материи’, удовлетворяющих квадратичным условиям и взаимодействующих со вспомогательными калибровочными полями. В сигма-моделях с кэлеровыми таргет-пространствами это означает, что таргет-пространство представлено в виде кэлерова фактора плоского пространства $\mathbb{C}^{\mathbb{M}}$ для некоторого $\mathbb{M}$. Конструкция кэлерова фактора для пространств флагов хорошо известна – соответствующие поля материи можно описать при помощи так называемого ‘колчана’. Напрямую к нашим моделям она, однако, неприменима, так как используемая в наших моделях киллингова метрика не является кэлеровой. Тем не менее, представление в виде кэлерова фактора можно подходящим образом видоизменить и построить GLSM-представление для рассматриваемых нами сигма-моделей [5].

Для сигма-модели пространства (0.0.41) квазилинейная формулировка строится таким

образом. Введем матрицу $V : \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^N$

$$V = \underbrace{\left.\left(\begin{array}{ccc} \star & \cdots & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & \star \end{array}\right)\right\} N \text{ строк}}_{M \text{ столбцов}} \tag{0.0.42}$$

Столбцы матрицы параметризуют M векторов флага. Они ортонормированы:

$$V^\dagger V = \mathbb{1}_M \,. \tag{0.0.43}$$

Введем аналоги калибровочных полей

$$\mathscr{A}_z := \begin{pmatrix} (A_{11})_z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (A_{21})_z & (A_{22})_z & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ (A_{m-1\,1})_z & (A_{m-1\,2})_z & \cdots & \cdots & (A_{m-1\,m-1})_z \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_{\bar{z}} = (\mathscr{A}_z)^\dagger \tag{0.0.44}$$

и ковариантную производную

$$\mathscr{D}_z V := \partial_z V - i\, V\, \mathscr{A}_z \,. \tag{0.0.45}$$

Лагранжиан модели имеет вид:

$$\mathscr{L} = \mathrm{Tr}((\mathscr{D}_z V)^\dagger\, \mathscr{D}_z V) \,. \tag{0.0.46}$$

Ясно, что имеется калибровочная инвариантность относительно группы $U(n_1)\times\cdots\times U(n_{m-1})$. В диссертации показано, что исключение вспомогательных калибровочных полей приводит к действию (0.0.20). Также ясно, что в пределе большого N данная модель является по существу векторной, т.к. матрица V растет в вертикальном направлении, но не в горизонтальном.

Связь с η-деформированными и $\mathbb{Z}_m$-градуированными моделями

Еще один результат диссертации – установление связи между предложенными σ-моделями с комплексными однородными пространствами и так называемыми η-деформированными моделями [83; 84], которые в последнее время привлекли значительный интерес в научном сообществе ввиду потенциальной возможности их применения к деформациям суперструнных моделей типа $AdS_5\times S^5$ [26; 56]. Простейшая η-деформированная модель Климчика в терминах конусных компонент $J_\pm$ обычного тока Маурера-Картана $J := -g^{-1}dg$ описывается действием

$$\mathscr{S}_\eta = \frac{1}{2}\int d^2x\, \langle J_+, \frac{1+\eta^2}{1-\eta\, R} \circ J_- \rangle, \tag{0.0.47}$$

где R – линейный оператор на алгебре Ли, $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, удовлетворяющий так называемому

классическому модифицированному уравнению Янга-Бакстера

$$N(a,b) := [R\circ a, R\circ b] - R\circ([R\circ a, b] + [a, R\circ b]) - [a,b] = 0 \qquad \forall\, a,b \in \mathfrak{g} \tag{0.0.48}$$

и обладающий свойством антисимметрии

$$\langle R\circ a, b\rangle = -\langle a, R\circ b\rangle. \tag{0.0.49}$$

Эти два условия позволяют сформулировать уравнения движения деформированной модели в виде условия нулевой кривизны.

Одно из основных наблюдений заключается в том, что R-матрицы, удовлетворяющие условиям (0.0.48)-(0.0.49), тесно связаны с комплексными структурами на таргет-пространстве. Имеются следующие возможности: во-первых, можно выбрать в качестве R комплексную структуру на таргет-пространстве (т.е. на группе G), конечно, в том случае, если группа G является четномерной. В этом случае условие (0.0.48) означает зануление тензора Нийенхейса комплексной структуры, т.е. ее интегрируемость, а (0.0.49) – согласованность комплексной структуры с метрикой. При этом деформированная модель представляет собой деформацию теории главного кирального поля при помощи слагаемого в действии, пропорционального (незамкнутой) кэлеровой форме на таргет-пространстве с произвольным коэффициентом η.

Можно также пойти другим путем и рассмотреть 'стандартную' R-матрицу, используемую в большинстве работ [56; 84]:

$$R\big|_{\mathfrak{g}_\alpha} = i\,\mathbb{1}, \quad \alpha > 0 \tag{0.0.50}$$

$$R\big|_{\mathfrak{g}_\alpha} = -i\,\mathbb{1}, \quad \alpha < 0 \tag{0.0.51}$$

$$R\big|_{\mathfrak{t}} = 0\,. \tag{0.0.52}$$

Здесь $\mathfrak{g}_\alpha$ – одномерное подпространство алгебры Ли, соответствующее корню α, а $\mathfrak{t}$ – картановская подалгебра. Будем теперь рассматривать действие (0.0.47) с евклидовой сигнатурой на мировом листе. Легко видеть, что существуют предельные значения $\lim\limits_{\eta\to\pm i}\mathscr{S}_\eta$. Для ясности рассмотрим предел $\eta\to i$. В этом случае

$$\mathscr{S}_{\lim} = \lim_{\eta\to i}\mathscr{S}_\eta = \int d^2x\,\langle (J_z)_{\mathfrak{m}_+}, (J_{\bar z})_{\mathfrak{m}_-}\rangle \tag{0.0.53}$$

Существует также предел нетеровского тока, а потому и лаксовой пары. Любопытный факт состоит в том, что таргет-пространство модели, которая получается в пределе, отличается от исходного. Причина этого в том, что действие $\mathscr{S}_{\lim}$ инвариантно относительно группы H калибровочных преобразований, где H – картановская подгруппа. В результате таргет-пространством оказывается G/H, а не G, как это было для исходной модели (0.0.47). Самый прозрачный пример – это случай $G = SU(N)$, $H = U(1)^{N-1}$ (картановский тор группы G). В этом случае таргет-пространство модели, которая получается в пределе, – это

$G/H = SU(N)/U(1)^{N-1}$ – многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^N$. Действие (0.0.53) в этом случае совпадает с нашим действием (0.0.20).

Помимо η-деформированных моделей существуют сигма-модели с m-симметрическими таргет-пространствами, которые также оказываются интегрируемыми [117] и в некоторых случаях связанными с предложенными нами моделями (0.0.20). Однородное пространство $\frac{G}{H}$ называется m-симметрическим, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G допускает разложение

$$\mathfrak{g} = \oplus_{i=0}^{m-1} \mathfrak{g}_i, \qquad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j \bmod m} \tag{0.0.54}$$

и $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. В этих терминах обычные симметрические пространства – это 2-симметрические пространства. Действие сигма-моделей с m-симметрическими таргет-пространствами, предложенное в работе Ч. Юнга, таково:

$$\widetilde{\mathcal{S}} := \int_\Sigma d^2x \, \|\partial X\|^2_G + \int_\Sigma X^* \widetilde{\omega}, \tag{0.0.55}$$

где $\widetilde{\omega}$ – 2-форма, построенная при помощи $\mathbb{Z}_m$-разложения алгебры Ли (0.0.54). Заметим, что если бы $\widetilde{\omega}$ была кэлеровой формой, то мы бы получили в точности действие (0.0.20). Перейдем теперь к точному определению формы $\widetilde{\omega}$. Разложим ток $J = -g^{-1}dg$ в соответствии с (0.0.54):

$$J = -g^{-1}dg = \sum_{i=0}^{m-1} J^{(i)}, \qquad \text{где} \quad J^{(i)} \in \mathfrak{g}_i \ . \tag{0.0.56}$$

Форма $\widetilde{\omega}$ определяется следующим образом:

$$\widetilde{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m-k)-k}{m} \operatorname{tr} \left(J^{(k)} \wedge J^{(m-k)} \right) \tag{0.0.57}$$

В связи с этой формулой возникает следущий важный вопрос. Из нее следует, что форма $\widetilde{\omega}$ зависит от выбора $\mathbb{Z}_m$-градуировки. Как правило, заданная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает много разных градуировок. Различны ли модели, определенные формулами (0.0.55)-(0.0.57), при выборе различных градуировок на $\mathfrak{g}$?

В диссертации дан следующий ответ:

- По крайней мере в случае однородных пространств унитарной группы модели, определенные формулами (0.0.55)-(0.0.57) при выборе различных градуировок[3] типа $A_N^{(1)}$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ классически эквивалентны моделям, заданным действием (0.0.20) при определенном выборе комплексной структуры на таргет-пространстве.

Более того, можно явно указать, как связано B-поле $\widetilde{\omega}$ действия (0.0.55) и кэлерова форма на $\frac{G}{H}$, являющаяся B-полем нашего действия (0.0.20). Для этого заметим в первую очередь, что градуировка полностью определяется градуировкой простых положительных корней и

[3] В общем случае циклические градуировки на алгебрах Ли были классифицированы В. Кацем.

‘мнимого корня’:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{m_1} & & & \\ & 0 & \mathbf{m_2} & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & 0 & \mathbf{m_N} \\ & & & & 0 \\ \mathbf{m_{N+1}} & & & & \end{pmatrix} \tag{0.0.58}$$

Здесь m_i – целые числа; порядок циклической группы есть их сумма $m = \sum\limits_j m_j$. Последнее условие можно явно разрешить, вводя числа n_i: $m_k = n_k - n_{k+1}$, $n_{N+2} \equiv n_1 - m$. Ясно, что n_i определены с точностью до добавления общей постоянной. Формы $\tilde{\omega}$ и ω связаны простой формулой

$$\tilde{\omega} = \omega - 2 \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{m}\, dJ_{ii} \tag{0.0.59}$$

Таким образом, B-поля двух моделей в данном конкретном случае отличаются лишь топологическим членом, который в модели Юнга однозначным образом определяется выбранной $\mathbb{Z}_m$-градуировкой.

Содержание по главам

Диссертационная работа состоит из введения, основной части, содержащей 7 глав, заключения и двух приложений.

В главе 1 описана комплексная и симплектическая геометрия пространств флагов в $\mathbb{C}^N$. Показано, как пространства флагов естественным образом возникают при описании взаимодействия механической частицы с неабелевым калибровочным полем. При помощи подхода, основанного на использовании континуального интеграла, описаны основные идеи теории геометрического квантования (теорема Бореля-Ботта-Вейля).

В главе 2 подробно описан разработанный автором подход к описанию предела Халдейна – непрерывного предела спиновой цепочки вблизи анти-ферромагнитного основного состояния. Основное наблюдение состоит в том, что классическое анти-ферромагнитное основное состояние можно описать как лагранжево подмногообразие в фазовом пространстве элементарной ячейки спиновой цепочки. В данной Главе мы рассматриваем конкретную спиновую цепочку с $SU(3)$-симметрией и показываем, что в непрерывном пределе возникает сигма-модель с таргет-пространством $\frac{U(3)}{U(1)^3}$.

В главе 3 обобщаются результаты главы 2 на случай более общих спиновых цепочек с $SU(N)$-симметрией. Показано, что при помощи непрерывного предела Халдейна из таких

цепочек можно получить сигма-модели любых пространств флагов $\frac{U(N)}{U(n_1)\times\cdots\times U(n_m)}$. Получены универсальные выражения для метрики и топологического члена сигма-модели.

В главе 4 описаны сигма-модели с комплексными однородными таргет-пространствами, для уравнений движения которых справедливо представление нулевой кривизны. Широкий класс допустимых таргет-пространств – пространства флагов в $\mathbb{C}^N$. В данной Главе мы подробно исследуем геометрию пространства $\frac{U(3)}{U(1)^3}$ и соответствующую сигма-модель.

В главе 5 строятся все решения уравнений движения введенной в предыдущей главе сигма-модели пространства $\frac{U(3)}{U(1)^3}$ для случая, когда мировая поверхность – сфера $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Заметим, что существует расслоение $\pi : \frac{U(3)}{U(1)^3} \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$ со слоем $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Мы показываем, что построение решений уравнений движения в рассматриваемой модели расщепляется на две простые подзадачи: построение гармонических отображений в $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ (базу расслоения), а также голоморфных отображений в $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$ (слой расслоения).

В главе 6 построено квазилинейное представление (gauged linear σ-model) для рассматриваемых сигма-моделей пространств флагов. Данное представление связано с геометрической теорией кэлеровых факторов и сводится к введению 'поля материи', удовлетворяющего квадратичному условию и взаимодействующего со вспомогательным "калибровочным" полем. Это представление весьма полезно при построении $\frac{1}{N}$-разложения, которое является для рассматриваемых моделей аналогом теории возмущений по константе связи.

В главе 7 мы описываем взаимосвязи между введенными ранее сигма-моделями с комплексными однородными таргет-пространствами и некоторыми другими известными интегрируемыми моделями – так называемыми η-деформированными моделями, а также моделями с $\mathbb{Z}_m$-градуированными таргет-пространствами (обобщениями симметрических пространств). Важное наблюдение состоит в том, что в качестве используемой в теории η-деформированных моделей R-матрицы может выступать оператор комплексной структуры. При этом классическое модифицированное уравнение Янга-Бакстера сводится к условию обращения в нуль тензора Нийенхейса, т.е. к интегрируемости комплексной структуры.

В заключении обсуждаются полученные результаты и их возможное развитие.

В приложениях приводятся необходимые сведения о кэлеровых структурах на пространстве флагов $\frac{U(3)}{U(1)^3}$, а также детали исключения вспомогательных калибровочных полей из лагранжианов квазилинейных и η-деформированных σ-моделей.

Благодарности. Я благодарю своих оппонентов Е. А. Иванова, С. В. Кетова и А. Я. Мальцева за ценную конструктивную критику и рекомендации. Также выражаю искреннюю признательность за полезные обсуждения своим коллегам Д. Агееву, Г. А. Алексееву, И.Я. Арефьевой, Г. Э. Арутюнову, А. Багрову, А. А. Белавину, С. Горчинскому, К. Л. Заремба, А. В. Зотову, И. Костову, М. И. Кацнельсону, А. Михайлову, Н. Некрасову, В.П. Павлову, В. Пестуну, А. К. Погребкову, В. Пржиялковскому, А. Савватееву, А. Г. Сергееву, Н.А. Славнову, С. А. Фролову, Л. О. Чехову, С. Шаташвили, N. Berkovits, A. Chatzistavrakidis, F. Delduc, A. Kleinschmidt, D. Lüst, M. Magro, H. Nicolai, S. Theisen, P. Zinn-Justin.

Хочу особо поблагодарить своего учителя и научного консультанта диссертации Андрея Алексеевича Славнова за теплое отношение ко мне и большое внимание к моей работе.

Мои родители внесли неоценимый вклад в мое становление как личности и как ученого. Словами трудно выразить благодарность, которую я к ним испытываю. Благодарю также всех членов моей семьи, чью поддержку я всегда ощущаю.

Глава 1. Пространства флагов в $\mathbb{C}^N$

1.1 Общее описание

1.1.1 Пространство флагов как комплексное многообразие

Пространство флагов в $\mathbb{C}^N$ можно определить как многообразие вложенных друг в друга линейных подпространств:

$$\mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m} = \{0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{m-1} \subset V_m = \mathbb{C}^N\}\,, \tag{1.1.1}$$

где $\dim V_i = d_i$. Группа $GL(N,\mathbb{C})$ действует транзитивно на этом многообразии, и стабилизатор любой данной точки (т.е. заданной последовательности вложенных линейных пространств) – это максимальная параболическая подгруппа ('лестница'), состоящая из матриц, изображенных на Рисунке 1.1. Следовательно, можно представить пространство флагов как однородное пространство

$$\mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m} = GL(N,\mathbb{C})/\mathcal{H}\,. \tag{1.1.2}$$

Отсюда следует, что пространство флагов – комплексное многообразие комплексной размерности

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m} = N^2 - \sum_{i=1}^{m} d_i\,(d_i - d_{i-1}) \tag{1.1.3}$$

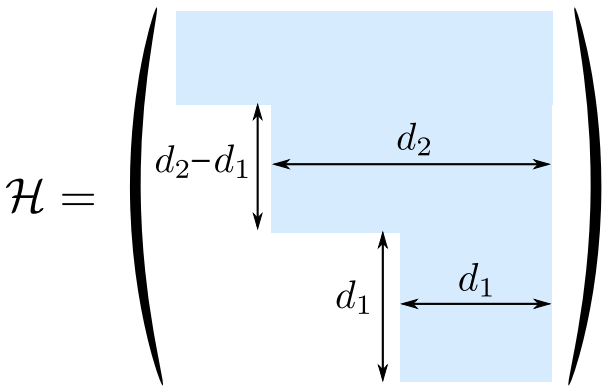


Рис. 1.1: Максимальная параболическая подгруппа, стабилизирующая флаг.

Обозначим $\dim V_i/V_{i-1} = n_i$. Тогда можно представить пространство флагов и в форме фактор-пространства унитарной группы:

$$\mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m} = \frac{U(N)}{U(n_1)\times\ldots\times U(n_m)}, \quad \sum_{i=1}^{m} n_i = N\,. \tag{1.1.4}$$

Данная параметризация естественно связана с выбором евклидовой метрики на $\mathbb{C}^N$. Вычислим вещественную размерность и убедимся, что она вдвое больше вычисленной ранее комплексной размерности:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m} = N^2 - \sum_{i=1}^{m} n_i^2 = 2\times\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m}\,. \tag{1.1.5}$$

Примеры. Проективное пространство $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$: его можно рассматривать как фактор-пространство $(u_1,\ldots,u_N)\sim\lambda(u_1,\ldots,u_N)$ в $\mathbb{C}^N/\{0\}$. По аналогии с этим грассманниан $G(k,N)$ можно рассматривать как фактор пространства $k\times N$-матриц ранга k по группе $GL(k,\mathbb{C})$. В дальнейшем (в Главе 6) мы увидим, каким образом данное определение можно обобщить на случай пространств флагов общего вида.

Отметим, что вышеприведенное 'голоморфное' определение (1.1.2) автоматически задает комплексную структуру на пространстве флагов. С другой стороны, в определении (1.1.4) пространство флагов рассматривается как вещественное многообразие (на котором комплексную структуру можно в дальнейшем определить отдельно – мы так и поступим ниже).

1.1.2 Симплектическое многообразие

Покажем, что $\mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m}$ – симплектическое многообразие, т.е. на нем существует замкнутая 2-форма ω, $d\omega=0$, такая что $\omega^{\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{F}}\neq 0$ (т.е. она невырождена, $\det\omega\neq 0$). На самом деле мы будем даже рассматривать однородные (=$U(N)$-инвариантные) симплектические формы.

Рассмотрим однородное пространство G/H и соответственное разбиение алгебры Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}$. Однородное пространство называется редуктивным, если выполняются следующие соотношения:

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}, \qquad [\mathfrak{h},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}\,. \tag{1.1.6}$$

Второе требование автоматические выполнено в том случае, если имеется ad-инвариантная метрика на $\mathfrak{g}$. Действительно, пусть имеются элементы $h_0,h_1\in\mathfrak{h}$ и $a,b\in\mathfrak{m}$, такие что $[h_0,a]=b+h_1$. Вычислим скалярное произведение с произвольным элементом $\gamma\in\mathfrak{h}$, тогда получим $\langle\gamma,[h_0,a]\rangle=\langle\gamma,h_1\rangle$. Левая часть равна нулю (в чем можно убедиться, перебрасывая коммутатор), поэтому $\langle\gamma,h_1\rangle=0$ для любого γ. Из невырожденности метрики следует, что $h_1=0$.

Имеется следующее общее утверждение:

G-инвариантные тензоры на редуктивном однородном пространстве G/H находятся в соответствии с H-инвариантными тензорами на $\mathfrak{m}$ (последнее есть просто линейное пространство $\mathbb{R}^{\dim \mathfrak{m}}$).

В дальнейшем мы будем в основном пользоваться унитарным представлением (1.1.4) и соответствующим разложением алгебры Ли

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{u}_N = \oplus_{i=1}^{m} \mathfrak{u}_{n_i} \oplus \mathfrak{m}, \tag{1.1.7}$$

где $\mathfrak{m}$ – ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ относительно ad-инвариантной метрики на $\mathfrak{u}_N = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{su}_N$. Так как $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, подгруппа H представлена в пространстве $\mathfrak{m}$, и это представление полезно разложить на неприводимые:

$$\mathfrak{m} \otimes \mathbb{C} = \oplus_{i \neq j} V_{ij}, \qquad \text{где} \qquad V_{ij} = \mathbb{C}^{n_i n_j} \tag{1.1.8}$$

Более того, $V_{ji} = \bar{V}_{ij}$. V_{ij} – векторное пространство би-фундаментального представления группы $U(n_i) \times U(n_j)$.

Введем ток Маурера-Картана

$$j = -g^{-1}\, dg, \qquad g \in U(N) \tag{1.1.9}$$

и разложим его следующим образом:

$$j = [j]_{\mathfrak{h}} + \sum_{i \neq k} j_{ik}, \qquad j_{ik} \in V_{ik}\,. \tag{1.1.10}$$

Наиболее общая инвариантная два-форма имеет вид (в соответствии с вышеупомянутым утверждением)

$$\Omega = \sum_{i<j} a_{ij}\, \mathrm{Tr}(j_{ij} \wedge j_{ji})\,. \tag{1.1.11}$$

Чтобы проверить, в каких случаях она является замкнутой, используем тот факт, что ток Маурера-Картана плоский:

$$dj - j \wedge j = 0\,. \tag{1.1.12}$$

Отсюда следует

$$\mathscr{D} j_{ij} = \sum_{m \neq (i,j)} j_{im} \wedge j_{mj} \tag{1.1.13}$$

где $\mathscr{D}$ – H-ковариантная производная, определенная следующим образом:

$$\mathscr{D} j_{ij} := dj_{ij} - \{j_{\mathfrak{h}}, j_{ij}\}\,. \tag{1.1.14}$$

Из условия замкнутости Ω следует, что

$$a_{ij} + a_{jk} + a_{ki} = 0 \qquad \text{для всех попарно различных} \qquad (i,j,k)\,. \tag{1.1.15}$$

У данного условия наиболее общее решение таково:

$$a_{ij} = z_i - z_j\,. \tag{1.1.16}$$

Таким образом, мы имеем семейство однородных симплектических форм с $m-1$ вещественными параметрами. Эти формы можно записать более компактно таким образом:

$$\Omega = \mathrm{Tr}(z\, j \wedge j)\,, \qquad \text{где} \qquad z = \mathrm{Diag}(z_1 \mathbb{1}_{n_1}, \ldots, z_m \mathbb{1}_{n_m})\,. \tag{1.1.17}$$

Можно нормировать элемент z так, чтобы он был бесследовым: $\mathrm{Tr}(z) = 0$. Стабилизатор H можно теперь считать стабилизатором матрицы $z \in \mathfrak{u}_N$, а само пространство флагов – присоединенной орбитой:

$$\mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m} = \{g\, z\, g^{-1}, \quad g \in SU(N)\}\,. \tag{1.1.18}$$

Пуассоновы многообразия. Пространства флагов как симплектические листы.

Известно, что каждая полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является пуассоновым многообразием – скобка Пуассона задается структурными константами алгебры Ли:

$$\{x^i, x^j\}_P = f^{ij}_k\, x^k\,. \tag{1.1.19}$$

В общем случае пуассонов би-вектор на пуассоновом многообразии с координатами $\{z^i\}$ определяется через скобку Пуассона этих кординат, т.е. $\{z^i, z^j\} = \Pi^{ij}(z)$. В нашем случае он линеен по координатам, т.к. $\Pi^{ij} = f^{ij}_k\, x^k$. Он необратим как тензор на $\mathfrak{g}$. Рассмотрим, однако, так называемые симплектические листы пуассонова многообразия. Они строятся следующим образом. Касательным пространством к симплектическому листу в данной точке многообразия является образ отображения $\Pi : T^*\mathcal{M} \to T\mathcal{M}$. Размерность листа, следовательно, равна рангу Π в этой точке. Заметим, что $\mathrm{Im}(\Pi)$ определяет подрасслоение касательного расслоения (распределение), а его интегрируемость (т.е. $[\Pi(v), \Pi(w)] = \Pi(u) \in \mathrm{Im}(\Pi)$) следует из того факта, что Π удовлетворяет тождеству Якоби.

Идея состоит в том, что можно задать $\mathrm{codim}\,\mathcal{N}$-параметрическое семейство подмногообразий $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ системой уравнений $f_i = a_i = \mathrm{const.}, i = 1 \ldots \mathrm{codim}\,\mathcal{N}$. Все векторные поля в $\mathrm{Im}\,\Pi$ касательны ко всем многообразиям семейства, если они аннигилируют эти уравнения: $\nabla_v f_i = 0$ для $v \in \mathrm{Im}\,\Pi$. Необходимое и достаточное условие существования решения этих уравнений состоит в интегрируемости распределения векторных полей. Действительно, если $\nabla_v f_i = 0$ и $\nabla_w f_i = 0$, то $[\nabla_v, \nabla_w] f_i = 0$, что выполняется для интегрируемого распределения.

Теорема Фробениуса также говорит о существовании в точности $\operatorname{codim}\mathcal{N}$ функционально независимых решений (т.е. функций, градиенты которых линейно независимы). В качестве примера рассмотрим векторные поля $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^4$ с координатами (x, y, z, t) – функционально независимые решения уравнений $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ суть $f = z$ и $f = t$.

Предположим теперь, что некоторая функция g постоянна на каждом симплектическом листе: $g\big|_\ell = \text{const}$. для всех ℓ (константа, конечно, может зависеть от ℓ). Тогда $\nabla_{\Pi(v)} g = 0$, т.е. $\Pi^{ij}\, v_j\, \partial_i g = 0$. Следовательно, $\{g, z^j\} = 0$, т.е. g лежит в центре пуассоновой алгебры. Такие функции отвечают операторам Казимира в алгебре. В алгебре $\mathfrak{su}_N$ имеется $N-1$ независимых Казимиров:

$$C_2 = \operatorname{Tr}(T_a T_b)\, x^a x^b, \qquad C_3 = \operatorname{Tr}(T_a T_b T_c)\, x^a x^b\, x^c, \qquad \text{и т.д.} \tag{1.1.20}$$

Таким образом, имеется $N-1$-параметрическое семейство симплектических многообразий. Это и есть (для случая, когда параметры находятся в общем положении) пространство полных флагов $\mathcal{F}_{1,2,\dots,N}$.

* * *

Вложение пространства флагов в $\mathfrak{su}_N$ (которое, в частности, доказывает, что это пространство является присоединенной орбитой) дается отображением момента:

$$\mu = g\, z\, g^{-1}\,. \tag{1.1.21}$$

Действие группы $U(N)$ на пространстве флагов, $x \to \tilde{x}$, таково:

$$g_0 \cdot g(x) = g(\tilde{x}) \cdot h_0, \quad g_0 \in U(N), \quad h_0 \in U(n_1) \times \cdots \times U(n_m)\,. \tag{1.1.22}$$

Отображение момента (1.1.21) преобразуется правильным образом при действии группы: $\mu(g_0 \cdot g) = g_0\, \mu(g)\, g_0^{-1}$. Чтобы убедиться, что (1.1.21) порождает функции Гамильтона для действия группы G на пространстве флагов, предположим, что v_a – векторное поле на $\mathcal{F}$, отвечающее элементу T_a в алгебре Ли. Тогда можно убедиться, что

$$j(v_a) \equiv i_{v_a}\, j = -g^{-1}\, \nabla_{v_a} g = -g^{-1} \frac{d}{dt} \left(e^{T_a\, t}\, g\right)\big|_{t=0} = -g^{-1} T_a g \tag{1.1.23}$$

Используя данное равенство, получим условие гамильтоновости:

$$d(\operatorname{tr}(\mu T_a)) = d(\operatorname{tr}(g\, z\, g^{-1}\, T_a)) = \operatorname{tr}(z\, [j, g^{-1} T_a g]) = i_{v_a} \operatorname{tr}(zj \wedge j) = i_{v_a}\, \Omega \tag{1.1.24}$$

1.1.3 Комплексные структуры

На пространстве $\frac{U(N)}{U(1)^N}$ полных флагов в $\mathbb{C}^N$ имеется $2^{\frac{N(N-1)}{2}}$ инвариантных почти комплексных структур, из них $N! \leqslant 2^{\frac{N(N-1)}{2}}$ интегрируемы (В скобках заметим, что при больших

N, согласно формуле Стирлинга, $e^{N\,\log(N)} < e^{\frac{\log(2)\,N^2}{2}}$).

Так как комплексная структура $\mathcal{J}$ – это определенный инвариантный тензор на G/H, по вышеупомянутой логике требуется задать H-инвариантное действие оператора $\mathcal{J}$ на линейном пространстве $\mathfrak{m}$. Так как $\mathcal{J}^2 = -1$, комплексную структуру можно диагонализовать над комплексными числами, в таком случае нам остается задать разложение

$$\mathfrak{m} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_-, \tag{1.1.25}$$

$$\text{где} \qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}_\pm] \subset \mathfrak{m}_\pm\,. \tag{1.1.26}$$

Здесь $\mathfrak{m}_\pm$ играют роль голоморфных касательных пространств к G/H, т.е. $\mathcal{J} \circ a = \pm i\, a$ при $a \in \mathfrak{m}_\pm$. В (1.1.8) мы разложили $\mathfrak{m} \otimes \mathbb{C}$ на неприводимые компоненты, следовательно, чтобы определить почти комплексную структуру на $\mathcal{F}$, можно задать действие $\mathcal{J}$ следующим образом:

$$\mathcal{J} \circ V_{ij} = \pm\, i\, V_{ij} \qquad \text{при} \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant N\,. \tag{1.1.27}$$

Тем самым имеется в точности $2^{\frac{N(N-1)}{2}}$ возможностей. Существует несколько эквивалентных определений интегрируемости комплексной структуры:

- Обращение в нуль тензора Нийенхейса:

  $$[\mathcal{J} \circ X, \mathcal{J} \circ Y] - \mathcal{J} \circ ([\mathcal{J} \circ X, Y] + [X, \mathcal{J} \circ Y]) - [X, Y] = 0 \tag{1.1.28}$$

  для любых векторных полей X, Y.

- Через векторные поля: коммутатор двух голоморфных векторных полей должен быть голоморфным, т.е.

  $$(1 - i\,\mathcal{J})\,[(1 + i\,\mathcal{J})X, (1 + i\,\mathcal{J})Y] = 0\,. \tag{1.1.29}$$

  (Ранее мы уже обсуждали понятие интегрируемости распределения векторных полей в контексте пуассоновых векторных полей. Свойство (1.1.29) можно также переформулировать как условие интегрируемости распределения голоморфных полей.)

- Через формы: голоморфные формы должны образовывать дифференциальный идеал, т.е. должно выполняться равенство $d(J_-)_a \sim \sum\limits_b R_{ab} \wedge (J_-)_b$ для некоторых один-форм R_{ab}.

Покажем теперь, что из второго определения следует, что

$$[\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_+] \subset \mathfrak{m}_+, \qquad [\mathfrak{m}_-, \mathfrak{m}_-] \subset \mathfrak{m}_-\,, \tag{1.1.30}$$

если метрика $\mathbb{G}$ эрмитова относительно выбранной почти комплексной структуры $\mathbb{I}$. Действительно, интегрируемость почти комплексной структуры означает, вообще говоря, что $[\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_+] \subset \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{h}$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что почти комплексная структура $\mathbb{I}$

задается условием $\mathbb{I} \circ J_\pm = \pm i\, J_\pm$, где $J_\pm$ – компоненты тока Маурера-Картана:

$$J = -g^{-1}dg = J_\mathfrak{h} + J_+ + J_-, \qquad J_\pm \in \mathfrak{m}_\pm\,. \tag{1.1.31}$$

Так как $dJ - J \wedge J = 0$, получим

$$dJ_- = \big[- J_0 \wedge J_0 + (\text{слагаемые с } J_-) - J_+ \wedge J_+ \big]_{\mathfrak{m}_-}\,.$$

Следовательно, для интегрируемости $\mathbb{I}$ требуется, чтобы $[J_+ \wedge J_+]_{\mathfrak{m}_-} = 0$, т.е. $[\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_+] \subset \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{h}$. Мы видим, что условия (1.1.30) определяют интегрируемую комплексную структуру. В обратную сторону, пусть задана интегрируемая комплексная структура на G/H, а $\mathfrak{m}_\pm$ – определяемые ею голоморфное/анти-голоморфное подпространства. Тогда $[a, b] = c + \gamma$, где $a, b, c \in \mathfrak{m}_+$ и $\gamma \in \mathfrak{h}$. Так как $\langle \mathfrak{m}_+, \mathfrak{h} \rangle_\mathbb{G} = 0$, вычислив скалярное произведение с произвольным элементом $\gamma' \in \mathfrak{h}$, получим $\langle \gamma', [a, b] \rangle_\mathbb{G} = \langle \gamma', \gamma \rangle_\mathbb{G}$. Используя тождество $\langle [a, \gamma'], b \rangle_\mathbb{G} + \langle \gamma', [a, b] \rangle_\mathbb{G} = 0$, будем иметь $\langle \gamma', \gamma \rangle_\mathbb{G} = -\langle [a, \gamma'], b \rangle_\mathbb{G} = \langle a', b \rangle_\mathbb{G}$, где $a' = [\gamma', a] \in \mathfrak{m}_+$. Как уже ранее обсуждалось, пространство $\mathfrak{m}_+$ является изотропным, если метрика $\mathbb{G}$ эрмитова, следовательно $\langle \gamma', \gamma \rangle_\mathbb{G} = 0$ для всех $\gamma' \in \mathfrak{h}$, что влечет $\gamma = 0$ в силу невырожденности $\mathbb{G}$. Отсюда $[\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_+] \subset \mathfrak{m}_+$.

Типичная интегрируемая комплексная структура на пространстве флагов задает голоморфное/анти-голоморфное пространства $\mathfrak{m}_\pm$, как показано на Рисунке 1.2.

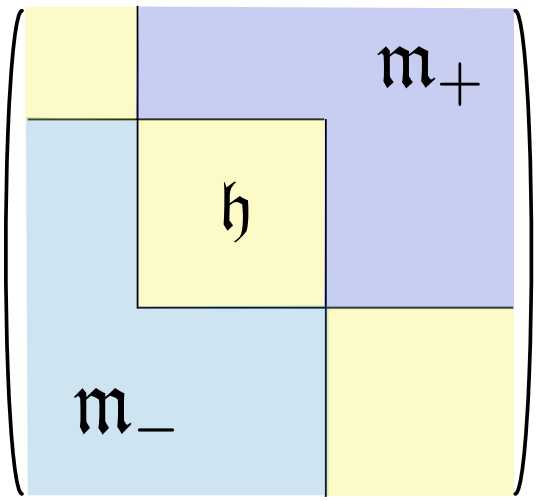


Рис. 1.2: Разложение (1.1.25) алгебры Ли.

Можно определить *почти комплексную структуру* на $\mathcal{F}_N$, выбрав любые $\frac{N(N-1)}{2}$ попарно не сопряженные формы $J_{m_1 n_1}, \ldots, J_{m_{\frac{N(N-1)}{2}} n_{\frac{N(N-1)}{2}}}$ и объявив их голоморфными. Оставшиеся $\frac{N(N-1)}{2}$ формы будут, следовательно, анти-голоморфными. Чтобы определить, какие из этих почти комплексных структур являются интегрируемыми, полезно использовать диаграммное представление. Нарисуем N вершин и стрелки из узла m_1 в узел n_1, из m_2 в n_2 и так далее. Интегрируемость заданной таким образом почти комплексной структуры эквива-

лентна условию ацикличности графа (т.е. условию, что он не содержит замкнутых циклов). Докажем это. Во-первых, обозначим за $e_m,\ m = 1, \dots, N$ стандартные единичные векторы с компонентами $(e_m)_n = \delta_{mn}$. С голоморфными один-формами можно ассоциировать подпространство $\mathfrak{m}_+$ алгебры Ли $(\mathfrak{su}(N))_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(N)$ по следующему правилу:

$$\mathfrak{m}_+ = \mathrm{Span}(E_{m_1 n_1}, \cdots, E_{m_{\frac{N(N-1)}{2}} n_{\frac{N(N-1)}{2}}}), \quad \text{где} \quad E_{mn} = e_m \otimes e_n \tag{1.1.32}$$

Интегрируемость комплексной структуры эквивалентна условию, что $\mathfrak{m}_+$ – подалгебра: $[\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_+] \subset \mathfrak{m}_+$. С другой стороны, матрицы E_{mn} удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[E_{mn}, E_{pq}] = \delta_{np} E_{mq} - \delta_{mq} E_{pn} \tag{1.1.33}$$

Так как на диаграмме мы обозначаем E_{mn} при помощи стрелки из m в n, легко видеть, что замкнутость $\mathfrak{m}_+$ относительно коммутирования эквивалентно следующему требованию:

> Для любых двух идущих друг за другом стрелок $m \to n$ и $n \to p$ стрелка, соединяющая узлы (m, p), имеет направление $m \to p$ (1.1.34)

Заметим, что в общем случае вышеприведенное условие эквивалентно требованию, чтобы диаграмма была ациклической. Действительно, если диаграмма ациклична, то условие (1.1.34) выполняется, иначе имелся бы цикл с тремя вершинами. В обратную сторону, пусть граф содержит цикл. Тогда, используя условие (1.1.34), можно ‘срезать уголки’, редуцируя постепенно диаграмму снова к случаю графа с тремя вершинами, причем циклического, что запрещено (см Рисунок 1.3).

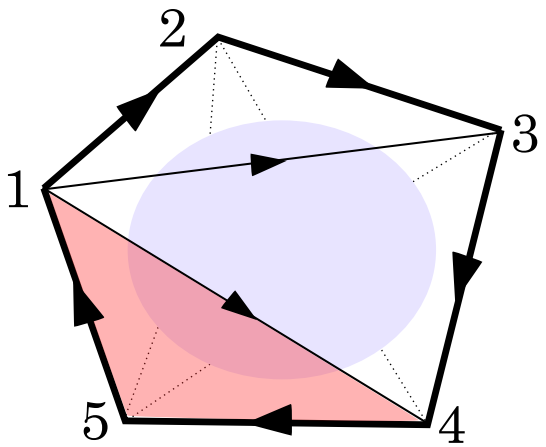


Рис. 1.3: Процедура, которая показывает, что наличие цикла $(1, 2, 3, 4, 5)$ в графе приводит к нарушению условия (1.1.34). Используя (1.1.34), можно заменить пару ребер $(1, 2), (2, 3)$ на $(1, 3)$, т.е. срезать уголок. Далее заменим $(1, 3)$, $(3, 4)$ на $(1, 4)$, в результате чего получим циклический красный треугольник, который нарушает условие (1.1.34).

Лемма. Имеется в точности $N!$ ациклических диаграмм.

Доказательство. Утверждение леммы означает, что есть лишь один комбинаторный тип

диаграмм, и все ацикличные диаграммы получаются из любой данной действием группы перестановок S_N. Опишем данный комбинаторный тип. Каждая ацикличная диаграмма имеет вершину-‘источник’, т.е. вершину, в которой все линии выходящие, а также вершину-‘сток’, в которой все линии входящие (см Рисунок 1.4). Действительно, если это не так, то каждая вершина содержит, скажем, хотя бы одну выходящую линию. Тогда можно начать с любой вершины и следовать вдоль выходящих линий, пока в конце концов не образуется цикл. Рассмотрим вершину-‘источник’. Диаграмма, которую образуют остальные $N-1$ вершин вместе с соединяющими их ребрами, представляет собой снова произвольную ацикличную диаграмму (так как, в силу того что первая вершина является ‘источником’, не может быть циклов, содержащих ее). Тем самым мы сделали первый шаг индукции. Последующие шаги состоят в нахождении вершины-‘источника’ в редуцированной диаграмме. Отсюда ясно, что всегда есть вершина с i исходящими линиями для всех $i = 0, \ldots, N-1$, и это утверждение полностью задает комбинаторную структуру диаграммы. Диаграммы отличаются лишь переобозначением вершин.

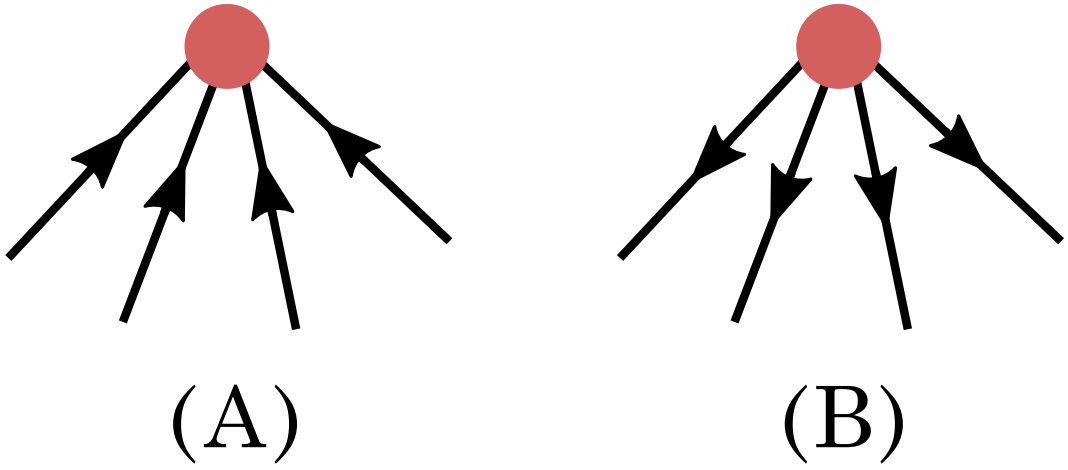


Рис. 1.4: (A) Вершина-‘сток’, (B) Вершина-‘источник’.

1.1.4 Когомологии

Группа вторых коголомологий полного пространства флагов такова:

$$\mathrm{H}^2(\mathcal{F}_N, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{N-1}, \tag{1.1.35}$$

следовательно, имеется $N-1$ линейно-независимых 2-форм, являющихся генераторами группы $\mathrm{H}^2(\mathcal{F}_N)$. В качестве модели пространства $\mathrm{H}^2(\mathcal{F})$ рассмотрим следующую конструкцию. На $\mathcal{F}_N$ имеется N стандартных (или тавтологических) линейных расслоений $L_1, \cdots, L_N$, причем их сумма дает тривиальное расслоение:

$$\bigoplus_{i=1}^{N} L_i = \mathcal{F}_N \times \mathbb{C}^N \,. \tag{1.1.36}$$

Первые классы Черна данных расслоений дают N замкнутых 2-форм: $\Omega_i = c_1(L_i),\ i = 1 \cdots N$. Ввиду условия (1.1.36) и свойства аддитивности первых классов Черна $c_1(E \oplus F) = c_1(E) + c_1(F)$ ясно, что формы Ω_i не независимы, а удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^{N} \Omega_i = 0 \tag{1.1.37}$$

Два-формы $\Omega_i,\ i = 1 \cdots N$, связанные соотношением (1.1.37), порождают $\mathrm{H}^2(\mathcal{F}_N, \mathbf{Z})$.

Можно также по-другому посмотреть на соотношение (1.1.37). Этот другой подход связан с лагранжевыми подмногообразиями, или лагранжевыми вложениями. Наша цель – получить описание пространства $\mathcal{F}_N$, в рамках которого формы Ω_i появлялись бы естественным образом. Первое, на что следует обратить внимание, – это на существование вложения

$$i: \ \mathcal{F}_N \hookrightarrow \underbrace{\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1} \times \cdots \times \mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}}_{N \text{ множителей}}. \tag{1.1.38}$$

Точка $m \in (\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1})^{\times N}$ – это набор из N прямых в $\mathbb{C}^N$, проходящих через начало координат. Те точки, которым отвечают N *ортогональных* прямых, – это точки пространства флагов $\mathcal{F}_N$: здесь стоит вспомнить, что $\mathcal{F}_N$ можно рассматривать как множество наборов N упорядоченных ортогональных прямых в $\mathbb{C}^N$. Рассмотрим линейное расслоение $\mathcal{O}(1)_k$ над каждым множителем $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}_k$. Тогда в качестве форм $\omega_k \sim c_1(\mathcal{O}(1)_k)$ [1] можно взять формы Фубини-Штуди на $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$. Введенные в рассмотрение ранее формы Ω_k можно считать просто ограничениями форм ω_k на $\mathcal{F}_N$:

$$\Omega_k = i^*(\omega_k) \tag{1.1.39}$$

Развивая эти идеи, рассмотрим $(\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1})^{\times N}$ как симплектическое многообразие с симплектической формой

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \tag{1.1.40}$$

Наше утверждение заключается в том, что вложение (1.1.38) является лагранжевым относительно данной симплектической формы, т.е.

$$\omega|_{\mathcal{F}_N} = 0. \tag{1.1.41}$$

Принимая во внимание (1.1.39) и (1.1.41), моментально получаем соотношение (1.1.37). Утверждение (1.1.41) можно доказать следующим образом. В разделе 3.3.3 будет показано, что образ вложения (1.1.38) – геометрическое место точек, в которых обращается в нуль отображение момента μ. В общем случае, если $\mu^{-1}(0)$ представляет собой единственную G-орбиту, то $\omega|_{\mu^{-1}(0)} = 0$ (и даже еще более общо, ядро $\omega|_{\mu^{-1}(0)}$ образовано векторами, касательными к G-орбитам). Остается лишь проверить, что размерность $\mu^{-1}(0)$ равна половине

[1] $\sim$ означает ‘в том же классе когомологий’

размерности пространства объемлющего пространства.

Замечание. Можно доказать, что вложение пространства флагов $\mathcal{F}_{n_1,\dots,n_m} \hookrightarrow G_{n_1,N} \times \cdots \times G_{n_m,N}$ в произведение грассманианов также является лагранжевым (см. раздел 3.3.3).

◄ Мы связали тривиальность некоторого комплексного векторного расслоения над $\mathcal{F}_N$ ($\bigoplus_{i=1}^{N} L_i = \mathcal{F}_N \times \mathbb{C}^N$) и тот факт, что $\mathcal{F}_N$ – лагранжево подмногообразие в $(\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1})^N$. ►

Сформулируем теперь основное утверждение теоремы Бореля-Ботта-Вейля[2]. Вспомним, что мы имеем дело с представлениями группы $U(N)$ со старшим весом $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ относительно картановского тора $U(1)^N \subset U(N)$. Числа λ_i являются целыми. Построим линейное расслоение

$$\tilde{L}_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathcal{O}_1(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_N(\lambda_N) \tag{1.1.42}$$

над $(\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1})^N$. Ограничивая его на $\mathcal{F}_N$ как комплексное расслоение, мы получаем линейное расслоение теоремы Бореля-Ботта-Вейля:

$$L_{\boldsymbol{\lambda}} = i^*(\tilde{L}_{\boldsymbol{\lambda}}) \tag{1.1.43}$$

Его первый класс Черна равен

$$c_1(L_{\boldsymbol{\lambda}}) = i^*(c_1(\tilde{L}_{\boldsymbol{\lambda}})) = i^*(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \omega_i) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \Omega_i \equiv \Omega_{\boldsymbol{\lambda}} \tag{1.1.44}$$

Мы обсуждаем это в таких подробностях во многом потому, что прообраз $c_1(L_{\boldsymbol{\lambda}})$ относительно действия внешней производной d, т.е. ток $\{J : dJ = c_1(L_{\boldsymbol{\lambda}})\}$, совпадает с кинетическим членом в континуальном интеграле (с точностью до полной производной). Это будет подробно объяснено в Главе 2.

Любое представление может быть построено в пространстве голоморфных сечений линейного расслоения над $\mathcal{F}_N$, однако для некоторых представлений базу расслоения можно 'уменьшить' до частичного флагового пространства вида $\mathcal{F}_{n_1,\dots,n_m} = U(N)/U(n_1)\times\cdots\times U(n_m)$, где $\sum_{j=1}^{m} n_j = N$ и не все n_j равны единице. Заметим, что существует расслоение $\pi : \mathcal{F}_N \to \mathcal{F}_{n_1,\dots,n_m}$ — это первый случай, когда мы сталкиваемся с так называемым "забывающим" отображением, которое будет использоваться в разделе 3.3.3. Редукция базы происходит в том случае, когда расслоение $L_{\boldsymbol{\lambda}}$ над $\mathcal{F}_N$ является обратным образом относительно проекции π расслоения над $\mathcal{F}_{n_1,\dots,n_m}$, т.е. когда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L_{\boldsymbol{\lambda}} & \longrightarrow & \mathcal{F}_N \\ {\scriptstyle \pi^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \tilde{L}_{\boldsymbol{\lambda}} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{n_1,\dots,n_m} \end{array}$$

[2]Хорошее, но несколько более формальное описание можно также найти в обзорной работе [38].

Чтобы не потеряться в деталях и общностях, рассмотрим простой пример.

Пример. Существует расслоение $\pi : \mathcal{F}_3 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$ со слоем $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Рассмотрим линейное расслоение $\mathcal{O}(m)$ над $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ (при положительном m) и возьмем его обратный образ $\pi^*\mathcal{O}(m)$ — в результате получим симметрическое тензорное представление ранга m группы $U(3)$.

Ли-алгебраическое описание того, что происходит как в данном примере, так и в общем случае, состоит в том, что база расслоения может быть редуцирована в случае, когда старший вес $\boldsymbol{\lambda}$ ортогонален некоторым корням α_i алгебры $\mathfrak{su}_N$.

Чтобы пояснить наши обозначения, выведем вектор старшего веса присоединенного представления алгебры $\mathfrak{su}_N$ с помощью простого вычисления:

$$\begin{pmatrix} v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & v_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & v_N \end{pmatrix} = (v_1 - v_N) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Тем самым вектор старшего веса присоединенного представления выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{\rho} = (1, 0, ..., 0, -1) \tag{1.1.45}$$

Простые положительные корни $\mathfrak{su}_N$ могут быть получены тем же способом – в наших обозначениях они имеют вид:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 0...0),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, -1, ...0),\ ...\ , \boldsymbol{\alpha}_{N-1} = (0, 0, 0..., 1, -1) \tag{1.1.46}$$

Следовательно, если, например, $\boldsymbol{\lambda} \perp \boldsymbol{\alpha}_1$ (в смысле стандартной евклидовой метрики в $\mathbb{R}^N$), то $\lambda_1 = \lambda_2$. Удобно изображать это при помощи диаграммы: если старший вес $\boldsymbol{\lambda}$ ортогонален корню, то будем закрашивать узел диаграммы Дынкина, который отвечает этому корню [66].

Примеры.

Примеры, представленные на Рисунке 1.5, иллюстрируют общее правило: для того чтобы определить знаменатель фактор-пространства $\mathcal{F}_{n_1,...,n_m}$, сопоставим каждому незакрашенному узлу множитель $U(1)$, а каждой группе из M идущих друг за другом закрашенных узлов – множитель $SU(M+1)$. Знаменатель фактор-пространства $U(N)/H$ есть

$$H = \prod \text{(полученные множители)} \times U(1).$$

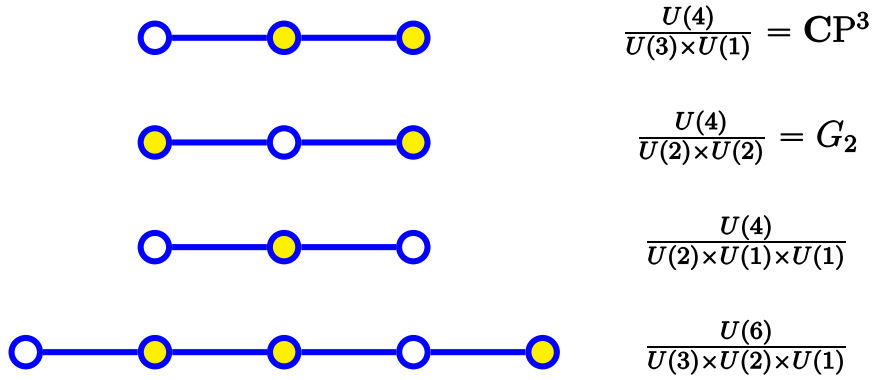


Рис. 1.5: Примеры пространств когерентных состояний.

1.2 Механическая частица, взаимодействующая с неабелевым внешним полем

Хорошо известно, как можно описывать классическую частицу, взаимодействующую с внешним электромагнитным полем A_μ. Действие имеет вид

$$\mathcal{S} = \int dt\, \frac{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}{2} - \int A = \int dt\, \left(\frac{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}{2} - A_\mu\dot{x}^\mu\right) . \tag{1.2.47}$$

Вопрос состоит в том, как написать аналогичное действие для случая, когда калибровочное поле неабелево, т.е., попросту говоря, когда у него есть дополнительные калибровочные индексы A_μ^{ab}. Ответ состоит в том, что частица должна обладать дополнительными степенями свободы, которые принимают значение в определенном пространстве флагов, соответствующем тому представлению, по которому преобразуется частица. Другими словами, необходимо увеличить фазовое пространство следующим образом [106] (здесь $\mathcal{M}$ – конфигурационное пространство):

$$T^*\mathcal{M} \to T^*\mathcal{M} \times \mathcal{F}\,(\text{пространство флагов})\,. \tag{1.2.48}$$

Начнем с того, что обычное действие частицы можно переписать в формализме первого порядка:

$$\mathcal{S} = \int dt\, \left(p_\mu\dot{x}^\mu - \frac{g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu}{2} - A_\mu\dot{x}^\mu\right) \tag{1.2.49}$$

После увеличения фазового пространства мы можем по аналогии записать неабелево действие следующим образом:

$$\mathcal{S} = \int p_\mu\, dx^\mu - \int dt\, \mathcal{H}(x,p) + \int \left(\theta - \mathrm{tr}\,(A\,\mu)\right)\,, \tag{1.2.50}$$

где θ – каноническая один-форма, определенная условием

$$d\theta = \Omega \qquad (= \text{симплектическая форма на } \mathcal{F})\,, \tag{1.2.51}$$

а μ – отображение момента для действия группы G на $\mathcal{F}$. Заметим, что форма θ определена лишь с точностью до добавления полной производной, $\theta \to \theta + dh$, но разница отражается лишь на граничных членах в действии. В случае периодических граничных условий можно даже записать

$$\int\limits_{\Gamma} \theta = \int\limits_{D} \Omega, \tag{1.2.52}$$

где D – диск, границей которого является кривая Γ: $\partial D = \Gamma$.

Нужно показать, что полученное выражение калибровочно-инвариантно. Для простоты рассмотрим стандартное представление $SU(N)$ (когда пространство представления – $\mathbb{C}^N$): в этом случае интересующее нас пространство флагов – это проективное пространство $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$. Нормируем однородные координаты $(z_1, \ldots, z_N)$ на $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$:

$$\sum_{k=1}^{N} |z_k|^2 = 1\,. \tag{1.2.53}$$

При этом все еще есть остаточная калибровочная группа $U(1)$, умножающая все z_k на общую фазу. Форма Фубини-Штуди на $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$ имеет в однородных координатах вид

$$\omega_{FS} = \frac{i}{\|z\|^2}\left(dz_k \wedge d\bar{z}_k - \frac{\bar{z}_n dz_n \wedge z_m d\bar{z}_m}{\|z\|^2}\right), \tag{1.2.54}$$

но ее можно упростить, воспользовавшись нормировкой выше:

$$\omega_{FS} = i\, dz_k \wedge d\bar{z}_k\,. \tag{1.2.55}$$

Тогда для θ и μ будем иметь следующие выражения:

$$\theta = i\, z_k\, d\bar{z}_k, \qquad \mu = z \otimes \bar{z} - \frac{1}{N}\,\mathbb{1}_N\,. \tag{1.2.56}$$

Та часть действия, которая соответствует движению во ‘внутреннем’ пространстве (т.е. в данном случае в проективном пространстве), имеет вид

$$\tilde{\mathcal{S}} = \int dt\, \left(i\, z_k\, \dot{\bar{z}}_k - \bar{z}_m\, (A_\mu)_{mn}\, \dot{x}^\mu z_n\right) = \tag{1.2.57}$$

$$= -\int dt\, \bar{z}_m (i\, \dot{z}_m + (A_\mu)_{mn}\, \dot{x}^\mu\, z_n)\,, \tag{1.2.58}$$

и стоит помнить, что предполагается выполненным также условие нормировки (1.2.53). Из второй формы действия явно следует, что оно калибровочно-инвариантно относительно преобразований

$$z \to g(t) \circ z \qquad A_\mu \to g A_\mu g^{-1} - \dot{g}\, g^{-1}\,. \tag{1.2.59}$$

Чтобы это стало еще более очевидным, заметим, что внешняя производная один-формы θ –

$\mathrm{tr}\,(A\,\mu)$ дает два-форму, которая явно калибровочно-инвариантна:

$$d(\theta - \mathrm{tr}\,(A\,\mu)) = i\,\mathscr{D}z_k \wedge \mathscr{D}\bar{z}_k - \mathrm{tr}\,(F\,\mu)\,, \tag{1.2.60}$$

$$\mathscr{D}z_k = dz_k - A\,z_k, \qquad \mathscr{D}\bar{z}_k = d\bar{z}_k + A\,\bar{z}_k\,. \tag{1.2.61}$$

Каждый из двух членов в (1.2.60) по отдельности тоже калибровочно-инвариантен, однако есть лишь единственная линейная комбинация, которая замкнута (и, следовательно, локально является внешней производной один-формы).

Выпишем теперь уравнения движения в пространстве флагов, следующие из вышеприведенного действия. Для простоты сконцентрируем внимание на $SU(2)$-случае, тогда в качестве пространства флагов выступает сфера S^2. Вместо того чтобы использовать спинор (z_1, z_2), ее можно параметризовать обычным способом – при помощи единичного вектора $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$. Уравнения принимают вид

$$\dot{\vec{n}} = \vec{A} \times \vec{n}, \qquad \text{где} \qquad \vec{A} = A^a_\mu\,\dot{x}^\mu\,\sigma_a \tag{1.2.62}$$

и σ_a – матрицы Паули. Мы видим, что уравнения *линейны* по $\vec{n}$, а условие

$$\vec{n}^2 = \mathrm{const.} \tag{1.2.63}$$

само является следствием уравнений, т.е. движение происходит на сфере в $\mathbb{R}^3$. Это общий факт. Действительно, в случае произвольной компактной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно ввести переменную $n = \sum x^i\,\tau_i \in \mathfrak{g}$, и уравнение примет вид

$$\dot{n} = [A_\mu \dot{x}^\mu, n]\,, \tag{1.2.64}$$

или, в терминах переменных x^i,

$$\dot{x}^i = f^i_{jk}\,(A_\mu \dot{x}^\mu)^j\,x^k\,. \tag{1.2.65}$$

Именно в этой форме данная система уравнений была открыта в работе [114]. Движение, которое задается этими уравнениями, на самом деле происходит на пространствах флагов, вложенных в $\mathfrak{g}$, так как 'Казимиры'

$$C_j = \mathrm{tr}\,(n^j) \tag{1.2.66}$$

являются интегралами движения системы (1.2.64). Тем самым установлена связь с использованной ранее формулировкой через пространства флагов.

1.2.1 'Квантование' симплектической формы пространства флагов

Один из подходов к квантованию состоит в рассмотрении континуальных интегралов следующего вида[3]:

$$\int \prod_i d\varphi_i \, e^{i\,\mathcal{S}} \tag{1.2.67}$$

где действие (1.2.50) входит в показатель экспоненты. Связность θ не является глобально определенной один-формой на пространстве флагов. Действительно, рассмотрим простейший случай $\mathcal{F} = \mathbf{C}\mathrm{P}^1 = S^2$. Наиболее общая инвариантная симплектическая форма такова:

$$\omega = \frac{a}{4\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \wedge d\phi \tag{1.2.68}$$

с некоторой константой a. Ее можно записать также в виде $\omega = -\frac{a}{4\pi}\, dz \wedge d\phi$, где $z = \cos\theta$ – это z-координата данной точки на сфере. Так как последняя форма есть не что иное как элемент объема (или в данном случае площади) цилиндра, эта форма означает, что проекция сферы на цилиндр сохраняет площади. Выпишем теперь один-форму θ, которая хорошо определена в северном полушарии и удовлетворяет условию $d\theta = \omega$:

$$\theta_{NH} = a \, \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2 \frac{d\phi}{2\pi}\,. \tag{1.2.69}$$

Она однозначно определена в северном полюсе, $\vartheta = 0$, так как множитель, стоящий перед $d\phi$, в этой точке обращается в нуль. С другой стороны, в точке $\vartheta = \pi$ он остается ненулевым. Данную ситуацию можно проанализировать лучше, вводя стандартную метрику на сфере $ds^2 = d\vartheta^2 + \sin\vartheta^2\, d\phi^2$ и вычисляя норму дифференциала θ: $\|\theta\|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^4 \frac{1}{\sin\vartheta^2}$. Ясно, что она ограничена в точке $\theta = 0$, но обращается в бесконечность при $\theta = \pi$. Если же рассматривать θ как связность в линейном расслоении, то она будет корректно определена, так как в южном полушарии мы можем сделать калибровочное преобразование $\theta_{SH} = \theta_{NH} - a\,\frac{d\phi}{2\pi} = -a\,\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2 \frac{d\phi}{2\pi}$, и результирующая форма определена в точке $\theta = \pi$. Поэтому интеграл $\int\limits_\Gamma \theta$ зависит от того, какую формулу для связности мы выберем, θ_{SH} или θ_{NH}, при этом разность двух значений равна a: $\int\limits_\Gamma \theta_{SH} = \int\limits_\Gamma \theta_{NH} - a$ (см. также Рисунок 1.6).

Если мы выберем одно из выражений θ_{SH} или θ_{NH} как 'более фундаментальное', это приведет к следующей проблеме: интеграл $\int\limits_\Gamma \theta_{SH}$ не будет непрерывной функцией контура Γ (в естественной топологии, заданной римановой метрикой на сфере), так как если при деформации контур пересечет северный полюс, значение интеграла изменится на a [4]. Другими словами, интеграл $\int\limits_\Gamma \theta_{SH}$ является корректно определенным лишь на проколотой сфере. Приходим к выводу, что на сфере без выделенных точек однозначно определенной является

[3] Другой подход к квантованию коприсоединенных орбит, также основанный на континуальном интеграле, развит в работе [21].

[4] В декартовых координатах $d\varphi = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$. Следовательно, $d\varphi\big|_{y=\epsilon} = \frac{-\epsilon\,dx}{x^2+\epsilon^2} \underset{\epsilon\to\pm 0}{\to} \mp\pi\,\delta(x)\,dx$.

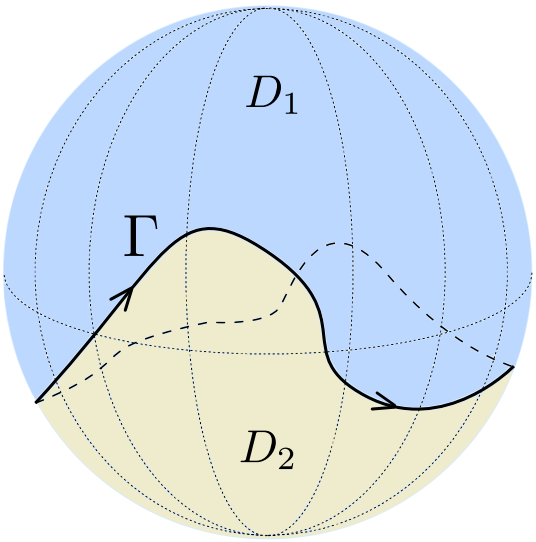


Рис. 1.6: Для того чтобы применить теорему Стокса к интегралу $\int\limits_\Gamma \theta$, необходимо замкнуть контур. Это можно сделать двумя способами, в результате чего получаются области интегрирования $D_1, D_2 \subset S^2$. Будем иметь $\int\limits_\Gamma \theta_{NH} = \int\limits_{D_1} \Omega$, $\int\limits_\Gamma \theta_{SH} = -\int\limits_{D_2} \Omega = -\int\limits_{S^2} \Omega + \int\limits_\Gamma \theta_{NH}$ (так как для применения теоремы Стокса нужно иметь один-форму, хорошо определенную в том числе и внутри всей области). Так как $\int\limits_{S^2} \Omega = a$, лишь значение $\int\limits_\Gamma \theta \bmod a$ не будет зависеть от выбора северного/южного полюсов на сфере.

экспонента

$$e^{\frac{2\pi\, i\, k}{a}\,\omega} = e^{2\pi\, i\, k\,\tilde{\omega}}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{1.2.70}$$

где $\tilde{\omega}$ – симплектическая форма, нормированная на единицу: $\int\limits_{S^2} \tilde{\omega} = 1$. По аналогии с этим, в том случае когда многообразие $\mathcal{F}$ имеет несколько голомологически нетривиальных циклов $C_1, \ldots, C_{N-1}$, для того чтобы экспонента $e^{2\pi\, i \int\limits_\Gamma \theta}$ была однозначно определена для любого контура Γ, интеграл симплектической формы Ω по любому 2-циклу C_i (в данном случае по сфере S^2) должен быть целым числом:

$$\int\limits_{C_i} \Omega \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.2.71}$$

Построим явно эти 2-циклы в случае, когда $\mathcal{F}$ – многообразие полных флагов

$$\mathcal{F}_{1,\ldots,N-1,N} = \{0 \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2 \subset \ldots \subset \mathbb{C}^N\} = \frac{U(N)}{U(1)^N}\,. \tag{1.2.72}$$

Его можно параметризовать при помощи N ортонормированных векторов $u_i, i = 1 \ldots N$, $u_i \circ \bar{u}_j = \delta_{ij}$, определенных по модулю фазовых преобразований: $u_k \sim e^{i\alpha_k}\, u_k$. Как было показано в Разделе 1.1.2, наиболее общую симплектическую форму на $\mathcal{F}_{1,\ldots,N-1,N}$ можно

записать в виде

$$\Omega = i \sum_{i<j} a_{ij}\, J_{ij} \wedge J_{ji}, \qquad \text{где} \qquad J_{ij} = u_i \circ d\bar{u}_j \tag{1.2.73}$$

$$\text{и} \qquad a_{ij} = z_i - z_j\,. \tag{1.2.74}$$

Если зафиксировать $N-2$ из N прямых, оставшиеся свободные параметры определяют конфигурационное пространство упорядоченных пар взаимно ортогональных прямых, проходящих через начало координат и лежащих в плоскости, ортогональной $N-2$ фиксированным прямым. Это конфигурационное пространство – не что иное, как сфера $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$:

$$\{u_{i_1}, \ldots, u_{i_{N-2}} \quad \text{фиксированы}, \qquad u_{i_{N-1}}, u_{i_N} \in (u_{i_1}, \ldots, u_{i_{N-2}})^\perp \tag{1.2.75}$$

$$\text{взаимно ортогональны и в остальном произвольны}\} \simeq (\mathbf{C}\mathrm{P}^1)_{i_{N-1},i_N}\,. \tag{1.2.76}$$

Предположим, что $i_{N-1} < i_N$. Тогда ограничение симплектической формы на данное подмногообразие есть

$$\Omega\big|_{(\mathbf{C}\mathrm{P}^1)_{i_{N-1},i_N}} = i\, a_{i_{N-1},i_N}\, J_{i_{N-1},i_N} \wedge J_{i_N,i_{N-1}}\,, \tag{1.2.77}$$

а интеграл по данной сфере $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$ пропорционален

$$\int\limits_{(\mathbf{C}\mathrm{P}^1)_{i_{N-1},i_N}} \Omega \;\sim\; a_{i_{N-1},i_N}\,. \tag{1.2.78}$$

Чтобы значение интеграла было целым числом, необходимо выбрать z_i в виде

$$(z_1, \ldots, z_N) = \lambda(1, \ldots, 1) + (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_N)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \tilde{z}_i \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.2.79}$$

Мы можем переставить $\tilde{z}_i$ таким образом, чтобы последовательность была невозрастающей, т.е. $\tilde{z}_i \geqslant \tilde{z}_j$ при $i < j$. После такой перестановки мы можем выбрать $(\mathbf{C}\mathrm{P}^1)_{i,i+1}$ в качестве базиса в группе гомологий $H_2(\mathcal{F}_{1,\ldots,N-1,N})$, и интегралы симплектической формы по данным циклам будут положительными:

$$\int\limits_{(\mathbf{C}\mathrm{P}^1)_{i,i+1}} \Omega = z_i - z_{i+1} \in \mathbb{Z}^+\,, \qquad i = 1 \ldots N-1\,. \tag{1.2.80}$$

Можно считать $(\mathbf{C}\mathrm{P}^1)_{i,i+1}$ простыми положительными корнями, а Ω, следовательно, – доминантный вес. Добавление к $\tilde{z}_i$ вектора, пропорционального $\lambda(1, \ldots, 1)$, не меняет значения интегралов. Будем считать, что $\lambda \in \mathbb{Z}$, тогда линейное расслоение над пространством флагов, первый класс Черна которого представлен записанной симплектической формой, есть

$$i^* \left(\mathcal{O}(\lambda + \tilde{z}_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{O}(\lambda + \tilde{z}_N)\right)\,, \tag{1.2.81}$$

где i – вложение (1.1.38). Заметим, что линейное расслоение $i^*\left(\mathcal{O}(1)\otimes\ldots\mathcal{O}(1)\right)$ тривиально над пространством флагов, так как оно представляет собой детерминантное расслоение тривиального векторного расслоения $L_1\oplus\ldots\oplus L_N=\mathbb{C}^N\times\mathcal{F}_{1,\ldots,N}$. Это означает, что в вышеприведенной формуле можно эффективно положить $\lambda=0$, или, другими словами, отнормировать $\tilde{z}_i$ так, чтобы их сумма была равна нулю. В соответствии с общей теорией присоединенных орбит, которую мы описали ранее, рассматриваемое пространство флагов является орбитой элемента

$$z=\begin{pmatrix}\tilde{z}_1 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \tilde{z}_N\end{pmatrix} \tag{1.2.82}$$

Фундаментальные веса, по определению, те, чье значение на простых положительных корнях равно нулю, за исключением одного корня, и значение фундаментального веса на этом корне равно единице: $\langle\Omega_{F_{[j]}},\lambda_{[i]}\rangle=\delta_{ij}$. Они соответствуют старшим весам фундаментальных представлений. В соответствии с вышеописанной теорией они отвечают орбитам элементов

$$z_{F_{[i]}}=\mathrm{Diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{i},\underbrace{0,\ldots,0}_{N-i})\,. \tag{1.2.83}$$

Согласно (1.2.80), в этом случае мы имеем

$$\int\limits_{(\mathbf{C}\mathrm{P}^1)_{k,k+1}}\Omega_{F_{[i]}}=\delta_{ik}\,. \tag{1.2.84}$$

При этом присоединенная орбита – грассманиан $G(i,N)$.

Описанная нами теория – не что иное, как ‘геометрическое квантование’ для случая пространств флагов.

1.3 Представления алгебры $\mathfrak{su}_N$

Квантование Швингера-Вигнера

Перейдем к каноническому квантованию действия (1.2.50) в случае, когда $d\theta=\Omega=m\,\Omega_{FS}$ ($m\in\mathbb{Z}^+$, Ω_{FS} – форма Фубини-Штуди на $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$). Запишем кинетический член в лагранжиане в следующем виде:

$$\mathcal{L}_0=\mathrm{i}\sum\bar{z}_i\circ\dot{z}_i, \tag{1.3.85}$$

и наложим дополнительное условие

$$\sum|z_i|^2=m\,. \tag{1.3.86}$$

Следовательно, канонический импульс $\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{z}_i} = \mathrm{i}\,\bar{z}_i$, и в результате получаем алгебру

$$\{z_i, \bar{z}_j\} = \delta_{ij}\,. \tag{1.3.87}$$

Эта процедура во многом напоминает квантование Швингера-Вигнера, заключающееся в представлении операторов спина при помощи операторов рождения-уничтожения. Подробный обзор данного метода можно найти, например, в [107], а здесь мы напомним основные результаты.

Пусть τ^α – набор генераторов $SU(N)$ в фундаментальном представлении. Введем N операторов a_i и эрмитово сопряженные им $a_i^\dagger$, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}\,. \tag{1.3.88}$$

Легко убедиться, что операторы

$$S^\alpha = a_i^\dagger\, \tau^\alpha_{ij}\, a_j, \tag{1.3.89}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $\mathfrak{su}(N)$, причем операторы S^α действуют неприводимо на подпространстве фоковского пространства, выделенном условием

$$\sum_{i=1}^{N} a_i^\dagger a_i = m, \tag{1.3.90}$$

где m – положительное целое число, имеющее смысл 'числа частиц'. Для данного m полученное представление является m-й симметрической степенью фундаментального представления. Коммутационные соотношения (1.3.88) и условие (1.3.90) следует считать аналогом соотношений (1.3.87) и (1.3.86), т.е. можно считать, что симметрические степени фундаментального представления возникают в результате геометрического квантования пространства $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$.

Мы можем аналогичным образом проквантовать флаговое многообразие (которое представляет собой наиболее общий случай 'внутреннего' фазового пространства). В этом случае кинетический член в лагранжиане равен $\int \theta$, где θ определяется условием, что $d\theta$ – симплектическая форма (1.2.73). Запишем эту симплектическую форму следующим образом:

$$\Omega = -\frac{i}{2}\sum_{i,j}(z_i - z_j)\, u_i \circ d\bar{u}_j \wedge u_j \circ d\bar{u}_i = -i\sum_{i,j} z_i\, u_i \circ d\bar{u}_j \wedge u_j \circ d\bar{u}_i = \tag{1.3.91}$$

$$= i\sum_{i,j} z_i\, du_i \circ \bar{u}_j \wedge u_j \circ d\bar{u}_i = \text{используя соотношение полноты} = d\left(i\sum_i z_i\, u_i \wedge \circ d\bar{u}_i\right)$$

Перерастягивая $u_i \to \frac{1}{\sqrt{z_i}}\, u_i$, можно добиться того, чтобы

$$\theta = i\sum_i u_i \wedge \circ d\bar{u}_i\,, \qquad u_i \circ \bar{u}_j = z_i\, \delta_{ij}. \tag{1.3.92}$$

Следовательно, каноническое квантование приводит к коммутационным соотношениям

$$[(u_i)_m, (\bar{u}_j)_n] = \delta_{ij}\,\delta_{mn}\,. \tag{1.3.93}$$

Таким образом, можно интерпретировать $u_i, \bar{u}_i$ как операторы рождения-уничтожения, но нужно также дополнительно наложить условия ортоноромированности. В частности, числа $z_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ имеют смысл числа количества ячеек в i-й строке диаграммы Юнга. Отсюда ясно, что преобразование $z_i \to z_i + 1$, которое, как обуждалась выше, является несущественным, соответствует добавлению к диаграмме Юнга колонки полной высоты (N). Разности $z_i - z_{i+1}$ представляют собой индексы Дынкина данного представления (которые, по определению, являются коэффициентами в разложении старшего веса данного представления по старшим весам фундаментальных представлений). Когда длины двух следующих друг за другом строк диаграммы Юнга равны, соответствующая 'симплектическая форма' становится вырожденной, если рассматривать ее как форму на исходном пространстве флагов. Тем не менее, она невырожденна, если рассматривать ее как форму на неполном пространстве флагов, являющемся базой 'забывающего' отображения из исходного пространства флагов.

Здесь имеются, тем не менее, некоторые тонкости, в чем мы убедимся на примере присоединенного представления группы $SU(3)$. Чтобы смоделировать данное представление на подпространстве фоковского пространства, рассмотрим операторы

$$N_1 = a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + a_3^\dagger a_3, \quad N_2 = b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2 + b_3^\dagger b_3 \tag{1.3.94}$$

$$O_1 = a_1^\dagger b_1 + a_2^\dagger b_2 + a_3^\dagger b_3 \tag{1.3.95}$$

и потребуем, чтобы векторы в гильбертовом пространстве, в котором действуют эти операторы, удовлетворяли условиям

$$N_1|\psi\rangle = 2\,|\psi\rangle,\ N_2|\psi\rangle = |\psi\rangle,\ O_1|\psi\rangle = 0 \tag{1.3.96}$$

Значения N_1 и N_2 соответствуют числам ячеек в первой и второй строках диаграммы Юнга. Выражение для генераторов $\mathfrak{su}_N$ имеет вид

$$S^\alpha = a_i^\dagger \tau^\alpha_{ij} a_j + b_i^\dagger \tau^\alpha_{ij} b_j\,, \tag{1.3.97}$$

где τ^α – генераторы в фундаментальном представлении.

Заметим, что классическое условие ортогональности $\bar{a} \circ b = 0$ переходит в $O_1|\psi\rangle = 0$, при этом нет аналогичного 'комплексно сопряженного' условия $O_1^\dagger|\psi\rangle = 0$. Если бы оба условия имели место, то они были бы несовместны, так как $[O_1, O_1^\dagger] = N_1 - N_2$ и, следовательно, $(N_1 - N_2)\,|\psi\rangle = |\psi\rangle \neq 0$. Может показаться странным, что это вносит определенную асимметрию во всю конструкцию, однако эта асимметрия – та же, что и асимметрия самой диаграммы Юнга. В общем случае нужно ввести N операторов рождения $\mathbf{e}_k^\dagger$ для k-й строки диаграммы

Юнга ($k = 1$ соответствует первой строке, т.е. самой длинной) и наложить условие

$$\mathcal{O}_{km}|\psi\rangle \equiv \mathbf{e}_k^\dagger \circ \mathbf{e}_m \, |\psi\rangle = 0 \quad \text{при} \quad k < m \tag{1.3.98}$$

Эти уравнения совместны, так как операторы $\mathcal{O}_{km}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

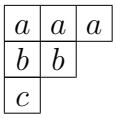
$$[\mathcal{O}_{km}, \mathcal{O}_{np}] = \delta_{mn}\mathcal{O}_{kp} - \delta_{kp}\mathcal{O}_{nm} \quad \text{где} \quad k < m, \;\; n < p \tag{1.3.99}$$

Таким образом, $\mathcal{O}_{km}$ – положительные корни алгебры Ли $\mathfrak{su}_N$.

Условие (1.3.98) можно разрешить в достаточно явном виде. Ясно, что мы ищем общее ядро операторов $\mathcal{O}_{km}$, $k < m$, действующих на состояния в $(N_1, N_2, \ldots)$-частичном фоковском пространстве:

$$|\Psi\rangle = A_{i_1 \ldots i_{N_1} | j_1 \ldots j_{N_2} | \ldots} \, (a^\dagger)_{i_1} \ldots (a^\dagger)_{i_{N_1}} \, (b^\dagger)_{j_1} \ldots (b^\dagger)_{j_{N_2}} \, \ldots \, |0\rangle \, . \tag{1.3.100}$$

Ядро представляет собой векторное пространство, базис в котором можно построить явно. Перейдем к этому.



Общий $SU(N)$-случай: 1) Поставим в соответствие каждой строке диаграммы Юнга букву $a, b, c, \cdots$. 2) Для каждого столбца построим антисимметричную комбинацию вида $\sum\limits_\sigma (-)^\sigma \, a^\dagger_{\sigma(i)} \, b^\dagger_{\sigma(j)} \, c^\dagger_{\sigma(k)} \, d^\dagger_{\sigma(l)}$, где количество участвующих в данной комбинации букв равно высоте столбца. 3) Перемножим эти антисимметричные комбинации (число 'частиц' типа i будет в точности равно длине i-й строки в диаграмме Юнга). Чтобы убедиться, что данные состояния аннигилируются операторами $\mathcal{O}_{km}, k < m$, заметим, что действие оператора такого рода удаляет m-ю букву и заменяет ее на k-ю букву, а так как m-я буква при $m > k$ всегда входит в анти-симметричной комбинации с k-й буквой, то в результате получим нуль.

Замечание 1. Между построенными таким способом полиномами существуют различные линейные соотношения. В результате представление оказывается неприводимым. Например, в случае рассмотренного ранее присоединенного представления алгебры $\mathfrak{su}_3$, можно в качестве базиса выбрать полиномы

$$W_{ij} = a_i^\dagger \, \epsilon_{jmn} \, a_m^\dagger \, b_n^\dagger, \quad i, j = 1 \cdots 3 \tag{1.3.101}$$

При этом имеется единственное соотношение $\sum\limits_{i=1}^{3} W_{ii} = 0$, поэтому размерность векторного пространства равна $3 \times 3 - 1 = 8$, как и должно быть.

Замечание 2. Из построения следует, что, например, переменная $b^\dagger$ всегда входит в анти-симметричной комбинации с переменной $a^\dagger$, переменная $c^\dagger$ входит в анти-симметричной

комбинации с $b^\dagger$ и $a^\dagger$ и т.д. Следовательно, построенный базис не меняется при преобразованиях $b^\dagger \to b^\dagger + r_1 a^\dagger\,,\ c^\dagger \to c^\dagger + r_2 b^\dagger + r_3 a^\dagger$ с произвольными коэффициентами $r_{1,2,3}$.

Простые примеры представлений.

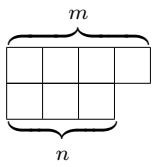
В качестве примера снова рассмотрим алгебру $\mathfrak{su}_3$. В этом случае полиномы строятся из двух наборов переменных, $a_1^\dagger, a_2^\dagger, a_3^\dagger$ и $b_1^\dagger, b_2^\dagger, b_3^\dagger$.

a) $\boxed{a}\boxed{a}\boxed{a}\boxed{a}$ Четвертая симметрическая степень фундаментального представления $\Rightarrow$ Полиномы по переменным $a_1^\dagger, a_2^\dagger, a_3^\dagger$ степени 4.

b) $\begin{array}{|c|c|}\hline a & a \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array}$ Присоединенное представление $\Rightarrow$ Полиномы по $a^\dagger, b^\dagger$ вида $a_i^\dagger\,(a_j^\dagger b_k^\dagger - a_k^\dagger b_j^\dagger)$

1.3.1 Пример

Помимо эстетической привлекательности данного подхода, он интересен потому, что предоставляет также некоторые вычислительные преимущества, например, вычисление значений операторов Казимира в различных представлениях становится вопросом простой осцилляторной алгебры. В качестве примера вычислим значение квадратичного Казимира для алгебры $\mathfrak{su}_N$ в представлении, которое схематично задается следующей диаграммой Юнга:



где предполагается, что первая строка длины m, а вторая – длины n $(m \geqslant n)$. Каждой строке сопоставим N пар операторов рождения/уничтожения $\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger, \mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger$. Генераторы спина имеют вид

$$S^\alpha = \mathbf{a}^\dagger \circ \tau^\alpha \circ \mathbf{a} + \mathbf{b}^\dagger \circ \tau^\alpha \circ \mathbf{b} \tag{1.3.102}$$

Матрицы τ^α нормированы на единицу: $\mathrm{tr}\,(\tau^\alpha \tau^\beta) = \delta^{\alpha\beta}$. В этом случае имеет место соотношение $\sum\limits_\alpha \tau^\alpha \otimes \tau^\alpha = P - \frac{1}{N} I$, где P и I – соответственно оператор перестановки и единичный оператор. Таким образом, для оператора Казимира получим (для краткости мы опустим состояние $|\psi\rangle$, на которое действуют данные операторы, но его присутствие подразумевается)

$$\begin{aligned} C_2 &\equiv \sum_\alpha S^\alpha S^\alpha = \\ &= \overbrace{a_i^\dagger a_j\, a_j^\dagger a_i}^{=m^2+(N-1)m} + \overbrace{a_i^\dagger a_j\, b_j^\dagger b_i}^{=-n} + \overbrace{b_i^\dagger b_j\, a_j^\dagger a_i}^{=-n} + \overbrace{b_i^\dagger b_j\, b_j^\dagger b_i}^{=n^2+(N-1)n} - \frac{1}{N}\overbrace{(a_i^\dagger a_i + b_i^\dagger b_i)^2}^{=(m+n)^2} = \\ &= m^2 + (N-1)m + n^2 + (N-1)n - \frac{1}{N}(m+n)^2 - 2\min(m,n) \end{aligned} \tag{1.3.103}$$

В нашем случае можно заменить $\min(m,n) = n$.

Это построение можно с легкостью обобщить на произвольные представления алгебры $\mathfrak{su}(N)$. Действительно, рассмотрим диаграмму Юнга с N строками (это максимальное число для $\mathfrak{su}(N)$), причем будем считать длины строк равными $n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_{N-1} \geqslant n_N = 0$. Введем переменные $m_i = n_i - \frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N} n_j$ (в результате $\sum\limits_{j=1}^{N} m_j = 0$), тогда значение второго Казимира таково:

$$c_2 = \sum_{j=1}^{N} m_j(m_j - 2j)\,, \tag{1.3.104}$$

что согласуется со старым результатом А. М. Переломова и В. С. Попова [12].

1.3.2 Когерентные состояния

Когерентные состояния образуют базис в векторном пространстве представления группы Ли G. Векторы, образующие этот базис, суть элементы G-орбиты вектора старшего веса $|v\rangle$, т.е. они имеют вид $g\,|v\rangle$, где $g \in G$. Это непрерывный базис, который, следовательно, является переполненным (например, уже потому, что рассматриваемые нами представления конечномерны). В дальнейшем мы будем иметь дело исключительно с компактной группой $G = SU(N)$, однако полезно вспомнить также хорошо знакомые когерентные состояния из квантовой механики и понять, каким образом они вписываются в данную картину. В случае обычной квантовой механики имеется алгебра Гейзенберга $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$, в представлении которой в фоковском пространстве есть вектор старшего веса $|0\rangle$, аннигилируемый оператором уничтожения a (и переходящий в пропорциональный себе при действии единичного оператора). Следовательно, нормированные когерентные состояния даются знакомой формулой

$$|v\rangle \equiv e^{-\frac{1}{2}|v|^2}\; e^{v\,a^\dagger}\,|0\rangle \tag{1.3.105}$$

Утверждение [86]. Орбита вектора старшего веса в проективизации векторного пространства неприводимого представления компактной группы Ли является кэлеровым многообразием (и, следовательно, пространством флагов в случае группы $SU(N)$).

Замечание. Следует заметить, что в данном утверждении принципиально, что речь идет о представлениях в комплексных векторных пространствах. Действительно, рассмотрим, например, векторное представление $SO(N)$. Ясно, что стабилизатором вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ является $SO(N-1)$, поэтому соответствующая орбита представляет собой сферу $S^{N-1} = SO(N)/SO(N-1)$, которая не является кэлеровым многообразием при $N > 3$. Разрешение парадокса состоит в том, что, конечно, вышеуказанный вектор не является вектором старшего

веса, а настоящий вектор старшего веса – это $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Его стабилизатор – $SO(2) \times SO(N-2)$, и фактор-пространство $SO(N)/SO(2) \times SO(N-2)$ кэлерово.

Когерентные состояния в фоковском пространстве

В случае $SU(N)$ когерентные состояния можно рассматривать как полиномы специального вида. Так как мы уже построили ранее базисы в соответствующих пространствах представлений, для построения когерентных состояний необходимо выбрать конкретное состояние и образовать его орбиту относительно $SU(N)$. Сделаем это в явном виде для трех диаграмм Юнга, и отсюда будет ясно, как это может быть сделано в общем случае.

a) $\square\square\square\square$ Вектор старшего веса $(a_1^\dagger)^4$ дает состояния $\phi_v(a^\dagger) = (\bar{v} \circ a^\dagger)^4, \quad v \in \mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$

b) $\begin{array}{ll}\square & \square \\ \square & \end{array}$ Вектор старшего веса $a_1^\dagger \cdot (a_1^\dagger b_2^\dagger - a_2^\dagger b_1^\dagger)$ дает состояния $\phi_{uvw}(a^\dagger, b^\dagger) = (\bar{v} \circ a^\dagger) \cdot [(\bar{v} \circ a^\dagger)(\bar{w} \circ b^\dagger) - (\bar{w} \circ a^\dagger)(\bar{v} \circ b^\dagger)], \quad \bar{w} \circ v = 0$

c) $\begin{array}{lll}\square & \square & \square \\ \square & \square & \\ \square & & \end{array}$ Вектор старшего веса $a_1^\dagger \cdot (a_1^\dagger b_2^\dagger - a_2^\dagger b_1^\dagger) \cdot (a_1^\dagger b_2^\dagger c_3^\dagger - a_1^\dagger b_3^\dagger c_2^\dagger - a_2^\dagger b_1^\dagger c_3^\dagger - a_3^\dagger b_2^\dagger c_1^\dagger + a_2^\dagger b_3^\dagger c_1^\dagger + a_3^\dagger b_1^\dagger c_2^\dagger)$ дает состояния

$$\begin{aligned} \phi_{uvw}(a^\dagger, b^\dagger, c^\dagger) = (\bar{v} \circ a^\dagger) \cdot [(\bar{v} \circ a^\dagger)(\bar{w} \circ b^\dagger) - (\bar{w} \circ a^\dagger)(\bar{v} \circ b^\dagger)] \cdot \\ \cdot [(\bar{v} \circ a^\dagger)(\bar{w} \circ b^\dagger)(\bar{u} \circ c^\dagger) - (\bar{v} \circ a^\dagger)(\bar{u} \circ b^\dagger)(\bar{w} \circ c^\dagger) - (\bar{w} \circ a^\dagger)(\bar{v} \circ b^\dagger)(\bar{u} \circ c^\dagger) - \\ -(\bar{u} \circ a^\dagger)(\bar{w} \circ b^\dagger)(\bar{v} \circ c^\dagger) + (\bar{w} \circ a^\dagger)(\bar{u} \circ b^\dagger)(\bar{v} \circ c^\dagger) + (\bar{u} \circ a^\dagger)(\bar{v} \circ b^\dagger)(\bar{w} \circ c^\dagger)] \end{aligned} \tag{1.3.106}$$

где $\bar{w} \circ v = \bar{u} \circ w = \bar{u} \circ v = 0$.

Легко видеть, что построенные векторы являются векторами старшего веса. Из представления (1.3.102) (с учетом очевидного обобщения на случай трех осцилляторов a, b, c) следует, что те из генераторов τ_α, которые являются верхнетреугольными, соответствуют следующим преобразованиям операторов $a^\dagger, b^\dagger, c^\dagger$:

$$\delta a_i^\dagger = \sum_{j<i} \kappa_{ij}\, a_j^\dagger\,, \tag{1.3.107}$$

$$\delta b_i^\dagger = \sum_{j<i} \kappa_{ij}\, b_j^\dagger\,, \tag{1.3.108}$$

$$\delta c_i^\dagger = \sum_{j<i} \kappa_{ij}\, c_j^\dagger\,, \tag{1.3.109}$$

т.е. в матрице (a, b, c) верхние строки добавляются к нижним. Так как построенные состояния определяются через *верхние* миноры данной матрицы, то они инвариантны относительно таких преобразований, т.е. аннигилируются всеми положительными корнями.

Глава 2. Пределы Халдейна спиновых цепочек: $SU(3)$-случай

2.1 Введение

В настоящей главе будут получены спиновые цепочки, обобщенные халдейновы пределы которых дают релятивистские сигма-модели с таргет-пространствами $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ и $\mathcal{F}_3$ (пространство флагов). Сигма-модель пространства $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ была получена таким способом впервые в работе Аффлека [17], а в трехмерном случае – Ридом и Сачдевым [101]. До наших работ сигма-модель пространства флагов в $\mathbb{C}^N$ не была получена таким способом (в работе [100], однако, была построена сигма-модель вещественного пространства флагов $O(3)/Z_2^3$; см. также [99], где имеется некоторое построение, имеющее отношение к нашему[1]). Мы также построим общую теорию "непрерывного предела Халдейна" и покажем при помощи двух примеров (см. наблюдения 1 и 2 далее), что краеугольным камнем этой теории служат изотропные вложения некоторых многообразий в симплектические многообразия.

Заметим, что в недавней работе [87] независимо подтверждены многие результаты настоящей Главы.

2.2 Спиновые цепочки с $SU(N+1)$-симметрией

В дальнейшем нам будет часто встречаться комлексное проективное пространство $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$, являющееся однородным пространством группы $SU(N+1)$. По этой причине мы предпочитаем писать $SU(N+1)$ вместо, возможно, более легко читаемого символа $SU(N)$. В настоящей Главе мы рассмотрим два семейства спиновых цепочек с глобальной симметрией $SU(N+1)$. Представители каждого из семейств параметризуются целым положительным числом, характеризующим представление, по которому преобразуется каждый узел спиновой цепочки. Мы не задаемся целью рассмотреть наиболее общий возможный случай, а хотим представить пару ясных (и представительных) примеров. По этой причине мы будем рассматривать в настоящей Главе лишь симметрические степени фундаментального (или анти-фундаментального)

[1] Я бы хотел поблагодарить К. Заремба за то, что он указал мне на эту работу.

представления $\mathrm{Sym}(V^{\otimes m})$ (Некоторые более сложные случаи разобраны в следующей Главе). Простейшие примеры спиновых цепочек из двух упомянутых семейств определяются гамильтонианами

$$H_1 = \sum_{i=1}^{L} \mathrm{Tr}_{i,i+1}, \tag{2.2.1}$$

где $\mathrm{Tr}_{i,i+1}$ – оператор следа, и

$$H_2 = \sum_{i=1}^{L} (P_{i,i+1} + \frac{1}{2} P_{i,i+2}), \tag{2.2.2}$$

где $P_{i,i+1}$ – оператор перестановки. Эти операторы определяются следующим образом. Вспомним, что на алгебре Ли $u(N+1)$ есть инвариантное скалярное произведение, которое будем обозначать κ. Пусть λ_n – базис эрмитовых генераторов в фундаментальном представлении, а $\bar{\lambda}_n$ — сопряженные матрицы, порождающие анти-фундаментальное представление. Тогда

$$\sum_{n,m} \kappa_{nm}\ \lambda_n \otimes \lambda_m = P \qquad \text{и} \tag{2.2.3}$$

$$\sum_{n,m} \kappa_{nm}\ \lambda_n \otimes \bar{\lambda}_m = \mathrm{Tr}\ . \tag{2.2.4}$$

Оба оператора $\mathrm{Tr}_{i,i+1}$ и $P_{i,i+1}$ действуют в произведении двух $N+1$-мерных векторных пространств $\mathbf{C}^{N+1} \otimes \mathbf{C}^{N+1}$. Тем не менее, между гамильтонианами H_1 и H_2 имеется важное отличие, которое будет играть роль в дальнейшем обсуждении. Оно связано с тем, что спиновая цепочка должна обладать $SU(N+1)$-симметрией. В связи с этим действие группы в пространствах представлений, которые 'находятся' в узлах спиновой цепочки, различны для случаев (2.2.1) и (2.2.2). В спиновой цепочке (2.2.1) спины, находящиеся в идущих друг за другом узлах, преобразуются по контраградиентным представлениям (например, узел i по фундаментальному представлению V, а узлы $i \pm 1$ – по анти-фундаментальному V^*). В спиновой цепочке (2.2.2) представления во всех узлах должны быть одинаковыми, и мы выберем фундаментальное представление V. В соответствии с этим оператор $P \in \mathrm{End}(V \otimes V)$, а оператор $\mathrm{Tr} \in \mathrm{End}(V \otimes V^*)$.

Обобщение гамильтонианов (2.2.1) и (2.2.2) на случай, когда в узлах цепочки находятся спины в симметрических степенях $\mathrm{Sym}V^{\otimes m}$ фундаментального представления, таково. Возьмем генераторы алгебры $\Lambda_n^{(i)}(m)$ в этих представлениях в каждом узле i (ясно, что $\Lambda_n^{(i)}(1) = \lambda_n^{(i)}$) и построим аналог оператора перестановки: $\hat{\mathbb{P}}^{(i)} = \frac{1}{m} \sum\limits_n \Lambda_n^{(i)}(m) \bigotimes \Lambda_n^{(i+1)}(m)$. Сумма таких членов по всем узлам i дает требуемое нам обобщение оператора перестановки. Несложно убедиться, однако, что это *не* то же самое, что оператор перестановки, действующий в $\mathrm{Sym}(V^{\otimes m}) \otimes \mathrm{Sym}(V^{\otimes m})$. Действительно, генераторы $\Lambda_n(m)$ (для простоты временно опустим индекс i) являются ограничениями на соответствующее подпространство (в резуль-

тате симметризации) следующего оператора:

$$\Lambda_n(m) = \sum_{s=1}^{m} 1 \otimes ... \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ \text{s-я позиция}}}{\lambda_n} \otimes ... \otimes 1, \tag{2.2.5}$$

где всего имеется m множителей, и λ_n находится в позиции s. Это означает, что $\hat{\mathbb{P}}^{(i)}$ имеет вид

$$\hat{\mathbb{P}}^{(i)} = \frac{1}{m}\sum_n \Lambda_n^{(i)}(m) \bigotimes \Lambda_n^{(i+1)}(m) = \frac{1}{m}\sum_{s,t=1}^{m}\sum_n (1\otimes...\otimes \underset{\substack{\uparrow \\ \text{s-я позиция}}}{\lambda_n} \otimes...\otimes 1) \bigotimes (1\otimes...\otimes \underset{\substack{\uparrow \\ \text{t-я позиция}}}{\lambda_n} \otimes...\otimes 1). \tag{2.2.6}$$

Мы знаем, что такое сумма по n в этом выражении (при фиксированных s и t) — это оператор перестановки между узлом s первого множителя в $\mathrm{Sym}(V^{\otimes m}) \otimes \mathrm{Sym}(V^{\otimes m})$ и узлом t второго множителя. Таким образом,

$$\hat{\mathbb{P}}^{(i)} = \frac{1}{m}\sum_{s,t=1}^{m} P_{s(i),\, t(i+1)} \tag{2.2.7}$$

Суммирование необходимо по существу для того, чтобы после перестановки индивидуальных узлов симметризованного произведения результат оставался симметризованным.

Пример. Приведем краткий пример. Пусть $m = 2$. Тогда $\hat{\mathbb{P}}$ действует следующим образом на тензор $T_{ij|kl}$ $(i, j, k, l = 1...N + 1)$, симметричный по первым двум и последним двум индексам соответственно:

$$\hat{\mathbb{P}}(T_{ij|kl}) = \frac{1}{2}(T_{kj|il} + T_{ik|jl} + T_{lj|ki} + T_{il|kj}) \tag{2.2.8}$$

Если ввести "производящую функцию" $T = \sum\limits_{i,j,k,l} T_{ij|kl}\, z_i z_j w_k w_l$, то действие оператора $\hat{\mathbb{P}}$ на $T_{ij|kl}$ можно двойственным образом интерпретировать как действие на $z_i z_j w_k w_l$, которое определяется условием согласованности $\sum \hat{\mathbb{P}}(T_{ij|kl})\, z_i z_j w_k w_l = \sum T_{ij|kl}\, \hat{\mathbb{P}}(z_i z_j w_k w_l)$. В этом случае получим

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(z_i z_j w_k w_l) = \frac{1}{2}(z_k z_j w_i w_l + z_i z_k w_j w_l + z_l z_j w_i w_k + z_i z_l w_j w_k) = \\ = \frac{1}{2}(z_k w_l + z_l w_k)(z_j w_i + z_i w_j), \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

причем во втором выражении очевидна симметрия относительно замен $i \leftrightarrow j$ и $k \leftrightarrow l$, что тем самым доказывает, что действие оператора хорошо опрелено.

Нам потребуются результаты этого достаточно долгого и педантичного обсуждения в Разделе 2.5, чтобы определить действие $\hat{\mathbb{P}}^{(i)}$ на когерентные состояния, к определению которых мы сейчас перейдем.

Замечание. В случае группы $SU(2)$ фундаментальное и анти-фундаментальное пред-

ставления эквивалентны. Это означает, что существует матрица C, такая что

$$\bar{\lambda}_n = -C\lambda_n C^{-1}, \quad n = 1, 2, 3. \tag{2.2.10}$$

Отсюда ясно, что в $SU(2)$-случае операторы $-P$ и Tr сопряжены друг другу, с точностью до несущественной 4×4 единичной матрицы I_4:

$$\mathrm{Tr} = I_4 - CPC^{-1}. \tag{2.2.11}$$

2.3 Когерентные состояния

В алгебраической геометрии хорошо известен следующий факт: любое голоморфное линейное расслоение над $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ является (возможно отрицательной) степенью тавтологического расслоения[2]. Поэтому линейные расслоения над $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ обозначаются $\mathcal{O}(m)$, где $m \in \mathbf{Z}$ – степень, или первое число Черна, расслоения.

По определению, когерентные состояния – это специальные голоморфные сечения этих линейных расслоений $\mathcal{O}(m)$ при $m > 0$. При данном m существует очень явная реализация векторного пространства таких сечений $\Gamma(\mathcal{O}(m))$ — они представляют собой однородные полиномы степени m по $N+1$ однородным координатам на $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$. На $\Gamma(\mathcal{O}(m))$ имеется естественное скалярное произведение, которое дается следующей формулой:

$$(f, g) = \int \overline{f(z)}\, g(z)\, \frac{d\mu(z, \bar{z})}{(\sum\limits_{i=1}^{N+1} |z_i|^2)^m}, \tag{2.3.12}$$

где $d\mu$ – форма объема на $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$, которую в однородных координатах можно описать следующим образом. Обозначим за $\tilde{\omega}$ следующую голоморфную N-форму:

$$\tilde{\omega} = \epsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_{N+1}} z_{i_1}\, dz_{i_2} \wedge \ldots \wedge dz_{i_{N+1}} \tag{2.3.13}$$

а за $\overline{\tilde{\omega}}$ – комплексно сопряженную. Тогда форма объема имеет вид (заметим, что она $U(N+1)$-инвариантна по построению):

$$(d\mu)_{\mathbf{C}\mathrm{P}^N} = \omega_{FS}^N = \frac{i^N \tilde{\omega} \wedge \overline{\tilde{\omega}}}{(\sum\limits_{k=1}^{N+1} z_k \bar{z}_k)^{N+1}} \tag{2.3.14}$$

Важный факт, характерный для проективного пространства, состоит в том, что если умножить все координаты z на одну и ту же *функцию*, форма Фубини-Штуди ω_{FS}, а также форма объема $d\mu$, не изменятся. Как следствие, подынтегральное выражение в (2.3.12)

[2]Иногда данное обстоятельство формулируется как утверждение о том, что группа Пикара имеет один генератор: $\mathrm{Pic}(\mathbf{C}\mathrm{P}^N) \simeq \mathbf{Z}$.

также не меняется при таких растяжениях. В частности, можно выбрать удобную "калибровку", например, можно положить $z_{N+1} = 1 = \bar{z}_{N+1}$ (в дальнейшем мы в основном будем пользоваться именно этой "калибровкой"). Тогда форма объема (2.3.14) упрощается:

$$(d\mu)_{\mathbf{C}\mathrm{P}^N} = \frac{dz_1 \wedge ... \wedge dz_N \wedge d\bar{z}_1 \wedge ... \wedge d\bar{z}_N}{(1 + \sum\limits_{k=1}^{N} z_k \bar{z}_k)^{N+1}} \tag{2.3.15}$$

Как обсуждалось в предыдущей главе, когерентные состояния – это векторы орбиты действия группы G на заданный вектор $|w\rangle$ представления $\hat{V}$. Они образуют переполненный базис в пространстве этого представления [13]. Если V – фундаментальное представление $SU(N+1)$, пространство $\mathrm{Sym}(V^{\otimes m})$ можно отождествить с пространством всех многочленов степени m по $N+1$ переменным $z_i,\ i = 1 ... N+1$. Чтобы орбита была максимально простой, следует выбрать в качестве исходного вектора вектор старшего веса, например $|w\rangle = z_1^m$ [3]. В данном случае орбита – проективное пространство $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ — наименьшей возможной размерности. Любой элемент орбиты можно представить в виде[4]:

$$\phi_{\bar{v}}(z) = (\sum_i z_i \bar{v}_i)^m \tag{2.3.16}$$

Тот факт, что система векторов полна, означает, что выполнено следующее соотношение:

$$\text{(разложение единицы)} \qquad \int d\mu(v, \bar{v})\, \frac{\phi_{\bar{v}}(z)\, \phi_v(\bar{z})}{(\phi_{\bar{v}}, \phi_{\bar{v}})} = \left(\sum_i |z_i|^2 \right)^m \tag{2.3.17}$$

2.4 Квантовая сфера S^2

Рассмотрим более подробно случай $su(2)$ [5]. Будучи записаны при помощи единственной неоднородной координаты, когерентные состояния имеют вид

$$\phi_{\bar{v}}(z) = (1 + z\bar{v})^m \tag{2.4.18}$$

Ядро произвольного оператора $\hat{A}$ может быть получено стандартным образом:

$$A(z, \bar{v}) = \frac{(\hat{A}\phi_{\bar{v}}, \phi_{\bar{z}})}{(\phi_{\bar{v}}, \phi_{\bar{z}})} \tag{2.4.19}$$

Будем теперь рассматривать базисные векторы $1, z$ как собственные векторы оператора σ_3 с собственными значениями $1, -1$ соответственно. Ядро оператора $\hat{A} = \hat{T}_3 = \sum\limits_{s=1}^{m} 1 \otimes ... \otimes$

[3] Очень ясное изложение данной теории можно также найти в работах [66] и [93].

[4] Эти обозначения мы позаимствовали у Березина [36], который использовал когерентные состояния такого типа для 'квантования' сферы $S^2 \sim \mathbf{C}\mathrm{P}^1$ — простейшего однородного кэлерова (симплектического) многообразия.

[5] Аналогичные результаты были также получены в работе [21].

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{s-я позиция}}}{\sigma_3} \otimes ... \otimes 1$ таково:

$$T_3(q,\bar{v}) = \frac{(m\,(1-z\bar{v})(1+z\bar{v})^{m-1}, (1+z\bar{q})^m)}{(1+z\bar{v}, 1+z\bar{q})} = m\,\frac{1-q\bar{v}}{1+q\bar{v}} \tag{2.4.20}$$

Выведем теперь матричные элементы (между когерентными состояниями) "оператора эволюции" $\hat{U} = e^{-i\alpha\hat{T}_3}$. Конечно, в данном конечномерном случае это просто упражнение, так как действие этого оператора на когерентное состояние известно заранее:

$$\hat{U}\,\phi_{\bar{v}} = (e^{-\mathrm{i}\,\alpha} + e^{\mathrm{i}\,\alpha} z\bar{v})^m, \tag{2.4.21}$$

так что соответствующее ядро дается формулой

$$U(q,\bar{v}) = \left(\frac{e^{-\mathrm{i}\,\alpha} + e^{\mathrm{i}\,\alpha} q\bar{v}}{1+q\bar{v}}\right)^m \tag{2.4.22}$$

Как это обычно делается в вычислениях, связанных с континуальным интегралом [14], для того чтобы записать представление в виде континуального интеграла для матричного элемента $U(q,\bar{v})$, следует знать матричные элементы генератора (2.4.20), и затем необходимо разбить "временной" интервал α на K под-интервалов длины $\frac{\alpha}{K}$ и воспользоваться формулой

$$\hat{U} = \lim_{K\to\infty} (1 - \frac{\mathrm{i}\,\alpha}{K}\hat{T}_3)^K \tag{2.4.23}$$

Запишем представление в виде континуального интеграла для оператора (2.4.23), используя (2.3.17) и обозначив $\hat{\tau} = 1 + \frac{i\alpha}{K}\hat{T}_3$:

$$\begin{aligned} U(q,\bar{y}) &= \frac{(\hat{U}\phi_{\bar{y}}, \phi_{\bar{q}})}{(\phi_{\bar{y}}, \phi_{\bar{q}})} = \\ &= \lim_{K\to\infty} \int \prod_{i=1}^{K-1} d\mu(z_i,\bar{z}_i)\ \ \tau(q,\bar{z}_{K-1})\tau(z_{K-1},\bar{z}_{K-2})...\tau(z_2,\bar{z}_1)\tau(z_1,\bar{y}) \times \\ &\quad \times \frac{(\phi_{\bar{y}}, \phi_{\bar{z}_1})(\phi_{\bar{z}_1}, \phi_{\bar{z}_2})\,...\,(\phi_{\bar{z}_{K-2}}, \phi_{\bar{z}_{K-1}})(\phi_{\bar{z}_{K-1}}, \phi_{\bar{q}})}{(\phi_{\bar{y}}, \phi_{\bar{q}})(\phi_{\bar{z}_1}, \phi_{\bar{z}_1})\,...\,(\phi_{\bar{z}_{K-1}}, \phi_{\bar{z}_{K-1}})} \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

Чтобы завершить вывод, используем следующие формулы:

$$\tau(z_{k+1},\bar{z}_k) = 1 - m\,\frac{\mathrm{i}\,\alpha}{K}\,\frac{1-z_k\bar{z}_{k+1}}{1+z_k\bar{z}_{k+1}},$$
$$(\phi_{\bar{z}_k}, \phi_{\bar{z}_{k+1}}) = (1+z_k\bar{z}_{k+1})^m$$

Тогда формула (2.4.24) принимает вид

$$U(q,\bar{y}) = \lim_{K\to\infty}\int \prod_{i=1}^{K-1} d\mu(z_i,\bar{z}_i)\ \left(\frac{1+z_{K-1}\bar{y}}{1+q\bar{y}}\right)^m \times \\ \times \prod_{j=0}^{K-2}\left(\frac{1+z_j\bar{z}_{j+1}}{1+z_{j+1}\bar{z}_{j+1}}\right)^m \prod_{j=0}^{K-1}\left(1-m\,\frac{i\alpha}{K}\,\frac{1-z_j\bar{z}_{j+1}}{1+z_j\bar{z}_{j+1}}\right), \tag{2.4.25}$$

где $z_0 = q$ и $\bar{z}_K = \bar{y}$. Теперь мы хотим "перейти к пределу" в формуле (2.4.25), считая, что $z_{i+1} - z_i \sim \frac{1}{K}$ (более строгое обоснование данной процедуры можно найти в книге [119]). Для этого необходимо записать множители $\frac{1+z_j\bar{z}_{j+1}}{1+z_{j+1}\bar{z}_{j+1}}$ в следующем виде:

$$\frac{1+z_j\bar{z}_{j+1}}{1+z_{j+1}\bar{z}_{j+1}} = \left(1-\frac{(z_{j+1}-z_j)\bar{z}_{j+1}}{1+z_{j+1}\bar{z}_{j+1}}\right) \simeq 1-\frac{1}{K}\frac{\bar{z}_{j+1}\,\dot{z}_{j+1}}{1+z_{j+1}\bar{z}_{j+1}}, \quad j=0,1,...,K-2. \tag{2.4.26}$$

Тогда получим

$$U(q,\bar{y}) = \int\limits_{\substack{z(0)=q\\ \bar{z}(1)=\bar{y}}} \prod_{t\in[0,1]} d\mu(z(t),\bar{z}(t))\ \left(\frac{1+z(1)\,\bar{y}}{1+q\bar{y}}\right)^m \exp\left(-m\int_0^1 dt\,\frac{\dot{z}\,\bar{z}}{1+z\bar{z}} - m\,\mathrm{i}\,\alpha\int_0^1 dt\,\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right) \tag{2.4.27}$$

Остановимся более подробно на двух слагаемых в показателе экспоненты

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\,\frac{\dot{z}\,\bar{z}}{1+z\bar{z}} - \alpha\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \tag{2.4.28}$$

и поясним их смысл. Первое слагаемое $j = \frac{dz\,\bar{z}}{1+z\bar{z}}$ – это "кэлеров ток", другими словами связность в расслоении над $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$, кривизна которой равна кэлеровой форме: $dj = \frac{dz\wedge d\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2} = \omega_{FS}$. Второй член $H = \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}$ – это гамильтониан. z и $\bar{z}$ – стереографические координаты на сфере $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Уравнения движения, следующие из лагранжиана (2.4.28), описывают вращение сферы вокруг оси z (ортогональной к плоскости стереографической проекции). Выпишем уравнения движения, следующие из лагранжиана (2.4.28):

$$\mathrm{i}\,\dot{z} = -2\alpha z, \quad \mathrm{i}\,\dot{\bar{z}} = 2\alpha\bar{z}. \tag{2.4.29}$$

Это не что иное, как уравнения гармонических колебаний. Более того, при определенном выборе координат лагранжиан (2.4.28) можно вообще привести к виду канонического лагранжиана гармонического осциллятора, но нам это не понадобится. Решим уравнения движения с заданными начальными условиями $z(0) = q,\ \bar{z}(1) = \bar{y}$: $z(t) = qe^{2\mathrm{i}\,\alpha t},\ \bar{z}(t) = \bar{y}e^{-2\mathrm{i}\,\alpha(t-1)}$. Подставляя это решение в показатель экспоненты в континуальном интеграле (2.4.27), получим $e^{-m\,\mathrm{i}\,\alpha}$. Член $\frac{1+z(1)\,\bar{y}}{1+q\bar{y}}$ перед экспонентой дает множитель $\frac{1+q\,\bar{y}\,e^{2\mathrm{i}\,\alpha}}{1+q\bar{y}}$, и в итоге будем иметь

$$U(q,\bar{y}) = \left(\frac{e^{-\mathrm{i}\,\alpha}+q\,\bar{y}\,e^{\mathrm{i}\,\alpha}}{1+q\bar{y}}\right)^m, \tag{2.4.30}$$

что, как мы знаем из (2.4.22), есть правильный ответ.

2.5 Континуальный интеграл для спиновой цепочки

По аналогии с (2.4.27) мы хотим теперь вывести выражение в виде континуального интеграла для оператора эволюции спиновой цепочки $\hat{\mathbb{U}} = e^{i\alpha\hat{\mathbb{H}}}$, где $\hat{\mathbb{H}}$ – один из гамильтонианов (2.2.1)-(2.2.2). Таким образом, мы переходим от простого $\mathfrak{su}(2)$ случая к случаю $\mathfrak{su}(3)$- или даже $\mathfrak{su}(N+1)$-модели. Прежде чем рассматривать гамильтонианы (2.2.1)-(2.2.2), начнем с рассмотрения более простого примера гамильтониана XXX-цепочки

$$H_{XXX} = \sum_{i=1}^{L} P_{i,i+1} \tag{2.5.31}$$

и его обобщений на случай m-х симметрических степеней фундаментального расслоения. Эти обобщения получаются из (2.5.31) заменой оператора перестановки P на $\hat{\mathbb{P}}$, определенного в (2.2.6).

2.5.1 XXX-цепочка

Чтобы построить континуальный интеграл, необходимо в первую очередь знать матричные элементы самого гамильтониана, что по существу означает, что нам нужно знать матричные элементы оператора $\hat{\mathbb{P}}$. Этот оператор действует в пространстве тензорного произведения $\mathrm{Sym}(\mathbf{C}^{N+1})^{\otimes m} \otimes \mathrm{Sym}(\mathbf{C}^{N+1})^{\otimes m}$, и в качестве (переполненного) базиса в этом пространстве мы будем использовать тензорное произведение всевозможных когерентных состояний каждого множителя, т.е.

$$|\bar{a}, \bar{b}\rangle = (1 + v \circ \bar{a})^m \, (1 + w \circ \bar{b})^m \tag{2.5.32}$$

Здесь и далее $\circ$ означает обыкновенную свертку (скалярное произведение): $x \circ \bar{y} = \sum_{i=1}^{N} x_i \bar{y}_i$. Как следует из рассуждений раздела 2.2, действие $\hat{\mathbb{P}}$ на такое состояние дает

$$\hat{\mathbb{P}}[(1 + a \circ \bar{z})^m (1 + b \circ \bar{w})^m] = m \, (1 + a \circ \bar{z})^{m-1} \, (1 + b \circ \bar{z}) \;\; (1 + b \circ \bar{w})^{m-1} \, (1 + a \circ \bar{w}) \, . \tag{2.5.33}$$

Следовательно, ядро оператора $\hat{\mathbb{P}}$ имеет вид

$$\mathbb{P}(\bar{y}_1, \bar{y}_2; q_1, q_2) = \frac{\langle \bar{q}_1, \bar{q}_2 | \hat{\mathbb{P}} | \bar{y}_1, \bar{y}_2 \rangle}{\langle \bar{q}_1, \bar{q}_2 | \bar{y}_1, \bar{y}_2 \rangle} = \left[\frac{(1 + q_1 \circ \bar{y}_2) \, (1 + q_2 \circ \bar{y}_1)}{(1 + q_1 \circ \bar{y}_1) \, (1 + q_2 \circ \bar{y}_2)} \right]^m \tag{2.5.34}$$

Теперь можно повторить вывод из предыдущего раздела. Единственная трудность связана с обозначениями, так как в отличие от предыдущего примера у нас имеется два “пространственно-временных” направления: одно направление “времени”, или переменной α,

а второе направление – то, вдоль которого протянута сама спиновая цепочка. В результате наши переменные z будут иметь два индекса: $z_{a,i}$, где a – временной индекс, а i обозначает номер узла спиновой цепочки (см Рисунок 2.1).

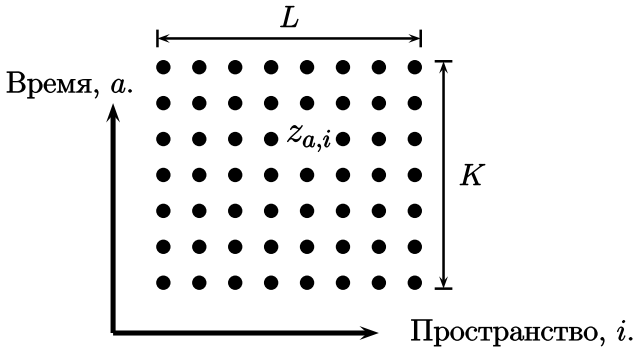


Рис. 2.1: Пространственно-временная '$i-a$' решетка.

Подынтегральное выражение вновь разбивается на две части, содержащие члены двух типов: первый тип можно условно назвать "кинетическим" членом, а второй гамильтонианом:

$$\mathbb{U} = \lim_{K\to\infty} \int \prod_{a,i} d\mu(z_{a,i}, \bar{z}_{a,i}) \ \times \mathbb{I}_{\text{kin}} \times \mathbb{I}_{\text{H}} \tag{2.5.35}$$

Кинетический член локален по спиновому индексу i и имеет простейшую нелокальность (первого порядка) по временному индексу – это общая черта, так как в непрерывном пределе должна получиться 1-форма:

$$\mathbb{I}_{\text{kin}} = \prod_{a,i} \left(\frac{1 + z_{a,i} \circ \bar{z}_{a+1,i}}{1 + z_{a+1,i} \circ \bar{z}_{a+1,i}} \right)^m \tag{2.5.36}$$

Что касается члена, содержащего гамильтониан, он имеет нелокальность первого порядка в направлении спиновой цепочки, но также нелокальность первого порядка и во временном направлении, так как входящие в интеграл матричные элементы гамильтониана всегда имеют вид

$$\frac{1}{K} \langle z_{a+1,i} | \widehat{\mathbb{H}} | z_{a,j} \rangle \tag{2.5.37}$$

Нелокальность второго типа, однако, не будет играть роли, ведь, как видно из (2.5.37), такой матричный элемент всегда умножается на $\frac{1}{K}$, а так как сама нелокальность тоже имеет порядок $\frac{1}{K}$, то таким образом возникают лишь суб-ведущие поправки. В конечном итоге вклад гамильтониана имеет вид

$$\mathbb{I}_{\text{H}} = \prod_{a} \left(1 + m \sum_{i} \frac{i\alpha}{K} \frac{1 + z_{a,i} \circ \bar{z}_{a+1,i+1}}{1 + z_{a,i} \circ \bar{z}_{a+1,i}} \frac{1 + z_{a,i+1} \circ \bar{z}_{a+1,i}}{1 + z_{a,i+1} \circ \bar{z}_{a+1,i+1}} \right) \tag{2.5.38}$$

Теперь мы можем экспоненцировать эти выражения и перейти к пределу $K \to \infty$, в резуль-

тате чего возникает непрерывная временная переменная t:

$$\mathbb{U} = \int \prod_{t\in[0,1]} d\mu(z(t),\bar{z}(t)) \prod_i \left(\frac{1+z_i(1)\,\bar{z}_i(1)}{1+z_i(0)\bar{z}_i(1)}\right)^m \exp(\mathrm{i}\,\mathcal{S}),\ \text{где} \tag{2.5.39}$$

$$\mathcal{S} = m\int_0^1 dt \sum_i \left(i\frac{\dot{z}_i\circ\bar{z}_i}{1+z_i\circ\bar{z}_i} + \alpha\frac{1+z_i\circ\bar{z}_{i+1}}{1+z_i\circ\bar{z}_i}\frac{1+z_{i+1}\circ\bar{z}_i}{1+z_{i+1}\circ\bar{z}_{i+1}}\right) \tag{2.5.40}$$

при этом предполагается выполнение граничных условий $z_i(0) = q_i,\ \bar{z}_i(1) = \bar{y}_i$. Нетривиальный вопрос состоит в том, как перейти к непрерывному пределу в направлении спиновой цепочки, т.е. как сделать непрерывным индекс "i", — есть несколько неэквивалентных возможностей. Известно, что у XXX-цепочки имеется два 'основных состояния', а именно состояния с минимальной и максимальной энергией. Они также соответствуют экстремальным значениям спина: состояние спина нуль (или минимально возможного спина, если длина цепочки не допускает спин нуль) называется анти-ферромагнитным, в то время как состояние максимального спина (пропорционального L — длине цепочки) называется ферромагнитным. Какое из этих состояний в действительности является основным, зависит, конечно, от знака гамильтониана.

2.5.2 Ферромагнитный предел

Ферромагнитный предел самый простой. Он соответствует случаю, когда значения переменных z в соседних узлах близки друг к другу, т.е. $z_{i+1} - z_i \sim \frac{1}{L}$ (напомним, что L – длина спиновой цепочки, т.е. число узлов). Первый член в (3.2.2) тогда дает просто

$$\int dt \sum_i \left(\mathrm{i}\,\frac{\dot{z}_i\circ\bar{z}_i}{1+z_i\circ\bar{z}_i}\right) \to L\int dt \int_{-1/2}^{1/2} dx\ \mathrm{i}\ \frac{\dot{z}(t,x)\circ\bar{z}(t,x)}{1+z(t,x)\circ\bar{z}(t,x)}, \tag{2.5.41}$$

а выражение во втором слагаемом тоже можно переписать в подобном духе:

$$\begin{aligned}&\frac{1+z_i\circ\bar{z}_{i+1}}{1+z_i\circ\bar{z}_i}\frac{1+z_{i+1}\circ\bar{z}_i}{1+z_{i+1}\circ\bar{z}_{i+1}} = \\ &= 1 - \sum_i \frac{\Delta z_i\circ\Delta\bar{z}_i}{(1+z_i\circ\bar{z}_i)(1+z_{i+1}\circ\bar{z}_{i+1})} + \frac{1}{2}\sum_i \frac{[(z_i\circ\Delta\bar{z}_i)\Delta z_i - (\Delta z_i\circ\Delta\bar{z}_i)z_i]\circ[\bar{z}_i+\bar{z}_{i+1}]}{(1+z_i\circ\bar{z}_i)(1+z_{i+1}\circ\bar{z}_{i+1})},\end{aligned} \tag{2.5.42}$$

и в непрерывном пределе последние два члена дают

$$\begin{aligned}&\frac{1}{L}\int dx\,\left(-\frac{\partial_x z\circ\partial_x\bar{z}}{(1+z\circ\bar{z})^2} + \frac{(z\circ\partial_x\bar{z})(\partial_x z\circ\bar{z}) - (z\circ\bar{z})(\partial_x z\circ\partial_x\bar{z})}{(1+z\circ\bar{z})^2}\right) = \\ &= -\frac{1}{L}\int dx\,\left(\frac{\partial_x z\circ\partial_x\bar{z}}{1+z\circ\bar{z}} - \frac{(z\circ\partial_x\bar{z})(\partial_x z\circ\bar{z})}{(1+z\circ\bar{z})^2}\right)\end{aligned} \tag{2.5.43}$$

Ясно, что подынтегральное выражение в (2.5.43) – метрика Фубини-Штуди (записанная в неоднородных координатах, $z_{N+1} = \bar{z}_{N+1} = 1$). Поэтому полное действие имеет вид

$$\mathcal{S} = m \int\limits_0^1 dt \int\limits_{-1/2}^{1/2} dx \left[L\,\mathrm{i}\,\frac{\dot{z}(t,x)\circ\bar{z}(t,x)}{1+z(t,x)\circ\bar{z}(t,x)} - \frac{1}{L}\left(\frac{\partial_x z\circ\partial_x\bar{z}}{1+z\circ\bar{z}} - \frac{(z\circ\partial_x\bar{z})(\partial_x z\circ\bar{z})}{(1+z\circ\bar{z})^2}\right)\right] \quad (2.5.44)$$

или после растяжения $x \to \frac{1}{L}x$

$$\mathcal{S} = m \int\limits_0^1 dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx \left[\mathrm{i}\,\frac{\dot{z}(t,x)\circ\bar{z}(t,x)}{1+z(t,x)\circ\bar{z}(t,x)} - \left(\frac{\partial_x z\circ\partial_x\bar{z}}{1+z\circ\bar{z}} - \frac{(z\circ\partial_x\bar{z})(\partial_x z\circ\bar{z})}{(1+z\circ\bar{z})^2}\right)\right] \quad (2.5.45)$$

Такие нерелятивистские сигма-модели известны как модели Ландау-Лифшица. В случае описанной нами модели таргет-пространство, очевидно, $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$. Простейший пример соответствует $N = 1$: в этом случае таргет-пространство – обычная двумерная сфера. Данная модель известна также как классический магнетик Гейзенберга, и в качестве основного поля модели удобно использовать единичный вектор $\vec{n}$ вместо комплексных координат $z, \bar{z}$ (эти две параметризации получаются друг из друга с помощью стереографической проекции: $n_1 + \mathrm{i}\,n_2 = \frac{2z}{1+z\bar{z}},\ n_3 = \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}$). Из лагранжиана (2.5.45) получаются уравнения движения

$$\frac{\partial\vec{n}}{\partial t} = \vec{n}\times\frac{\partial^2\vec{n}}{\partial x^2}. \quad (2.5.46)$$

Вернемся на секунду к выражению (2.5.39) и заметим, что, помимо действия $\mathcal{S}$ в показателе экспоненты, в нем имеется также префактор $\prod\limits_i \left(\frac{1+z_i(1)\,\bar{z}_i(1)}{1+z_i(0)\bar{z}_i(1)}\right)^m$, который в непрерывном пределе переходит в

$$\begin{aligned}\prod_i \left(\frac{1+z_i(1)\,\bar{z}_i(1)}{1+z_i(0)\bar{z}_i(1)}\right)^m &\to \exp\left[m\,L\int\limits_0^1 dx\left[\frac{1+z(t=1,x)\,\bar{z}(t=1,x)}{1+z(t=0,x)\bar{z}(t=1,x)}\right)\right] = \\ &= \exp\left[m\,L\int\limits_0^1 dx\left[\frac{1+z(t=1,x)\,\bar{y}(x)}{1+q(x)\bar{y}(x)}\right)\right].\end{aligned} \quad (2.5.47)$$

В последнем выражении мы использовали граничные условия. В дальнейшем нам не потребуется данное выражение, но о нем не стоит забывать.

2.5.3 Модели Ландау-Лифшица.

Модели Ландау-Лифшица – это гамильтоновы системы специального вида[6]. Основной динамической переменной служит функция $m(x)$, принимающая значение в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (соответствующую ей группу Ли обозначим G). $m(x)$ можно записать в компонентных обозначениях относительно некоторого базиса генераторов $\{\tau_a\}$ алгебры Ли: $m(x) = \sum m^a(x)\tau_a$.

[6]В настоящем разделе мы следуем в основном книге [2], несколько адаптируя изложение для наших целей.

Переменная x может принимать значение в $\mathbb{R}$, однако наиболее удовлетворительная математическая теория существует для случая, когда $x \in S^1$. Пуассонова структура определяется следующим образом:

$$\{m^a(x), m^b(y)\} = \mathrm{i}\ f_c^{ab}\, \delta(x-y)\, m^c(x), \tag{2.5.48}$$

где f_c^{ab} – структурные константы алгебры Ли, а $\delta(x-y)$ – дельта-функция, которую в случае окружности S^1 следует понимать, как mod 2π дельта-функцию. Пуассонова структура естественно продолжается на произвольные функции фундаментальной переменной $m(x)$.

Гамильтониан Ландау-Лифшица определяется так:

$$H_{LL} = \frac{1}{2}\int dx\ \mathrm{tr}\,(\partial_x m)^2. \tag{2.5.49}$$

Следующие из (2.5.48) и (2.5.49) уравнения Гамильтона таковы:

$$\partial_t m = [m, \partial_x^2 m]. \tag{2.5.50}$$

Важно понимать, что (2.5.50) – уравнение на функцию m, принимающую значение в векторном пространстве $\mathfrak{g}$ (которое, конечно, также является алгеброй Ли), т.е. на него не накладывается никаких дополнительных условий. Однако легко видеть, что при эволюции во времени в соответствии с уравнениями (2.5.50) сохраняются локальные величины

$$l_k(x) = \mathrm{tr}\,(m(x)^k), \quad k = 1, 2, 3... \tag{2.5.51}$$

Лишь конечное число $l_k(x)$ независимы. Отсюда следует, что движение на самом деле происходит на собственных подмногообразиях линейного пространства $\mathfrak{g}$. Эти подмногообразия параметризуются значениями $l_k(x)$, и на каждом таком подмногообразии скобка Пуассона (2.5.48) индуцирует симплектическую форму, так что каждое такое многообразие является симплектическим. При этом само исходное многообразие (векторное пространство) $\mathfrak{g}$ являлось пуассоновым, но не симплектическим (во многих случаях оно является даже нечетномерным). Упомянутые симплектические подмногообразия называются также симплектическими листами соответствующей пуассоновой структуры (определение было дано в разделе 1.1.2).

Особенно интересен случай, когда $l_k(x)$ постоянны, т.е. когда они не зависят от x. Если выбрать определенные значения этих постоянных, то получится так называемая коприсоединенная орбита группы G, и уравнение (2.5.50) естественным образом редуцируется на эту орбиту. Например, в случае алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3$ единственной нетривиальной орбитой является двумерная сфера – в этом случае $l_2(x) = R^2 > 0$, и уравнение (2.5.50) превращается в уравнение ферромагнетика Гейзенберга (2.5.46).

2.6 Антиферромагнитный предел

Анализировать антиферромагнитный предел существенно сложнее. В этом случае z-переменные в соседних узлах уже не близки друг к другу. Рассмотрим, прежде всего, случай сферы, т.е. $N = 1$, что впервые было сделано в работе [74]. В этом случае интуитивно ясно, что антиферромагнитный предел соответствует ситуации, когда спины на соседних узлах имеют противоположную направленность, т.е. $\vec{n}_{i+1} \simeq -\vec{n}_i$. В терминах использованных ранее комплексных координат это условие можно записать в виде $z_{i+1} \simeq -\frac{1}{\bar{z}_i}$, или, в однородных координатах, как $z_1^{(i+1)} = \bar{z}_2^{(i)}, z_2^{(i+1)} = -\bar{z}_1^{(i)}$. Такое простое объяснение связано с тем, что на сфере имеется антиподальная инволюция, т.е. инволюция, являющаяся изометрией, обращающей ориентацию. На сфере антиподальная инволюция единственна. Для $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ при $N \geqslant 2$ это уже не так. Именно по этой причине не сразу очевидно, как можно обобщить случай $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$ на проективные пространства старших размерностей. Ответ существенным образом зависит от конкретного гамильтониана. Первый шаг в этом направлении был сделан Аффлеком в работе [17], и мы переходим к описанию его модели.

2.6.1 Построение Аффлека

Аффлек [17] рассматривал обобщенный предел Халдейна спиновой цепочки с гамильтонианом (2.2.1). Чтобы перефразировать его результаты на нашем языке, нужно выполнить все шаги, описанные в предыдущем разделе, и при этом в непрерывном t-пределе получится следующее действие:

$$\mathcal{S} = m \int\limits_0^1 dt \sum_i \left(i \frac{\dot{z}_i \circ \bar{z}_i}{z_i \circ \bar{z}_i} + \alpha \frac{z_i \circ z_{i+1}}{z_i \circ \bar{z}_i} \frac{\bar{z}_i \circ \bar{z}_{i+1}}{z_{i+1} \circ \bar{z}_{i+1}} \right) \tag{2.6.52}$$

Разница между вторыми членами в (2.5.40) и (2.6.52) в точности отражает разницу между операторами P и Tr, входящими в соответствующие гамильтонианы. Минимум гамильтониана $H = -\sum\limits_i \frac{z_i \circ z_{i+1}}{z_i \circ \bar{z}_i} \frac{\bar{z}_i \circ \bar{z}_{i+1}}{z_{i+1} \circ \bar{z}_{i+1}}$, очевидно, достигается при $z_{i+1} = \bar{z}_i$. Важное наблюдение состоит в том, что для таких конфигураций первый член в действии (2.6.52) превращается в полную производную, так как для каждой пары двух идущих друг за другом узлов $i \frac{\dot{z}_i \circ \bar{z}_i}{z_i \circ \bar{z}_i} + i \frac{\dot{z}_{i+1} \circ \bar{z}_{i+1}}{z_{i+1} \circ \bar{z}_{i+1}} = i \frac{d}{dt} (\log (z_i \circ \bar{z}_i))$. Существует простое, но фундаментальное объяснение данного факта. Чтобы его сформулировать, отвлечемся на минуту и перейдем к несколько более общей постановке вопроса.

Во-первых, очевидно, что прямое произведение двух симплектических многообразий снова является симплектическим многообразием. Действительно, пусть на $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ заданы соответственно симплектические формы ω_1, ω_2. Тогда естественная симплектическая форма на $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ – это $\omega = \omega_1 + \omega_2$. На $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ имеется каноническая симплектическая форма

– форма Фубини-Штуди, которая имеет вид:

$$\omega_{FS} = \mathrm{i}\left(\frac{da_i \wedge d\bar{a}_i}{\bar{a}_j a_j} - \frac{da_i \bar{a}_i \wedge d\bar{a}_k a_k}{(\bar{a}_j a_j)^2}\right). \tag{2.6.53}$$

Индексы в этой формуле пробегают значения от 1 до $N+1$. Как мы только что заметили, симплектическая форма на прямом произведении нескольких $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ – это сумма соответствующих форм Фубини-Штуди. Сформулируем первое основное наблюдение:

Наблюдение 1. Вложение $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ в $\mathbf{C}\mathrm{P}^N \times \mathbf{C}\mathrm{P}^N$, определенное отображением $z \to (z, \bar{z})$, является лагранжевым.

Разложим теперь действие (2.6.52) вблизи 'основного состояния' $z_{i+1} = \bar{z}_i$. Переменные z_{i+1} и z_{i+2} выражаются через z_i следующим образом:

$$z_{i+1} = \bar{z}_i + \frac{1}{L}\bar{\tau}_i, \qquad z_{i+2} = z_i + \frac{1}{L}z_i' \tag{2.6.54}$$

Для удобства введем также "проектор" на подпространство пространства $\mathbb{C}^{N+1}$, ортогональное вектору z_i:

$$\Pi_i = \frac{\mathrm{I}}{|z_i|^2} - \frac{\bar{z}_i \otimes z_i}{|z_i|^4} \tag{2.6.55}$$

Различные члены в гамильтониане раскладываются следующим образом:

$$\frac{|z_i \circ z_{i+1}|^2}{|z_i|^2|z_{i+1}|^2} \simeq \frac{1}{L^2}\tau_i \circ \Pi_i \circ \bar{\tau}_i, \quad \frac{|z_{i+1} \circ z_{i+2}|^2}{|z_i|^2|z_{i+1}|^2} \simeq \frac{1}{L^2}\tilde{\tau}_i \circ \Pi_i \circ \overline{\tilde{\tau}}_i\,, \quad \text{где} \quad \tilde{\tau}_i = \tau_i - z_i' \tag{2.6.56}$$

"Кинетическая энергия" в свою очередь допускает разложение

$$i\frac{\dot{z}_i \circ \bar{z}_i}{z_i \circ \bar{z}_i} + i\frac{\dot{z}_{i+1} \circ \bar{z}_{i+1}}{z_{i+1} \circ \bar{z}_{i+1}} = i\frac{1}{L}\left[\tau_i \circ \Pi_i \circ \dot{\bar{z}}_i - \bar{\tau}_i \circ \Pi_i \circ \dot{z}_i\right] + \text{полная производная} \tag{2.6.57}$$

Следовательно, действие (2.6.52) принимает вид

$$\mathcal{S} = m \int_0^1 dt \sum_i \left(i\frac{1}{L}\left[\tau_i \circ \Pi_i \circ \dot{\bar{z}}_i - \bar{\tau}_i \circ \Pi_i \circ \dot{z}_i\right] + \frac{1}{L^2}\left[\tau_i \circ \Pi_i \circ \bar{\tau}_i + (\tau_i - z_i') \circ \Pi_i \circ (\bar{\tau}_i - \bar{z}_i')\right] \right) \tag{2.6.58}$$

Теперь остается просто "проинтегрировать" по полям $\tau, \bar{\tau}$. Другими словами, мы полагаем $\tau, \bar{\tau}$ равными своим значениям в критической точке, а затем переходим к непрерывному пределу по индексу "i". В результате получим следующее выражение:

$$\mathcal{S} = m \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}} dx \left[\frac{1}{2}\partial_\mu z(x,t) \circ \Pi(z,\bar{z}) \circ \partial_\mu \bar{z}(x,t) - \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon_{\mu\nu}\,\partial_\mu z(x,t) \circ \Pi(z,\bar{z}) \circ \partial_\nu \bar{z}(x,t)\right] \tag{2.6.59}$$

Ясно, что первый член представляет собой стандартное действие $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ сигма-модели, в то время как второй член – ограничение на мировую поверхность кэлеровой формы. Второй член является топологическим и соответствует тета-углу $\theta = \pi m \mod 2\pi$.

2.6.2 Антиферромагнитная конфигурация гамильтониана (2.2.2)

На этом мы закончим изучение гамильтониана (2.2.1) и перейдем к нахождению сигма-модели, которая получается в непрерывном пределе вокруг антиферромагнитного 'основного состояния' спиновой цепочки (2.2.2). Во-первых, в полной аналогии с тем, как это делалось для XXX спиновой цепочки в разделе 2.5.1, мы можем выписать представление в виде континуального интеграла для оператора эволюции спиновой цепочки (2.2.2). Действие, стоящее в показателе экспоненты в подынтегральном выражении, будет иметь вид

$$\mathcal{S} = m \int\limits_0^1 dt \sum_i \left(i\frac{\dot{z}_i \circ \bar{z}_i}{z_i \circ \bar{z}_i} + \alpha \underbrace{\left(\frac{z_i \circ \bar{z}_{i+1}}{z_i \circ \bar{z}_i} \frac{z_{i+1} \circ \bar{z}_i}{z_{i+1} \circ \bar{z}_{i+1}} + \frac{1}{2} \frac{z_i \circ \bar{z}_{i+2}}{z_i \circ \bar{z}_i} \frac{z_{i+2} \circ \bar{z}_i}{z_{i+2} \circ \bar{z}_{i+2}} \right)}_{\equiv \mathcal{H}} \right) \tag{2.6.60}$$

В данной формуле каждая переменная z_i имеет дополнительный (скрытый) индекс, принимающий три возможных значения, что соответствует фундаментальному представлению группы $SU(3)$. Подчеркнем, что гамильтониан (2.2.2) представляет для нас интерес именно в случае $SU(3)$ симметрии — в $SU(N)$-случае нужно выбрать другой гамильтониан. Наше утверждение состоит в том, что для действия (2.6.60) антиферромагнитная вакуумная конфигурация соответствует случаю, когда z-векторы на любых трех соседних узлах ортогональны друг другу. Во-первых, это согласуется с тем, что мы имели ранее в случае $SU(2)$, так как уравнение $1 + \bar{z}_1 z_2 = 0$, которое возникало в том случае, имеет единственное решение $z_2 = -\frac{1}{\bar{z}_1}$, а соответствующее отображение имеет смысл антиподальной инволюции на сфере. Когда $N = 3$, необходимо рассмотреть три последовательных узла и наложить условие ортогональности на три z-вектора z_1, z_2, z_3, 'сидящие' в этих узлах[7]:

$$z_1 \circ \bar{z}_2 = z_2 \circ \bar{z}_3 = z_1 \circ \bar{z}_3 = 0. \tag{2.6.61}$$

Подмногообразие пространства $(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^{\times 3}$, которое задается уравнениями (2.6.61), известно как пространство флагов $\mathcal{F}_3$ (Индекс 3 указывает на то, что это однородное пространство группы $SU(3)$. Пространства флагов для группы $SU(N)$ подробно рассматривались в Главе 1.). Перейдем к разбору этого простейшего нетривиального примера.

$SU(3)$ случай.

Рассмотрим, прежде всего, левую часть (2.5.41). Ясно, что непрерывный предел на фоне другой конфигурации (2.6.61), уже не будет давать правую часть (2.5.41). Поэтому вопрос состоит в том, что же получится в непрерывном пределе. Из обсуждения выше следует, что естественно рассмотреть произвольные три последовательных узла. Тогда кинетический член в дискретизованном лагранжиане J_t окажется ограничением на мировую линию связ-

[7]Мы используем однородные координаты.

ности (в дальнейшем мы используем однородные координаты):

$$J = \mathrm{i}\,\frac{dz_1 \circ \bar{z}_1}{z_1 \circ \bar{z}_1} + \mathrm{i}\,\frac{dz_2 \circ \bar{z}_2}{z_2 \circ \bar{z}_2} + \mathrm{i}\,\frac{dz_3 \circ \bar{z}_3}{z_3 \circ \bar{z}_3} \tag{2.6.62}$$

Это кэлеров ток на произведении многообразий $\mathbf{C}\mathrm{P}^2 \times \mathbf{C}\mathrm{P}^2 \times \mathbf{C}\mathrm{P}^2$, а его внешняя производная дает кэлерову (симплектическую) форму:

$$dJ = \Omega. \tag{2.6.63}$$

Утверждение состоит в том, что на подмногообразии $\mathcal{F}_3$, определенном в (2.6.61), эта два-форма равна нулю. Мы можем даже сформулировать несколько более общее наблюдение:

Наблюдение 2. Вложение $\mathcal{F}_3 \hookrightarrow (\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^{\times 3}$ и более общо $\mathcal{F}_N \hookrightarrow (\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1})^{\times N}$ является лагранжевым и изометричным.

Доказательство. Вложение лагранжево. Пусть y – точка в пространстве флагов, т.е. $y \equiv \{x_1, ..., x_N\}$ – набор N комплексных векторов (в $\mathbb{C}^N$, т.е. каждый имеет N компонент), представляющих N ортогональных прямых. Это означает, в частности, что каждый из векторов определен с точностью до умножения на комплексное число, или, другими словами, $y \in (\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1})^{\times N}$. Таким образом, имеется вложение $\mathcal{F}_N \hookrightarrow (\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1})^{\times N}$. Наше утверждение состоит в том, что это вложение лагранжево. Его можно разбить на два:

- 1) два-форма, индуцированная данным вложением на $\mathcal{F}_N$, тождественно равна нулю **и**
- 2) размерность $\mathcal{F}_N$ равна половине размерности $(\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1})^{\times N}$.

Второе утверждение проверяется элементарно. Действительно, так как $\mathcal{F}_N = U(N)/U(1)^N$, его размерность над вещественными числами $\dim \mathcal{F}_N = N^2 - N$, в то время как $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1} = 2(N-1)$, откуда следует, что $\dim\left[(\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1})^{\times N}\right] = 2(N-1)N = 2\dim \mathcal{F}_N$.

Докажем теперь первое утверждение в частном случае $N = 3$. Обобщение на случай произвольного N очевидно. При $N = 3$ имеются три вектора – назовем их a, b, c. Условия ортонормированности этих векторов выглядят так:

$$a_i \bar{b}_i = 0, \quad a_i \bar{c}_i = 0, \quad b_i \bar{c}_i = 0. \tag{2.6.64}$$

Запишем симплектическую форму в объемлющем пространстве $(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^{\times 3}$:

$$\Omega = \omega_{FS}(a) + \omega_{FS}(b) + \omega_{FS}(c)\,. \tag{2.6.65}$$

В различных членах мы рассматриваем формы Фубини-Штуди по координатам a, b или c. Зануление формы Ω на пространстве флагов $\mathcal{F}_3$ означает, что она обращается в нуль на любых двух векторах, касательных к $\mathcal{F}_3$: $\Omega(t_1, t_2) = 0$ при $t_{1,2} \in \Gamma(T\mathcal{F}_3)$. Это мы и собираемся доказать, так как это проще, чем выбирать явную параметризацию пространства флагов. На деле мы будем использовать переполненную систему касательных векторов, которые можно

записать таким образом:

$$v^n(a,b,c) = w^n(a) + w^n(b) + w^n(c), \tag{2.6.66}$$

где

$$w^n(x) = (\lambda^n)_{ij}\bar{x}^i\frac{\partial}{\partial\bar{x}^j} - (\lambda^n)_{ji}x^i\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad n = 1...9 \tag{2.6.67}$$

а λ^n – матрицы Гелл-Манна и единичная матрица. Так как мы тем самым построили девять касательных векторов к шестимерному пространству флагов $\mathcal{F}_3$, не все они линейно независимы. Это не сюрприз, так как некоторые из этих векторных полей (или их линейные комбинации) действуют вдоль орбиты знаменателя $U(1)^3$ фактор-пространства $U(3)/U(1)^3$.

Легко убедиться, что векторные поля (2.6.66)-(2.6.67) аннигилируют условия (2.6.64), определяющие пространство флагов, что в точности означает, что они касательны к нему. Как было анонсировано выше, мы вычислим значение два-формы Ω на этих векторах, т.е. вычислим $\Omega(v^n, v^m)$ и покажем, что эта величина равна нулю.

Используя (2.6.66), получим

$$\Omega(v^n,v^m) = \omega_{FS}(w^n(a),w^m(a)) + \omega_{FS}(w^n(b),w^m(b)) + \omega_{FS}(w^n(c),w^m(c)) \tag{2.6.68}$$

Форма Фубини-Штуди (2.6.53) содержит два члена. Выпишем вклад каждого из членов по отдельности, начиная со второго:

$$\begin{aligned}
&\frac{da_i\bar{a}_i \wedge d\bar{a}_k a_k}{(\bar{a}_j a_j)^2}(w^n(a),w^m(a)) = \\
&= \frac{1}{(\bar{a}_j a_j)^2}\big[da_i(w^n)\bar{a}_i\, d\bar{a}_j(w^m)a_j - da_i(w^m)\bar{a}_i\, d\bar{a}_j(w^n)a_j\big] = \\
&= \frac{1}{(\bar{a}_j a_j)^2}[-(\bar{a}\lambda^n a)(\bar{a}\lambda^m a) - (m\leftrightarrow n)] = 0
\end{aligned}$$

Первый член в форме Фубини-Штуди в свою очередь дает вклад

$$\begin{aligned}
\frac{da_i \wedge d\bar{a}_i}{\bar{a}_j a_j}(w^n(a),w^m(a)) &= \frac{1}{(\bar{a}_j a_j)}\big[da_k(w^n)d\bar{a}_k(w^m) - da_k(w^m)d\bar{a}_k(w^n)\big] = \\
&= \frac{1}{(\bar{a}_j a_j)}\big[-\bar{a}\lambda^n\lambda^m a - (m\leftrightarrow n)\big] = \frac{1}{(\bar{a}_j a_j)}\bar{a}[\lambda^m,\lambda^n]a
\end{aligned}$$

Суммируя вклады от a, b и c, получим:

$$\Omega(v^n,v^m) = \frac{\mathrm{i}}{(\bar{a}_j a_j)}\bar{a}[\lambda^m,\lambda^n]a + \frac{\mathrm{i}}{(\bar{b}_j b_j)}\bar{b}[\lambda^m,\lambda^n]b + \frac{\mathrm{i}}{(\bar{c}_j c_j)}\bar{c}[\lambda^m,\lambda^n]c \tag{2.6.69}$$

Так как a, b, c ортогональны друг другу, то ($\mathbb{1}_3$ – единичная матрица)

$$\frac{\bar{a}\otimes a}{(a,a)} + \frac{\bar{b}\otimes b}{(b,b)} + \frac{\bar{c}\otimes c}{(c,c)} = \mathbb{1}_3\,. \tag{2.6.70}$$

Из (2.6.69-2.6.70) следует, что

$$\Omega(v^n, v^m) = \mathrm{i}\ \mathrm{tr}\left([\lambda^m, \lambda^n]\right) = 0 \tag{2.6.71}$$

Тем самым доказательство закончено.

Вложение изометрично. По аналогии с тем, что имеет место для симплектических структур и что мы обсудили в разделе 2.6.1, на произведении двух многообразий можно естественным образом выбрать метрику, равную сумме метрик на каждом из многообразий. Наше второе утверждение состоит в том, что все то же вложение $\mathcal{F}_N \hookrightarrow (\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1})^{\times N}$ является изометрией, если на пространстве флагов выбрать метрику

$$ds^2 = |u_1 \circ d\bar{u}_2|^2 + |u_1 \circ d\bar{u}_3|^2 + |u_2 \circ d\bar{u}_3|^2, \quad \text{где} \tag{2.6.72}$$

$$u_i \circ \bar{u}_j = \delta_{ij} \tag{2.6.73}$$

Ее можно переписать следующим образом:

$$ds^2 = \frac{1}{2}\left(du_1\left[\bar{u}_2 \otimes u_2 + \bar{u}_3 \otimes u_3\right] d\bar{u}_1 + du_2\left[\bar{u}_1 \otimes u_1 + \bar{u}_3 \otimes u_3\right] d\bar{u}_2 + du_3\left[\bar{u}_1 \otimes u_1 + \bar{u}_2 \otimes u_2\right] d\bar{u}_3\right) \tag{2.6.74}$$

Воспользуемся теперь (2.6.70), для того чтобы переписать каждое из слагаемых в квадратных скобках:

$$ds^2 = \frac{1}{2}\left(du_1\left(\mathbb{1}_3 - \bar{u}_1 \otimes u_1\right) d\bar{u}_1 + du_2\left(\mathbb{1}_3 - \bar{u}_2 \otimes u_2\right) d\bar{u}_2 + du_3\left(\mathbb{1}_3 - \bar{u}_3 \otimes u_3\right) d\bar{u}_3\right). \tag{2.6.75}$$

Ясно, что каждый член вида $du\ (\mathrm{I} - \bar{u} \otimes u)\ d\bar{u}$ представляет собой метрику Фубини-Штуди, записанную в частичной калибровке $|u| = 1$. Отсюда сразу следует, что метрика (2.6.72) равна сумме метрик Фубини-Штуди, ограниченных на подмногообразие (2.6.73):

$$g_{\mathcal{F}_3} = \quad \text{Ограничение метрики} \quad \frac{1}{2}(g^{(1)}_{FS} + g^{(2)}_{FS} + g^{(3)}_{FS}). \tag{2.6.76}$$

Доказательство завершено. ■

Из первой части нашего наблюдения следует, что

$$J|_{\mathcal{F}_3} = df, \tag{2.6.77}$$

где f – некоторая функция[8], поэтому от интеграла $\int\limits_0^1 J_t = f(1) - f(0)$ остается лишь граничный член. Такого рода члены мы не будем рассматривать в настоящем обсуждении.

[8]На самом деле, $f = i \log\left(\epsilon_{abc}\, z_1^a\, z_2^b\, z_3^c\right)$.

2.7 Непрерывный предел

'Потенциальная энергия' $\mathcal{H}$ в (2.6.60) обращается в нуль на фоновой конфигурации (2.6.61): $z_i \circ \bar{z}_{i+1} = 0$. Более того, так как $0 \leqslant \mathcal{H} \leqslant \frac{3}{2}$, сразу ясно, что ферромагнитное и антиферромагнитное основное состояние являются соответственно максимумом и минимумом потенциальной энергии. Так как в дальнейшем мы будем строить разложение вблизи антиферромагнитного вакуума, отсюда следует, что разложение должно начинаться по крайней мере с квадратичных членов, т.е. линейные члены отсутствуют.

Предположим, что число узлов спиновой цепочки пропорционально трем (это условие нужно лишь для упрощения ситуации и не играет большой роли по крайней мере для достаточно длинной спиновой цепочки). Разобьем спиновую цепочку на $\hat{L}$ сегментов длины 3 и рассмотрим для начала лишь один, например k-й, сегмент.

2.7.1 Разложение вблизи "вакуумной" конфигурации

На каждом из трех узлов мы имеем трехмерный комплексный вектор z. Образуем из этих векторов 3×3 матрицу, которую обозначим Z. Антиферромагнитная конфигурация соответствует случаю, когда эти три вектора попарно ортогональны. Теперь мы хотим учесть также флуктуации, а для получения необходимого разложения мы воспользуемся так называемым QR-разложением матрицы. Теорема о QR-разложении утверждает, что любую матрицу Z можно разложить в произведение унитарной матрицы U и верхне-треугольной матрицы B_+:

$$Z = U \circ B_+ \tag{2.7.78}$$

Это утверждение эквивалентно теореме Грама-Шмидта об ортогонализации. Параметризуем B_+ следующим образом:

$$B_+ = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{L}\mathrm{x}_k & \frac{1}{L}\mathrm{y}_k \\ 0 & 1 & \frac{1}{L}\mathrm{z}_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{a}_k & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{b}_k & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{c}_k \end{pmatrix} \tag{2.7.79}$$

Если обозначить столбцы матрицы U за (u_1, u_2, u_3), факторизация (2.7.78) означает, что

$$z_{1,k} = \mathrm{a}_k\, u_{1,k}, \quad z_{2,k} = \mathrm{b}_k\, (u_{2,k} + \frac{1}{L}\mathrm{x}_k\, u_{1,k}), \quad z_{3,k} = \mathrm{c}_k\, (u_{3,k} + \frac{1}{L}\mathrm{y}_k\, u_{1,k} + \frac{1}{L}\mathrm{z}_k\, u_{2,k}) \tag{2.7.80}$$

Из гипотезы о существовании непрерывного предела следует, что $u_{1,k},\ u_{2,k},\ u_{3,k}$ медленно меняются с изменением k, другими словами мы можем аппроксимировать

$$u_{i,m+1} = u_{i,m} + \frac{1}{L} u'_{i,m} + ... \tag{2.7.81}$$

Рассмотрим плотность гамильтониана $\mathcal{H}$ из (2.6.60)

$$\mathcal{H}^{i,j}_{m,n} = \frac{|z_{i,m} \circ \bar{z}_{j,n}|^2}{|z_{i,m}|^2 \, |z_{j,n}|^2}, \tag{2.7.82}$$

для случаев, когда индексы i, j, m, n пробегают определенный диапазон значений. Действительно, нам нужно вычислить значение $\mathcal{H}^{i,j}_{m,n}$ для ближайших соседей и следующих за ближайшими узлов, используя формулы (2.7.80)-(2.7.81) и оставляя лишь ведующие члены $\frac{1}{L^2}$ (на Рисунке 2.2 пояснено, что обозначают эти члены):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^{1,2}_{k,k} = \frac{|z_1 \circ \bar{z}_2|^2}{|z_1|^2 \, |z_2|^2} \simeq \frac{1}{L^2}|\mathrm{x}_k|^2, \qquad \mathcal{H}^{2,3}_{k,k} = \frac{|z_2 \circ \bar{z}_3|^2}{|z_2|^2 \, |z_3|^2} \simeq \frac{1}{L^2}|\mathrm{z}_k|^2, \qquad \mathcal{H}^{1,3}_{k,k} = \frac{|z_1 \circ \bar{z}_3|^2}{|z_1|^2 \, |z_3|^2} \simeq \frac{1}{L^2}|\mathrm{y}_k|^2 \\
&\mathcal{H}^{3,1}_{k-1,k} = \frac{|z_{3,k-1} \circ \bar{z}_{1,k}|^2}{|z_{3,k-1}|^2 \, |z_{1,k}|^2} = \frac{|(u_{3,k-1} + \frac{1}{L}\mathrm{y}_{k-1}\, u_{1,k-1} + \frac{1}{L}\mathrm{z}_{k-1}u_{2,k-1}) \circ \bar{u}_{1,k}|^2}{|u_{3,k-1} + \frac{1}{L}\mathrm{y}_{k-1}\, u_{1,k-1} + \frac{1}{L}\mathrm{z}_{k-1}u_{2,k-1}|^2 |u_{1,k}|^2} \simeq \\
&\qquad \simeq \frac{1}{L^2}|-u'_{3,k} \circ \bar{u}_{1,k} + \mathrm{y}_k|^2 \\
&\mathcal{H}^{3,2}_{k-1,k} = \frac{|z_{3,k-1} \circ \bar{z}_{2,k}|^2}{|z_{3,k-1}|^2 \, |z_{2,k}|^2} = \frac{|(u_{3,k-1} + \frac{1}{L}\mathrm{y}_{k-1}\, u_{1,k-1} + \frac{1}{L}\mathrm{z}_{k-1}u_{2,k-1}) \circ (\bar{u}_{2,k} + \frac{1}{L}\bar{\mathrm{x}}_k\, \bar{u}_{1,k})|^2}{|u_{3,k-1} + \frac{1}{L}\mathrm{y}_{k-1}\, u_{1,k-1} + \frac{1}{L}\mathrm{z}_{k-1}u_{2,k-1}|^2 |u_{2,k} + \frac{1}{L}\mathrm{x}_k\, u_{1,k}|^2} \simeq \\
&\qquad \simeq \frac{1}{L^2}|-u'_{3,k} \circ \bar{u}_{2,k} + \mathrm{z}_k|^2 \\
&\mathcal{H}^{2,1}_{k-1,k} = \frac{|z_{2,k-1} \circ \bar{z}_{1,k}|^2}{|z_{2,k-1}|^2 \, |z_{1,k}|^2} = \frac{|(u_{2,k-1} + \frac{1}{L}\mathrm{x}_{k-1}\, u_{1,k-1}) \circ \bar{u}_{1,k}|^2}{|u_{2,k-1} + \frac{1}{L}\mathrm{x}_{k-1}\, u_{1,k-1}|^2 |u_{1,k}|^2} \simeq \frac{1}{L^2}|-u'_{2,k} \circ \bar{u}_{1,k} + \mathrm{x}_k|^2
\end{aligned} \tag{2.7.83}$$

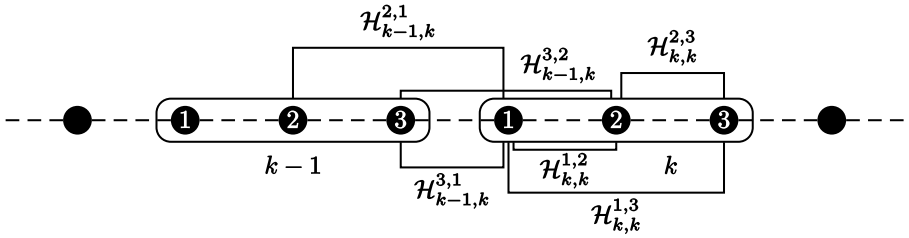


Рис. 2.2: Обозначения различных членов, входящих в формулы (2.7.83).

Следовательно, разложение гамильтониана $H_2 = \sum\limits_i (P_{i,i+1} + \frac{1}{2}\, P_{i,i+2})$ таково:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = \frac{1}{L^2}\Bigg[\sum_k \Bigg(&|\mathrm{x}_k|^2 + \frac{1}{2}|\mathrm{y}_k|^2 + |\mathrm{z}_k|^2 + |-u'_{3,k} \circ \bar{u}_{1,k} + \mathrm{y}_k|^2 + \\
&+\frac{1}{2}|-u'_{3,k} \circ \bar{u}_{2,k} + \mathrm{z}_k|^2 + \frac{1}{2}|-u'_{2,k} \circ \bar{u}_{1,k} + \mathrm{x}_k|^2\Bigg)\Bigg]
\end{aligned} \tag{2.7.84}$$

Перейдем к рассмотрению кинетического члена (2.6.62) и вычислим его вклад в веду-

щем порядке по $\frac{1}{L}$. Простое вычисление дает

$$J_t = \left(\mathrm{i}\,\frac{\dot{z}_1 \circ \bar{z}_1}{z_1 \circ \bar{z}_1} + \mathrm{i}\,\frac{\dot{z}_2 \circ \bar{z}_2}{z_2 \circ \bar{z}_2} + \mathrm{i}\,\frac{\dot{z}_3 \circ \bar{z}_3}{z_3 \circ \bar{z}_3} \right)_{\mathrm{x=y=z=0}} - \tag{2.7.85}$$
$$-\frac{\mathrm{i}}{L}\left(\mathrm{x}\; u_1 \circ \dot{\bar{u}}_2 + \;\mathrm{y}\; u_1 \circ \dot{\bar{u}}_3 + \mathrm{z}\; u_2 \circ \dot{\bar{u}}_3 - \text{компл.сопр.} \right) \; + ...$$

Но ранее мы уже показали, что первая часть данного выражения – полная производная:

$$\left(\mathrm{i}\,\frac{\dot{z}_1 \circ \bar{z}_1}{z_1 \circ \bar{z}_1} + \mathrm{i}\,\frac{\dot{z}_2 \circ \bar{z}_2}{z_2 \circ \bar{z}_2} + \mathrm{i}\,\frac{\dot{z}_3 \circ \bar{z}_3}{z_3 \circ \bar{z}_3} \right)_{\mathrm{x=y=z=0}} = \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \tag{2.7.86}$$

и, следовательно, это слагаемое можно опустить с точностью до граничных членов. Далее необходимо объединить (2.7.84) и (2.7.85) и "проинтегрировать" по вспомогательным переменным $\mathrm{x}_k, \mathrm{y}_k, \mathrm{z}_k$.

Это вычисление станет более наглядным, если рассмотреть обобщение гамильтониана $\hat{H}_2 = \sum\limits_{i=1}^{L} (P_{i,i+1} + a\, P_{i,i+2})$, где '$a$' – произвольный положительный параметр. Вывод соответствующего лагранжиана при помощи техники когерентных состояний в точности повторяет все описанные шаги. Результат таков:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{L^2}\,(1+a)\,\sum(|x_k|^2 + |y_k|^2 + |z_k|^2) - \tag{2.7.87}$$
$$-\frac{1}{L}\,x_k(\mathrm{i}\,u_{1,k} \circ \dot{\bar{u}}_{2,k} - a\frac{1}{L}\bar{u}'_{2,k} \circ u_{1,k}) + \frac{1}{L}\bar{x}_k(\mathrm{i}\,\bar{u}_{1,k} \circ \dot{u}_{2,k} + a\frac{1}{L}u'_{2,k} \circ \bar{u}_{1,k}) -$$
$$-\frac{1}{L}\,y_k(\mathrm{i}\,u_{1,k} \circ \dot{\bar{u}}_{3,k} - \frac{1}{L}\bar{u}'_{3,k} \circ u_{1,k}) + \frac{1}{L}\bar{y}_k(\mathrm{i}\,\bar{u}_{1,k} \circ \dot{u}_{3,k} + \frac{1}{L}u'_{3,k} \circ \bar{u}_{1,k}) - \tag{2.7.88}$$
$$-\frac{1}{L}\,z_k(\mathrm{i}\,u_{2,k} \circ \dot{\bar{u}}_{3,k} - a\,\frac{1}{L}\bar{u}'_{3,k} \circ u_{2,k}) + \frac{1}{L}\bar{z}_k(\mathrm{i}\,\bar{u}_{2,k} \circ \dot{u}_{3,k} + a\,\frac{1}{L}u'_{3,k} \circ \bar{u}_{2,k}) -$$
$$-\frac{1}{L^2}\sum(|u'_{3,k} \circ \bar{u}_{1,k}|^2 + a\,|u'_{3,k} \circ \bar{u}_{2,k}|^2 + a\,|u'_{2,k} \circ \bar{u}_{1,k}|^2)$$

Чтобы взять гауссов интеграл по переменным x_k, y_k, z_k, удобно использовать тождество

$$A|w|^2 + Bw + C\bar{w} = A(w + \frac{C}{A})(\bar{w} + \frac{B}{A}) - \frac{BC}{A} \tag{2.7.89}$$

В результате интегрирования мы эффективно опускаем члены, стоящие в скобках. Соответствующие переменным x_k, y_k, z_k коэффициенты A, B, C приведены в таблице:

	A	B	C=$\bar{\mathrm{B}}$
x_k	$-\frac{1+a}{L^2}$	$-\frac{1}{L}(\mathrm{i}\,u_{1,k} \circ \dot{\bar{u}}_{2,k} - a\frac{1}{L}\bar{u}'_{2,k} \circ u_{1,k})$	$\frac{1}{L}(\mathrm{i}\,\bar{u}_{1,k} \circ \dot{u}_{2,k} + a\frac{1}{L}u'_{2,k} \circ \bar{u}_{1,k})$
y_k	$-\frac{1+a}{L^2}$	$-\frac{1}{L}(\mathrm{i}\,u_{1,k} \circ \dot{\bar{u}}_{3,k} - \frac{1}{L}\bar{u}'_{3,k} \circ u_{1,k})$	$\frac{1}{L}(\mathrm{i}\,\bar{u}_{1,k} \circ \dot{u}_{3,k} + \frac{1}{L}u'_{3,k} \circ \bar{u}_{1,k})$
z_k	$-\frac{1+a}{L^2}$	$-\frac{1}{L}(\mathrm{i}\,u_{2,k} \circ \dot{\bar{u}}_{3,k} - a\,\frac{1}{L}\bar{u}'_{3,k} \circ u_{2,k})$	$\frac{1}{L}(\mathrm{i}\,\bar{u}_{2,k} \circ \dot{u}_{3,k} + a\,\frac{1}{L}u'_{3,k} \circ \bar{u}_{2,k})$

Суммируя значения $-\frac{BC}{A}$ по переменным x, y, z и прибавляя полученный результат к послед-

ней строке в (2.7.88), получим[9]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{1+a}(|u_{1,k}\circ\dot{\bar{u}}_{2,k}|^2 + a^2\,\frac{1}{L^2}|\bar{u}'_{2,k}\circ u_{1,k}|^2) - \frac{\mathrm{i}\,a}{1+a}\frac{1}{L}\epsilon_{\mu\nu}(u_{1,k}\circ\partial_\mu\bar{u}_{2,k})(\bar{u}_{1,k}\circ\partial_\nu u_{2,k}) + \tag{2.7.90}$$
$$+\frac{1}{1+a}(|u_{1,k}\circ\dot{\bar{u}}_{3,k}|^2 + \frac{1}{L^2}|\bar{u}_{1,k}\circ u'_{3,k}|^2) - \frac{\mathrm{i}}{1+a}\frac{1}{L}\epsilon_{\mu\nu}(u_{1,k}\circ\partial_\mu\bar{u}_{3,k})(\bar{u}_{1,k}\circ\partial_\nu u_{3,k}) +$$
$$+\frac{1}{1+a}(|u_{2,k}\circ\dot{\bar{u}}_{3,k}|^2 + a^2\,\frac{1}{L^2}|\bar{u}_{2,k}\circ u'_{3,k}|^2) - \frac{\mathrm{i}\,a}{1+a}\frac{1}{L}\epsilon_{\mu\nu}(u_{2,k}\circ\partial_\mu\bar{u}_{3,k})(\bar{u}_{2,k}\circ\partial_\nu u_{3,k})$$
$$-\frac{1}{L^2}\sum(|u'_{3,k}\circ\bar{u}_{1,k}|^2 + a\,|u'_{3,k}\circ\bar{u}_{2,k}|^2 + a\,|u'_{2,k}\circ\bar{u}_{1,k}|^2)$$

Интересно заметить, что коэффициенты перед членами $|u'_{3,k}\circ\bar{u}_{1,k}|^2, |u'_{3,k}\circ\bar{u}_{2,k}|^2, |u'_{2,k}\circ\bar{u}_{1,k}|^2$ оказываются равными вследствие сокращений $a^2 - a(1+a) = 1-(1+a) = -a$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{1+a}(|u_{1,k}\circ\dot{\bar{u}}_{2,k}|^2 - a\,\frac{1}{L^2}|\bar{u}'_{2,k}\circ u_{1,k}|^2) - \frac{\mathrm{i}\,a}{1+a}\frac{1}{L}\epsilon_{\mu\nu}(u_{1,k}\circ\partial_\mu\bar{u}_{2,k})(\bar{u}_{1,k}\circ\partial_\nu u_{2,k}) + \tag{2.7.91}$$
$$+\frac{1}{1+a}(|u_{1,k}\circ\dot{\bar{u}}_{3,k}|^2 - a\,\frac{1}{L^2}|\bar{u}_{1,k}\circ u'_{3,k}|^2) - \frac{\mathrm{i}}{1+a}\frac{1}{L}\epsilon_{\mu\nu}(u_{1,k}\circ\partial_\mu\bar{u}_{3,k})(\bar{u}_{1,k}\circ\partial_\nu u_{3,k}) +$$
$$+\frac{1}{1+a}(|u_{2,k}\circ\dot{\bar{u}}_{3,k}|^2 - a\,\frac{1}{L^2}|\bar{u}_{2,k}\circ u'_{3,k}|^2) - \frac{\mathrm{i}\,a}{1+a}\frac{1}{L}\epsilon_{\mu\nu}(u_{2,k}\circ\partial_\mu\bar{u}_{3,k})(\bar{u}_{2,k}\circ\partial_\nu u_{3,k})$$

Конечно, в каждой строке первый член можно привести к каноническому релятивистски-инвариантному виде перерастяжением пространственной переменной. Весьма важно, однако, что коэффициенты трех членов с ϵ-символом не все одинаковы. Мы хотим, чтобы эти три члена были ограничением замкнутой формы, чтобы мы могли рассматривать их как топологический член – это нетривиальное условие, фиксирующее значение a. Покажем, как это происходит.

Во-первых, введем обозначения для уже встречавшихся нам ранее два-форм:

$$u \equiv \mathrm{i}\,(u_1\circ d\bar{u}_2)\wedge(\bar{u}_1\circ du_2) \tag{2.7.92}$$
$$v \equiv -\mathrm{i}\,(u_1\circ d\bar{u}_3)\wedge(\bar{u}_1\circ du_3) \tag{2.7.93}$$
$$w \equiv \mathrm{i}\,(u_2\circ d\bar{u}_3)\wedge(\bar{u}_2\circ du_3) \tag{2.7.94}$$

Тогда сумма трех содержащих ϵ-символ членов в (2.7.91) представляет собой ограничение на мировую поверхность два-формы

$$\omega = \frac{1}{1+a}\,(v - a\,u - a\,w) \tag{2.7.95}$$

Начнем с того, что форма Фубини-Штуди каждого пространства $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ замкнута. Вспомним также, что

$$\Omega_1 = \mathrm{i}\left(du_1\wedge d\bar{u}_1 - (du_1\circ\bar{u}_1)\wedge(d\bar{u}_1\circ u_1)\right), \tag{2.7.96}$$

и аналогичные выражения имеют место для Ω_2 и Ω_3. Воспользуемся тождеством $u_1\otimes\bar{u}_1 + u_2\otimes\bar{u}_2 + u_3\otimes\bar{u}_3 = \mathbb{1}_3$ и перепишем ограничение формы Ω_1 на пространство флагов $\mathcal{F}_3$ следующим

[9]Используется соглашение об ϵ-символе: $\epsilon_{01} = 1$, т.е., например, $\epsilon_{\mu\nu}\,\partial_\mu x\,\partial_\nu y = \dot{x}\,y' - \dot{y}\,x'$.

образом:

$$\Omega_1|_{\mathcal{F}_3} = \mathrm{i}\Big((du_1 \circ \bar{u}_2) \wedge (d\bar{u}_1 \circ u_2) + (du_1 \circ \bar{u}_3) \wedge (d\bar{u}_1 \circ u_3)\Big) = u - v \tag{2.7.97}$$

Внешнее дифференцирование и ограничение на подмногообразие – коммутативные операции, следовательно, ограниченная форма является замкнутой два-формой на $\mathcal{F}_3$. Аналогично $\Omega_2|_{\mathcal{F}_3} = w - u$, $\Omega_3|_{\mathcal{F}_3} = v - w$. В частности, мы видим, что сумма $(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3)|_{\mathcal{F}_3} = 0$ равна нулю, как и предполагалось.

Покажем, что форма ω выражается через Ω_i и, следовательно, замкнута только при $a = \frac{1}{2}$. Действительно, в евклидовом векторном пространстве, образованном формами (u, v, w), формы Ω_i лежат в плоскости, ортогональной вектору $(1, 1, 1)$. С другой стороны, форме ω отвечает вектор $(a, -1, a)$, и этот вектор ортогонален $(1, 1, 1)$ лишь при $a = \frac{1}{2}$. Для данного значения a будем иметь

$$\omega = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \frac{1}{2} (\Omega_3 - \Omega_1) = \frac{1}{3}(\Omega_3 - \Omega_1). \tag{2.7.98}$$

Перерастягивая пространственную переменную $x \to \frac{1}{\sqrt{2}\,L} x$, получим действие

$$\begin{aligned} \mathcal{S} =& m \int dt\, dx \, \Big(\frac{\sqrt{2}}{3} \left[|u_1 \circ \partial_\mu \bar{u}_2|^2 + |u_1 \circ \partial_\mu \bar{u}_3|^2 + |u_2 \circ \partial_\mu \bar{u}_3|^2 \right] - \\ & - \frac{\mathrm{i}}{3} \epsilon_{\mu\nu} \left[(u_1 \circ \partial_\mu \bar{u}_2)\, (\bar{u}_1 \circ \partial_\nu u_2) + 2\, (u_1 \circ \partial_\mu \bar{u}_3)\, (\bar{u}_1 \circ \partial_\nu u_3) + (u_2 \circ \partial_\mu \bar{u}_3)\, (\bar{u}_2 \circ \partial_\nu u_3) \right] \Big). \end{aligned} \tag{2.7.99}$$

Первая строка в (2.7.99) представляет собой так называемую нормальную метрику на пространстве флагов $\mathcal{F}_3$ (см. Раздел 2.7.2), в то время как вторая строка задает ограничение на мировую поверхность формы $\omega|_{\mathcal{F}}$, где $\omega|_{\mathcal{F}}$ – в свою очередь ограничение на пространство флагов замкнутой два-формы (2.7.98). Следует также помнить, что векторы $u_{1,2,3}$ ортонормированы. Весьма интересное свойство действия (2.7.99) состоит в том, что оно содержит θ-член специального вида. Априори имеется два θ-угла, так как соответвующая группа когомологий двумерна[10]: $H^2(\mathcal{F}_3, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$, поэтому интересный вопрос состоит в том, почему в настоящем контексте появляется именно данная форма ω.

2.7.2 Метрики на пространствах флагов

В настоящем разделе будет показано, что полученная нами метрика (2.7.99) на пространстве флагов $\mathcal{F}_3$ не является наиболее общей метрикой, которую допускают симметрии

[10]Как уже обсуждалось в Главе 1, существует простой выбор представителей де-Рама для данной группы когомологий. Обозначим за $\tilde{\Omega}_i = \Omega_i|_{\mathcal{F}_3}$, $i = 1, 2, 3$ ограничения на пространство флагов трех форм Фубини-Штуди. Форма $\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^{3} \theta_i \tilde{\Omega}_i$ замкнута. Выше уже говорилось, что $\sum_i \tilde{\Omega}_i = 0$, поэтому форма $\tilde{\Omega}$ параметризуется вектором $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mod (1, 1, 1)$, принимающим значение в двумерном пространстве. Можно проверить, что это в точности пространство замкнутых два-форм, не являющихся точными.

пространства флагов[11]. Это становится ясно практически сразу, так как можно умножить каждый из трех членов в первой строке действия (2.7.99) на произвольную положительную константу, не нарушив при этом $SU(3)$ симметрию. Ниже мы получим наиболее общую $SU(N)$-инвариантную метрику на $\mathcal{F}_N$, но во многих случаях нас могут интересовать специальные метрики, обладающие дополнительными свойствами, например кэлеровы или эйнштейновы метрики — читатель может найти подробное обсуждение этих случаев в работе [29]. В частности, из этой работы следует, что нормальная метрика, входящая в действие (2.7.99), эйнштейнова, но не кэлерова (хотя само пространство флагов является кэлеровым многообразием – это означает, что на нем *существует* кэлерова метрика).

Заметим, что дальнейшее рассмотрение во многом повторяет то, что мы делали в Главе 1 для случая симплектических форм. Начнем с очевидного факта, что, так как $U(1)^N \subset U(N)$, алгебра Ли $\mathfrak{u}(N)$ допускает разложение

$$\mathfrak{u}(n) = \underbrace{\mathfrak{u}(1) \oplus ... \oplus \mathfrak{u}(1)}_{n \text{ копий}} \oplus \mathfrak{h} \equiv \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{m} \tag{2.7.100}$$

На самом деле это просто разложение алгебры Ли на картановскую подалгебру и ассоциированное пространство корней $\mathfrak{m} = \bigoplus\limits_{\text{все корни } \alpha} E_\alpha$, где E_α – одномерное подпространство, соответствующее данному корню α. $\mathcal{F}_3$ не является симметрическим пространством, т.е. $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \nsubseteq \mathfrak{t}$ — это очевидно, так как коммутатор двух "корней" в общем случае вновь порождает корень[12] $[E_\alpha, E_\beta] \subset E_{\alpha+\beta}$, а не картановский генератор.

Напомним стандартную процедуру построения метрик на фактор-пространствах. Нужно взять групповой элемент $g \in U(N)$ и построить ток

$$J = g^{-1}dg \ \in \ \mathfrak{u}(N). \tag{2.7.101}$$

Действие стабилизатора $T = U(1)^N$ на J таково:

$$h \circ J = (gh)^{-1}d(gh) = h^{-1}Jh + h^{-1}dh \tag{2.7.102}$$

Последний член принадлежит $\mathfrak{t}$. Поэтому преобразование $\pi(J)$ — проекции тока J на $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{u}(N)$ — особенно простое:

$$h \circ \pi(J) = h^{-1}\pi(J)h, \tag{2.7.103}$$

или, другими словами, подалгебра $\mathfrak{t}$ представлена на $\pi(J)$. Зачастую строят метрику на G/T (соответствующее разложение алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{t}$) просто как $\mathrm{tr}\,(\pi(J)^2)$, но важно понимать, что эта метрика является единственной возможной (с точностью до растяжения) лишь в том случае, когда представление T на $\mathfrak{m}$ *неприводимо*. В рассматриваемом нами случае это

[11] Я благодарен А. Герасимову и С. Шаташвили, которые обратили мое внимание на тот факт, что на пространстве флагов $\mathcal{F}_N$ существует семейство метрик.

[12] За исключением случая алгебры $\mathfrak{su}(2)$, которая обладает лишь одним положительным и одним отрицательным корнем. В этом случае $\mathcal{F}_2 \simeq SU(2)/U(1) \simeq S^2$ – сфера, которая, очевидно, является симметрическим пространством.

не так (и в общем случае неприводимое (над $\mathbb{C}$) представление группы $U(1)$ должно быть одномерным — это верно также и в нашем случае, так как N групп $U(1)$ коммутируют).

Легко видеть, что каждая компонента $j_{ab},\ a \neq b$ матрицы J образует неприводимое представление группы $U(1)^N$ с весом

$$(0,\ \dots,\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{a-я позиция}}}{1},\ \dots,\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{b-я позиция}}}{-1},\ \dots,0), \tag{2.7.104}$$

что означает, что для всех $a > b$ величина $j_{ab}j_{ba} = |j_{ab}|^2$ является инвариантом. Следовательно, наиболее общая метрика имеет вид

$$ds^2 = \sum_{a>b} C_{ab}|j_{ab}|^2\,, \quad \text{где} \quad C_{ab} > 0\,. \tag{2.7.105}$$

Положительность констант C_{ab} необходима для того, чтобы метрика была невырожденной.

2.8 Массовая щель и связь с тримеризацией

Перейдем к конкретному приложению общей теории. В последнее время появился интерес к спиновым цепочкам, обладающим свойством 'тримеризации' или даже более общо 'N-меризации'. Это означает, что N соседних узлов спиновой цепочки образуют связь — другими словами, N фундаментальных представлений $SU(N)$ комбинируются в синглет. Это можно назвать также 'барионизацией', если использовать терминологию физики элементарных частиц. В случае $N = 2$ это явление называется димеризацией, и оно хорошо изучено (см., например, [101]). Существует даже модель, в которой основное состояние является примером точной димеризации — этот так называемая модель Маджумдара-Гоша, а в последние годы были найдены также обобщения на случай N-меризации [98].

В работе [53] рассмотрена спиновая цепочка, имеющая прямое отношение к тем цепочкам, которые мы обсуждали в настойщей Главе. Гамильтониан этой цепочки таков:

$$\tilde{H} = J_1 \sum_i \left(\cos\theta\ (\mathbf{S}_i\mathbf{S}_{i+1}) + \sin\theta\ (\mathbf{S}_i\mathbf{S}_{i+1})^2\right) + J_2 \sum_i \left(\cos\theta\ (\mathbf{S}_i\mathbf{S}_{i+2}) + \sin\theta\ (\mathbf{S}_i\mathbf{S}_{i+2})^2\right) \tag{2.8.106}$$

Здесь $\mathbf{S}$ – это $su(2)$ спиновые операторы, записанные в векторном представлении размерности три.

Можно убедиться, что оператор $P = (\mathbf{S}_i\mathbf{S}_{i+1}) + (\mathbf{S}_i\mathbf{S}_{i+1})^2$ является оператором перестановки в тензорном произведении $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$. Это означает, что при $J_2 = \frac{1}{2}J_1 \equiv \frac{1}{2}J$ и $\theta = \frac{\pi}{4}$ записанный выше $SU(2)$-инвариантный гамильтониан превращается в $SU(3)$-инвариантный гамильтониан $\tilde{H} = J \sum_i (P_{i,i+1} + \frac{1}{2}P_{i,i+2})$, совпадающий с нашим гамильтонианом (2.2.2). На Рисунке 2.3, взятом из работы [53], представлена полученная численным путем фазовая диаграмма цепочки (2.8.106). Мы видим, что для интересующих нас значений параметров мы

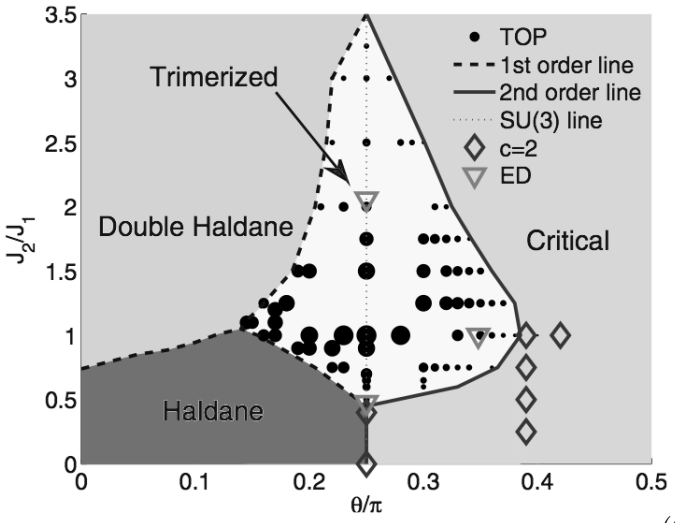


Рис. 2.3: Фазовая диаграмма системы с гамильтонианом (2.8.106) [53].

попадаем в самый низ тримеризованной фазы, к тройной вершине фазовой диаграммы. Численные вычисления, выполненные авторами работы [53], также указывают на тот факт, что в тримеризованной фазе модель имеет энергетическую щель в спектре, как и халдейновская спиновая цепочка с взаимодействием $\vec{S}_i\vec{S}_{i+1}$ в случае целого спина, однако для наших значений параметров эта щель либо очень мала, либо равна нулю. Исходя из нашего анализа, это также представляется вполне возможным, так как σ-модель имеет ненулевой θ-член в случае фундаментального представления $SU(3)$, т.е. при $m = 1$. Было бы весьма интересно исследовать данный вопрос аналитически для случая сигма-модели пространства флагов с действием (2.7.99).

2.9 Обсуждение

В данной Главе мы рассмотрели спиновую цепочку, низкоэнергетические возбуждения которой вблизи анти-ферромагнитного основного состояния описываются сигма-моделью, таргет-пространством которой является пространство полных флагов[13] $\mathcal{F}_3 \simeq GL(3,\mathbb{C})/B \simeq U(3)/U(1)^3$ (со спецальной S_3-симметричной метрикой). По всей видимости, сигма-модель пространства флагов описывает малые возбуждения над тримеризованным основным состоянием (или над N-меризованным в более общем случае $SU(N)$) определенной спиновой цепочки. Данный вывод согласуется с недавними результатами в физике твердого тела [53; 98].

Помимо этих приложений, можно применить нашу технику к другим интересным случаям. Открывается возможность найти и классифицировать всевозможные лагранжевы вложения и построить соответствующие спиновые цепочки. Стоит также отметить, что хотя в настоящей Главе мы имели дело исключительно с лагранжевыми вложениями, на самом деле это даже слишком сильное требование, и для того чтобы большая часть наших выводов оставалась в силе, достаточно лишь изотропных вложений (Вложение $M \hookrightarrow (N,\Omega)$ назы-

[13] B обозначает борелевскую подгруппу $GL(3,\mathbb{C})$.

вается изотропным, если $\Omega|_M = 0$ — т.е. дополнительных ограничений на размерность M не накладывается). Такого рода ситуации весьма часто встречаются в литературе по симплектической геометрии [111], и было бы интересно понять, какой смысл они имеют с точки зрения спиновых цепочек.

Другой интересный вопрос связан с интегрируемостью спиновых цепочек / сигма-моделей. Давно известно, что бозонная $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ модель не является интегрируемой, а потенциальные солитонные частицы не самом деле подвергаются 'конфайнменту' [55]. С другой стороны, если добавить фермионы, то ситуация драматическим образом меняется, и в некоторых случаях солитоны становятся свободными [85]. Ранее в настоящей Главе мы показали, что $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ сигма-модель получается из альтернированной спиновой цепочки Аффлека [17]. Вполне вероятно, что фермионные $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ модели можно получить похожим способом (таргет-пространства типа $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N|M}$ уже были таким способом получены в [52]). Основная трудность, однако, состоит в том, что в общем случае эти спиновые цепочки для произвольных представлений (спинов) неинтегрируемы[14]. Таким образом, вопрос можно разбить на два:

- 1) можно ли найти семейство интегрируемых спиновых цепочек (параметризованное спином S), которые давали бы в пределе требуемую сигма-модель **и**
- 2) если нет, то можно ли найти в спиновой цепочке какие-то следы интегрируемости сигма-модели (даже если сама спиновая цепочка не является интегрируемой).

Было бы интересно реализовать эту программу для $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$-моделей, в особенности попытаться понять на уровне спиновой цепочки, в чем причина такого сильного различия на квантовом уровне между бозонной $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ сигма-моделью и $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$-моделью с фермионами.

[14] Я благодарен Ф. Смирнову, который первым обратил мое внимание на этот факт.

Глава 3. Пределы Халдейна спиновых цепочек: общий случай

3.1 Введение

В этой Главе мы обобщим результаты предыдущей на случай спиновых цепочек с группой симметрии $SU(N)$, непрерывные пределы которых дают сигма-модели пространств флагов общего вида (т.е. $\frac{U(N)}{U(n_1)\times\cdots\times U(n_m)}$, где $\sum\limits_i n_i = N$). В узлах спиновой цепочки располагаются спины в представлениях $V_{i,S} = \mathrm{Sym}(V_i^{\otimes S})$, где V_i – кососимметрическое тензорное представление ранга n_i. Будут выведены универсальные формулы для метрики на таргет-пространстве и для θ-члена, а также доказано, что в общем случае халдейновская $\bmod 2$-периодичность по S заменяется на $\bmod m$-периодичность [49].

Во многом вдохновение для настоящей Главы почерпнуто из работы Ф.А.Березина [36], который, вероятно, был одним из первых, кто стал использовать геометрический подход к квантованию в интересующем нас смысле, а также из гораздо более современной работы Э.Виттена [112]. Важная работа по математическому описанию когерентных состояний была проделана А.М.Переломовым, см. [13]. Существенное продвижение в понимании пределов Халдейна было достигнуто И. Аффлеком, см. [17].

3.2 Континуальные интегралы для спиновых цепочек

Напомним еще раз, как выглядят континуальные интегралы для спиновых цепочек. Типичное представление для статсуммы таково:

$$\mathcal{Z} \equiv \mathrm{tr}\,(e^{-\beta\mathcal{H}_X}) = \int \prod_{i,\,t\in[0,1]} d\mu(z_i(t),\bar z_i(t))\ \exp(-\mathcal{S}),\ \text{где} \tag{3.2.1}$$

$$z_i \in \mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1} \quad \text{и} \quad \mathcal{S} = m\int\limits_0^1 dt \sum_i \left(i\frac{\dot z_i \circ \bar z_i}{z_i\circ\bar z_i} + \beta \frac{z_i\circ\bar z_{i+1}}{z_i\circ\bar z_i}\frac{z_{i+1}\circ\bar z_i}{z_{i+1}\circ\bar z_{i+1}}\right) \tag{3.2.2}$$

Это формула для случая спиновой цепочки с взаимодействием ближайших соседей и гамильтонианом $\mathcal{H}_X = \sum_i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}$, обладающим $SU(N)$-симметрией; m – положительное целое число, параметризующее представление в каждом узле цепочки, т.е. число m соответствует m-й симметрической степени фундаментального представления. В дальнейшем мы будем обсуждать различные обобщения, как кинетического члена, так и гамильтониана.

3.2.1 Отображение момента для действия группы вращений петли

В настоящем разделе мы рассмотрим кинетический член в действии (3.2.2) под другим углом. Как и раньше, будем предполагать, что M – симплектическое многообразие. Пусть $\mathcal{L}M$ – его пространство петель, т.е. пространство всевозможных гладких отображений окружности S^1 в M. Точка в пространстве петель $\gamma \in \mathcal{L}M$ – это сама 'петля' $\gamma(t) \in M : \gamma(1) = \gamma(0)$. Касательный вектор к $\mathcal{L}M$ в точке γ – это периодически зависящий от 'времени' вектор $\xi(t) \in T_{\gamma(t)}M : \xi(1) = \xi(0)$.

Важный факт состоит в том, что, используя симплектическую форму Ω на M, можно определить симплектическую форму $\mathring{\Omega}$ на пространстве петель $\mathcal{L}M$. Пусть $\xi(t), \eta(t)$ – два касательных вектора к $\mathcal{L}M$ в точке γ. Значение симплектической формы $\mathring{\Omega}$ на данной паре векторов равно

$$\mathring{\Omega}(\xi, \eta) = \int_0^1 dt\ \Omega(\xi(t), \eta(t)) \tag{3.2.3}$$

Заметим, что на пространстве $\mathcal{L}M$ действует группа S сдвигов вдоль петли. Эта группа изоморфна $U(1)$, так как петля представляет собой окружность. Более конкретно, действие группового элемента $g_\alpha \in S$ на петле $\gamma(t)$ дается формулой

$$g_\alpha \circ \gamma(t) = \gamma(t + \alpha) \tag{3.2.4}$$

Выбрав локальные координаты x_i на M, можно записать векторное поле, порождающее бесконечно малое вращение петли, в следующем виде[1]:

$$V = \int dt\ \dot{x}_i(t)\, \frac{\delta}{\delta x_i(t)} \tag{3.2.5}$$

Данное векторное поле сохраняет симплектическую форму (3.2.3). Чему равно сооветствующее отображение момента? Чтобы ответить на данный вопрос, вычислим значение формы $\mathring{\Omega}$ на векторе V:

$$\mathring{\Omega}(\bullet, V) = \int_0^1 dt\ \Omega(\delta\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \tag{3.2.6}$$

[1]Отметим, что возникновение функциональной производной связано с тем, что $\mathcal{L}M$ – бесконечномерное пространство. Тем не менее, сама группа S одномерна.

Запишем также это равенство в компонентах:

$$\mathring{\Omega}(\bullet, V) = \int\limits_0^1 dt\ \delta x^i(t)\, \Omega_{ij}\, \dot{x}^j(t) \tag{3.2.7}$$

Нам необходимо найти такую функцию μ на $\mathcal{L}M$, вариация которой при деформации контура $\delta\gamma$ даст правую часть формулы (3.2.7). Эта функция – не что иное, как 'симплектическое действие'

$$\mu(\gamma) = \int_{D_\gamma} \Omega, \tag{3.2.8}$$

где D_γ – диск в M, границей которого является кривая γ. Как и должно быть, данное выражение зависит лишь от кривой γ — границы D_γ (согласно теореме Стокса). Ясно, что симплектическое действие совпадает с кинетическим членов в классическом действии спиновой цепочки (в периодическом случае) – см., например, (3.2.2).

3.2.2 Действие в суперсимметричном виде

Пусть $\mathcal{H} = \mathrm{Sym}(V_{\mathrm{fund}}^{\otimes m})$ – гильбертово пространство одного спина. Когда гамильтониан равен нулю, $H = 0$, статсумма одного спина имеет вид (данное выражение следует сравнить с (3.2.2)):

$$\mathcal{Z} = \mathrm{tr}\,(\mathbb{1}) = \dim \mathcal{H} = \int \prod_{t\in[0,1]} d\mu(z(t),\ \bar{z}(t))\ \exp\left(-m \int\limits_0^1 dt\, i\, \frac{\dot{z}\circ\bar{z}}{z\circ\bar{z}}\right), \tag{3.2.9}$$

где $d\mu$ – форма объема на $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$. Форма объема пропорциональна старшей степени формы Фубини-Штуди. Выбрав вещественные локальные координаты $x_1 \ldots x_{2N-2}$ на $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$, представим форму Фубини-Штуди в виде $\omega = \omega_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$. В таком случае форму объема можно записать в виде $d\mu = \mathrm{Pf}(\omega)\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{2N}$, где $\mathrm{Pf}(\omega) = \sqrt{\det \omega}$. Пфаффиан в свою очередь можно записать в виде гауссова интеграла по вещественным фермионным переменным: $\mathrm{Pf}(\omega) = \int \prod\limits_i d\psi_i\ e^{\psi_i\, \omega_{ij}\, \psi_j}$. Тогда (3.2.9) примет вид

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{t\in[0,1]} dz_i(t) \wedge \bar{z}_i(t) \prod_{t\in[0,1]} d\psi_i(t)\ \exp\left(-m \int\limits_0^1 dt\, \left[i\, \frac{\dot{z}\circ\bar{z}}{z\circ\bar{z}} + \psi_i(t)\, \omega_{ij}(t)\, \psi_j(t)\right]\right) \tag{3.2.10}$$

Действие, стоящее в показателе экспоненты, можно записать в явно суперсимметричной форме, т.е. в своего рода суперпространстве. Действительно, введем пару комплексно сопряженных фермионных координат $\theta, \bar{\theta}$, а также следующие 'суперполя':

$$Z_i(t, \bar{\theta}) = z_i(t) + \frac{i}{\sqrt{m}}\, \bar{\theta}\, \psi_i(t) + i\, \theta\bar{\theta}\, \dot{z}_i, \qquad i = 1 \ldots N \tag{3.2.11}$$

$$\bar{Z}_i(t, \theta) = \bar{z}_i(t) + \frac{i}{\sqrt{m}}\, \theta\, \bar{\psi}_i(t) - i\, \theta\bar{\theta}\, \dot{\bar{z}}_i \tag{3.2.12}$$

Тогда действие можно записать в следующем замечательно простом виде:

$$\mathcal{S} = m \int\limits_0^1 dt \int d\theta\, d\bar{\theta}\ \mathcal{K}(Z, \bar{Z}), \quad \text{где} \tag{3.2.13}$$

$$\mathcal{K}(Z, \bar{Z}) = \ln\left(\sum_{i=1}^{N} Z_i \bar{Z}_i\right) \tag{3.2.14}$$

– кэлеров потенциал проективного пространства $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$.

3.3 Динамический аспект

В дальнейшем мы будем иметь дело с классическими гамильтонианами, минимумы которых достигаются в точках, в которых обращается в нуль отображение момента. Поэтому напомним, что такое отображение момента и каковы его основные свойства.

3.3.1 Свойства отображения момента

Пусть M – симплектическое многообразие с симплектической формой Ω. Пусть имеется также действие группы Ли G на M, сохраняющее симплектическую форму, т.е. $\mathcal{L}_{X_a}\Omega = 0$, где X_a – векторное поле на M, задающее действие однопараметрической подгруппы G, порожденной элементом $a \in \mathfrak{g}$, а $\mathcal{L}_Y = d \circ i_Y + i_Y \circ d$ – производная Ли. Так как форма Ω по определению замкнута и $\mathcal{L}_{X_a}\Omega = 0$, то $d(i_{X_a}\Omega) = 0$, следовательно, если M односвязно (в рассматриваемых нами примерах это требование будет выполняться), то $i_{X_a}\Omega = d\mu_a$, где μ_a – функция на M, которую, конечно, также можно рассматривать как функцию от a. Так как векторное поле X_a зависит линейно от a, μ_a – тоже линейная функция элемента алгебры Ли a, следовательно, можно опустить индекс a и рассматривать всевозможные 'a' одновременно. При этом следует считать, что $\mu \in \mathfrak{g}^*$.

Резюмируем обсужденные факты в следующем определении: отображение момента – это отображение $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ из симплектического многобразия M в пространство, двойственное алгебре Ли $\mathfrak{g}$; данное отображение должно обладать такими свойствами:

(1) оно G-эквивариантно, т.е. $\mu(g \circ x) = Ad_g\, \mu(x) \equiv g\mu(x)g^{-1}$, где $x \in M, g \in G$.

(2) оно является производящей функцией гамильтонианов, соответствующих действию группы G на M, т.е.

$$d\mu_a = i_{X_a}\Omega\,, \quad \text{где} \quad a \in \mathfrak{g}. \tag{3.3.15}$$

В основном мы будем иметь дело с простой группой Ли G. На ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует единственное G-инвариантное (киллингово) скалярное произведение, и, используя данное скалярное произведение, мы можем отождествить пространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$.

Что происходит в случае, когда $\mu^{-1}(0)$ состоит из одной орбиты?

Важное свойство отображения момента состоит в том, что множество тех точек, где оно обращается в нуль, которое обычно обозначается $\mu^{-1}(0)$, G-инвариантно, т.е. если $\mu(x) = 0$, то $\mu(g \circ x) = 0$: это очевидно следует из требования (1). Следовательно, $\mu^{-1}(0)$ – это набор G-орбит. Другой важный факт, принципиальный для дальнейшего построения, состоит в том, что ограничение Ω на каждую G-орбиту в $\mu^{-1}(0)$ тождественно равно нулю, т.е. каждая G-орбита в $\mu^{-1}(0)$ представляет собой изотропное подмногообразие в M. Это следует из формулы (3.3.15), если ее свернуть с векторным полем X_b, соответствующим элементу алгебры Ли b:

$$i_{X_b} d\mu_a \equiv \partial_b \mu_a = i_{X_b} i_{X_a} \Omega = \Omega(X_b, X_a) \tag{3.3.16}$$

Левая часть равна нулю, так как $\partial_b \mu_a$ – производная μ_a *вдоль* $\mu^{-1}(0)$. Следовательно, $\Omega(X_b, X_a) = 0$. Это означает, что симплектическая форма равна нулю на векторах, касательных к орбите группы G.

Изотропное подмногообразие $N \subset M$ может в принципе иметь любую размерность вплоть до $\frac{\dim M}{2}$; если N имеет в точности размерность $\frac{\dim M}{2}$, то оно называется лагранжевым. Существует теорема, объясняющая, в каком случае G-орбита в $\mu^{-1}(0)$ лагранжева[2]: это так в точности тогда, когда подмногообразие $\mu^{-1}(0) \subset M$ является неособым для отображения μ и состоит из всего одной G-орбиты, т.е. когда $\mu^{-1}(0)$ сама является G-орбитой[3]. Заметим в первую очередь, что условие того, что $\mu^{-1}(0)$ неособо, означает, что якобиан $J \equiv \frac{D\mu_a}{Dx^i}\big|_{\mu=0}$ имеет ранг $D - d$, где $d = \dim \mu^{-1}(0)$ – 'геометрическая размерность' $\mu^{-1}(0)$. Здесь мы противопоставляем геометрическую размерность d виртуальной d_v, т.е. числу линейно независимых векторных полей v, таких что $\nabla_v \mu\big|_{\mu=0} = 0$. Имеется в виду, что геометрическая размерность – число векторных полей, аннигилирующих условие $\mu = 0$ (в точках $\mu^{-1}(0)$) и продолжающихся до кривых, лежащих в $\mu^{-1}(0)$. В общем случае ранг якобиана $J \equiv \frac{D\mu_a}{Dx^i}\big|_{\mu=0}$ равен $D - d_v$, поэтому условие неособости отображения μ в точках $\mu^{-1}(0)$ означает, что виртуальная размерность совпадает с геометрической: $d = d_v$.

Приведем для ясности пример, где $d \neq d_v$. Пусть $M = \mathbb{R}^2 = \{p, q\}$, $G = SO(2)$, $\mu = p^2 + q^2$. Здесь $\mu^{-1}(0)$ – тривиальная орбита, состоящая из одной точки, поэтому $d = 0$. В то же время векторные поля $\frac{\partial}{\partial q}$ и $\frac{\partial}{\partial p}$ обладают свойством $\frac{\partial \mu}{\partial q}\big|_{q=p=0} = \frac{\partial \mu}{\partial p}\big|_{q=p=0} = 0$, поэтому $d_v = 2$ и $\operatorname{rank} J = 0$.

Итак, предположим, что вышеупомянутое условие выполнено, и $\mu^{-1}(0)$ состоит из одной G-орбиты. Следовательно, его касательное пространство состоит из векторов $X_a, a \in \mathfrak{g}$, введенных ранее. Сопоставим этим векторам $\dim \mathfrak{g}$ один-форм: $\lambda_k = \Omega(\bullet, X_k)$. Образуем матрицу λ размера $\dim \mathfrak{g} \times D$:

$$\lambda = \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ ;\lambda_{\dim \mathfrak{g}}\}^T . \tag{3.3.17}$$

Так как симплектическая форма Ω невырожденна, а число линейно независимых векторов

[2]В предположении, что $\mu^{-1}(0)$ – многообразие.

[3]Альтернативное доказательство можно найти в [31].

среди X_a равно размерности орбиты d, то матрица λ имеет ранг d. С другой стороны, из определения отображения момента следует, что λ есть в точности матрица якобиана J, и она, согласно условию неособости, имеет ранг $D-d$. Следовательно, $D-d=d$, откуда $d=\frac{D}{2}$, т.е. $\mu^{-1}(0)$ лагранжево.

Обратное тоже верно. Пусть $L=\mu^{-1}(0)$ – связное лагранжево подмногообразие. Рассмотрим некоторую орбиту $\mathcal{O}\subset L$ группы G, и пусть размерность этой орбиты равна δ. Ясно, что $\operatorname{rank}\lambda\big|_{\mathcal{O}}=\delta$. С другой стороны, как и выше, $\lambda=J$, поэтому $\operatorname{rank}\lambda\big|_{\mathcal{O}}=D-d=\frac{D}{2}$. Следовательно, $\delta=\frac{D}{2}$, и орбита $\mathcal{O}$ совпадает со всем лагранжевым подмногообразием L.

3.3.2 Гамильтониан

Перейдем к рассмотрению конкретных гамильтонианов. Гамильтонианы, которые мы будем рассматривать, включают в себя взаимодействия вида $\kappa_{mn}\,S_i^m S_j^n$, где i,j – узлы спиновой цепочки, а κ – киллингова форма[4]. Будем предполагать, что спиновая цепочка *трансляционно инвариантна*, т.е. ее гамильтониан можно получить при помощи сдвига вдоль цепочки некоторой 'элементарной ячейки'. Число узлов в единичной ячейке будет зависеть от того, какое таргет-пространство сигма-модели мы хотим получить. Для элементарной ячейки длины m гамильтониан имеет вид[5]

$$\mathcal{H}=\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{m-1} d_k\;\vec{S}_i\cdot\vec{S}_{i+k}, \tag{3.3.18}$$

где

$$d_k=\sqrt{\frac{m-k}{k}} \tag{3.3.19}$$

Приведенное выражение для 'констант связи' d_k выведено в разделе 3.4 — оно единственно, если потребовать релятивистскую инвариантность результирующей двумерной сигма-модели и отсутствие нетопологического B-поля.

Чтобы записать гамильтониан в терминах когерентных состояний, заметим, прежде всего, что в слагаемых, квадратичных по спинам, можно просто заменить сами спины $\vec{S}_i$ на соответствующие отображения момента $\mu_i\in\mathfrak{su}_N$. Вычисление 'из первых принципов' потребовало бы построения континуального интеграла 'с нуля', по аналогии с тем как это было сделано в предыдущей Главе. В конечном итоге мы получим гамильтониан

$$\mathcal{H}\to\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{l} d_k\;\mathrm{tr}\,(\mu_i\,\mu_{i+k}) \tag{3.3.20}$$

[4]Возможно, нагляднее записать такого рода взаимодействие в виде $\vec{S}_i\cdot\vec{S}_j$.

[5]Гамильтониан, который мы рассматривали в предыдущей Главе, $H=\sum\limits_{i=1}^{L}(P_{i,i+1}+\frac{1}{2}P_{i,i+2})$, является частным случаем, соответствующим $m=3$.

Будем предполагать, что пространство когерентных состояний представляет собой грассманиан $G_n \equiv \frac{U(N)}{U(n)\times U(N-n)}$ при некотором n. В следующем разделе мы поясним, почему мы можем ограничиться лишь этим случаем. Отображение момента для действия группы $SU(N)$ на грассманиане n-плоскостей G_n имеет вид

$$\mu = \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{z}_k \otimes z_k}{\bar{z}_k \circ z_k} - \frac{n}{N}\,\mathbb{1}, \tag{3.3.21}$$

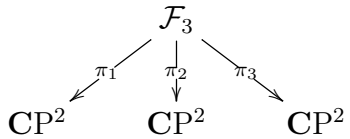
где векторы $\{z_k\}$ образуют ортогональный базис в заданной n-плоскости: $\bar{z}_m \circ z_n = \delta_{mn}\,\bar{z}_m \circ z_m$. Нетрудно видеть, что гамильтониан (3.3.20) равен сумме неотрицательных слагаемых (с точностью до несущественных констант), и достигает минимума в том случае, когда векторы z на соседних m узлах ортогональны друг другу. Это означает, что соответствующие n_i-мерные плоскости ($i = 1 \cdots m$) ортогональны друг другу (и все вместе заполняют пространство $\mathbb{C}^N$). Именно такую конфигурацию мы и называем *классическим анти-ферромагнитным основным состоянием* (или 'вакуумом').

3.3.3 Эквивариантные лагранжевы вложения общего вида: 'забывающие' расслоения

В настоящем разделе мы обсудим геометрические истоки лагранжевых вложений, которые мы построили при помощи отображения момента. Мы хотим ответить на следующий вопрос: каков класс пространств флагов M, N, таких что существует G-эквивариантное лагранжево вложение $M \underset{\text{Lagr}}{\hookrightarrow} N$? Ответ состоит в том, что любое пространство флагов M можно каноническим образом вложить в произведение симметрических пространств (грассманианов) N.

Пример. $M = \mathcal{F}_3, N = (\mathbf{C}\mathrm{P}^2)^{\times 3}$ **.**

Начнем вновь с нашего базового примера, так как он хорошо иллюстрирует общую ситуацию. Напомним, что пространство $\mathcal{F}_3$ можно интерпретировать геометрически как множество упорядоченных троек ортогональных прямых в $\mathbf{C}^3$, проходящих через начало координат. Поэтому существуют следующие три расслоения, сопоставляющие заданной тройке (v_1, v_2, v_3) одну из трех прямых – v_1, v_2 или v_3:



$$\text{Слой} = \pi_i^{-1}(\text{pt}) = \mathbf{C}\mathrm{P}^1$$

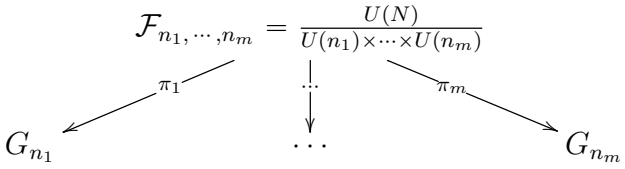
Так как каждое из этих расслоений 'забывает' о двух прямых из трех, эти расслоения можно назвать 'забывающими'. Они явно $G = SU(3)$-эквивариантны. Рассматриваемое вложение – это отображение $M \to \pi_1(M) \times \pi_2(M) \times \pi_3(M) = N$. Так как мы знаем, что это отображение инъективно, или, другими словами, что оно не проектирует никакие две разные точки $a, b \in M$ в одну и ту же точку из N, обсудим, что оно означает геометрически. Если бы оно было не инъективно, это значило бы, что точки a и b лежат одновременно во всех трех слоях

$f_1 = \pi_1^{-1}(m)$, $f_2 = \pi_2^{-1}(n)$ и $f_3 = \pi_3^{-1}(p)$ соответствующих расслоений, т.е. $(a, b) \in f_1 \cap f_2 \cap f_3$. Мы приходим к выводу, что любые три слоя пересекаются не более, чем в одной точке. Можно сформулировать еще более точное утверждение: если m, n, p не взаимно ортогональны, то слои соответствующих расслоений вообще не пересекаются, а если они взаимно ортогональны, то пересечение слоев состоит из одной точки.

Теперь мы обобщим этот пример на случай пространства флагов общего вида

$$\mathcal{F}_{n_1,\cdots,n_m} = U(N)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_m). \tag{3.3.22}$$

Существует m расслоений, отображение проекции в которых соответствует тому, что мы забываем 'тонкую структуру' флага и оставляем каждый раз лишь одно линейное подпространство (и ортогональное ему):



где $G_n = \frac{U(N)}{U(n)\times U(N-n)}$ – грассманиан n-плоскостей в $\mathbb{C}^N$.

Соответствующее отображение

$$\mathcal{F}_{n_1,\cdots,n_m} \hookrightarrow \prod_{j=1}^{m} G_{n_j} \tag{3.3.23}$$

является вложением и, более того, лагранжевым. Проверим, прежде всего, что получается правильная размерность:

$$\dim \mathcal{F}_{n_1,\cdots,n_m} = N^2 - \sum_{j=1}^{m} n_j^2, \quad \dim G_n = N^2 - n^2 - (N-n)^2 = 2(n \cdot N - n^2) \tag{3.3.24}$$

$$\Rightarrow \dim \prod_{j=1}^{m} G_{n_j} = 2 \sum_{n=1}^{m} (n \cdot N - n^2) = 2 \left(N^2 - \sum_{n=1}^{m} n^2 \right) = 2 \dim \mathcal{F}_{n_1,\cdots,n_m} \tag{3.3.25}$$

Используя полученные ранее сведения, несложно проверить, что вложение действительно лагранжево. Необходимо построить отображение момента для диагонального действия группы $SU(N)$ на произведении грассманианов и показать, что $\mu^{-1}(0)$ – рассматриваемое пространство флагов. Для одного грассманиана мы уже строили ранее отображение момента (см. (3.3.21)), а теперь нам нужно лишь взять их сумму:

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\bar{z}_{i_k} \otimes z_{i_k}}{\bar{z}_{i_k} \circ z_{i_k}} - \mathbb{1} \tag{3.3.26}$$

где мы использовали соотношение $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = N$. Стоит помнить, что в этой формуле $\bar{z}_{i_m} \circ$

$z_{i_n} = \delta_{mn}$. С другой стороны, множество $\mu^{-1}(0)$ образовано наборами из N ортогональных z-векторов. Следовательно, z-векторы, представляющие различные n_i-мерные плоскости в $\mathbb{C}^N$ $(i = 1 \cdots m)$, взаимно ортогональны. Множество таких ортогональных подпространств и есть пространство флагов $\mathcal{F}_{n_1,\cdots,n_m}$!

3.4 Непрерывный предел и исключение вспомогательных переменных

В этом разделе будет приведено полное вычисление, аналогичное тому, которое было выполнено в предыдущей Главе, но более общее. Ранее было показано, что пространство флагов общего вида можно вложить в произведение грассманианов. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда пространства представлений связаны с линейными расслоениями над грассманианами. Мы будем использовать простейшую параметризацию грассманиана. Рассмотрим случай

$$G_n = \frac{U(N)}{U(n) \times U(N-n)}, \tag{3.4.27}$$

Данное пространство можно параметризовать набором N ортонормированных комлексных векторов u_k, $\bar{u}_m \circ u_n = \delta_{mn}$, причем на наборы прямых $\{u_1, \cdots, u_n\}, \{u_{n+1}, \cdots, u_N\}$ накладываются соотношения эквивалентности. Каждый такой набор представляет собой плоскость – линейную оболочку данных векторов –, следовательно, например, мы отождествляем $\{u_1, \cdots, u_n\} \sim \{u'_1, \cdots, u'_n\}$, если два набора связаны $U(n)$-вращением. Векторы $u_1, \cdots, u_n$ будут входить во все формулы лишь в $U(n)$-инвариантных комбинациях. Пусть ω – симплектическая форма на G_n. Ток J, который определен условием $dJ = \omega$, строится по формуле

$$J = \mathrm{i} \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i \circ du_i \tag{3.4.28}$$

Он инвариантен относительно $SU(n)$ калибровочных преобразований $u_i \to g_{ij}\, u_j$, $\;g \in SU(n)$:

$$J \to J + \mathrm{i} \underbrace{\bar{u}_i \circ u_k}_{=\delta_{ik}} (g^\dagger dg)_{ik} = J, \quad \text{так как } \mathrm{tr}\,(g^\dagger\, dg) = 0 \tag{3.4.29}$$

(В случае $g \in U(1)$ к J добавляется полная производная, и поэтому интеграл тока J является инвариантной величиной).

Начнем с гамильтониана следующего вида:

$$\mathcal{H} = \sum_k \sum_{s=1}^{m-1} d_s\, \vec{S}_k \cdot \vec{S}_{k+s}\ . \tag{3.4.30}$$

Следовательно, мы рассматриваем взаимодействия не более чем между ближайшими m со-

седями. Любые следующие друг за другом m узлов мы будем называть поэтому ‘единичной ячейкой’ или ‘элементарной ячейкой’.

Предположим, что элементарная ячейка состоит из m узлов, причем в i-м узле расположен грассманиан G_{n_i} $(i = 1 \cdots m)$. Запишем соответствующее ему отображение момента

$$\mu_i = \sum_{k=1}^{n_i} \bar{u}_k \otimes u_k - \frac{n_i}{N} \mathbf{1}. \tag{3.4.31}$$

Спин-спиновое взаимодейсвие вида $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ дает слагаемое

$$\mathrm{tr}\,(\mu_i\,\mu_j) \sim 2 \sum_{m<n} |\bar{u}_m^{(i)} \circ u_n^{(j)}|^2 + \text{постоянные члены} \tag{3.4.32}$$

в гамильтониане. По существу единственное отличие от случая $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1} = G_1$, который мы разбирали в предыдущей Главе, состоит в том, что теперь нам нужно суммировать по нескольким похожим членам взаимодействия. Удобно представлять на диаграмме грассманиан G_n как набор n точек, расположенных друг под другом.

Удобно также обозначать единичные векторы в данной элементарной ячейке двумя индексами. Индекс ‘первого уровня’ обозначает, в каком узле (в рамках данной элементарной ячейки) находится данный вектор, а индекс ‘второго уровня’ обозначает положение в рамках группы векторов в данном узле, т.е.

$$u_{i_\alpha}, \quad \text{где } \; i = 1 \cdots m, \; \alpha = 1 \cdots n_i, \tag{3.4.33}$$

Пример, поясняющий эти обозначения, приведен на Рисунке 3.1.

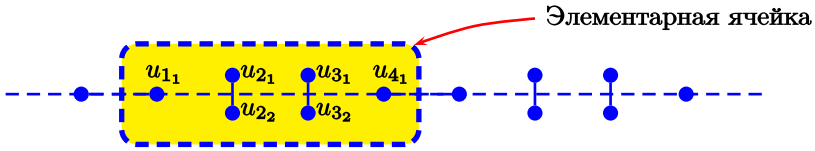


Рис. 3.1: Спиновая цепочка, порождающая σ-модель с таргет-пространством $\frac{U(6)}{U(2)\times U(2)\times U(1)\times U(1)}$.

Ранее уже объяснялось, что $\sum_{i=1}^{m} n_i = N$, поэтому всего у нас имеется N единичных векторов u_{i_α} со следующими свойствами ортогональности:

$$\bar{u}_{i_\alpha} \circ u_{i_\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{3.4.34}$$

Векторы $u_{j_\alpha}, u_{i_\beta}$ при $i \neq j$ находятся в общем положении. Антиферромагнитная конфигурация соответствует условию, когда *все* они ортогональны друг другу. Флуктуации вблизи данной конфигурации удобно строить с использованием разложения Грама-Шмидта (QR-

разложение). Положим

$$
\begin{aligned}
&z_1 = u_{1_1}, \cdots z_{n_1} = u_{1_{n_1}}, \\
&z_{n_1+1} = u_{2_1} + \sum_{s=1}^{n_1} a_{2_1|1_s}\, u_{1_s}, \\
&\cdots \\
&z_{n_t+q} = u_{t+1_q} + \sum_{m=1}^{t} \sum_{s=1}^{n_m} a_{t+1_q|m_s}\, u_{m_s}, \quad 1 \leqslant q \leqslant n_{t+1}
\end{aligned}
\tag{3.4.35}
$$

Тот факт, что мы суммируем лишь по векторам из предыдущих узлов, обеспечивает ортогональность $z_{i_\alpha}, z_{i_\beta}$[6]. В дальнейшем будем предполагать, что $a_{i_\alpha|j_\beta} = 0$ при $i < j$. Записанные выше формулы справедливы для переменных z, находящихся в одной и той же элементарной ячейке. Чтобы перейти к другой ячейке, необходимо ввести дополнительный индекс k, который отличает одну ячейку от другой. Прежде всего вычислим взаимодействие между двумя узлами, находящимися в одной элементарной ячейке:

$$
i < j \Rightarrow |\bar{z}_{i_\alpha} \circ z_{j_\beta}|^2 \sim |a_{j_\beta|i_\alpha}|^2 \tag{3.4.36}
$$

Часть гамильтониана, описывающая взаимодействия внутри k-го блока, такова:

$$
H_k = \sum_{i<j}\, d_{j-i} \sum_{\alpha,\,\beta} \cdot |a^k_{j_\beta|i_\alpha}|^2 \tag{3.4.37}
$$

Вычислим взаимодействия между двумя соседними блоками, $k-1$ и k. Заметим, что

$$
\Rightarrow |\bar{z}^{(k-1)}_{i_\alpha} \circ z^{(k)}_{j_\beta}|^2 \sim |\bar{u}^{(k-1)}_{i_\alpha} \circ u^{(k)}_{j_\beta} + a^k_{j_\beta|i_\alpha} + \bar{a}^{k-1}_{i_\alpha|j_\beta}|^2 \sim |\bar{u}^{(k)}_{i_\alpha} \circ \partial_x u^{(k)}_{j_\beta} + a^k_{j_\beta|i_\alpha} + \bar{a}^{k-1}_{i_\alpha|j_\beta}|^2, \tag{3.4.38}
$$

Так как наш гамильтониан описывает взаимодействия 'дальности' $m-1$, легко показать, что при $i^{\mathbf{k-1}} < j^{\mathbf{k}}$ взаимодействие отсутствует, т.е. $d(i^{\mathbf{k-1}}, j^{\mathbf{k}}) = 0$ при $i^{\mathbf{k-1}} < j^{\mathbf{k}}$. Действительно, в этом случае расстояние между узлами равно $j^{\mathbf{k}} + (N - i^{\mathbf{k-1}}) \geqslant N$, в то время как радиус взаимодействия $m - 1 \leqslant N - 1$. Поэтому часть гамильтониана, описывающая межблоковые взаимодействия, такова:

$$
H_{k-1,k} = \sum_{i>j}\, d_{m-(i-j)} \sum_{\alpha,\beta} |\bar{u}^{(k)}_{i_\alpha} \circ \partial_x u^{(k)}_{j_\beta} + \bar{a}^k_{i_\alpha|j_\beta}|^2 \tag{3.4.39}
$$

Мы использовали тот факт, что функция $d(i^{\mathbf{k-1}}, j^{\mathbf{k}})$ зависит лишь от расстояния между узлами $i^{\mathbf{k-1}}$ и $j^{\mathbf{k}}$, которое, как несложно видеть, равно $m - (i - j)$ (предполагается, что $i > j$), т.е. $d(i^{\mathbf{k-1}}, j^{\mathbf{k}}) = d_{m-(i-j)}$.

---

[6] В первом порядке по a_s. В общем случае следует записать $z_{n_1+2} = u_{2_2} + \nu\, u_{2_1} + \sum\limits_{s=1}^{n_1} a_{2_2|1_s}\, u_{1_s}$ и наложить условия ортогональности $\bar{z}_{n_1+1} \circ z_{n_1+2} = \nu + \sum\limits_{s=1}^{n_1} \bar{a}_{2_1|1_s}\, a_{2_2|1_s} = 0$. Поэтому ν квадратично по a, и поэтому им можно пренебречь в данном приближении.

Гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_k \sum_{i<j,\,\alpha,\,\beta} \Big[d_{m-(j-i)} \cdot |a^k_{i_\alpha|j_\beta}|^2 + d_{m-(j-i)} \cdot |a^k_{i_\alpha|j_\beta} - \bar{u}^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_x u^{(k)}_{i_\alpha}|^2 \Big] = \tag{3.4.40}$$
$$= \sum_k \sum_{i<j,\,\alpha,\,\beta} \Big[(d_{j-i} + d_{m-(j-i)}) \cdot |a^k_{i_\alpha|j_\beta}|^2 -$$
$$- d_{m-(j-i)} \cdot (a^k_{i_\alpha|j_\beta}\, u^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_x \bar{u}^{(k)}_{i_\alpha} + \bar{a}^k_{i_\alpha|j_\beta}\, \bar{u}^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_x u^{(k)}_{i_\alpha}) + d_{m-(j-i)}\, |\bar{u}^{(k)}_{i_\alpha} \circ \partial_x u^{(k)}_{j_\beta}|^2 \Big]$$

Запишем теперь соответствующее разложение для кинетического члена:

$$\mathcal{L}_0 = \mathrm{i} \sum_{k,\, i<j,\, \alpha,\, \beta} \Big(\bar{a}^k_{i_\alpha|j_\beta}\, \bar{u}^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_t u^k_{i_\alpha} - \text{компл. сопр.} \Big) \tag{3.4.41}$$

Объединяя эти выражения, получим полный лагранжиан в виде

$$\mathcal{L} = \sum_k \sum_{i<j,\,\alpha,\,\beta} \Big[(d_{j-i} + d_{m-(j-i)}) \cdot |a^k_{i_\alpha|j_\beta}|^2 - \tag{3.4.42}$$
$$- a^k_{i_\alpha|j_\beta}\, (d_{m-(j-i)}\, u^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_x \bar{u}^{(k)}_{i_\alpha} + \mathrm{i}\, u^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_t \bar{u}^{(k)}_{i_\alpha}) -$$
$$- \bar{a}^k_{i_\alpha|j_\beta}\, (d_{m-(j-i)}\, \bar{u}^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_x u^{(k)}_{i_\alpha} - \mathrm{i}\, \bar{u}^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_t u^{(k)}_{i_\alpha}) +$$
$$+ d_{m-(j-i)}\, |\bar{u}^{(k)}_{i_\alpha} \circ \partial_x u^{(k)}_{j_\beta}|^2 \Big]$$

Последний шаг состоит в том, чтобы выполнить гауссово интегрирование по $a^k_{i_\alpha|j_\beta}$. Это можно сделать при помощи простой формулы

$$A|w|^2 + Bw + C\bar{w} = A(w + \frac{C}{A})(\bar{w} + \frac{B}{A}) - \frac{BC}{A} \tag{3.4.43}$$

В результате получим

$$\mathcal{L} \to \sum_k \sum_{i<j,\,\alpha,\,\beta} \Big[d_{m-(j-i)}\, |\bar{u}^{(k)}_{i_\alpha} \circ \partial_x u^{(k)}_{j_\beta}|^2 - \tag{3.4.44}$$
$$- \frac{1}{d_{j-i} + d_{m-(j-i)}} (d_{m-(j-i)}\, u^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_x \bar{u}^{(k)}_{i_\alpha} + \mathrm{i}\, u^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_t \bar{u}^{(k)}_{i_\alpha}) \times$$
$$\times (d_{m-(j-i)}\, \bar{u}^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_x u^{(k)}_{i_\alpha} - \mathrm{i}\, \bar{u}^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_t u^{(k)}_{i_\alpha})) \Big]$$

Перепишем данное выражение, выделяя 'метрическую' часть и часть, отвечающую θ-члену:

$$\mathcal{L} \to \sum_k \sum_{i<j,\,\alpha,\,\beta} \Big[\frac{-1}{d_{j-i} + d_{m-(j-i)}} \Big(|\bar{u}^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_t u^{(k)}_{i_\alpha})|^2 - d_{j-i} d_{m-(j-i)} |\bar{u}^{(k)}_{i_\alpha} \circ \partial_x u^{(k)}_{j_\beta}|^2 \Big) + \tag{3.4.45}$$
$$+ \frac{d_{m-(j-i)}}{d_{j-i} + d_{m-(j-i)}} \Big(\mathrm{i}\, (\bar{u}^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_t u^{(k)}_{i_\alpha})\, (u^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_x \bar{u}^{(k)}_{i_\alpha}) - \mathrm{i}\, (u^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_t \bar{u}^{(k)}_{i_\alpha})(\bar{u}^{(k)}_{j_\beta} \circ \partial_x u^{(k)}_{i_\alpha}) \Big) \Big]$$

Как видно из первой строки, для того чтобы ответ был лоренц-инвариантным, следует потребовать

$$d_k d_{m-k} = \text{const.} \equiv D^2 \quad \text{(константа, не зависящая от } k\text{)} \tag{3.4.46}$$

В этом случае метрика на пространстве флагов задается параметрами[7]

$$\lambda_k = \frac{D}{d_k + d_{m-k}}\,. \tag{3.4.47}$$

Еще одно требование, которое мы хотели бы наложить, состоит в том, чтобы B-поле было топологическим инвариантом, т.е. вторая строка в (3.4.45) должна быть замкнутой 2-формой. Это приводит к дополнительным условиям на коэффициенты d_l. Результат таков:

$$d_k = \sqrt{\frac{m-k}{k}}, \quad \lambda_k = \frac{\sqrt{k\,(m-k)}}{m}\,. \tag{3.4.48}$$

Действительно, вторая строка в (3.4.45) представляет собой ограничение на мировую поверхность формы

$$\begin{aligned} &\omega = \sum_{i<j} \mu_{j-i}\,\omega_{ij}\,, \qquad \text{где} \qquad \mu_k = \frac{d_{m-k}}{d_k + d_{m-k}} \\ &\text{и} \qquad \omega_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{i}\ \bar{u}_{j_\beta} \circ du_{i_\alpha} \wedge u_{j_\beta} \circ d\bar{u}_{i_\alpha}\ . \end{aligned} \tag{3.4.49}$$

Введем следующие *замкнутые* формы:

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}\,. \tag{3.4.50}$$

Заметим, что ω_i представляет первый класс Черна $c_1(\mathcal{O}_{G_{n_i}}(1))$. Между этими формами существует единственное соотношение (ввиду того, что $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$)

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i = 0 \tag{3.4.51}$$

Мы хотим найти такие μ_k, при которых форму ω можно выразить как линейную комбинацию ω_i:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\,\omega_i = \omega = \sum_{i<j} \mu_{j-i}\,\omega_{ij} \tag{3.4.52}$$

Данное требование сводится к условию

$$\mu_{j-i} = a_j - a_i \tag{3.4.53}$$

Так как левая часть зависит лишь от разности $j-i$, получим

$$a_j = j\ \alpha + \text{const.}, \tag{3.4.54}$$

где $\alpha = \mu_1$, и эта константа несущественна, так как она просто сдвигает форму ω на $\sum \omega_i = 0$. Мы можем положить эту константу равной нулю. Из явного выражения для μ_k следует, что

[7]Мы растянули пространственную координату $x \to Dx$, чтобы положить 'скорость света' равной единице.

$\mu_k + \mu_{m-k} = 1$, поэтому

$$\mu_k + \mu_{m-k} = \alpha\, k + \alpha\,(m-k) = \alpha\, m = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{m} \tag{3.4.55}$$

Другими словами,

$$\omega = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} j\, \omega_j\,. \tag{3.4.56}$$

Мы прокомментируем данный результат в разделе 3.6.

Используя определение μ_k, (3.4.49), и соотношения (3.4.53), получаем следующие равенства:

$$\mu_k = \frac{d_{m-k}}{d_k + d_{m-k}} = \frac{D^2}{d_k^2 + D^2} = \frac{k}{m} \tag{3.4.57}$$

Найдем d_k:

$$d_k = D\sqrt{\frac{m-k}{k}} \tag{3.4.58}$$

– это как раз формула (3.3.19) с точностью до несущественного множителя D, который просто соответствует нормировке гамильтониана. Ясно, что эти d_k удовлетворяют условию лоренц-инвариантности (3.4.46). Тем самым вывод окончен.

3.5 Метрика

На пространстве флагов общего вида, которое не обязательно является симметрическим пространством, может существовать целое семейство $SU(N)$-инвариантных метрик[8]. В результате перехода к непрерывному пределу возникает некоторая конкретная метрика из данного семейства. Цель настоящего раздела – вывести ‘из первых принципов’ универсальное выражение для метрики, возникающей в данном контексте.

Напомним общую постанову задачи. Имеется симплектическое многообразие $(\mathcal{M}, \omega)$, функция I на $\mathcal{M}$ и лагранжево подмногообразие $L \subset \mathcal{M}$, на котором функция I достигает минимума. Построим гессиан функции I:

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^i \partial x^j} \tag{3.5.59}$$

Заметим, что на критическом множестве гессиан преобразуется как тензор, т.е. при замене переменных $x \to y(x)$ будем иметь $\frac{\partial I}{\partial y^i}\big|_L = 0$, следовательно

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^i\, \partial y^j} = \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial I}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^j}\right)\cdot \underbrace{\frac{\partial I}{\partial x^k}}_{=0 \text{ на } L} + \frac{\partial x^m}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^n}{\partial y^j}\,\frac{\partial^2 I}{\partial x^m \partial x^n} \tag{3.5.60}$$

[8]См. также обсуждение в разделах 2.7.2 и 4.3.2.

Кроме того, так как $\frac{\partial I}{\partial x^i} = 0$ на L, для любого вектора $v \in T_pL$, касательного к L, $\nabla_v \frac{\partial I}{\partial x^i} = 0 = h_{ij}\, v^j$, поэтому v – нуль-вектор гессиана h. Дополнительное требование, которое, правда, всегда выполняется в рассматриваемых нами приложениях, состоит в том, чтобы гессиан h был невырожденным при ограничении на векторы, нормальные к L[9]. Так как L является минимумом функци I, h неотрицательно определен. Два последних утверждения можно объединить, сказав, что h – метрика в нормальном расслоении к L в $\mathcal{M}$. Однако нам требуется метрика на касательном расслоении к L. Одно из свойств, отличающих лагранжево подмногообразие от других, состоит в том, что его касательное расслоение изоморфно конормальному расслоению. Изоморфизм доставляется самой симплектической формой ω: действительно, пусть v – касательный вектор к L, тогда $\lambda = i_v\omega$ – один-форма на $\mathcal{M}$. Ее ядро состоит из векторов, касательных к L, поэтому можно рассматривать λ как один-форму на $\mathcal{N}L \subset T\mathcal{M}$, т.е. $\lambda \in \mathcal{N}^*L$. Метрика на $\mathcal{N}L$, которую мы построили, задает изоморфизм $\mathcal{N}L \simeq \mathcal{N}^*L$, поэтому в результате мы имеем метрику на L вида

$$\boxed{g_{ij} = \omega_{im} \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}\right)^{-1}\right]^{mn} \cdot \omega_{nj} = \omega_{im}\, h^{mn}\, \omega_{nj}} \tag{3.5.61}$$

В данной формуле предполагается, что гессиан $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$ требуется сначала ограничить на направления, "нормальные" к L, и лишь затем обращать. Матрица g_{ij} положительно-определена, так как гессиан h положительно-определен: $v^i g_{ij} v^j = u_i h^{ij} u_j \geqslant 0 \quad (u_i = \omega_{ij} v^j)$. Следовательно, g_{ij} – искомая метрика.

Заметим, что выражение для метрики (3.5.61) справедливо в достаточно общем контексте, описанном в начале раздела. Метрики на пространствах флагов, возникающих в результате перехода к непрерывному пределу в спиновой цепочке, представляют собой конкретный пример данного построения. Как следует из формулы (3.4.42), в нашем случае функция I имеет вид (здесь μ_i – отображение момента на i-м грассманиане):

$$\boxed{I = \sum_{1=i<j}^{m} (d_{j-i} + d_{m-(j-i)}) \operatorname{tr}(\mu_i\, \mu_j) = m \sum_{1=i<j}^{j=m} \frac{\operatorname{tr}(\mu_i\, \mu_j)}{\sqrt{(j-i)\,(m-(j-i))}}} \tag{3.5.62}$$

3.6 Топологический член

По аналогии с метрикой имеется универсальное и прозрачное выражение (3.4.56) для топологического члена, который возникает в непрерывном пределе спиновой цепочки. Чтобы интерпретировать выражение (3.4.56), используем существование вложения типа (3.3.23) пространства флагов общего вида $\mathcal{F}_{n_1,\cdots,n_m} = U(N)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_m)$ в произведение симметрических пространств:

$$i : \mathcal{F}_{n_1,\cdots,n_m} \hookrightarrow G_{n_1} \times \ldots \times G_{n_m}, \tag{3.6.63}$$

[9]Иногда это условие называют 'невырожденностью в смысле Ботта'.

где $G_n = U(N)/U(n) \times U(N-n)$ – грассманиан (симметрическое пространство). Наиболее естественное расслоение над таким грассманианом – это тавтологическое расслоение n-мерных комплексных плоскостей, которое мы обозначим $\mathcal{O}_{G_n}(1)$, по аналогии со случаем $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$. Кольцо когомологий исходного пространства флагов $\mathcal{F}_{n_1,\cdots,n_m}$ можно построить с помощью ограничений на пространство флагов элементов колец когомологий грассманианов. В частности, пусть $r_k = i^*\big(c_1(\mathcal{O}_{G_{n_k}}(1))\big)$ – ограничение первого класса Черна тавтологического расслоения. Формы r_k удовлетворяют единственному условию

$$\sum_{k=1}^{m} r_k = 0 \tag{3.6.64}$$

Тогда любой элемент группы $\mathrm{H}^2(\mathcal{F}_{n_1,\cdots,n_m}, \mathbf{Z})$ можно записать в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами ограничений этих классов Черна. Определение того, чему равны эти целые коэффициенты в случае два-формы Ω, входящей в θ-член, является целью настоящего раздела.

Построение по существу весьма элементарно. Начнем с наиболее общего возможного топологического члена:

$$m\,\Omega = \sum_{k=1}^{m} a_k\, r_k \mod m, \tag{3.6.65}$$

где a_k – целые числа. Важнейшее требование, следующее из трансляционной инвариантности исходного гамильтониана (3.3.18), состоит в том, что форма Ω должна быть инвариантна относительно циклической перестановки грассманианов (действительно, их конкретное положение в рамках данного цикла просто-напросто отражает то, как мы 'разрезаем' спиновую цепочку на элементарные ячейки, и ответ от этого зависеть не должен). Обозначив перестановку за Π, мы можем формализовать данное требование следующим образом:

$$\Pi(m\,\Omega) = \sum_{k=1}^{m} a_{k+1}\, r_k = m\,\Omega \mod m, \tag{3.6.66}$$

Следует также иметь в виду, что имеется соотношение (3.6.64) между формами r_k, поэтому (3.6.66) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{m} a_{k+1}\, r_k = \sum_{k=1}^{m} a_k\, r_k + n \sum_{k=1}^{m} r_k \mod m\,, \quad n \in \mathbf{Z} \tag{3.6.67}$$

Другими словами,

$$a_{k+1} - a_k = n \mod m \tag{3.6.68}$$

Следовательно, $a_k = k \cdot n \mod m$. По существу мы можем придать параметру n любое значение, ставя в каждом узле симметрические степени исходного представления, и в случае

минимального выбора $n = 1$ можно записать θ-член в виде

$$\boxed{\Omega = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} k \cdot r_k\right)} \tag{3.6.69}$$

Как и должно быть, топологический член такого вида не зависит от *циклического* упорядочения грассманианов. Тем не менее, из (3.6.69) следует, что он определенно зависит от упорядочения (но с точностью до циклической перестановки). Таким образом, перестановка узлов в спиновой цепочке, т.е. изменение порядка, в котором в узлах цепочки появляются разные представления, меняет топологический член.

В результате приходим к такому интересному заключению:

◄ Путем перестановки узлов спиновой цепочки можно получать различные элементы группы когомологий $\mathrm{H}^2(\mathcal{F}_{n_1,\cdots,n_m}, \mathbf{Z}_m)$. ►

Из (3.6.69) можно видеть, что значение θ равно $\theta = \frac{2\pi}{m}$. Из общих принципов (аналогичных тем, которые мы обсуждали в разделе 3.2 и в предыдущей Главе) также следует, что если заменить исходное представление в каждом узле цепочки на его r-ю симметрическую тензорную степень, значение θ умножится на r.

Глава 4. Сигма-модели с комплексными таргет-пространствами и уравнения нулевой кривизны

4.1 Рассматриваемые модели

В данной Главе мы продолжим исследование σ-моделей пространств флагов, а также некоторых несколько более общих пространств. Модели, которые нас будут интересовать в настоящей Главе, отличаются от рассмотренных ранее. Их основная особенность состоит в том, что уравнения движения этих моделей допускают представление нулевой кривизны. Действие имеет вид [42; 46]:

$$\mathcal{S}[\mathbb{G},\mathbb{I}] := \int_\Sigma d^2z\, \|\partial X\|^2_{\mathbb{G}} + \int_\Sigma X^*\omega, \tag{4.1.1}$$

где ω – кэлерова форма, отвечающая паре ($\mathbb{G}$ – метрика, $\mathbb{I}$ – комплексная структура), и определенная стандартной формулой

$$\omega = \mathbb{G}\circ\mathbb{I}\,. \tag{4.1.2}$$

В общем случае, если киллингова метрика $\mathbb{G}$ не кэлерова, то кэлерова форма не замкнута: $d\omega \neq 0$. Это вполне может иметь место, даже если многообразие $\mathcal{M}$ допускает кэлерову метрику – эта метрика, вообще говоря, отлична от $\mathbb{G}$. Пример такого явления доставляет пространство флагов $\frac{SU(3)}{S(U(1)^3)}$. σ-модель с действием (4.1.1) для случая пространства флагов подробно исследована в работах [44; 48]. Другие примеры моделей из класса (4.1.1) получаются, если рассмотреть эрмитовы симметрические пространства – симметрические пространства с комплексной структурой. Эти многообразия кэлеровы, и инвариантная метрика на них по существу единственна (с точностью до растяжения) – отсюда следует, что форма ω в этом случае замкнута: $d\omega = 0$. Мы рассмотрим этот особый случай в разделе 4.2.1.

4.2 Структура таргет-пространства

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G допускает разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ – ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ относительно метрики Киллинга $\mathbb{G}$. Будем предполагать, что на факторпространстве G/H существует почти комплексная структура $\mathbb{I}$. Мы не будем постулировать, что $\mathbb{I}$ интегрируема – это само собой получится из условия существования лаксовой связности. Почти комплексная структура действует на векторном пространстве $\mathfrak{m}$, и ее можно диагонализовать – собственные значения равны $\pm i$. Обозначим собственные $\pm i$-подпространства за $\mathfrak{m}_\pm$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_-, \qquad \mathbb{I} \circ \mathfrak{m}_\pm = \pm i\, \mathfrak{m}_\pm \,. \tag{4.2.3}$$

Из G-инвариантности почти комплексной структуры следует, что $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}_\pm] \subset \mathfrak{m}_\pm$. Введем ток

$$J = g^{-1}dg = J_0 + J_+ + J_-, \qquad J_0 \in \mathfrak{h}, \quad J_\pm \in \mathfrak{m}_\pm \,. \tag{4.2.4}$$

Он принимает значение в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и мы разложили его на компоненты по аналогии с разложением (4.2.3) алгебры Ли. В этих терминах действие (4.1.1) можно переписать следующим образом:

$$\mathcal{S}[\mathbb{G}, \mathbb{I}] := \int_\Sigma d^2z \ \langle (J_+)_z,\, (J_-)_{\bar z} \rangle_{\mathbb{G}} \ . \tag{4.2.5}$$

В дальнейшем скалярное произведение двух элементов $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}$ будет обозначаться при помощи 'бра-кет' скобок: $\langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{G}} := \mathbb{G}(\alpha, \beta)$. Обозначим за K нетеровский ток, следующий из выписанного действия. Он выводится с помощью бесконечно малой вариации $g \to e^{\epsilon(z,\bar z)} \circ g$ в действии, причем параметр ϵ зависит от координат $(z, \bar z)$. Результат таков:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}[\mathbb{G}, \mathbb{I}] \quad &= \int_\Sigma d^2z \ \Big[\big\langle (g^{-1}\partial_z \epsilon\, g)_+,\, (J_-)_{\bar z} \big\rangle_{\mathbb{G}} + \big\langle (J_+)_z, (g^{-1}\partial_{\bar z}\epsilon\, g)_- \big\rangle_{\mathbb{G}} \Big] = \\ &= \int_\Sigma d^2z \ \Big[\big\langle g^{-1}\partial_z \epsilon\, g,\, (J_-)_{\bar z} \big\rangle_{\mathbb{G}} + \big\langle (J_+)_z, g^{-1}\partial_{\bar z}\epsilon\, g \big\rangle_{\mathbb{G}} \Big] \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Чтобы получить второе выражение, мы воспользовались свойствами метрики: $\langle \mathfrak{h}, \mathfrak{m}_\pm \rangle_{\mathbb{G}} = 0$, $\langle \mathfrak{m}_\pm, \mathfrak{m}_\pm \rangle_{\mathbb{G}} = 0$. Последнее является следствием эрмитовости $\mathbb{G}$. Действительно, по определению эрмитовости $\langle \mathbb{I} \circ u, \mathbb{I} \circ v \rangle_{\mathbb{G}} = \langle u, v \rangle_{\mathbb{G}}$ при $u, v \in \mathfrak{m}$. Тогда $\langle \mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_+ \rangle_{\mathbb{G}} = 0$, так как $\mathbb{I} \circ \mathfrak{m}_+ = i\, \mathfrak{m}_+$. Другими словами, $\mathfrak{m}_+$ (и $\mathfrak{m}_-$) – изотропные подпространства $\mathfrak{m}$. Используя инвариантность киллинговой метрики $\mathbb{G}$ относительно присоединенного действия G, $\langle gag^{-1}, gbg^{-1} \rangle_{\mathbb{G}} = \langle a, b \rangle_{\mathbb{G}}$, получим

$$\delta\mathcal{S}[\mathbb{G}, \mathbb{I}] = \int_\Sigma d^2z \ \Big[\big\langle \partial_z \epsilon,\, g(J_-)_{\bar z} g^{-1} \big\rangle_{\mathbb{G}} + \big\langle \partial_{\bar z}\epsilon, g(J_+)_z g^{-1} \big\rangle_{\mathbb{G}} \Big] . \tag{4.2.7}$$

В силу невырожденности метрики $\mathbb{G}$ получаем сохранение (на уравнениях движения) нетеровского тока

$$K = g \cdot \underbrace{2\big((J_+)_z dz + (J_-)_{\bar z} d\bar z\big)}_{:=S} \cdot g^{-1} = gSg^{-1} \tag{4.2.8}$$

Так как таргет-пространство $\mathcal{M} = G/H$ однородное, уравнения движения модели эквивалентны сохранению тока:

$$d * K = 0. \tag{4.2.9}$$

Чтобы можно было построить семейство плоских связностей, потребуем, чтобы ток K был плоским:

$$dK - K \wedge K = 0. \tag{4.2.10}$$

Конечно, необходимо доказать, что этому условию можно удовлетворить. Уравнения (4.2.9)-(4.2.10) можно переписать через S (величину, введенную в (4.2.8)):

$$d * S + \{J, * S\} = 0 \tag{4.2.11}$$

$$dS + \{J - \frac{1}{2}S, S\} = 0 \tag{4.2.12}$$

Можно проверить, что $J - \frac{1}{2}S = (J_-)_z dz + (J_+)_{\bar{z}} d\bar{z} + J_0$. Следовательно,

$$d * S + \{J, * S\} = \tag{4.2.13}$$
$$= -2i dz \wedge d\bar{z} \ \left(\mathscr{D}_{\bar{z}}(J_+)_z - [(J_+)_z, (J_+)_{\bar{z}}] + \mathscr{D}_z(J_-)_{\bar{z}} + [(J_-)_z, (J_-)_{\bar{z}}]\right)$$
$$dS + \{J - \frac{1}{2}S, S\} = \tag{4.2.14}$$
$$= -2 dz \wedge d\bar{z} \ \left(\mathscr{D}_{\bar{z}}(J_+)_z - [(J_+)_z, (J_+)_{\bar{z}}] - \mathscr{D}_z(J_-)_{\bar{z}} - [(J_-)_z, (J_-)_{\bar{z}}]\right)$$

$\mathscr{D}$ – ковариантная производная калибровочной группы H: $\mathscr{D}_j M_k := \partial_j M_k + [(J_0)_j, M_k]$ $(j, k = z, \bar{z})$. Мы использовали также определение звездочки Ходжа $*dz = i\,dz$, $*d\bar{z} = -i\,d\bar{z}$.

Условия (4.2.13)-(4.2.14) эквивалентны, если

$$[\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_+] \subset \mathfrak{m}_+, \qquad [\mathfrak{m}_-, \mathfrak{m}_-] \subset \mathfrak{m}_- \tag{4.2.15}$$

(В этом случае коммутаторы $[(J_+)_z, (J_+)_{\bar{z}}]$ и $[(J_-)_z, (J_-)_{\bar{z}}]$ лежат в подпространствах $\mathfrak{m}_+$, $\mathfrak{m}_-$ соответственно.) Уравнения принимают вид

$$\mathscr{D}_{\bar{z}}(J_+)_z - [(J_+)_z, (J_+)_{\bar{z}}] = 0 \tag{4.2.16}$$

$$\mathscr{D}_z(J_-)_{\bar{z}} + [(J_-)_z, (J_-)_{\bar{z}}] = 0 \tag{4.2.17}$$

Если метрика $\mathbb{G}$ эрмитова относительно выбранной почти комплексной структуры $\mathbb{I}$, условия (4.2.15) эквивалентны интегрируемости $\mathbb{I}$. Это было доказано в разделе 1.1.3.

Рассмотрим теперь семейство связностей A_u, индексированных параметром $u \in \mathbb{C}^*$:

$$A_u = \frac{1-u}{2} K_z dz + \frac{1-u^{-1}}{2} K_{\bar{z}} d\bar{z}\,. \tag{4.2.18}$$

Из сохранения и плоскости нетеровского тока K, т.е. из (4.2.9)-(4.2.10), следует, что A_u

– плоская связность при любом u:

$$dA_u - A_u \wedge A_u = 0 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{C}^* \,. \tag{4.2.19}$$

4.2.1 Симметрические пространства

Как уже говорилось в разделе 4.1, эрмитовы симметрические пространства попадают в исследуемый нами класс. Известно, что сигма-модели с такими таргет-пространствами являются интегрируемыми, однако каноническая лаксовая связность, которая обычно в этом случае используется, оказывается отличной от (4.2.18). Действительно, в случае симметрических таргет-пространств обычно используется связность

$$\tilde{A}_\lambda = \frac{1-\lambda}{2}\,\tilde{K}_z dz + \frac{1-\lambda^{-1}}{2}\,\tilde{K}_{\bar{z}} d\bar{z}, \tag{4.2.20}$$

где $\tilde{K}$ – нетеровский ток, который выводится из канонического действия

$$\mathcal{S}[\mathbb{G}] = \int_\Sigma d^2z\, \|\partial X\|^2_{\mathbb{G}} \,. \tag{4.2.21}$$

В случае эрмитового симметрического таргет-пространства разность между двумя действиями (4.1.1) и (4.2.21) представляет собой топологический член:

$$\mathcal{S}[\mathbb{G},\mathbb{I}] - \mathcal{S}[\mathbb{G}] = \int_\Sigma X^*\omega, \qquad \text{где} \quad d\omega = 0\,, \quad \text{если } \mathcal{M} \text{ симметрично.} \tag{4.2.22}$$

Следовательно, оба действия приводят к одинаковым уравнения движения. Тем не менее сами нетеровские токи K и $\tilde{K}$ отличаются. Действительно, пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, где $\langle \mathfrak{m}, \mathfrak{h} \rangle_{\mathbb{G}} = 0$, – стандартное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Канонический нетеровский ток $\tilde{K}$ определяется следующим образом:

$$\tilde{K} = 2\, g \cdot \left[g^{-1} dg \right]_{\mathfrak{m}} \cdot g^{-1} \tag{4.2.23}$$

Смысл обозначения $\left[\ldots \right]_{\mathfrak{m}}$ в том, что нужно взять проекцию на линейное подпространство $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$. Этот нетеровский ток определенно отличается от (4.2.8), так как из (4.2.23) следует, что $\tilde{K}$ можно представить в виде (принимая во внимание, что $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_-$)

$$\tilde{K} = 2\, g \cdot (J_+ + J_-) \cdot g^{-1} = 2\, g \cdot \big(((J_+)_z + (J_-)_z)\, dz + ((J_+)_{\bar{z}} + (J_-)_{\bar{z}})\, d\bar{z} \big) \cdot g^{-1} \tag{4.2.24}$$

С другой стороны, ток $\tilde{K}$ также является плоским: $d\tilde{K} - \tilde{K} \wedge \tilde{K} = 0$. Проверка данного свойства не требует, на самом деле, использования уравнений движения – оно является следствием самой структуры алгебры Ли группы изометрий симметрического пространства (в частности, того факта, что $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$). Более того, решение уравнения нулевой кривизны

в этом случае локально по полям модели:

$$\tilde{K} = -\widehat{g}^{-1} d\widehat{g}, \quad \text{где} \quad \widehat{g} = \sigma(g) g^{-1} . \tag{4.2.25}$$

Здесь σ – картановская инволюция на группе Ли G. По определению σ – групповой гомоморфизм, т.е. $\sigma(g_1 g_2) = \sigma(g_1)\sigma(g_2)$, причем $\sigma(h) = h$ при $h \in H$. Формулу $\widehat{g} = \sigma(g) g^{-1}$ можно рассматривать как отображение $g \in G/H \to \widehat{g} \in G$ – она задает картановское вложение

$$G/H \hookrightarrow G . \tag{4.2.26}$$

Из плоскости и сохранения тока $\tilde{K}$ следует плоскость семейства $\tilde{A}_\lambda$. Возникает естественный вопрос: как связаны A_u и $\tilde{A}_\lambda$? Ответ состоит в том, что связности A_u и $\tilde{A}_\lambda$ калибровочно-эквивалентны, если спектральные параметры связаны соотношением

$$\lambda = u^{1/2} . \tag{4.2.27}$$

Ясно, что $|\lambda| = 1$, когда $|u| = 1$, поэтому когда одна из связностей унитарна, то и другая тоже унитарна. Соотношение (4.2.27) также согласуется с анализом [75] поведения голономии связности вокруг циклов Σ в пределе $u \to 0$ (или $u \to \infty$). Калибровочное преобразование Ω, связывающее A_u и $\tilde{A}_\lambda$,

$$\tilde{A}_\lambda = \Omega A_u \Omega^{-1} - \Omega d \Omega^{-1}, \tag{4.2.28}$$

можно выписать явно. В случае, когда таргет-пространство – грассманиан $G_{n_1,n_1+n_2} := \frac{SU(n_1+n_2)}{S(U(n_1)\times U(n_2))}$, а комплексная структура выбрана так, что разбиение $\mathfrak{m}$ на голоморфное/антиголоморфное пространства имеет вид $\mathfrak{m} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathfrak{m}_+ \\ \mathfrak{m}_- & 0 \end{smallmatrix}\right)$, будем иметь:

$$\Omega = g \Lambda g^{-1}, \quad \text{где} \quad \Lambda = \lambda^{\frac{1}{2}\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}} \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda^{-1/2}, \dots, \lambda^{-1/2}}_{n_1}, \underbrace{\lambda^{1/2}, \dots, \lambda^{1/2}}_{n_2}) \tag{4.2.29}$$

В терминах 'динамических' проекторов Π_{n_1}, Π_{n_2} на подпространства $\mathbb{C}^{n_1+n_2}$ соответствующей размерности матрицу Ω можно записать как

$$\Omega = \lambda^{\frac{1}{2}\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}} \left(\lambda^{-1/2} \Pi_{n_1} + \lambda^{1/2} \Pi_{n_2}\right) \tag{4.2.30}$$

В частности, в точке $\lambda = -1$ будем иметь

$$\Omega|_{\lambda=-1} = e^{-i\pi\frac{n_2}{n_1+n_2}} \left(\Pi_{n_1} - \Pi_{n_2}\right), \tag{4.2.31}$$

– это есть явное представление вложения Картана (4.2.26)

$$G_{n_1,n_1+n_2} \hookrightarrow SU(n_1+n_2) . \tag{4.2.32}$$

В этой точке $u = 1$. Так как $A_{u=1} \equiv 0$, имеем $\tilde{A}_{\lambda=-1} = \tilde{K} = -\Omega d \Omega^{-1}$, что совпадает с

представлением (4.2.25), если $\Omega = \widehat{g}^{-1}$.

4.3 Сигма-модель пространства флагов

Перейдем к рассмотрению простейшего частного случая – сигма-модели пространства флагов $\mathcal{M} = \frac{U(3)}{U(1)^3} := \mathcal{F}_3$. Напомним, что данное пространство можно рассматривать как пространство упорядоченных троек векторов в $\mathbb{C}^3$, u_1, u_2, u_3, $u_i \circ \bar{u}_j = \delta_{ij}$, каждый из которых определен с точностью до умножения на фазу. В дальнейшем повсеместно будет использоваться соотношение полноты ($\mathbb{1}_3$ – это 3×3 единичная матрица):

$$\bar{u}_1 \otimes u_1 + \bar{u}_2 \otimes u_2 + \bar{u}_3 \otimes u_3 = \mathbb{1}_3 \, . \tag{4.3.33}$$

4.3.1 Топологические члены

Как уже говорилось, пространство возможных топологических членов, входящих в действие (4.1.1), параметризуется группой $H^2(\mathcal{F}_3, \mathbb{R})$. Как мы показали в Главе 1, эту группу когомологий можно описать весьма простым образом, если заметить, что существует лагранжево вложение

$$i : \mathcal{F}_3 \hookrightarrow \mathbf{C}\mathrm{P}^2 \times \mathbf{C}\mathrm{P}^2 \times \mathbf{C}\mathrm{P}^2 \tag{4.3.34}$$

(в правой части в качестве симплектической формы берется сумма форм Фубини-Штуди). Ограничения трех форм Фубини-Штуди $i^*(\tilde{\Omega}^{(k)}_{FS})$, $k = 1, 2, 3$, порождают $H^2(\mathcal{F}_3, \mathbb{R})$. Однако вследствие того факта, что вложение i лагранжево, имеется соотношение $\sum\limits_{i=1}^{3} i^*(\tilde{\Omega}^{(k)}_{FS}) = 0$, в результате чего $H^2(\mathcal{F}_3, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$. Поэтому в общем случае топологический член зависит от двух параметров.

4.3.2 Инвариантные метрики и формы

$U(3)$-инвариантные тензоры на $\mathcal{F}_3$, в том числе метрики, могут быть построены из инвариантных один-форм

$$J_{ij} := u_i \circ d\bar{u}_j \, . \tag{4.3.35}$$

Они удовлетворяют соотношению $J_{ji} = -\bar{J}_{ij}$. Действие стабилизатора $U(1)^3$ на u_i следующее: $u_k \to e^{i\alpha_k(x)} \, u_k$. Ясно, что внедиагональные формы $J_{ij}, i \neq j$, преобразуются по бифундаментальным представлениям, $J_{ij} \to e^{i(\alpha_i - \alpha_j)} \, J_{ij}$, в то время как диагональные формы преобразуются как связности, $J_{kk} \to J_{kk} - i \, d\alpha_k$.

Важное отличие между симметрическими и несимметрическими пространствами состоит в том, что на последних могут существовать целые семейства инвариантных метрик.

Например, в рассматриваемом случае наиболее общая инвариантная метрика имеет вид

$$ds^2 = \sum_{i \neq j} C_{ij} \, |J_{ij}|^2, \tag{4.3.36}$$

где $C^T = C$ и $C_{ij} > 0$. Мы видим, что в метрике имеются три параметра, C_{12}, C_{13}, C_{23}. Дополнительные условия на метрику могут уменьшить произвол в выборе этих параметров. Например, если потребовать эйнштейновость метрики, то останется всего четыре возможности [29] (с точностью до общего растяжения метрики):

- $(C_{12}, C_{13}, C_{23}) = (1, 1, 2)$ и их перестановки. При этом метрика кэлер-эйнштейнова.
- $(C_{12}, C_{13}, C_{23}) = (1, 1, 1)$. В этом случае метрика эйнштейнова, но не кэлерова.

Все эти метрики будут встречаться в дальнейшем обсуждении, однако сделаем несколько замечаний относительно последней, так как в σ-модели, которую мы будем рассматривать ниже, используется именно она. Во-первых, данная метрика возникает из би-инвариантной метрики на $SU(3)$, поэтому пространство флагов с данной метрикой является *редуктивным* однородным пространством (определение можно найти в [19]). Более того, в данном случае оно является также многообразием, *близким к кэлеровому*[1] (см. раздел 4.5.4). Стоит также заметить, что именно эта метрика возникла в рамках исследования предела Халдейна спиновой цепочки в Главе 2.

Для случая пространства флагов наиболее общее инвариантное B-поле, входящее во второй член действия (4.1.1), может быть построено явно при помощи форм (4.3.35). Построим калибровочно-инвариантные (т.е. $U(1)^3$-инвариантные) вещественные два-формы

$$\omega_{kj} := i J_{kj} \wedge J_{jk} = -i J_{kj} \wedge \bar{J}_{kj}$$

Так как $\omega_{jk} = -\omega_{kj}$, независимых форм всего три. λ строится как их линейная комбинация

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} B_{ij} \, \omega_{ij}$$

с произвольными коэффициентами B_{ij}, $B^T = -B$. Мы увидим, однако, что условие интегрируемости модели накладывает дополнительные условия на B_{ij}.

[1] Nearly Kähler

4.4 Определение сигма-модели

Действие типа (4.1.1) в случае пространства флагов $\frac{U(3)}{U(1)^3}$ принимает вид:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi}\int d^2x \sum_{k\neq j}\Big(-(J_{kj})_\mu\,(J_{jk})_\mu + \, i\,B_{kj}\,\epsilon_{\mu\nu}(J_{kj})_\mu\,(J_{jk})_\nu\Big) \tag{4.4.37}$$

Здесь и далее мы будем обозначать J_{jk} не только сами один-формы на пространстве флагов, но и их ограничения на мировую поверхность, $X^*(J_{jk})$. Действие по построению $U(3)$-инвариантно, поэтому существует нетеровский ток K, связанный с этой симметрией:

$$K = \sum_{k\neq j}\,(J_{jk}\, - i\,B_{kj}\,*\,J_{jk}\,)\,\bar{u}_j\otimes u_k \tag{4.4.38}$$

Отметим, что $K^\dagger = -K$, а звездочка определяется так: $(*J)_\alpha := \epsilon_{\alpha\beta}\,J_\beta$. Условие сохранения тока, $d*K = 0$, эквивалентно уравнениям движения модели. Для того чтобы модель была классически интегрируемой, ток K должен быть плоским [60]: $dK - K\wedge K = 0$. Если это требование выполняется, то можно построить однопараметрическое семейство плоских связностей A (условие нулевой кривизны обеспечивает совместность соответствующей линейной системы – лаксовой пары):

$$A = \frac{1+\alpha}{2}\,K + \frac{\beta}{2}\,*K, \quad \alpha^2+\beta^2 = 1$$

Наше основное утверждение следующее: ток K является плоским только тогда, когда B_{kj} удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} B_{kj}^2 = 1 \;\; (k\neq j)\;, \\ 1 + B_{12}B_{23} - B_{13}B_{12} - B_{13}B_{23} = 0\;. \end{gathered} \tag{4.4.39}$$

Решения легко перечислить:

	(123)	(132)	(312)	(321)	(231)	(213)
B_{12}	1	1	1	-1	-1	-1
B_{13}	1	1	-1	-1	-1	1
B_{23}	1	-1	-1	-1	1	1

Верхняя строка таблицы приведена для того, чтобы показать, что решения находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами группы перестановок $\mathbf{S}_3$. Таким образом, любое B-поле, соответствующее интегрируемой модели, можно получить из любого другого перестановкой прямых флага.

* * *

Здесь стоит сделать небольшое замечание. Коэффициенты B_{ij} должны быть такими, как ука-

зано в таблице, для того чтобы ток K, определенный формулой (4.4.38), был плоским. Тем не менее, можно, конечно, по-прежнему добавлять к лагранжиану топологические члены, т.е. замкнутые комбинации форм ω_{ij}. Формально такие члены дают вклад δK в нетеровский ток такого вида: $\delta K = *dM$, где M – *локальная* функция полей. Следовательно, δK сохраняется вне зависимости от уравнений движения. Поэтому его можно исключить из выражения для нетеровского тока, так как в противном случае ток перестанет, вообще говоря, быть плоским. Резюмируя, можно сказать, что мы вправе добавлять к действию дополнительные топологические члены $\omega_{12} + \omega_{13}$, $\omega_{13} + \omega_{23}$ (и их линейные комбинации), но их вклады не нужно учитывать в K.

* * *

Чтобы доказать, что ток K является плоским, введем матрицу g, образованную тремя векторами u_i, т.е. $(u_i)_s \equiv g_{is}, (\bar{u}_j)_p \equiv (g^\dagger)_{pj}$, и перепишем его в виде

$$K = g^\dagger \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & P^+_{12}\, J_{12} & P^+_{13}\, J_{13} \\ P^-_{12}\, J_{21} & 0 & P^+_{23}\, J_{23} \\ P^-_{13}\, J_{31} & P^-_{23}\, J_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{:=S} \circ g \ ,$$

где ‘проекторы’ $P^\pm_{mn} := 1 \pm i\, B_{mn} *$ удовлетворяют соотношению $(P^\pm_{mn})^2 = 2\, P^\pm_{mn}$.

Легко убедиться в справедливости следующего равенства: $dg = -J \circ g$, $dg^\dagger = g^\dagger \circ J$ (J – это матрица с компонентами J_{ij}). Условие сохранения тока $d * K = 0$ и условие плоскости $dK - K \wedge K = 0$ можно переформулировать соответственно следующим образом:

$$d * S + \{J, *S\} = 0$$
$$dS + \{J, S\} - S \wedge S = 0$$

Можно напрямую убедиться, что эти два уравнения *эквивалентны* в случае матрицы S, введенной ранее, если выполнены условия (4.4.39). При вычислении необходимо использовать соотношения $*^2 = -1, (*a) \wedge b = -a \wedge (*b)$.

Рассмотрим подробно случай $B_{12} = B_{13} = B_{23} = 1$. Введем комплексные координаты $z := x^1 + i\, x^2$ и перепишем лагранжиан (4.4.37) в более компактном виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \quad & (u_1 \circ \partial_{\bar{z}} \bar{u}_2)\, (\bar{u}_1 \circ \partial_z u_2) + (u_1 \circ \partial_{\bar{z}} \bar{u}_3)\, (\bar{u}_1 \circ \partial_z u_3) + \\ + \quad & (u_2 \circ \partial_{\bar{z}} \bar{u}_3)\, (\bar{u}_2 \circ \partial_z u_3) \end{aligned} \tag{4.4.40}$$

Это прямое обобщение лагранжиана с таргет-пространством $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 = \frac{U(2)}{U(1)^2}$, который в свою очередь допускает представление

$$\mathcal{L}_{\mathbf{C}\mathrm{P}^1} = (u_1 \circ \partial_{\bar{z}} \bar{u}_2)\, (\bar{u}_1 \circ \partial_z u_2) \ . \tag{4.4.41}$$

Важный момент состоит в том, что в лагранжиане (4.4.40) комплексная структура на мировой поверхности скоррелирована с комплексной структурой в пространстве $(u(1)^3)^\perp \subset u(3)$ анти-эрмитовых внедиагональных матриц. Например, в лагранжиане (4.4.40) имеется член $(u_1 \circ \partial_{\bar z}\bar u_2)\,(\bar u_1 \circ \partial_z u_2)$, но аналогичный член с заменой $z \leftrightarrow \bar z$ отсутствует. В разделе 4.5.1 мы увидим, что выбор значений B_{kj} в лагранжиане (4.4.37) связан с выбором комплексной структуры на пространстве флагов $\mathcal{F}_3$.

4.4.1 Локальные сохраняющиеся заряды

Как известно со времен Лиувилля, для интегрируемости модели требуется существование достаточного числа сохраняющихся зарядов, в нашем случае бесконечного. Поэтому самый яркий способ проверки потенциальной интегрируемости модели состоит в явном построении бесконечного числа сохраняющихся зарядов с использованием уравнений движения, т.е. в данном случае с использованием уравнения сохранения $d * S + \{J, *S\} = 0$. Оно сводится к следующим уравнениям на компоненты тока J_{ij}:

$$\mathscr{D}[(1 - i*)J_{21}] = 0, \quad \mathscr{D}[(1 - i*)J_{32}] = 0, \tag{4.4.42}$$

$$\mathscr{D}[(1 - i*)J_{31}] + 2\, J_{32} \wedge J_{21} = 0\,, \tag{4.4.43}$$

(Выполняются также комплексно-сопряженные уравнения.) Здесь $\mathscr{D}$ – ковариантная производная для группы $U(1)^3$, т.е.

$$\mathscr{D}J_{kj} := dJ_{kj} + (J_{kk} - J_{jj}) \wedge J_{kj}.$$

Оказывается, уравнение (4.4.43) можно переписать весьма замечательным образом, воспользовавшись соотношением полноты $u_1 \otimes \bar u_1 + u_2 \otimes \bar u_2 + u_3 \otimes \bar u_3 = \mathbb{1}_3$:

$$J_{32} \wedge J_{21} = -du_3 \circ \underbrace{\bar u_2 \wedge u_2}_{=I_3 - \bar u_1 \otimes u_1 - \bar u_3 \otimes u_3} \circ d\bar u_1 = -\mathscr{D}J_{31}$$

В результате уравнения движения могут быть записаны в гораздо более симметричной форме:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}[(1 - i*)J_{21}] = 0, && \mathscr{D}[(1 - i*)J_{32}] = 0,\\
&\mathscr{D}[(1 + i*)J_{31}] = 0, && \mathscr{D}[(1 + i*)J_{12}] = 0,\\
&\mathscr{D}[(1 + i*)J_{23}] = 0, && \mathscr{D}[(1 - i*)J_{13}] = 0.
\end{aligned}$$

Заметим, что $(1 - i*)J = (J_1 - iJ_2)\, d(x^1 + ix^2) := J_z\, dz$, поэтому из этих уравнений можно вывести голоморфный закон сохранения:

$$\partial_{\bar z}\left((J_{13})_z (J_{32})_z (J_{21})_z\right) = 0$$

Калибровочно-инвариантная величина $H := (J_{13})_z(J_{32})_z(J_{21})_z$ порождает бесконечное число интегралов движения, так как $\partial_{\bar{z}}(H^n) = 0$ для любых $n = 1, 2, \ldots$. Отметим, что σ-модели с лагранжианом (4.4.37) соответствует тензор энергии-импульса

$$T_{zz} = (J_{12})_z\,(J_{21})_z + (J_{13})_z\,(J_{31})_z + (J_{23})_z\,(J_{32})_z,$$

который тоже голоморфен: $\partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0$ (Чтобы в этом убедиться, необходимо переписать уравнения вновь в 'удлиненном' виде (4.4.43)). Однако H – голоморфный ток, который является независимым от тензора энергии-импульса, и потому его существование не является прямым следствием конформной инвариантности теории.

4.5 Геометрия пространства флагов

В данном разделе мы обсудим более подробно некоторые аспекты действия (4.4.37) и, в частности, поясним, в чем фундаментальный смысл значений B_{mn}, приведенных в таблице. Для этого нам потребуются сведения о кмплексных структурах на пространстве флагов. Эта тема была подробно разобрана в Главе 1, поэтому здесь мы лишь конкретизируем данное рассмотрение на случай пространства $\frac{U(3)}{U(1)^3}$.

4.5.1 Комплексные структуры

Фундаментальный факт состоит в том, что на $\mathcal{F}_3$ имеется 8 инвариантных почти комплексных структур. Действительно, возьмем три базисные один-формы J_{12}, J_{13}, J_{23} и *постулируем*, что каждая из них является либо голоморфной, либо анти-голоморфной. Далее выберем голоморфные один-формы J_k, где индекс k может принимать значения $12, 13, 23, 21, 31, 32$. Для того чтобы почти комплексная структура была интегрируемой, голоморфные один-формы должны образовывать дифференциальный идеал, т.е. $dJ_k = \sum\limits_m a_{km} \wedge J_m$ для некоторых коэффициентных один-форм a_{km}. Используя тождество $dJ_{ij} = -\sum J_{ik} \wedge J_{kj}$, можно убедиться, что дифференциальные идеалы образованы следующими тройками один-форм (а также, конечно, тройками комплексно сопряженных им форм):

- $I_1 = \{J_{12},\ J_{13},\ J_{23}\}$
- $I_2 = \{J_{12},\ J_{31},\ J_{32}\}$
- $I_3 = \{J_{21},\ J_{31},\ J_{23}\}$

Почти комплексная структура, определенная тройкой $\{J_{12},\ J_{31},\ J_{23}\}$ (а также тройкой сопряженных форм) не интегрируема. Из лагранжиана (4.4.40), отвечающего случаю $B_{12} = B_{13} = B_{23} = 1$, видно, что абсолютные минимумы действия соответствуют I_1-*голоморфным*

кривым:

$$u_1 \circ \partial_{\bar{z}} \bar{u}_2 = 0, \quad u_1 \circ \partial_{\bar{z}} \bar{u}_3 = 0, \quad u_2 \circ \partial_{\bar{z}} \bar{u}_3 = 0$$

По аналогии с этим при $B_{12} = 1, B_{13} = B_{23} = -1$ минимум действия достигается на I_2-голоморфных кривых, а при $B_{12} = B_{13} = -1$, $B_{23} = 1$ – на I_3-голоморфных кривых. Следующее утверждение, которое мы докажем, сотоит в том, что эти три действия отличаются лишь топологическими членами, которые в каждом данном топологическом секторе являются константами. Отсюда можно вывести некоторые следствия, касающиеся существования голоморфных кривых. Кроме того, это также означает, что уравнения движения этих трех моделей совпадают.

4.5.2 I_1, I_2, I_3-голоморфные кривые

Чтобы доказать выдвинутое утверждение, заметим, что внешняя производная формы Калба-Рамона $\lambda = \frac{i}{2\pi} \left(B_{12}\, J_{12} \wedge J_{21} + B_{13}\, J_{13} \wedge J_{31} + B_{23}\, J_{23} \wedge J_{32} \right)$ равна

$$d\lambda = \frac{i}{2\pi} \left(B_{23} + B_{12} - B_{13} \right) \left(J_{21} \wedge J_{13} \wedge J_{32} - \text{.c.} \right)$$

В частности, внешние производные форм со значениями констант B из 1, 3, 5 или 2, 4, 6 столбцов таблицы совпадают. Это означает, что сами формы Калба-Рамона отличаются на замкнутые, т.е. топологические, 2-формы. Убедимся в этом явно. Обозначим форму Калба-Рамона, соответствующую значениям B из k-го столбца за $\lambda^{(k)}$. Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} - \lambda^{(3)} &= 2\, \Omega_{FS}^{(3)} \\ \lambda^{(3)} - \lambda^{(5)} &= 2\, \Omega_{FS}^{(2)} \\ \lambda^{(5)} - \lambda^{(1)} &= 2\, \Omega_{FS}^{(1)} \end{aligned}$$

Здесь $\Omega_{FS}^{(p)} = i^*(\tilde{\Omega}_{FS}^{(p)})$, где i – вложение (4.3.34), а форма Фубини-Штуди

$$\tilde{\Omega}_{FS} = \frac{i}{2\pi} \left(du \wedge \circ\, d\bar{u} - (du \circ \bar{u}) \wedge (d\bar{u} \circ u) \right)$$

и $\sum\limits_{p=1}^{3} \Omega_{FS}^{(p)} = 0$. Обозначим за $n_p \in \mathbb{Z}$ интеграл ограничения соответствующей формы Фубини-Штуди по мировой поверхности, т.е. $n_p = \int\limits_{\Sigma} \Omega_{FS}^{(p)}$. Эти числа удовлетворяют условию $\sum\limits_{p=1}^{3} n_p = 0$. В результате разности действий, отвечающих формам Калба-Рамона $\lambda^{(k)}$ (сами действия мы по аналогии обозначим $\mathcal{S}^{(k)}$), равны:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(1)} - \mathcal{S}^{(3)} &= 2\, n_3 \\ \mathcal{S}^{(3)} - \mathcal{S}^{(5)} &= 2\, n_2 \\ \mathcal{S}^{(5)} - \mathcal{S}^{(1)} &= 2\, n_1 \end{aligned}$$

Предположим теперь, что существует некоторая I_1-голоморфная кривая. На этой кривой $\mathcal{S}^{(1)} = 0$. Однако все действия неотрицательны: $S^{(k)} \geqslant 0$, поэтому получаем необходимое условие:

$$I_1 : \qquad n_1 \geqslant 0, \quad n_3 \leqslant 0 \tag{4.5.44}$$

Аналогично для I_2- и I_3-голоморфных кривых имеем

$$I_2 : \qquad n_2 \leqslant 0, \quad n_3 \geqslant 0 \tag{4.5.45}$$

$$I_3 : \qquad n_1 \leqslant 0, \quad n_2 \geqslant 0 \tag{4.5.46}$$

Отсюда следует, что в общем случае двумерное вещественное подмногообразие может быть голоморфной кривой лишь в одной из комплексных структур (см Рисунок 4.1). Единственное исключение – случай, когда одно из чисел n_p обращается в нуль. Пусть, например, $n_3 = 0$, и задана некоторая I_1-голоморфная кривая. Выпишем явно определение n_3:

$$\begin{aligned} n_3 &= \frac{i}{2\pi}\int \Big(J_{13}\wedge J_{31} + J_{23}\wedge J_{32}\Big) = \\ &= \frac{i}{2\pi}\int \Big((J_{13})_z(J_{31})_{\bar z} - (J_{31})_z(J_{13})_{\bar z} + \\ &\qquad + (J_{23})_z(J_{32})_{\bar z} - (J_{32})_z(J_{23})_{\bar z}\Big)\, dz\wedge d\bar z\ . \end{aligned}$$

Напомним, что для I_1-голоморфной кривой $(J_{13})_{\bar z} = (J_{23})_{\bar z} = 0$, поэтому из $n_3 = 0$ следует также, что $(J_{13})_z = (J_{23})_z = 0$, следовательно, кривая является также голоморфной в комплексной структуре I_2. Такую кривую можно описать достаточно явно. Из $(J_{13})_{\bar z} = (J_{23})_{\bar z} = 0$ следует, что вектор $\partial_{\bar z}\bar u_3$ ортогонален и к $\bar u_1$, и к $\bar u_2$, а потому пропорционален $\bar u_3$, т.е. $\partial_{\bar z}\bar u_3 = \alpha\,\bar u_3$. Аналогично из I_2-голоморфности следует, что $\partial_z\bar u_3 = \beta\bar u_3$. Для того чтобы эти равенства были совместными, необходимо, чтобы $\alpha = \frac{\partial\phi}{\partial\bar z}$ и $\beta = \frac{\partial\phi}{\partial z}$ для некоторой функции $\phi(z,\bar z)$, следовательно, $\bar u_3(z,\bar z) = e^{\phi(z,\bar z)}\,\bar u_3^{(0)}$, где $\bar u_3^{(0)}$ – постоянный единичный вектор. Из условия нормировки вектора u_3, $u_3\circ\bar u_3 = 1$, следует, что ϕ – чисто мнимая величина, поэтому $\bar u_3(z,\bar z)$ и $\bar u_3^{(0)}$ связаны калибровочным преобразованием. Это означает, что кривая, голоморфная одновременно в комплексных структурах I_1 и I_2, тривиально проецируется на третью прямую флага, т.е. по существу данная кривая представляет собой отображение в сферу $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$, параметризованную векторами u_1, u_2 при фиксированном u_3. Мы уже видели в Главе 1, что данная сфера является слоем 'забывающего отображения' (см. также (4.5.48)).

* * *

Заметим, что аналогичное рассмотрение может быть проведено также в более простом случае, когда речь идет об инстантонах/анти-инстантонах сигма-модели с кэлеровой метрикой на таргет-пространстве $\mathcal{F}_3$. В общем случае, когда мы выбираем кэлерову метрику на таргет-пространстве, можно записать два действия σ-модели, выбирая одну из двух комплексных

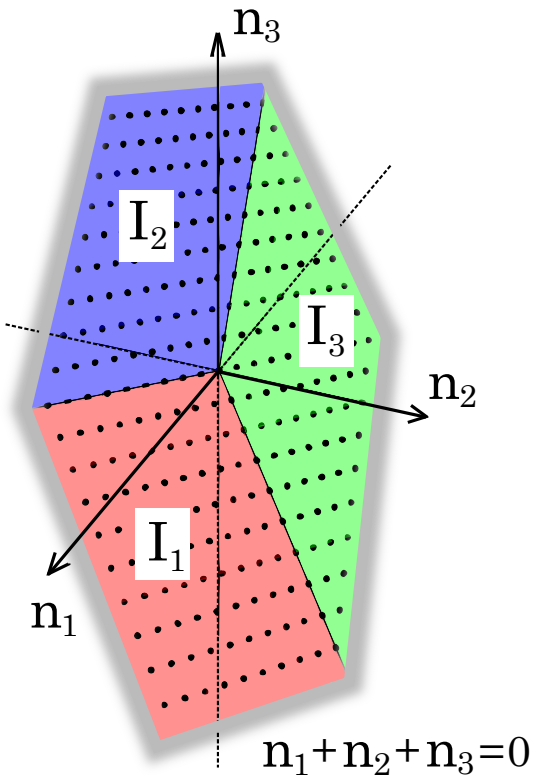


Рис. 4.1: Допустимые инстантонные числа для различных комплексных структур на пространстве флагов $\mathcal{F}_3$ показаны черными точками.

структур:

$$\tilde{\mathcal{S}}^{(1)} = i \int dz \wedge d\bar{z} \left(G_{i\bar{j}}\, \partial_z X^i\, \partial_{\bar{z}} \bar{X}^{\bar{j}} \right)$$

или

$$\tilde{\mathcal{S}}^{(2)} = i \int dz \wedge d\bar{z} \left(G_{i\bar{j}}\, \partial_{\bar{z}} X^i\, \partial_z \bar{X}^{\bar{j}} \right) .$$

Эти два действия отличаются на интеграл кэлеровой формы:

$$\tilde{\mathcal{S}}^{(1)} - \tilde{\mathcal{S}}^{(2)} = \int X^*(G),$$

где $G = i\, G_{i\bar{j}}\, dX^i \wedge d\overline{X}^{\bar{j}}$ – *вещественная* кэлерова форма. Заметим, что $\tilde{\mathcal{S}}^{(1)} \geqslant 0$ и $\tilde{\mathcal{S}}^{(2)} \geqslant 0$. В случае голоморфной кривой Σ второе действие обращается в нуль: $\tilde{\mathcal{S}}^{(2)} = 0$, поэтому из неотрицательности $\tilde{\mathcal{S}}^{(1)}$ следует, что $\int\limits_{\Sigma} X^*(G) \geqslant 0$. Можно убедиться, что кэлеровы формы G_1, G_2, G_3, соответствующие комплексным структурам I_1, I_2, I_3, выражаются через формы Фубини-Штуди $\Omega^{(p)}_{FS}$:

$$\begin{aligned} G_1 &= \Omega^{(1)}_{FS} - \Omega^{(3)}_{FS} \\ G_2 &= \Omega^{(3)}_{FS} - \Omega^{(2)}_{FS} \\ G_3 &= \Omega^{(2)}_{FS} - \Omega^{(1)}_{FS} \end{aligned}$$

Условие $\int\limits_{\Sigma} X^*(G) \geqslant 0$ приводит к следующим ограничениям на кривые, голоморфные в ком-

плексных структурах I_1, I_2, I_3:

$$I_1 : n_1 \geqslant n_3, \qquad I_2 : n_3 \geqslant n_2, \qquad I_3 : n_2 \geqslant n_1$$

Это более слабые условия, чем (4.5.44)-(4.5.46), поэтому они автоматически выполнены для кривых, соответствующих точкам на диаграмме, изображенной на Рисунке 4.1.

4.5.3 Пространство флагов как твисторное пространство

Мы уже видели, что комплексные структуры на пространстве флагов $\mathcal{F}_3$ играют первостепенную роль в теории σ-моделей, рассмотренных в разделе 4.4, поэтому исследуем пространство комплексных структур также с новой точки зрения. Важный факт состоит в том, что пространство флагов является твисторным пространством комплексной проективной плоскости $\overline{\mathbf{C}\mathrm{P}^2}$ ($\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ с обращенной ориентацией) [30], [103]. Оказывается, что все инвариантные почти комплексные структуры на пространстве флагов $\mathcal{F}_3$ можно рассматривать как естественные почти комплексные структуры на твисторном пространстве.

Параметризуем комплексную проективную плоскость $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ с помощью единичного вектора $u_2 \in \mathbb{C}^3$, определенного с точностью до умножения на фазу. Пусть задана точка на $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$, т.е. вектор u_2, выберем еще два вектора u_1 и u_3, ортогональные друг другу и к u_2. Базисом в кокасательном пространстве к $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ в точке u_2 служат один-формы $u_1 \circ d\bar{u}_2, u_3 \circ d\bar{u}_2, \bar{u}_1 \circ du_2, \bar{u}_3 \circ du_2$. Чтобы выбрать комплексную структуру на $T^*_{u_2}\mathbf{C}\mathrm{P}^2$, возьмем две из этих форм, которые назовем J_1 и J_2, и постулируем, что они голоморфны (остальные две, следовательно, анти-голоморфны). Данный выбор не является совсем произвольным, а должен быть согласован с эрмитовостью метрики и с (обращенной) ориентацией на $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ – это означает, что значение квадрата соответствующей кэлеровой формы на любой четверке векторов должно быть противоположно по знаку значению на тех же векторах квадрата формы Фубини-Штуди. Легко видеть, что выбор $J_1 := u_1 \circ d\bar{u}_2$ и $J_2 := du_2 \circ \bar{u}_3$ является допустимым. Изменение векторов u_1, u_3 при сохранении u_2 соответствует изменению комплексной структуры на $T^*_{u_2}\mathbf{C}\mathrm{P}^2$. Действительно, любые две пары векторов (u_1, u_3) и (u'_1, u'_3) связаны вращением базиса

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \Xi \circ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \Xi \in SU(2),$$

так как это преобразование сохраняет условия ортонормированности $\bar{u}_1 \circ u_1 = \bar{u}_3 \circ u_3 = 1$, $\bar{u}_1 \circ u_3 = 0$. Эффект данного преобразования состоит во вращении один-форм $(J_1, \overline{J_2})$:

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ \overline{J_2} \end{pmatrix} \to \Xi \circ \begin{pmatrix} J_1 \\ \overline{J_2} \end{pmatrix}, \quad \Xi \in SU(2)\,.$$

Данное вращение меняет комплексную структуру во всех случаях, кроме как если $\Xi \in U(1)$. Поэтому пространство таких комплексных структур изоморфно $\frac{SU(2)}{U(1)} = \mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Это слой тви-

сторного расслоения $\mathrm{Tw}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2)$. Отметим, что это преобразование не меняет метрику Фубини-Штуди на $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$, так как ее можно записать в виде суммы квадратов модулей один-форм:

$$(ds^2)_{\mathbf{C}\mathrm{P}^2} = du_2 \circ d\bar{u}_2 - |u_2 \circ d\bar{u}_2|^2 = |J_1|^2 + |J_2|^2 \,.$$

Как мы видели, точку твисторного пространства можно задать при помощи тройки ортонормированных векторов $u := (u_1, u_2, u_3)$, определенных с точностью до фазовых преобразований, откуда следует, что $\mathrm{Tw}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2) \simeq \mathcal{F}_3$. Кокасательное пространство в данной точке есть $T^*_u \mathrm{Tw}(\mathbf{C}\mathrm{P}^2) = T^*_{u_2}\mathbf{C}\mathrm{P}^2 \oplus T^*_{(u_1,u_3)}\mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Определим комплексную структуру на этом пространстве. Так как мы уже определили комплексную структуру на пространстве $T^*_{u_2}\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ в точке (u_1, u_3) слоя твисторного расслоения, осталось лишь определить комплексную структуру в направлении слоя, т.е. на пространстве $T^*_{(u_1,u_3)}\mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Базисом в кокасательном пространстве к $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$ служат один-формы $u_1 \circ d\bar{u}_3, u_3 \circ d\bar{u}_1$. Мы можем потребовать, чтобы одна из них была голоморфной. Таким образом возникают *две* почти комплексные структуры на твисторном пространстве. (Заметим по ходу дела, что данная процедура легко обобщается на твисторные пространства других многообразий.) Рассмотрим пока случай, когда голоморфная форма – это $u_1 \circ d\bar{u}_3$. В этом случае мы получаем комплексную структуру на $\mathcal{F}_3$, в которой формы $u_1 \circ d\bar{u}_2, du_2 \circ \bar{u}_3, u_1 \circ d\bar{u}_3$ являются голоморфными. Ясно, что это уже обсуждавшаяся ранее комплексная структура I_1. Если бы мы выбрали форму $u_3 \circ d\bar{u}_1$ в качестве голоморфной один-формы, кокасательной к слою, то мы получили бы неинтегрируемую почти комплексную структуру $\tilde{I}$. Так же, как и интегрируемые комплексную структуры, ее можно задать при помощи тройки голоморфных один-форм:

$$\tilde{I} = \{J_{12},\ J_{31},\ J_{23}\} \tag{4.5.47}$$

Чтобы получить аналогичным способом комлексные структуры I_2 и I_3, вспомним, что имеются *три* забывающих отображения (проекции)

$$\begin{array}{c} \mathcal{F}_3 \\ \mathbf{C}\mathrm{P}^1 \quad \Big\downarrow \pi_1, \pi_2, \pi_3 \\ \mathbf{C}\mathrm{P}^2 \end{array} \tag{4.5.48}$$

каждая из которых объединяет две из трех прямых флага и превращает их в плоскость. Другими словами, мы можем рассматривать то же пространство флагов как твисторное пространство для проективных плоскостей, параметризованных векторами u_1 или u_3, а не обязательно u_2. В этом случае в рамках структуры твисторного пространства возникают другие комплексные структуры на $\mathcal{F}_3$: I_2 и I_3 соответственно. При этом обращение комплексной структуры в слое более не дает новых почти комплексных структур, а дает снова $\tilde{I}$ и противоположную ей.

Используя язык твисторных расслоений, можно переформулировать один из результатов предыдущего раздела таким образом: кривая голоморфна одновременно в двух комплексных структурах в том и только том случае, если она является отображением в *слой* одного из расслоений (4.5.48). Ясно, что такие кривые можно параметризовать точками базы расслоения, т.е. $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ (в предыдущем разделе рассматривалась ситуация, когда пространство $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ параметризовано вектором u_3).

4.5.4 Структуры, близкие к кэлеровым

Покажем теперь, что $\mathcal{F}_3$ является многообразием, близким к кэлерову, если выбрать метрику

$$ds^2 = |J_{12}|^2 + |J_{13}|^2 + |J_{23}|^2, \tag{4.5.49}$$

которую мы использовали, в частности, в действии (4.4.37), а также неинтегрируемую почти комплексную структуру (4.5.47). По определению 'многообразие, близкое к кэлеровому', означает, что ковариантная производная тензора комплексной структуры с индексами внизу (т.е. кэлеровой формы) $\nabla_\alpha I_{\mu\nu}$, является полностью кососимметрическим тензором (свойства многообразий, близких к кэлеровым, подробно обсуждаются в [72]).

Ключевое свойство метрики (4.5.49) состоит в том, что она индуцируется из биинвариантной метрики на $SU(3)$. В связи с этим полезно вспомнить разложение $su(3) = u(1)^2 \oplus [u(1)^2]^\perp$. Будем также держать в уме более общую постановку задачи, когда $SU(3)$ заменяется на другую группу Ли G, и используем соответствующее разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$.

Требование, чтобы многообразие было 'близким к кэлеровому', можно перефразировать в локальном базисе: нужно доказать, что величина $E_a^\alpha \nabla_\alpha I_{bc}$ кососимметрична по индексам a, b, c (где E_a^α – обратная тетрада). Заметим, что в локальном базисе инвариантная почти комлексная структура I_{bc} постоянна. Кроме того, так как метрика индуцируется из биинвариантной метрики на группе, спиновая связность ω в локальном базисе задается структурными константами, и $E_a^\alpha(\omega_\alpha)_{bc} \propto f_{abc}$ (здесь все индексы ограничены на подпространство $\mathfrak{m}$). Следовательно, наша цель – показать, что комбинация $f_{abm}I_{mc} + f_{acm}I_{bm}$ кососимметрична по a, b, c. Эту комбинацию можно также переписать в виде $\mathrm{tr}\,(T_a[T_c, I(T_b)] - T_a[T_b, I(T_c)])$. Требование антисимметрии относительно замены $a \leftrightarrow b$ сводится к условию $\mathrm{tr}\,(T_c[T_a, I(T_b)]) = -\mathrm{tr}\,(T_c[T_b, I(T_a)])$, где $T_a, T_b, T_c \in \mathfrak{m}$, откуда следует, что

$$[T_a, I(T_b)] - [I(T_a), T_b] \in \mathfrak{h}$$

Можно также переформулировать это требование таким образом: для любых двух генераторов T и $\tilde{T}$, принадлежащих различным собственным пространствам оператора I (т.е. $I(T) = \pm iT,\ I(\tilde{T}) = \mp i\tilde{T}$), их коммутатор должен принадлежать $\mathfrak{h}$: $[T, \tilde{T}] \in \mathfrak{h}$. В рассматриваемом случае можно проверить явно, что это требование выполнено, используя определение комплексной структуры (4.5.47).

4.6 Обсуждение

В настоящей Главе мы показали, что σ-модели с комплексными однородными таргет-прост-ранствами и действием (4.1.1) обладают следующим свойством: их уравнения движения можно записать в виде условия плоскости однопараметрического семейства связностей (так называемое условие нулевой кривизны). Это представление повсеместно встречается в теории двумерных интегрируемых моделей и зачастую считается характерным, краеугольным свойством этих моделей [58; 75; 108]. Как мы видели в разделе 4.2.1, в специальном случае симметрических таргет-пространств предложенная плоская связность калибровочно-эквивалентна обычной, с точностью до переопределения спектрального параметра (4.2.27).

В следующей Главе на примере сигма-модели пространства флагов $\mathcal{M} = \frac{SU(3)}{S(U(1)^3)}$ будет показано, как можно в явном виде построить все решения уравнений движения в случае, когда мировая поверхность – сфера $\Sigma = \mathbf{C}\mathrm{P}^1$. В принципе подход, основанный на уравнении нулевой кривизны, должен позволять строить явные решения модели (4.1.1) и в общем случае.

Интересно заметить, что действие (4.1.1) совпадает по форме с бозонной частью действия, предложенного в работе [113]. В этой статье основное внимание уделено специальной нильпотентной 'суперсимметрии' полного действия, порожденной суперзарядом $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^2 = 0$. Там показано, что корреляционные функции $\mathcal{Q}$-замкнутых наблюдаемых в этих моделях можно точно вычислить. Они связаны с пространствами модулей $\mathbb{I}$-голоморфных кривых в таргет-пространстве. (Голоморфные кривые являются абсолютными минимумами действия (4.1.1); действие обращается в нуль на них.) Более того, корреляционные функции $\mathcal{Q}$-замкнутых наблюдаемых являются 'топологическими', в том смысле что они не меняются при гладких деформациях метрики $\mathbb{G}$ и комплексной структуры $\mathbb{I}$. С другой стороны, построенное нами в настоящей Главе представление нулевой кривизны может позволить найти также другие решения уравнений движения, а не только голоморфные кривые. Однако представление нулевой кривизны имеет место лишь в том случае, если мы выберем на таргет-пространстве $\mathcal{M}$ σ-модели киллингову метрику и согласованную с ней комплексную структуру.

Глава 5. Явные решения уравнений движения

В данной главе будут найдены явные решения уравнений движения σ-модели, описанной в предыдущей главе[1], для случая, когда мировая поверхность $\mathscr{M}$ – это сфера $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Таргет-пространство модели – многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^3$, которое мы будем обозначать $\mathcal{F}_3$. Его можно рассматривать как множество упорядоченных троек попарно ортогональных прямых в $\mathbb{C}^3$, проходящих через начало координат. Для него существует также представление в виде фактор-пространства:

$$\mathcal{F}_3 = \frac{U(3)}{U(1)^3}\,. \tag{5.0.1}$$

Из структуры фактор-пространства (5.0.1) ясно, что имеется три "забывающих" отображения: $\{\pi_i : \mathcal{F}_3 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2,\ i = 1, 2, 3\}$. В связи с этим свойства пространства флагов тесно связаны со свойствами соответствующих проективных пространств $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$. Как мы увидим в дальнейшем, решения уравнений движения σ-модели пространства флагов во многом выражаются через решения соответствующей $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$-модели. Поэтому, а также с целью введения обозначений, мы начнем обсуждение как раз с σ-модели пространства $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$.

5.1 $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ σ-модель

Мы будем в основном рассматривать проективное пространство $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ как фактор $\mathbf{C}\mathrm{P}^2 = (\mathbb{C}^3 - \{0\})/\mathbb{C}^*$. Отображение $v :\ \mathscr{M} \ \to\ \mathbf{C}\mathrm{P}^2$ из римановой поверхности $\mathscr{M}$ можно описать при помощи векторно-значной функции $v(z, \bar{z}) \in\ \mathbb{C}^3$, где $z, \bar{z}$ – координаты на мировом листе $\mathscr{M}$. Будем также предполагать, что вектор v нормирован, т.е. $v \in S^5 \subset \mathbb{C}^3$: $\sum\limits_{i=1}^{3} |v_i|^2 := \bar{v} \circ v = 1$, и в дальнейшем будем всюду использовать эту нормировку. Это условие представляет собой частичную фиксацию калибровки для калибровочной группы $\mathbb{C}^*$, нарушающую ее до $U(1)$.

[1] Некоторые классические решения сигма-модели с тем же таргет-пространством, но без B-поля, построены в недавней работе [24]. Случай гармонических отображений с трехмерной мировой поверхностью также исследовался в [23].

Введем ковариантную производную

$$D_i^{(v)} w := \partial_i w - q_w \cdot (\bar{v} \circ \partial_i v)\, w\,, \qquad i = \{z, \bar{z}\} \tag{5.1.2}$$

где q_w – $U(1)$-заряд вектора w, нормированный условием, что заряд вектора v равен единице: $q_v = 1$. В большинстве приложений выражения (5.1.2) в дальнейшем w – вектор, полученный из базового отображения v или комлексно сопряженного ему $\bar{v}$ применением ковариантных производных. Например, $w = \{v, D_z^{(v)} v, D_{\bar{z}}^{(v)} v, D_z^{(v)} D_{\bar{z}}^{(v)} v, \ldots\}$, в этом случае $q_w = 1$, или $w = \{\bar{v}, D_z^{(v)} \bar{v}, D_{\bar{z}}^{(v)} \bar{v}, D_z^{(v)} D_{\bar{z}}^{(v)} \bar{v}, \ldots\}$, тогда $q_w = -1$. Если это не может привести к неоднозначному толкованию, мы будем иногда писать просто D_z вместо $D_z^{(v)}$, $D_{\bar{z}}$ вместо $D_{\bar{z}}^{(v)}$.

Ковариантная производная удовлетворяет правилу Лейбница: $D_i^{(v)}(a \cdot b) = D_i^{(v)}(a) \cdot b + a \cdot D_i^{(v)}(b)$. Коммутатор ковариантных производных дает ограничение формы Фубини-Штуди на мировую поверхность:

$$[D_z^{(v)}, D_{\bar{z}}^{(v)}] = D_{\bar{z}}^{(v)} \bar{v} \circ D_z^{(v)} v - D_z^{(v)} \bar{v} \circ D_{\bar{z}}^{(v)} v\,. \tag{5.1.3}$$

Действие $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ σ-модели (с нулевым θ-членом) таково:

$$\mathcal{S} = \int\limits_{\mathscr{M}} \frac{i}{2}\, dz \wedge d\bar{z}\, \left(\|D_z v\|^2 + \|D_{\bar{z}} v\|^2 \right) \tag{5.1.4}$$

Уравнения движения, которые следуют из этого действия, суть

$$D_{\bar{z}}^{(v)} D_z^{(v)} v = \alpha\, v, \tag{5.1.5}$$

где α – скалярная функция. Умножая это уравнение на $\bar{v}$ и используя правило Лейбница совместно с тождеством $\bar{v} \circ D_z^{(v)} v = 0$ (которое следует из определения (5.1.2)), находим $\alpha = -\|D_z v\|^2$. Так как, согласно (5.1.3), $[D_z, D_{\bar{z}}]$ – скалярная функция, уравнение (5.1.5) можно эквивалентно переписать в виде

$$D_z^{(v)} D_{\bar{z}}^{(v)} v = \tilde{\alpha}\, v \tag{5.1.6}$$

Отображение v, удовлетворяющее (5.1.5)-(5.1.6), называется *гармоническим*. Обзор теории гармонических отображений можно найти в [103].

5.2 σ-модель пространства флагов

Как уже говорилось ранее, мы собираемся изучить в деталях σ-модель пространства флагов с ненулевым B-полем, которая была введена в предыдущей главе. Таргет-пространством является многообразие $\mathcal{F}_3 = \frac{U(3)}{U(1)^3}$, параметризованное при помощи ортонормированных векторов u_i ($u_i \circ \bar{u}_j = \delta_{ij}$), по модулю фазовых преобразований $u_k \to e^{i\alpha_k} u_k$.

Определим токи

$$J_{mn} := u_m \circ d\bar{u}_n \ , \qquad m,n = 1,2,3. \tag{5.2.7}$$

Внедиагональные токи $\{J_{mn},\ m \neq n\}$ образуют тетраду (они определены с точностью до фазовых множителей). Заметим также, что $J_{nm} = -\bar{J}_{mn}$. Можно определить *почти комплексную структуру* на $\mathcal{F}_3$, выбрав три не сопряженные друг другу формы $J_{m_1n_1}, J_{m_2n_2}, J_{m_3n_3}$ и объявив их голоморфными. Оставшиеся три формы, сопряженные выбранным, следовательно, являются анти-голоморфными. Чтобы понять, какие из этих комплексных структур являются интегрируемыми, удобно использовать специальные диаграммы. Нарисуем три узла, а также стрелки из узла m_1 в узел n_1, из m_2 в n_2 и из m_3 в n_3. В главе 1 было показано, что условие интегрируемости определенной таким образом почти комплексной структуры эквивалентно ацикличности диаграммы (т.е. чтобы она не содержала замкнутый цикл).

Пусть задана ацикличная диаграмма, которую назовем $\mathcal{Q}$. Действие модели можно записать в виде

$$\mathcal{S}_{\mathcal{Q}} = \int\limits_{\mathscr{M}} \frac{i}{2}\, dz \wedge d\bar{z} \left(\sum_{\substack{\text{Стрелки} \\ m \to n}} \left|(J_{mn})_{\bar{z}}\right|^2 \right) \tag{5.2.8}$$

В предыдущей главе мы показали, что действия, соответствующие трем разным интегрируемым комплексным структурам, диаграммы которых изображены на Рисунке 5.1 голубым цветом, отличаются лишь топологическими членами:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{Q}_1} - \mathcal{S}_{\mathcal{Q}_2} = \text{const.} \qquad \text{и т.д.}, \tag{5.2.9}$$

Поэтому результирующие уравнения движения одинаковы. В частности, мы видим из (5.2.8)-(5.2.9), что кривая, голоморфная в комплексной структуре, отвечающей одной из диаграмм $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3$ на Рисунке 5.1, является решением уравнений движения. Что более удивительно, однако, так это то, что кривая, голоморфная в любой из двух неинтегрируемых комплексных структур, тоже является решением уравнений движения. Чтобы убедиться в этом, выпишем явно уравнения движения:

$$\mathscr{D}_z(J_{12})_{\bar{z}} = 0, \qquad \mathscr{D}_z(J_{31})_{\bar{z}} = 0, \qquad \mathscr{D}_z(J_{23})_{\bar{z}} = 0 \qquad \text{плюс компл. сопр.} \tag{5.2.10}$$

Здесь $\mathscr{D}$ – $U(1)^3$-ковариантная производная, действующая по следующему правилу: $\mathscr{D}J_{mn} := dJ_{mn} + (J_{mm} - J_{nn}) \wedge J_{mn}$. Легко видеть, что условия $(J_{12})_{\bar{z}} = (J_{31})_{\bar{z}} = (J_{23})_{\bar{z}} = 0$ обеспечивают выполнение уравнений движения (5.2.10), а это в точности уравнения, определяющие голоморфную кривую относительно почти комплексной структуры, соответствующей циклической диаграмме $\mathcal{Q}_I$ на Рисунке 5.1. Что касается противоположной неинтегрируемой почти комплексной структуры $-I$, заметим, что уравнения движение (5.2.10) также можно записать в виде

$$\mathscr{D}_{\bar{z}}(J_{12})_z \sim (J_{13} \wedge J_{32})_{z\bar{z}}, \quad \mathscr{D}_{\bar{z}}(J_{31})_z \sim (J_{32} \wedge J_{21})_{z\bar{z}}, \quad \mathscr{D}_{\bar{z}}(J_{23})_z \sim (J_{21} \wedge J_{13})_{z\bar{z}} \tag{5.2.11}$$

В случае кривой, голоморфной в почти комплексной структуре $-I$, левая часть обращается в нуль, а все формы в правой части имеют тип $(1,0)$ (т.е. пропорциональны dz), поэтому их внешние произведения также зануляются. Заметим, однако, что уравнения, будучи записаны в форме (5.2.10) и в форме (5.2.11), выглядят существенно по-разному (хотя они и эквивалентны), поэтому диаграммы соответствующих почти комплексных структур изображены на Рисунке 5.1 разными цветами.

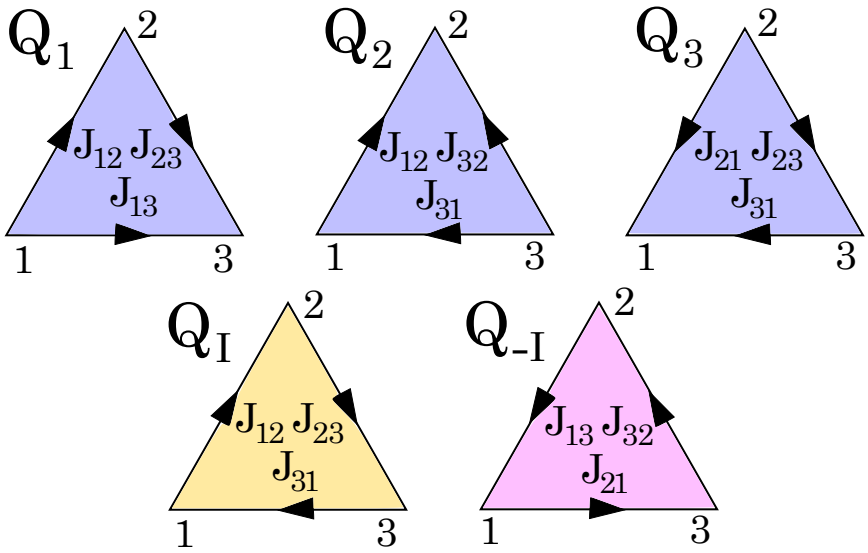


Рис. 5.1: Почти комплексные структуры на пространстве флагов, обладающие следующим свойством: соответствующие почти голоморфные кривые являются решениями уравнений движения σ-модели. Три верхних треугольника отвечают интегрируемым комплексным структурам, в то время как нижние треугольники отвечают неинтегрируемым.

Замечание. Чтобы лучше понять комплексную структуру на $\mathcal{F}_3$, полезно вспомнить следующее определение пространства флагов (см., например, [88]):

$$\mathcal{F}_3 = \{w_0 v_0 + w_1 v_1 + w_2 v_2 = 0, \quad (w,v) \in \mathbf{C}\mathrm{P}^2 \times \mathbf{C}\mathrm{P}^2\} \tag{5.2.12}$$

Данное вложение в $\mathbf{C}\mathrm{P}^2 \times \mathbf{C}\mathrm{P}^2$ определяет комплексную структуру на $\mathcal{F}_3$. Чтобы понять взаимосвязь с использованным нами ранее определением в терминах один-форм J_{mn}, рассмотрим, например, комплексную структуру, отвечающую диаграмме $\mathcal{Q}_1$, и кривую $\mathscr{C}$, голоморфную в данной комлексной структуре. Легко установить справедливость следующих соотношений:

$$\bar{u}_2 \circ \partial_{\bar{z}} u_1 = 0, \quad \bar{u}_3 \circ \partial_{\bar{z}} u_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_{\bar{z}}^{(u_1)} u_1 = 0 \tag{5.2.13}$$

$$u_1 \circ \partial_{\bar{z}} \bar{u}_3 = 0, \quad u_2 \circ \partial_{\bar{z}} \bar{u}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_{z}^{(u_3)} u_3 = 0 \tag{5.2.14}$$

Отсюда следует, что проекции кривой $\mathscr{C}$ на пространства $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ с координатами $u_1, \bar{u}_3$ являются голоморфными кривыми. Более того, $u_1 \circ \bar{u}_3 = 0$. Сравнивая с (5.2.12), можно убедиться, что переменные (w,v) в (5.2.12) можно отождествить с $(u_1, \bar{u}_3)$. Все остальные интегрируемые комплексные структуры на $\mathcal{F}_3$ получаются заменой (w,v) на соответствующие пары $(u_i, \bar{u}_j)$ при использовании вложения (5.2.12).

5.3 Критические отображения $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathcal{F}_3$

Будем называть отображение $\mathscr{M} \to \mathcal{F}_3$ *критическим*, если оно является решением уравнения движения (5.2.10). В дальнейшем в настоящей Главе нас будет интересовать случай $\mathscr{M} = \mathbf{C}\mathrm{P}^1$.

Из уравнений (5.2.10) легко вывести следующие законы сохранения:

$$\partial_z \left((J_{12})_{\bar{z}} (J_{23})_{\bar{z}} (J_{31})_{\bar{z}} \right) = 0 \tag{5.3.15}$$

Заметим, что выражения в скобках представляют собой сечения куба канонического расслоения K над $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$, и из законов сохранения следует, что эти величины анти-голоморфны, т.е. $(J_{12})_{\bar{z}} (J_{23})_{\bar{z}} (J_{31})_{\bar{z}} \in H^0(K^3, \mathbf{C}\mathrm{P}^1)$. Однако в силу того что $H^0(K^3, \mathbf{C}\mathrm{P}^1) = 0$, такие сечения с необходимостью равны нулю. Поэтому

$$(J_{12})_{\bar{z}} (J_{23})_{\bar{z}} (J_{31})_{\bar{z}} = 0 \tag{5.3.16}$$

Предположим, что

$$(J_{31})_{\bar{z}} = 0, \tag{5.3.17}$$

тогда оставшиеся уравнения (5.2.10) принимают вид

$$\bar{u}_1 \circ D_{\bar{z}} D_z u_2 = 0, \qquad \bar{u}_3 \circ D_{\bar{z}} D_z u_2 \quad \Rightarrow \quad D_{\bar{z}} D_z u_2 = \alpha \, u_2, \tag{5.3.18}$$

где α – произвольная скалярная функция. Следовательно, $u_2(z, \bar{z})$ – гармоническое отображение (см. (5.1.5)).

5.3.1 Гармонические отображения $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$

В данном разделе мы напомним классическую конструкцию, описывающую все гармоническое отображения $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$. Данное построение было разработано в статье [59] (при помощи метода, введенного в работе [51] для описания минимальных отображений $S^2 \to S^n$). Ключевое свойство таких отображений, которое является краеугольным для конструкции, которую мы опишем, называется ‘комплексной изотропией’:

$$D_z^n \bar{v} \circ D_z^m v = 0 \qquad \text{при} \quad m + n > 0 \tag{5.3.19}$$

Заметим, что это свойство, вообще говоря, не выполнено для гармонических отображений $\mathscr{C}_g \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$, где $\mathscr{C}_g$ – кривая положительного рода $g > 0$.

Доказательство (5.3.19). Во-первых, по определению ковариантной производной

$$\bar{v} \circ D_z v = 0 = D_z \bar{v} \circ v \tag{5.3.20}$$

Предположим, что мы доказали (5.3.19) для случая $m+n \leqslant N$. Отсюда следует, что $D_z^{n+1}\bar{v} \circ D_z^m v$ при $m+n=N$ – тензор относительно комплексно-аналитических замен переменных. Действительно, при замене переменных $z=z(w)$ будем иметь

$$D_z^{n+1}\bar{v} \circ D_z^m v \to \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{n+m+1} D_w^{n+1}\bar{v} \circ D_w^m v + \sum_{m+n<N} g_{m,n}\, D_w^{n+1}\bar{v} \circ D_w^m v, \tag{5.3.21}$$

и сумма обращается в нуль согласно предположению. Следовательно, $D_z^{n+1}\bar{v} \circ D_z^m v \in \Gamma(K^{m+n+1}, \mathbf{C}\mathrm{P}^1)$. Вычислим

$$\partial_{\bar{z}}(D_z^{n+1}\bar{v} \circ D_z^m v) = (D_{\bar{z}} D_z^{n+1}\bar{v}) \circ D_z^m v + D_z^{n+1}\bar{v} \circ (D_{\bar{z}} D_z^m v) \tag{5.3.22}$$

при $m+n=N$. Используя коммутационное соотношение (5.1.3) для ковариантных производных и гармоничность отображения v, находим, что $D_{\bar{z}} D_z^m v = \sum\limits_{k<m} f_k D_z^k v$, и ранее мы уже доказали, что $D_z^{n+1}\bar{v} \circ D_z^k v = 0$ при $n+k<N$.

Следовательно, $\partial_{\bar{z}}(D_z^{n+1}\bar{v} \circ D_z^m v) = 0$, поэтому $D_z^{N-m+1}\bar{v} \circ D_z^m v$ – голоморфное сечение линейного расслоения K^{N+1} над $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Ключевое свойство (которое мы уже использовали ранее в частном случае $m=3$) заключается в том, что

$$H^0(K^m, \mathbf{C}\mathrm{P}^1) = 0 \qquad \text{при} \quad m>0, \tag{5.3.23}$$

поэтому полученное сечение с необходимостью равно нулю, откуда следует (5.3.19). ■

Установив свойство изотропии (5.3.19), рассмотрим следующую последовательность отображений:

$$\ldots \to D_{\bar{z}}^2 v \to D_{\bar{z}} v \to v \to D_z v \to D_z^2 v \to \ldots \tag{5.3.24}$$

Данную последовательность можно продолжить налево и направо, однако в случае $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ достаточно рассмотреть только члены, показанные в (5.3.24). Предположим, что v – ни голоморфное, ни анти-голоморфное отображение. Согласно (5.3.19), $(v, D_z v, D_{\bar{z}} v)$ и $(v, D_z^2 v, D_{\bar{z}} v)$ – две тройки попарно ортогональных векторов. Так как объемлющее пространство трехмерно, будем иметь

$$D_z^2 v = \beta D_z v \tag{5.3.25}$$

для некоторой скалярной функции β. Введем единичный вектор $w = \frac{D_z v}{\|D_z v\|}$, тогда небольшое вычисление показывает, что вышеприведенное равенство можно переписать в виде

$$D_z^{(w)}\, w = 0\,, \tag{5.3.26}$$

откуда следует, что $w = \frac{D_z v}{\|D_z v\|}$ – анти-голоморфное отображение. По аналогии с этим отображение $\frac{D_{\bar z} v}{\|D_{\bar z} v\|}$ голоморфно.

Так как (анти)-голоморфные отображения являются гармоническими, оба эти отображения также удовлетворяют уравнениям (5.1.5). В общем случае проективного пространства $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ аналогичное утверждение является следствием замечательного факта, заключающегося в существовании преобразований Бэклунда, позволяющих получать новые решения уравнений движения из старых.

Преобразования Бэклунда

Замечательное свойство уравнения (5.1.5) состоит в том, что имея одно решение $v(z, \bar z)$, можно получить другое решение $w(z, \bar z)$ по следующей формуле [115]

$$w = B \circ v = \frac{D_z v}{\|D_z v\|} \tag{5.3.27}$$

Чтобы доказать это, заметим, что если v – решение (5.1.5), то

$$D_z^{(v)} = f^{-1} \cdot D_z^{(w)} \cdot f, \qquad D_{\bar z}^{(v)} = f \cdot D_{\bar z}^{(w)} \cdot f^{-1}, \qquad f = \|D_z v\| \tag{5.3.28}$$

Следовательно, из (5.1.5) следует, что $D_{\bar z}^{(w)} w = -f\, v$. Действуя ковариантной производной $D_z^{(w)}$ и используя (5.3.28), получим уравнение

$$D_z^{(w)} D_{\bar z}^{(w)} w = -f^2\, w, \tag{5.3.29}$$

означающее, что w – гармоническое отображение. (Здесь мы использовали вторую форму (5.1.6) уравнений движения σ-модели.)

По аналогии с (5.3.27) можно построить второе преобразование Бэклунда:

$$\tilde w = \tilde B \circ v = -\frac{D_{\bar z} v}{\|D_{\bar z} v\|} \tag{5.3.30}$$

Оказывается, что оно обратно отображению B, если рассматривать действие этих отображений на векторы, не являющиеся голоморфными или анти-голоморфными:

$$\tilde B \circ B = \mathbf{1} \qquad \text{на не-анти-гол. отобр. } (B \circ v \neq 0) \tag{5.3.31}$$

$$B \circ \tilde B = \mathbf{1} \qquad \text{на не-гол. отобр. } (\tilde B \circ v \neq 0) \tag{5.3.32}$$

Чтобы доказать (5.3.31)-(5.3.32), используем (5.3.28) и аналогичные соотношения

$$D_z^{(v)} = \tilde f \cdot D_z^{(\tilde w)} \cdot \tilde f^{-1}, \qquad D_{\bar z}^{(v)} = \tilde f^{-1} \cdot D_{\bar z}^{(\tilde w)} \cdot \tilde f, \qquad \tilde f = \|D_{\bar z} v\| \tag{5.3.33}$$

Совмещая полученные результаты, приходим к выводу, что гармонические отображения $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$ находятся в ситуации общего положения в 3 : 1-соответствии с голоморфными отображениями $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$. Более точно можно сказать, что для *каждого* голоморфного отображения v можно построить два связанных гармонических отображения: $w_1 = B \circ v$ и $w_2 = B \circ B \circ v$, причем второе анти-голоморфно, т.е. $B \circ w_2 = 0$. В особом случае, когда v не является *полным* отображением, т.е. когда образ лежит в собственном линейном подпространстве $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^3$, оказывается, что $w_2 \equiv 0$, т.е. есть всего лишь одно связанное отображение w_1, которое в этом случае анти-голоморфно. Экстремальный случай $w_1 \equiv 0$ соответствует постоянному отображению v.

5.3.2 'Поднятие' в пространство флагов

Чтобы превратить гармоническое отображение

$$v = u_2 : \mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2 \tag{5.3.34}$$

в критическое отображение в $\mathcal{F}_3$, мы должны показать, что его можно поднять до отображения в пространство флагов, удовлетворяющее оставшемуся уравнению (5.3.17): $(J_{31})_{\bar z} = u_3 \circ \partial_{\bar z} \bar u_1 = 0$, где u_1 и u_3 ортогональны друг другу и u_2.

I. $D_z u_2 \not\equiv 0, D_{\bar z} u_2 \not\equiv 0$. Оба этих вектора ортогональны u_2 (по определению) и друг другу (вследствие изотропии). Следовательно, u_1 и u_3 – линейные комбинации этих двух векторов:

$$u_1 = a\, D_z u_2 + b\, D_{\bar z} u_2, \tag{5.3.35}$$

$$u_3 = c\, D_z u_2 + d\, D_{\bar z} u_2 \tag{5.3.36}$$

Действуя ковариантной производной $D_{\bar z}^{(u_2)}$ на u_3, получим (α – скалярная функция из уравнения (5.3.18)):

$$D_{\bar z}^{(u_2)} u_3 = \partial_{\bar z} c\, D_z u_2 + c\, \alpha\, u_2 + (\partial_{\bar z}\, d + \tau\, d)\, D_{\bar z} u_2, \tag{5.3.37}$$

где τ – коэффициент пропорциональности из равенства $(D_{\bar z}^{(u_2)})^2 u_2 = \tau D_{\bar z} u_2$ (которое выводится аналогично (5.3.25)). Простое вычисление показывает, что

$$\tau = \partial_{\bar z} (\log \|D_{\bar z} u_2\|^2)\,. \tag{5.3.38}$$

Из уравнения $u_3 \circ \partial_{\bar z} \bar u_1 = 0$ следует, что

$$\partial_{\bar z} c\, \bar a\, \|D_z u_2\|^2 + \bar b\, (\partial_{\bar z}\, d + \tau\, d)\, \|D_{\bar z} u_2\|^2 = 0 \tag{5.3.39}$$

Совместно с условием ортогональности $\bar{u}_1 \circ u_3 = 0$, которое можно выразить как

$$c\,\bar{a}\,\|D_z u_2\|^2 + \bar{b}\,d\,\|D_{\bar{z}} u_2\|^2 = 0, \tag{5.3.40}$$

это дает

$$\partial_{\bar{z}} c\,d - (\partial_{\bar{z}} d + \tau\,d)\,c = 0, \tag{5.3.41}$$

откуда

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda(z,\bar{z}) \begin{pmatrix} f(z)\cdot\|D_{\bar{z}} u_2\|^2 \\ g(z) \end{pmatrix}, \tag{5.3.42}$$

где $(f(z) : g(z)) \in \mathbf{C}\mathrm{P}^1$ – две голоморфные функции. Легко видеть, что оставшиеся неизвестные, такие как λ, a, b, можно теперь найти из условий нормировки $\bar{u}_1 \circ u_1 = \bar{u_3} \circ u_3 = 1$. Поэтому поднятие в пространство флагов определяется голоморфным отображением

$$(\mathbf{C}\mathrm{P}^1)_z \to (\mathbf{C}\mathrm{P}^1)_{(f:g)}\ . \tag{5.3.43}$$

Это отображение является, по сути, рациональной функцией $\frac{f(z)}{g(z)}$.

Заметим, что построенное таким образом критическое отображение $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathcal{F}_3$ не голоморфно ни в одной из почти комплексных структур на $\mathcal{F}_3$, за исключением случаев, когда в матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ некоторые элементы равны нулю. Действительно, в общем случае $D_z u_2, D_{\bar{z}} u_2$ не ортогональны ни u_1, ни u_3, в связи с чем условия голоморфности отображения не выполнены ни для одной почти комплексной структуры. Ввиду (5.3.40) вышеприведенная матрица может иметь нулевые элементы в следующих случаях:

Ia. $a = d = 0$, т.е. $u_1 \sim D_{\bar{z}} u_2,\ u_3 \sim D_z u_2$. Тогда $\bar{u}_1 \circ D_z u_2 = 0 = \bar{u}_3 \circ D_{\bar{z}} u_2$. Легко проверить, что $\bar{u}_3 \circ D_z u_1 = 0$, а также $\bar{u}_3 \circ D_{\bar{z}} u_1 = 0$. Это означает, что поднятие в пространство флагов представляет собой горизонтальную кривую (относительно твисторного расслоения), которая голоморфна в комплексных структурах $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_I$.

Ib. $b = c = 0$, т.е. $u_3 \sim D_{\bar{z}} u_2,\ u_1 \sim D_z u_2$. Этот случай по сути получается из случая **Ia** обращением $u_1 \leftrightarrow u_3$. Следовательно, поднятие представляет собой горизонтальную кривую, голоморфную в комплексных структурах $\mathcal{Q}_{-1}$ и $\mathcal{Q}_{-I}$. Заметим, что это исключительный случай, когда кривая голоморфна также в комплексной структуре $\mathcal{Q}_{-1}$, не показанной на Рисунке 5.1. Это возможно в силу того, что кривая горизонтальна, т.е. $J_{13} \equiv 0$.

II. $D_{\bar{z}} u_2 = 0$**.** В этом случае u_2 – голоморфное отображение. Это условие эквивалентно следующим двум:

$$(J_{21})_{\bar{z}} = 0, \qquad (J_{23})_{\bar{z}} = 0 \tag{5.3.44}$$

Выпишем снова оставшееся уравнение движение (5.3.17):

$$(J_{31})_{\bar{z}} = 0\,. \tag{5.3.45}$$

Вместе условия (5.3.44)-(5.3.45) означают, что мы имеем дело с кривой $\mathscr{M} \to \mathcal{F}_3$, голоморфной в комплексной структуре, которая определяется диаграммой $\mathcal{Q}_3$.

III. $D_z u_2 = 0$**.** Следовательно, u_2 – анти-голоморфное отображение. В этом случае

$$(J_{12})_{\bar{z}} = 0, \qquad (J_{32})_{\bar{z}} = 0, \qquad (J_{31})_{\bar{z}} = 0 \tag{5.3.46}$$

что соответствует кривой, голоморфной в комплексной структуре $\mathcal{Q}_2$.

Случай, когда $D_{\bar{z}} u_2 = D_z u_2 = 0$, т.е. когда u_2 – отображение в точку, находится на пересечении случаев **II** и **III**. В силу условия $(J_{31})_{\bar{z}} = 0$, (u_1, u_3) определяют голоморфное отображение в $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$, ортогональное фиксированному вектору u_2. Другими словами, это отображение в слой расслоения $\mathcal{F}_3 \to (\mathbf{C}\mathrm{P}^2)_{u_2}$, и оно голоморфно в двух комплексных структурах, $\mathcal{Q}_2$ и $\mathcal{Q}_3$. Мы уже обсуждали данное явление в предыдущей Главе.

Анализ тех случаев, когда вместо (5.3.17) мы имеем равенство $(J_{12})_{\bar{z}} = 0$ или $(J_{23})_{\bar{z}} = 0$, проводится аналогично, с очевидными перестановками векторов u_1, u_2, u_3.

5.4 Резюме

В данной Главе мы полностью описали решения уравнений движения (5.2.10), которые следуют из действия (5.2.8) модели, описанной в предыдущей Главе. Полученные решения отвечают случаю, когда мировой лист – сфера $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$, и ими исчерпываются все решения с данной мировой поверхностью. Мы показали, что, помимо всевозможных голоморфных кривых, существует подмножество решений, которые не являются голоморфными ни в одной (почти) комплексной структуре на пространстве флагов $\mathcal{F}_3$. Для того чтобы определить одно из таких решений, необходимо и достаточно задать полную голоморфную кривую $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$ – 'прообраз Бэклунда' от (5.3.34) – и голоморфное отображение $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^1$ (5.3.43).

Ключевое свойство, благодаря которому мы смогли решить уравнения движения, – отсутствие голоморфных дифференциалов на сфере $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$, в результате чего задача свелась к нахождению гармонических кривых в $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ (см. (5.3.16)-(5.3.18)), а эта задача была решена уже давно [59]. Данный подход не имеет прямого общения на другие мировые поверхности. Тем не менее, как мы показали в предыдущей Главе, уравнения движения (5.2.10) можно записать в виде условия плоскости однопараметрического семейства связностей. Для σ-моделей с симметрическими таргет-пространствами представление нулевой кривизны дает метод решения самих уравнений, как было показано в [10] и более строго в [108]. Было бы интересно

исследовать возможности обобщения данного метода на случай уравнений (5.2.10), что могло бы позволить получить решения в ситуации, когда мировой лист – цилиндр или тор.

Глава 6. Квазилинейная формулировка для сигма-моделей пространств флагов

6.1 Исследуемые модели

В данной Главе мы продолжим исследование моделей, заданных действием (4.1.1). В настоящей Главе в качестве таргет-пространств нас будут интересовать в первую очередь пространства флагов – весьма богатый класс комплексных однородных многообразий. Мы будем рассматривать случай $G = SU(N)$: соответствующие пространства флагов суть

$$\mathcal{F}(n_1, ..., n_m) := \frac{SU(N)}{S(U(n_1) \times \ldots \times U(n_m))}, \qquad \sum_{i=1}^{m} n_i = N\,. \tag{6.1.1}$$

Многообразие $\mathcal{F}(n_1, ..., n_m)$ можно рассматривать как (ко)-присоединенную орбиту (присоединенное и (ко)-присоединенное представления эквивалентны, если существует невырожденная Киллингова метрика, что выполняется для алгебры $\mathfrak{su}_N$). Это означает, что для моделирования $\mathcal{F}(n_1, ..., n_m)$ можно взять элемент $z \in \mathfrak{su}_N$ и рассмотреть его орбиту относительно действия группы: $\mathrm{Orb}(z) = \{g \cdot z \cdot g^{-1},\ \ g \in SU(N)\}$. Элемент z нужно выбрать таким образом, чтобы его стабилизатором была подгруппа $H = S(U(n_1) \times \cdots \times U(n_m))$. Можно считать, что z лежит в картановской подалгебре, так как, очевидно, каждая орбита $\mathrm{Orb}(z)$ пересекает ее. Следовательно, возьмем в качестве z диагональную матрицу

$$z = \mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{n_1}, \quad \ldots \quad , \underbrace{\lambda_m, \ldots \lambda_m}_{n_m}), \qquad \mathrm{Tr}(z) = \sum_{i=1}^{m} n_i\,\lambda_i = 0 \tag{6.1.2}$$
$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{при} \quad i \neq j\,.$$

Для полноты опишем также кэлерову структуру на $\mathrm{Orb}(z) = \mathcal{F}(n_1, ..., n_m)$. В дальнейшем мы сравним ее со структурами, характерными для киллинговой метрики $\mathbb{G}$ на $\mathcal{F}(n_1, ..., n_m)$, которая в общем случае не является кэлеровой, но это как раз та метрика, которая входит в действие (4.1.1). Вводя стандартный картановский ток $J := -g^{-1}dg$, определим симплектическую форму на $\mathrm{Orb}(z)$ следующим образом:

$$\Omega = \mathrm{tr}\,(z\,J \wedge J)\,. \tag{6.1.3}$$

Эта форма замкнута, как следствие уравнения Маурера-Картана $dJ - J \wedge J = 0$. Чтобы показать, что она является хорошо определенной два-формой на $\frac{G}{H}$, т.е. что она является калибровочно-инвариантной относительно преобразований $J \to h^{-1}Jh - h^{-1}dh$, введем следующее стандартное разложение алгебры Ли

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \qquad \text{где} \qquad \mathfrak{m} \perp_{\mathbb{G}} \mathfrak{h}\,; \qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}\,. \tag{6.1.4}$$

Используя соответствующее разложение для тока, $J = J_{\mathfrak{h}} + J_{\mathfrak{m}}$, будем иметь

$$\Omega = \mathrm{tr}\,(z\, J_{\mathfrak{m}} \wedge J_{\mathfrak{m}})\,. \tag{6.1.5}$$

Относительно калибровочных преобразований компонента $J_{\mathfrak{m}}$ преобразуется однородным образом, $J_{\mathfrak{m}} \to h^{-1}J_{\mathfrak{m}}h$, и, кроме того, $[z, h] = 0$ для $h \in H$, поэтому форма Ω инвариантна.

Чтобы убедиться, что Ω – кэлерова форма, необходимо показать, что она эрмитова относительно выбранной комплексной структуры $\mathbb{I}$ на $\mathcal{F}(n_1, ..., n_m)$. Чтобы определить действие данной комплексной структуры, введем в первую очередь комплексную структуру в пространтве $\mathfrak{m}$, обозначив ее при этом той же буквой $\mathbb{I}$. Комплексифицированная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает разложение

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_-, \tag{6.1.6}$$

где $\mathfrak{m}_\pm$ – собственные пространства комплексной структуры: $\mathbb{I} \circ \mathfrak{m}_\pm = \pm i\, \mathfrak{m}_\pm$. Разложим теперь стандартный картановский ток J в соответствии с разложением (6.1.6) алгебры Ли:

$$J = J_{\mathfrak{h}} + \underbrace{J_+ + J_-}_{=J_{\mathfrak{m}}}\,. \tag{6.1.7}$$

Определим комплексную структуру $\mathbb{I}$ на $\mathcal{F}(n_1, ..., n_m)$ через ее действие на один-формы:

$$\mathbb{I} \circ J_\pm = \pm i\, J_\pm\,. \tag{6.1.8}$$

В Главе 1 мы показали, что интегрируемость комплексной структуры эквивалентна условию, что $\mathfrak{m}_\pm$ – подалгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$:

$$[\mathfrak{m}_\pm, \mathfrak{m}_\pm] \subset \mathfrak{m}_\pm\,. \tag{6.1.9}$$

С точностью до действия группы Вейля (то есть с точностью до перестановки), можно считать, что $\mathfrak{m}_+$ – пространство блочно-верхне-треугольных матриц (на Рисунке 1.2 в Главе 1 изображен пример, соответствующий $m = 3$). В силу условия (6.1.9) $\mathrm{tr}\,(z\, J_+ \wedge J_+) = \mathrm{tr}\,(z\, J_- \wedge J_-) = 0$ (т.к. $z \perp \mathfrak{m}_\pm$), поэтому форма Ω эрмитова и, следовательно, кэлерова.

Одно из следствий данного рассуждения состоит в том, что кэлеровы формы на пространстве флагов (6.1.1) образуют $m-1$-параметрическое семейство (параметрами служат λ_i, см. (6.1.2)). В разделе 6.3 мы увидим, как данные параметры появляются в рамках другого под-

хода – с точки зрения теории кэлерова фактора. А пока прервемся, чтобы ответить на следующий вопрос: в каком случае киллингова метрика $\mathbb{G}$, входящая в действие (4.1.1), является кэлеровой? Оказывается, что это имеет место лишь в случае симметрических пространств:

Предложение 1. Киллингова метрика на $\mathcal{F}(n_1, ..., n_m)$ кэлерова в том и только том случае, когда $\mathcal{F}(n_1, ..., n_m)$ – симметрическое пространство, т.е. $m = 2$, и $\mathcal{F}(n_1, N-n_1)$ – грассманиан.

Доказательство. По определению компоненты $J_\pm$ тока J (см. разложение (6.1.7)) представляют собой голоморфные/анти-голоморфные один-формы, т.е. $J_+ \in (T^*\mathcal{F})^{(1,0)}$ и $J_- \in (T^*\mathcal{F})^{(0,1)}$. Следовательно, киллингова метрика на $\mathcal{F}$, которая имеет вид

$$ds^2 = -\mathrm{Tr}\,(J_+ J_-)\,, \tag{6.1.10}$$

эрмитова. Кэлерова форма строится стандартным способом:

$$\omega = i\,\mathrm{Tr}\,(J_+ \wedge J_-)\,. \tag{6.1.11}$$

При вычислении внешней производной ω воспользуемся условием плоскости тока $dJ - J \wedge J = 0$:

$$d\omega = i\,\mathrm{Tr}\,(dJ_+ \wedge J_-) - i\,\mathrm{Tr}\,(J_+ \wedge dJ_-) = i\,\mathrm{Tr}\,((J \wedge J)_{\mathfrak{m}_+} \wedge J_-) - i\,\mathrm{Tr}\,(J_+ \wedge (J \wedge J)_{\mathfrak{m}_-})\,. \tag{6.1.12}$$

Отметим, что $\mathfrak{m}_+ \perp \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}_+ \perp \mathfrak{m}_+$ (т.е. пространство $\mathfrak{m}_+$ изотропно, т.к. метрика эрмитова). Поэтому $\mathrm{Tr}\,(J_+ \wedge (J \wedge J)_{\mathfrak{m}_-}) = \mathrm{Tr}\,(J_+ \wedge J \wedge J)$, и аналогичное упрощение можно сделать в первом члене в (6.1.12). В результате получим для $d\omega$ следующее выражение:

$$d\omega = i\,\mathrm{Tr}\,(J \wedge J \wedge J_-) - i\,\mathrm{Tr}\,(J_+ \wedge J \wedge J)\,. \tag{6.1.13}$$

Подставляя разложение (6.1.7) и используя вновь условия ортогональности $\mathfrak{h} \perp \mathfrak{m}_\pm, \mathfrak{m}_\pm \perp \mathfrak{m}_\pm$, получим

$$d\omega = i\left(\mathrm{Tr}\,(J_+ \wedge J_- \wedge J_-) - \mathrm{Tr}\,(J_- \wedge J_+ \wedge J_+)\right)\,. \tag{6.1.14}$$

Три-формы в правой части имеют относительно разложения Ходжа тип $(1,2)$ и $(2,1)$ соответственно (они комплексно сопряжены друг другу). Следовательно,

$$d\omega = 0 \qquad \text{тогда и только тогда, когда} \qquad \mathrm{Tr}\,(J_+ \wedge J_- \wedge J_-) = 0\,. \tag{6.1.15}$$

Можно показать, что последнее условие эквивалентно следующему:

$$\mathrm{Tr}\,(\alpha_+\,[\beta_-, \gamma_-]) = 0 \qquad \text{для} \qquad \alpha_+ \in \mathfrak{m}_+ \quad \text{и} \quad \beta_-, \gamma_- \in \mathfrak{m}_-\,. \tag{6.1.16}$$

Ввиду невырожденности метрики Киллинга это может иметь место при произвольных

$\alpha_+, \beta_-, \gamma_-$ только если

$$[\mathfrak{m}_-, \mathfrak{m}_-] = 0\,. \tag{6.1.17}$$

Из Рисунка 1.2 легко видеть, что это выполняется лишь в случае $m = 2$. Можно также напрямую показать, что свойство $[\mathfrak{m}_-, \mathfrak{m}_-] = 0$ является характеристическим для эрмитовых симметричных пространств. Пусть $\alpha_+ \in \mathfrak{m}_+$, $\beta_-, \gamma_- \in \mathfrak{m}_-$, как и выше. Ранее мы ввели условие $[\mathfrak{m}_-, \mathfrak{m}_-] \subset \mathfrak{m}_-$, что вкупе с условием симметрического пространства $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ дает $[\mathfrak{m}_-, \mathfrak{m}_-] = 0$. В обратную сторону, пусть $[\mathfrak{m}_-, \mathfrak{m}_-] = 0$, тогда $\mathrm{Tr}([\alpha_+, \beta_-]\gamma_-) = \mathrm{Tr}(\alpha_+ [\beta_-, \gamma_-]) = 0$, т.е. $[\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_-] \perp \mathfrak{m}_-$. Аналогичным образом выводим, что $[\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_-] \perp \mathfrak{m}_+$. Отсюда следует, что $[\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_-] \subset \mathfrak{h}$, поэтому и $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$. ■

Из Предложения 1 следует, что когда таргет-пространство – грассманиан, т.е. $m = 2$, второй член в действии (4.1.1) на самом деле является топологическим и не дает вклад в уравнения движения. В этом случае мы возвращаемся к хорошо-известной теории интегрируемых σ-моделей с симметрическими таргет-пространствами [10], [60]. С другой стороны, когда $m > 2$, модели (4.1.1) отличаются от стандартных ненулевым (и полностью фиксированным) B-полем. Простейший пример, который мы изучим детально в разделе 6.2.2, отвечает пространству флагов $\mathcal{F}_3 := \frac{SU(3)}{S(U(1)^3)}$, т.е. случаю $m = 3$.

6.2 Квазилинейная формулировка σ-моделей (GLSM)

Основная задача настоящей Главы – построение квазилинейного представления для σ-моделей (4.1.1) в случае, когда таргет-пространство – пространство флагов (6.1.1) [5]. Под “квазилинейным представлением” мы понимаем так называемую “gauged linear σ-model”, т.е. теорию нескольких свободных полей, подчиняющихся квадратичным условиям связи и взаимодействующих со вспомогательными калибровочными полями[1].

Ключевой шаг при построении квазилинейного представления для σ-моделей с симметрическими кэлеровыми таргет-пространствами (например, когда таргет-пространство – грассманиан) состоит в представлении данных многообразий в виде кэлерова фактора плоского пространства $\mathbb{C}^N$ для некоторого N. Подобные представления получаются наиболее естественным способом в рамках суперсимметричной $\mathcal{N} = (2,2)$ формулировки, которая автоматически сохраняет условие кэлеровости (в § 3.2 работы [6] подробно разобран случай $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$-модели). В прошлом разделе мы уже, однако, подчеркивали, что киллингова метрика, входящая в действие (4.1.1), вообще говоря, не является кэлеровой, в связи с чем подход, основанный на суперсимметрии, не является для наших моделей наиболее естественным. Поэтому мы останемся в рамках бозонных моделей и продемонстрируем, каким образом подходящая модификация кэлерова фактора всё же приведет нас к требуемой квазилинейной

[1] В отечественной литературе соответствующий термин, по-видимому, отсутствует.

формулировке моделей (4.1.1).

6.2.1 $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$-модель как прототип

Простейший грассманиан – это комплексное проективное пространство $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$. Хорошо известно, что его можно представить в виде кэлерова фактора

$$\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1} = \mathbb{C}^N//U(1)\,. \tag{6.2.18}$$

Группа $U(1)$ действует на $\mathbb{C}^N$ умножением всех координат на общую фазу: $z_k \to e^{i\alpha}\, z_k$, где $\{z_k, k = 1, \ldots, N\}$ – комплексные координаты на $\mathbb{C}^N$. Кэлеров фактор обычно строится следующим образом: во-первых, рассмотрим кэлерову форму на $\mathbb{C}^N$,

$$\omega := i \sum_{j=1}^{N} dz_j \wedge d\bar{z}_j\,. \tag{6.2.19}$$

Пусть v – векторное поле, отвечающее $U(1)$-действию, т.е. $v = \mathrm{Re}\left(i \sum\limits_{k=1}^{N} z_k \frac{\partial}{\partial z_k} \right)$. Отображение момента μ определяется стандартной формулой

$$d\mu = i_v \omega, \tag{6.2.20}$$

где i_v – свертка с векторным полем v. Используя приведённые определения, получим следующую формулу для μ (с точностью до аддитивной константы):

$$\mu = \sum_{k=1}^{N} |z_k|^2\,. \tag{6.2.21}$$

Чтобы построить фактор, ограничим кэлерову форму ω на множество уровня

$$\mu = \mu_0 > 0. \tag{6.2.22}$$

В данном случае это сфера S^{2N-1}. Ограниченная форма является вырожденной. Ее ядро $\mathrm{Ker}(\omega\big|_{\mu=\mu_0})$ одномерно: его составляют векторы, пропорциональные v. Это легко видеть из (6.2.20): так как для любого вектора w, касательного к $\mu = \mu_0$, имеет место равенство $i_w d\mu = 0$, то $\omega(v, w) = 0$ для всех $w \in T(\mu = \mu_0)$. Чтобы получить невырожденную форму, необходимо рассмотреть фактор-многообразие $\{\mu = \mu_0\}/U(1)$, т.е. отождествить все точки вдоль каждой $U(1)$-орбиты. Для нашего примера имеем

$$S^{2N-1}/U(1) = \mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}, \tag{6.2.23}$$

а фактор – это расслоение Хопфа.

Представление (6.2.18) – не просто схоластическое упражнение, оно является весьма полезным для анализа соответствующей σ-модели. Используя его, можно записать лагранжиан модели очень просто:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{N} \overline{\mathscr{D}_\alpha Z_k}\, \mathscr{D}_\alpha Z_k + \lambda \left(\sum_{k=1}^{N} |Z_k|^2 - \mu_0 \right). \tag{6.2.24}$$

Здесь λ – множитель Лагранжа, обеспечивающий ограничение полей на множество уровня $\mu = \mu_0$, а $\mathscr{D}$ – ковариантная производная группы $U(1)$:

$$\mathscr{D}_\alpha = \partial_\alpha - i\,\mathcal{A}_\alpha\,. \tag{6.2.25}$$

Из (6.2.24) можно получить обычное 'нелинейное' представление для σ-модели с таргет-пространством $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$, если исключить при помощи уравнений движения вспомогательное калибровочное поле $\mathcal{A}_\alpha$. Преимущество представления (6.2.24), однако, состоит в том, что лагранжиан квадратичен по 'полям материи' Z_k, в связи с чем мы и назвали соответствующее представление 'квазилинейным'. В частности, в континуальном интеграле оно позволяет с легкостью проинтегрировать по полям материи. Квазилинейное представление (6.2.24) для $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$-модели впервые появилось в работах [54], [55].

6.2.2 Многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^3$

Заметим, что $\frac{SU(2)}{S(U(1)\times U(1))} = S^2$ – сфера, то есть симметрическое пространство, поэтому для группы $G = SU(2)$ нет несимметрических пространств флагов. Поэтому перейдем к группе $G = SU(3)$ и нашему основному примеру – простейшему несимметрическому пространству флагов

$$\mathcal{F}_3 = \frac{SU(3)}{S(U(1)^3)}\,. \tag{6.2.26}$$

Его можно рассматривать как многообразие линейных вложенных пространств

$$\mathcal{F}_3 = \{0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \mathbb{C}^3\}\,, \qquad L_1 \simeq \mathbb{C}, \quad L_2 \simeq \mathbb{C}^2\,. \tag{6.2.27}$$

Одна из параметризаций данного многообразия, которая лежит в основе GLSM-формулировки, заключается в следующем. Пусть $l, p \in \mathbb{C}^3$ – два ортонормированных вектора:

$$\sum_{i=1}^{3} \overline{l^i}\, l^i = \sum_{i=1}^{3} \overline{p^i}\, p^i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{3} \overline{l^i}\, p^i = 0\,. \tag{6.2.28}$$

Эти векторы задают плоскость (см. Рисунок 6.1)

$$L_2 = \mathrm{Span}(l, p) \simeq \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^3. \tag{6.2.29}$$

Прямая $L_1 \subset L_2$ определяется вектором

$$L_1 = \mathrm{Span}(\bar{u}_1\, l + \bar{u}_2\, p) \in L_2 \subset \mathbb{C}^3\,, \tag{6.2.30}$$

где (u_1, u_2) – фиксированный ненулевой два-вектор, нормированный на единицу:

$$\bar{u} \circ u = 1\,. \tag{6.2.31}$$

(Кружок $\circ$ обозначает свертку индекса в $\mathbb{C}^2$.) Ясно, что векторы $(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2$, $l \in \mathbb{C}^3$, $p \in \mathbb{C}^3$

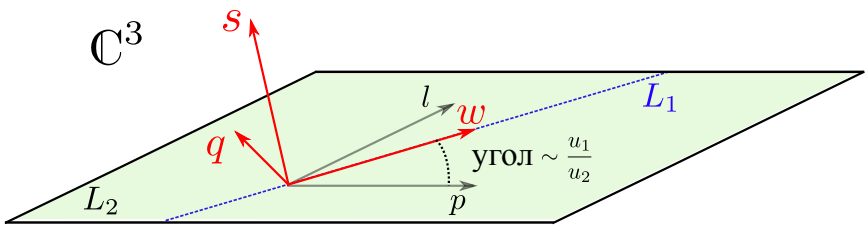


Рис. 6.1: Параметризация пространства флагов, введенная в (6.2.28)-(6.2.30), (6.2.39)-(6.2.43).

однозначно определяют флаг $L_1 \subset L_2 \subset \mathbb{C}^3$, однако это соотношение не взаимно-однозначно. Действительно, другой набор векторов

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u}_1 \\ \widetilde{u}_2 \end{pmatrix} = e^{i\beta}\, g \circ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \widetilde{l} \\ \widetilde{p} \end{pmatrix} = g \circ \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix} \qquad \text{где} \quad g \in U(2),\ e^{i\beta} \in U(1)$$

определяет тот же флаг и удовлетворяет тем же условиям нормировки (6.2.28), (6.2.31). Поэтому имеется калибровочная группа

$$\mathcal{G} = U(1) \times U(2) \tag{6.2.32}$$

действующая на ‘поля материи’, образующие векторное пространство

$$V = (\mathbb{C}^2)_u \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3)_{l,p} \tag{6.2.33}$$

и удовлетворяющие дополнительным условиям нормировки (6.2.28), (6.2.31), которые являются аналогами условия $\mu = \mu_0$ на отображение момента из формулы (6.2.22). Перепараметризуем элементы пространства $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$: ранее они были сгруппированы в два $SU(3)$-триплета l, p, а теперь сгруппируем их в три $U(2)$-дублета

$$v^i = \begin{pmatrix} l^i \\ p^i \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{6.2.34}$$

Условие нормировки (6.2.28) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{3} \bar{v^i} \otimes v^i = \mathbb{1}_2 \,. \tag{6.2.35}$$

Соответствующий квазилинейный лагранжиан – аналог (6.2.24) – определим следующим образом (опустим для простоты часть лагранжиана, содержащую множители Лагранжа, обеспечивающие выполнение условий нормировки (6.2.31), (6.2.35)):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\kappa} \overline{\mathscr{D}_z u} \circ \mathscr{D}_z u + \sum_{k=1}^{3} \overline{\mathscr{D}_z v^k} \circ \mathscr{D}_z v^k \,. \tag{6.2.36}$$

Здесь κ – относительный множитель между двумя членами в лагранжиане – константа связи, а ковариантные производные действуют в соответствии с зарядами полей, т.е.

$$\mathscr{D}_z u = \partial_z u - i\,\mathcal{A}_z\, u - i\,\mathcal{B}_z\, u \,, \tag{6.2.37}$$

$$\mathscr{D}_z v^k = \partial_z v^k - i\,\mathcal{B}_z\, v^k \,. \tag{6.2.38}$$

Здесь $i\,\mathcal{B} \in \mathfrak{u}(2)$ и $i\,\mathcal{A} \in \mathfrak{u}_1$ – соответствующие калибровочные поля группы $\mathcal{G}$. Поля $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ эрмитовы. Потребуем также, чтобы действие было неотрицательно, следовательно $\kappa \geqslant 0$. Возможно, на первый взгляд покажется удивительным тот факт, что нас будет в первую очередь интересовать предел $\kappa \to 0$ данной модели. С точки зрения лагранжиана (6.2.36) этот предел кажется несколько сингулярным, однако сейчас мы убедимся, что на самом деле наша модель хорошо определена в данном пределе.

Стратегия состоит в том, чтобы, как и в случае $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$-модели выше, выразить вспомогательные калибровочные поля через поля материи. Для этого введём три вектора $w, q, s \in \mathbb{C}^3$, задающие флаг $L_1 \subset L_2 \subset \mathbb{C}^3$. Начнём с того, что прямая L_1 порождена вектором

$$w^k := \bar{u} \circ v^k \,. \tag{6.2.39}$$

Из условия нормировки (6.2.35) следует, что матрица

$$P^{mn} := v^m \circ \bar{v^n} \tag{6.2.40}$$

является проектором ранга 2, т.е. $P \cdot P = P$, $\operatorname{rank} P = 2$. Кроме того, из определения (6.2.39) вектора w и из (6.2.35) можно видеть, что

$$P \cdot w = w \,. \tag{6.2.41}$$

Следовательно, проектор P можно записать в виде

$$P = w \otimes \bar{w} + q \otimes \bar{q} \,, \tag{6.2.42}$$

где $q \in \mathbb{C}^3$ – некоторый вектор, ортогональный w и нормированный на единицу. Мы рассматриваем формулу (6.2.42) как определение вектора q. Введем теперь третий вектор s, ортогональный как к w, так и к q, при помощи соотношения полноты в $\mathbb{C}^3$:

$$\mathbb{1}_3 = P + s \otimes \bar{s} = w \otimes \bar{w} + q \otimes \bar{q} + s \otimes \bar{s}\,. \tag{6.2.43}$$

Резюмируем результат исключения вспомогательных калибровочных полей из лагранжиана (6.2.36) (Детали приведены в Приложении Б.1). Во-первых, в пределе $\kappa \to 0$ ковариантная производная $\mathscr{D}_z u = O(\kappa)$, а для $\mathscr{D}_z v^k$ в том же пределе имеем выражение

$$\mathscr{D}_z v^k = -w^k \sum_{m=1}^{3} (v^m\, \partial_z \overline{w^m} + u \cdot \overline{w^m}\, \partial_z w^m) - s^k \sum_{m=1}^{3} v^m \cdot \partial_z \overline{s^m}\,. \tag{6.2.44}$$

Теперь можно вычислить значение лагранжиана (6.2.36) после подстановки калибровочных полей и в пределе $\kappa \to 0$:

$$\mathcal{L} = \left| \sum_{m=1}^{3} \overline{q^m} \cdot \partial_{\bar{z}} s^m \right|^2 + \left| \sum_{m=1}^{3} \overline{w^m} \cdot \partial_{\bar{z}} s^m \right|^2 + \left| \sum_{m=1}^{3} \overline{q^m} \cdot \partial_{\bar{z}} w^m \right|^2 . \tag{6.2.45}$$

Мы получили лагранжиан, совпадающий с исследованным ранее в Главах 4 и 5.

6.2.3 Нётеровский ток

Лагранжиан (6.2.36) обладает глобальной симметрией $U(3)$, действующей по правилу $v^k \to \sum\limits_{m=1}^{3} \hat{g}_{km}\, v^m$, $\hat{g} \in U(3)$. Компоненты соответствующего нётеровского тока таковы:

$$K^{m\bar{n}} = \overline{\mathscr{D}_z v^n} \circ v^m\, \overline{dz} - \bar{v}^n \circ \mathscr{D}_z v^m\, dz\,, \qquad m, n = 1, 2, 3. \tag{6.2.46}$$

(Напомним, что кружок обозначает свертку по $U(2)$-индексу.) Из уравнений движения следует, что нётеровский ток сохраняется:

$$d * K^{m\bar{n}} = 0\,. \tag{6.2.47}$$

Подставляя выражение (6.2.44) для ковариантной производной $\mathscr{D}_z v^m$, получим

$$K_z^{m\bar{n}} = \bar{q}^n w^m \left(\sum_j q^j \partial_z \overline{w^j} \right) + \overline{w^n} s^m \left(\sum_j w^j \partial_z \bar{s}^j \right) + \bar{q}^n s^m \left(\sum_j q^j \partial_z \bar{s}^j \right) . \tag{6.2.48}$$

Вводя матрицу $g := (s, w, q)$, можно записать ток в этом базисе:

$$K_z = g \begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_j w^j \partial_z \overline{s^j} & \sum\limits_j q^j \partial_z \overline{s^j} \\ 0 & 0 & \sum\limits_j q^j \partial_z \overline{w^j} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} g^\dagger \,. \tag{6.2.49}$$

Заметим, что ток оказывается бесследовым, так как $U(1)$-часть симметрии ($v^k \to e^{i\alpha} v^k$) на самом деле включена в калибровочную группу $U(2)$ и поэтому не имеет соответствующего нётеровского тока (т.е. настоящей группой глобальных симметрий является $SU(3)$).

В главе 4 было показано, что (6.2.49) – в точности выражение для нётеровского тока, которое получается из лагранжиана (6.2.45). Его сохранение эквивалентно уравнениям движения, следующим из этого лагранжиана. Кроме того, если выполнены уравнения движения, то этот ток также является плоским, т.е.

$$dK - K \wedge K = 0 \,. \tag{6.2.50}$$

Отсюда следует плоскость однопараметрического семейства связностей A_u ($u \in \mathbb{C}$), заданного формулой (4.2.18).

6.3 Пространства флагов общего вида: кэлеров фактор, заданный колчанной диаграммой

Описанную выше процедуру можно обобщить на случай пространств флагов общего вида $\mathcal{F}(n_1, \ldots, n_m)$. Для этого необходимо иметь аналог данных (6.2.32)-(6.2.33): нужно задать пространство V полей материи, а также калибровочную группу $\mathcal{G}$, действующую на эти поля. Для этого можно воспользоваться общей теорией так называемых 'представлений колчанов'[2] [68]. Напомним, что пространство флагов $\mathcal{F}(n_1, \ldots, n_m)$ можно рассматривать как многообразие вложенных линейных пространств

$$\mathcal{F}(n_1, \ldots, n_m) = \{0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_m = \mathbb{C}^N\}, \qquad d_k := \dim V_k = \sum_{i=1}^{k} n_i \,. \tag{6.3.51}$$

Позаимствуем из общей теории следующий факт: пространство (6.3.51) можно представить в виде кэлерова фактора

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(n_1, \ldots, n_m) = \widehat{V} /\!/ \widehat{\mathcal{G}}, \\ &\text{где} \qquad \widehat{V} = \oplus_{i=1}^{m-1} \operatorname{Hom}(V_i, V_{i+1}) \quad \text{и} \quad \widehat{\mathcal{G}} = \otimes_{k=1}^{m-1} U(V_k) \,. \end{aligned} \tag{6.3.52}$$

[2] Quiver representations

В дальнейшем мы будем взаимозаменяемо использовать обозначения $U(V_k)$ и $U(d_k)$, так как $d_k = \dim V_k$. Данные (6.3.52) можно резюмировать при помощи колчанной диаграммы, изображенной на Рисунке 6.2. На данной диаграмме i-я вершина отвечает векторному пространству V_i, в котором действует группа $U(V_i)$, а каждое ребро соответствует полю $v_i \in \mathrm{Hom}(V_i, V_{i+1})$, преобразующемуся по би-фундаментальному представлению относительно групп, находящихся на концах ребра. То обстоятельство, что последняя вершина отличается от других, призвано подчеркнуть тот факт, что отвечающая ей группа $U(N)$ является группой глобальных симметрий, т.е. по ней факторизация не производится (она не включена в группу калибровочной симметрии $\widehat{\mathcal{G}}$).

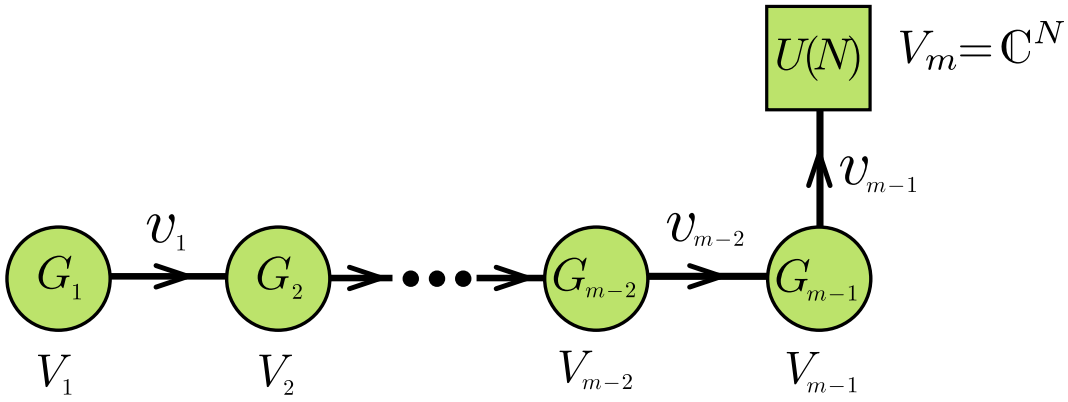


Рис. 6.2: Колчанная диаграмма, описывающая кэлеров фактор для пространства флагов.

Зададим на пространстве $\widehat{V}$ кэлерову метрику

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Tr}(dv_k\, dv_k^\dagger), \tag{6.3.53}$$

при этом кэлерова форма имеет вид

$$\Omega = i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Tr}(dv_k \wedge dv_k^\dagger)\,. \tag{6.3.54}$$

Отображение момента μ_k для действия группы $U(V_k)$ имеет вид $\mu_k = v_k^\dagger v_k - v_{k-1} v_{k-1}^\dagger$, и уравнения кэлерова фактора таковы:

$$v_k^\dagger v_k - v_{k-1} v_{k-1}^\dagger = \zeta_k \mathbb{1}_{V_k}\,, \qquad k = 1, \ldots, m-1, \tag{6.3.55}$$

где $\zeta_k \in \mathbb{R}$ – константы, которые в контексте суперсимметричных калибровочных теорий называются параметрами Файе-Илиополуса. Будем считать, что

$$\zeta_k > 0 \qquad \text{для всех} \quad k\,. \tag{6.3.56}$$

Тогда $\mathrm{Ker}(v_k) = 0$. Действительно, пусть $v_k \circ a = 0$. Умножая (6.3.55) на a справа и на $a^\dagger$

слева, получим

$$\|v_k \circ a\|^2 = \zeta_k \|a\|^2 + \|v_{k-1}^\dagger \circ a\|^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad v_k \circ a \neq 0 \quad (\text{или} \quad a = 0)\,. \tag{6.3.57}$$

Поэтому при любом k матрица $v_{m-1}v_{m-2}\dots v_k$ имеет максимальный ранг d_k и заряжена только относительно калибровочной группы $U(d_k)$. Тем самым она определяет подпространство $V_k \subset \mathbb{C}^N$. Эти подпространства вложены друг в друга, т.е. $V_{k-1} \subset V_k$. Следовательно, они задают флаг в $\mathbb{C}^N$. Параметры ζ_k связаны с параметрами λ_i ко-присоединенных орбит (см. (6.1.2)).

Как уже было неоднократно отмечено выше, в лагранжиан (4.1.1) рассматриваемых нами моделей входит не кэлерова, а киллингова метрика. Поэтому описанную выше конструкцию кэлерова фактора стоит рассматривать лишь как некий намёк на правильную геометрическую картину квазилинейного представления. На самом деле основное различие состоит в том, что вместо 'условия нормировки' (6.3.55) мы будем использовать более простое условие

$$v_k^\dagger v_k = \mathbb{1}_{V_k}, \qquad k = 1 \dots m-1\,. \tag{6.3.58}$$

Данное условие – в точности то же, которое было введено нами ранее, в формулах (6.2.28), (6.2.31), (6.2.35), для случая пространства флагов $\mathcal{F}_3$. Несложно убедиться, что действием группы $U(V_k) \times U(V_{k+1})$ можно привести матрицу v_k (при $k \leqslant m-2$) к каноническому виду

$$v_k^{[0]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad k \leqslant m-2\,. \tag{6.3.59}$$

Ясно, что эта матрица удовлетворяет уравнению (6.3.58). Стабилизатор $H_k \subset U(V_k) \times U(V_{k+1})$ матрицы $v_k^{[0]}$ определить несложно: $H_k = U(d_k) \times U(d_{k+1} - d_k)$ (напомним, что $d_k = \dim(V_k)$). Поэтому можно по индукции привести все матрицы v_k в порядке убывания индекса k к данной канонической форме: нужно начать с v_{m-2}, затем v_{m-3} и т.д. В данной 'калибровке' вся динамическая информация будет содержаться в матрице v_{m-1}. Стабилизатор всего множества матриц $\{v_1^{[0]}, v_2^{[0]}, \dots, v_{m-2}^{[0]}\}$ – это

$$H = U(d_1) \times U(d_2 - d_1) \times \cdots \times U(N - d_{m-1})\,, \tag{6.3.60}$$

т.е. мы получили в точности стабилизатор, входящий в фактор-представление $\frac{G}{H} = \frac{U(N)}{H}$, как в формуле (6.1.1), с точностью до безобидного множителя $U(1)$ в числителе и знаменателе.

По аналогии с (6.2.36) запишем лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\kappa}\sum_{k=1}^{m-2} \mathrm{Tr}\left((\mathscr{D}_z v_k)^\dagger \circ \mathscr{D}_z v_k\right) + \mathrm{Tr}\left((\mathscr{D}_z v_{m-1})^\dagger \circ \mathscr{D}_z v_{m-1}\right), \tag{6.3.61}$$

$$\text{где} \quad \mathscr{D}_z v_k = \partial_z v_k + i\, v_k\, (\mathcal{A}_k)_z - i\, (\mathcal{A}_{k+1})_z\, v_k\,. \tag{6.3.62}$$

Здесь $\mathcal{A}_k$ – эрмитово калибровочное поле для группы $G_k = U(d_k)$, и по определению мы также положим $\mathcal{A}_m = 0$. Прямое исключение калибровочных полей, аналогичное тому, которое было выполнено в разделе 6.2.2, весьма трудоёмко, поэтому мы пойдём по другому пути и наложим сразу калибровочное условие (6.3.59).

Вариация действия, отвечающего лагранжиану (6.3.61), по полю $(\mathcal{A}_k)_{\bar z}$ при $k < m-1$ даёт уравнение

$$-v_k^\dagger \mathscr{D}_z v_k + \mathscr{D}_z v_{k-1} v_{k-1}^\dagger = 0 \tag{6.3.63}$$

$$\Rightarrow \qquad -v_k^\dagger\,(v_k\mathcal{A}_k - \mathcal{A}_{k+1}v_k) + (v_{k-1}\mathcal{A}_{k-1} - \mathcal{A}_k v_{k-1})\, v_{k-1}^\dagger = 0\,, \tag{6.3.64}$$

где $\mathcal{A}_k \equiv (\mathcal{A}_k)_z$ – опустим временно индекс z, чтобы упростить обозначения. Последнее уравнение

$$-\, v_{m-1}^\dagger \mathscr{D}_z v_{m-1} + \frac{1}{\kappa}\mathscr{D}_z v_{m-2} v_{m-2}^\dagger = 0, \tag{6.3.65}$$

полученное вариацией по $(\mathcal{A}_{m-1})_{\bar z}$, можно записать аналогичным образом

$$-\, v_{m-1}^\dagger \left(v_{m-1}\mathcal{A}_{m-1} - \widetilde{\mathcal{A}}_m v_{m-1}\right) + \frac{1}{\kappa}\cdot (v_{m-2}\mathcal{A}_{m-2} - \mathcal{A}_{m-1}v_{m-2})\, v_{m-2}^\dagger = 0, \tag{6.3.66}$$

но с дополнительным относительным множителем $\frac{1}{\kappa}$ и при отождествлении

$$\widetilde{\mathcal{A}}_m := i\,\partial_z v_{m-1}\, v_{m-1}^\dagger. \tag{6.3.67}$$

Покажем сначала, что записанные уравнения можно рекуррентно решить, начиная с $\widetilde{\mathcal{A}}_m$ (данное поле уже нам известно), далее вычисляя $\mathcal{A}_{m-1}$ и т.д. Действительно, из (6.3.66) получим

$$\mathcal{A}_{m-1}\left(1 + \frac{v_{m-2}v_{m-2}^\dagger}{\kappa}\right) = \frac{1}{\kappa}\, v_{m-2}\mathcal{A}_{m-2}v_{m-2}^\dagger + v_{m-1}^\dagger \widetilde{\mathcal{A}}_m v_{m-1}\,. \tag{6.3.68}$$

Умножая справа на $\frac{\kappa}{1+\kappa}\, v_{m-2}$, будем иметь

$$\mathcal{A}_{m-1}v_{m-2} - v_{m-2}\mathcal{A}_{m-2} = \widetilde{\kappa}\left(\widetilde{\mathcal{A}}_{m-1}v_{m-2} - v_{m-2}\mathcal{A}_{m-2}\right), \tag{6.3.69}$$

$$\text{где} \qquad \widetilde{\mathcal{A}}_{m-1} \equiv v_{m-1}^\dagger \widetilde{\mathcal{A}}_m v_{m-1} \qquad \text{и} \qquad \widetilde{\kappa} = \frac{\kappa}{1+\kappa}\,.$$

Правая часть этого равенства по форме напоминает левую, но с заменой $\mathcal{A}_{m-1}$ на $\widetilde{\mathcal{A}}_{m-1}$, т.е. на величину, значение которой нам известно в явном виде. Подставляя данное выражение в

уравнение (6.3.64) с $k = m-2$, получим

$$- v_{m-2}^{\dagger}\left(v_{m-2}\mathcal{A}_{m-2} - \widetilde{\mathcal{A}}_{m-1}v_{m-2}\right) + \frac{1}{\widetilde{\kappa}}\cdot\left(v_{m-3}\mathcal{A}_{m-3} - \mathcal{A}_{m-2}v_{m-3}\right)v_{m-3}^{\dagger} = 0 \tag{6.3.70}$$

Форма данного уравнения идентична (6.3.66), но с заменой

$$m \to m-1, \qquad \widetilde{\mathcal{A}}_m \to \widetilde{\mathcal{A}}_{m-1} = v_{m-1}^{\dagger}\widetilde{\mathcal{A}}_m v_{m-1}, \qquad \kappa \to \widetilde{\kappa} = \frac{\kappa}{1+\kappa}\,. \tag{6.3.71}$$

Тем самым мы описали один шаг индукции, а именно $m \to m-1$.

Так как сама схема индукции установлена, перейдём к анализу того, какие условия накладывает исходное уравнения (6.3.66) на поле $\mathcal{A}_{m-1}$ в пределе $\kappa \to 0$. Во-первых, в этом пределе мы имеем

$$\left(v_{m-2}\mathcal{A}_{m-2} - \mathcal{A}_{m-1}v_{m-2}\right)v_{m-2}^{\dagger} = 0 \tag{6.3.72}$$

Умножая на v_{m-2} справа и на $v_{m-2}^{\dagger}$ слева, получим

$$\mathcal{A}_{m-2} = v_{m-2}^{\dagger}\mathcal{A}_{m-1}v_{m-2}\,. \tag{6.3.73}$$

Это означает, что $\mathcal{A}_{m-2}$ – ограничение $\mathcal{A}_{m-1}$ на подпространство V_{m-2} (вспомним вид (6.3.59) матрицы v_{m-2}). Подставляя (6.3.73) в (6.3.72), получим дополнительное условие

$$(1 - v_{m-2}v_{m-2}^{\dagger})\mathcal{A}_{m-1}v_{m-2}v_{m-2}^{\dagger} = 0\,. \tag{6.3.74}$$

Это условие означает, что матрица $\mathcal{A}_{m-1}$ является нижне-блочно-треугольной (если мы считаем, что нижний правый блок соответствует подпространству $V_{m-2} \subset V_1$, а верхний левый – подпространству $V_{m-2}^{\perp} \subset V_1$). Уравнение (6.3.66) содержит в себе, однако, больше информации, чем то, что мы получили, перейдя напрямую к пределу $\kappa \to 0$ в самом уравнении. Действительно, после умножения уравнения на $1 - v_{m-2}v_{m-2}^{\dagger}$ справа параметр κ полностью пропадает из уравнения, и остается условие

$$\left(\mathcal{A}_{m-1} - v_{m-1}^{\dagger}\widetilde{\mathcal{A}}_m v_{m-1}\right)(1 - v_{m-2}v_{m-2}^{\dagger}) = 0\,. \tag{6.3.75}$$

Это можно интерпретировать таким образом: ‘левый столбец’ матрицы $\mathcal{A}_{m-1}$ полностью определяется значением $\widetilde{\mathcal{A}}_m$. В конечном счете уравнения (6.3.73), (6.3.74), (6.3.75) приводят к тому, что матрица $\mathcal{A}_{m-1}$ имеет вид, изображенный на Рисунке 6.3.

Повторяя только что описанную процедуру, придём в итоге к форме матрицы $(\mathcal{A}_{m-1})_z$, изображенной на Рисунке 6.4.

Подставим теперь калибровочное поле $(\mathcal{A}_{m-1})_z$ в лагранжиан (6.3.61). Так же как и ранее, в разделе 6.2.2, легко показать, что ковариантные производные $\mathscr{D}_z v_k\,(k < m-1)$ имеют порядок κ и обращаются в нуль в пределе $\kappa \to 0$. Действительно, умножая (6.3.63) на v_{k-1}

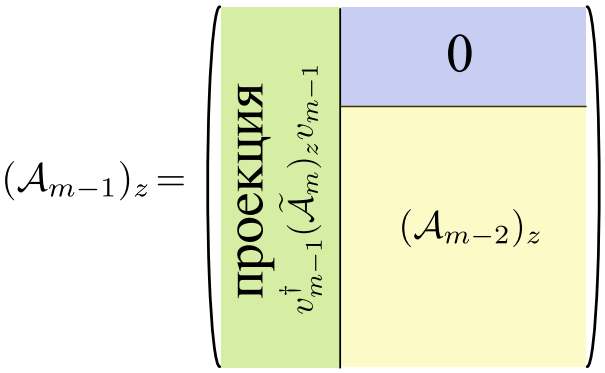


Рис. 6.3: Один шаг рекуррентной процедуры определяет данную форму матрицы.

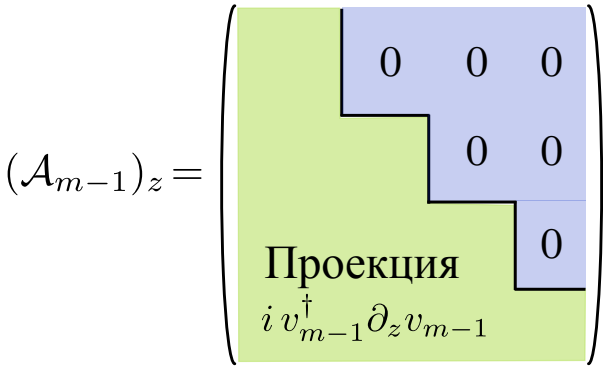


Рис. 6.4: Результирующая форма матрицы $(\mathcal{A}_{m-1})_z$.

справа, получим

$$\mathscr{D}_z v_{k-1} = v_k^\dagger \mathscr{D}_z v_k v_{k-1}, \qquad k < m-1\,. \tag{6.3.76}$$

Умножая (6.3.65) на v_{m-2} справа, аналогичным образом получим

$$\mathscr{D}_z v_{m-2} = \kappa\, v^\dagger_{m-1} \mathscr{D}_z v_{m-1} v_{m-2}\,. \tag{6.3.77}$$

Из последнего равенства следует, что $\mathscr{D}_z v_{m-2} = O(\kappa)$ в пределе $\kappa \to 0$. Тогда, используя (6.3.76), можно рекуррентно доказать, что $\mathscr{D}_z v_k = O(\kappa)$ для всех $k < m-1$. Поэтому при подстановке данных выражений в лагранжиан (6.3.61) члены, содержащие эти ковариантные производные, обращаются в нуль в пределе $\kappa \to 0$. Тем самым остаётся вычислить

$$\mathscr{D}_z v_{m-1} = \partial_z v_{m-1} + i\, v_{m-1}\, (\mathcal{A}_{m-1})_z\,. \tag{6.3.78}$$

Напомним, что матрица v_{m-1} содержит всю информацию о векторах в $\mathbb{C}^N$, параметризующих подпространства $V_1 \subset \ldots \subset V_{m-1}$. Из условия нормировки (6.3.58) следует, что эти векторы ортонормированы. Разобьем их на $m-1$ наборов $\tau_1, \ldots \tau_{m-1}$ в соответствии со следующим естественным принципом: векторы из τ_1 лежат в пространстве V_1, векторы из τ_2 – в пространстве V_2 и ортогональны векторам из τ_1 и т.д. Тогда матрицу v_{m-1} можно записать так:

$$v_{m-1} = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{m-1}\}\,. \tag{6.3.79}$$

Введем также еще один набор – τ_m – ортонормированных векторов, лежащих в ортогональном дополнении к V_{m-1}. В таком случае условие нормировки (6.3.58) эквивалентно следующим условиям:

$$\tau_a^\dagger \tau_b = \delta_{ab}, \quad a, b = 1, \ldots, m\,. \tag{6.3.80}$$

Можно также записать соотношение полноты

$$\sum_{a=1}^{m} \tau_a \tau_a^\dagger = \mathbb{1}_N\,. \tag{6.3.81}$$

В этих обозначениях компоненты калибровочного поля $(\mathcal{A}_{m-1})_z$ имеют вид (см. Рисунок 6.4)

$$[(\mathcal{A}_{m-1})_z]_{ab} = i\,\tau_a^\dagger \partial_z \tau_b \quad \text{при} \quad a \leqslant b\,;$$
$$[(\mathcal{A}_{m-1})_z]_{ab} = 0 \quad \text{при} \quad a > b\,. \quad a, b = 1 \ldots m-1\,.$$

При подстановке в (6.3.78) получим

$$\mathscr{D}_z \tau_a = \partial_z \tau_a - \sum_{b=1}^{a} \tau_b \tau_b^\dagger\, \partial_z \tau_a \;= \text{используя (6.3.81)} = \sum_{b=a+1}^{m} \tau_b \tau_b^\dagger\, \partial_z \tau_a, \qquad a = 1, \ldots, m-1\,. \quad (6.3.82)$$

Подставляя данное выражение в (6.3.61), получим окончательное выражение для лагранжиана

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1}^{m-1} \sum_{b=a+1}^{m} \mathrm{Tr}\left((J_{ba})_z^\dagger\, (J_{ba})_z \right), \qquad \text{где} \qquad (J_{ba})_z = \tau_b^\dagger\, \partial_z \tau_a\,. \quad (6.3.83)$$

Данный лагранжиан совпадает с введённым в главе 4 в случае, когда таргет-пространство – пространство флагов (6.1.1), а комплексная структура выбрана таким образом, чтобы блочно-(верхне или нижне)-треугольные матрицы отвечали голоморфному подпространству $\mathfrak{m}_+$:

$$\mathfrak{m}_+ = \text{блочно-треугольные матрицы}\,. \quad (6.3.84)$$

Данное требование соответствует ограничению $b > a$ в сумме, входящей в лагранжиан (6.3.83).

6.3.1 Квазилинейная формулировка

В предыдущем разделе мы показали, что если из лагранжиана (6.3.61) исключить вспомогательные калибровочные поля, то получится лагранжиан (6.3.83), совпадающий с лагранжианом модели, рассмотренной в главе 4. Оказывается, что квазилинейное представление (6.3.61) можно существенно упростить, перейдя к калибровке (6.3.59) для 'полей материи'. При этом остается единственное динамическое поле v_{m-1}, которое мы для простоты переобозначим как V. Пусть $M = \dim V_{m-1}$, тогда матрицу $V : \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^N$ можно представить в виде

$$V = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \star & \cdots & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & \star \end{pmatrix}\right\}}_{M \text{ столбцов}} N \text{ строк} \quad (6.3.85)$$

Столбцы матрицы параметризуют M векторов флага. Они ортонормированы:

$$V^\dagger V = \mathbb{1}_M\,. \quad (6.3.86)$$

Введем аналоги калибровочных полей

$$\mathscr{A}_z := \begin{pmatrix} (A_{11})_z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (A_{21})_z & (A_{22})_z & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ (A_{m-1\,1})_z & (A_{m-1\,2})_z & \cdots & \cdots & (A_{m-1\,m-1})_z \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_{\bar{z}} = (\mathscr{A}_z)^\dagger \tag{6.3.87}$$

и ковариантную производную

$$\mathscr{D}_z V := \partial_z V - i\, V\, \mathscr{A}_z\,. \tag{6.3.88}$$

Лагранжиан модели имеет вид:

$$\mathscr{L} = \mathrm{Tr}((\mathscr{D}_z V)^\dagger\, \mathscr{D}_z V)\,. \tag{6.3.89}$$

Ясно, что треугольная структура матрицы $\mathcal{A}_z$ нарушает калибровочную группу $U(M) \to U(n_1) \times \cdots \times U(n_{m-1})$ ($M = \sum\limits_{i=1}^{m-1} n_i$).

Продемонстрируем эквивалентность представлений (6.3.61) и (6.3.89) на простейшем примере пространства флагов $\frac{U(3)}{U(1)^3}$, рассмотренном в разделе 6.2.2. В этом случае $V : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$. Варьирование лагранжиана (6.3.61) по калибровочным полям $\mathcal{A}_{\bar{z}}$ и $\mathcal{B}_{\bar{z}}$ дает при $u = u_0 = (0,1)^T$ следующие условия (см. Приложение Б.1):

$$\delta\mathcal{A}_{\bar{z}}\,(\mathcal{A}_z + \bar{u}_0\,\mathcal{B}_z\,u_0) = 0 \tag{6.3.90}$$

$$\mathrm{Tr}\,(\delta\mathcal{B}_{\bar{z}}\,(\mathcal{A}_z\,\mathbb{1}_2 + \mathcal{B}_z)\,u_0 \otimes \bar{u}_0) + \kappa\,\mathrm{Tr}\left(\delta\mathcal{B}_{\bar{z}}\,(\sum_{k=1}^{3} \partial_z v^k \otimes \bar{v^k} - i\,\mathcal{B}_z)\right) = 0\,. \tag{6.3.91}$$

Первое уравнение позволяет выразить $\mathcal{A}_z$ через $\mathcal{B}_z$, в то время как второе уравнение в пределе $\kappa \to 0$ накладывает дополнительное условие на поле $\mathcal{B}_z$: $(\delta\mathcal{B}_{\bar{z}})_{21}\,(\mathcal{B}_z)_{12} = 0$. Заметим, что если бы мы сразу положили в лагранжиане (6.3.61) $\mathcal{A}_z = -\bar{u}_0\,\mathcal{B}_z\,u_0$ и $(\mathcal{B}_z)_{12} = (\mathcal{B}_{\bar{z}})_{21} = 0$, то при варьировании по полю $\mathcal{B}_{\bar{z}}$ мы получили бы вторую половину уравнения (6.3.91), т.е.

$$\mathrm{Tr}\left(\delta\mathcal{B}_{\bar{z}}\,(\sum_{k=1}^{3} \partial_z v^k \otimes \bar{v^k} - i\,\mathcal{B}_z)\right) = 0\,. \tag{6.3.92}$$

Переобозначая $\mathcal{B}_z = \mathscr{A}_z$ и используя обозначение (6.3.88), данное условие можно записать в виде

$$\mathrm{Tr}\left(\delta\mathscr{A}_{\bar{z}}\,(V^\dagger\,\mathscr{D}_z V)\right) = 0 \tag{6.3.93}$$

т.е. оно совпадает с условием, которое получается в результате варьирования (6.3.89) по $\mathscr{A}_{\bar{z}}$.

6.4 Заключение и дальнейшие перспективы

В данной главе был продолжен анализ двумерных σ-моделей, рассмотренных в предыдущих главах. Таргет-пространства этих моделей – комплексные однородные многообразия, а B-поле специального вида, входящее в лагранжиан, обеспечивает плоскость нётеровского тока, что позволяет построить представление нулевой кривизны для уравнений движения по классической формуле Полмайера (см. (4.2.18)). Весьма заметный класс пространств, попадающих в эту категорию, – это пространства флагов. В частном случае грассмановых многообразий это симметрические пространства – при этом B-поле становится топологическим, и модели классически эквивалентны стандартным интегрируемым моделям с симметрическими таргет-пространствами, которые изучались, например, еще в работах [10], [60]. В остальных случаях, однако, модели являются новыми.

Известно, что самая естественная теория возмущений для $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$-модели состоит в изучении предела $N \to \infty$ и построении $\frac{1}{N}$-разложения для различных наблюдаемых. Удобнее всего это можно сделать, пользуясь квазилинейной формулировкой, когда вводятся N линейных 'полей материи', удовлетворяющих квадратичным условиям (выполнение которых можно обеспечить при помощи введения в действие множителей Лагранжа) и взаимодействующих со вспомогательным $U(1)$ калибровочным полем. Данный подход известен начиная с работ [55], [54], и в рамках этого подхода были получены важные результаты в теории $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$-модели, например, анализ сокращения аномалий в нелокальном сохраняющемся заряде после введения фермионов [15].

В настоящей главе построена квазилинейная формулировка для описанных ранее σ-моделей пространств флагов. Точно так же как введение вспомогательного $U(1)$ калибровочного поля в $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$-случае можно связать с кэлеровым фактором плоского пространства $\mathbb{C}^N$, существует аналогичная конструкция кэлерова фактора для случая пространств флагов, представляющая собой естественный пример общей теории 'колчанных представлений' [68] (данные для фактора задаются колчанной диаграммой). Отличие нашего случая состоит в том, что в лагранжиан (4.1.1) входит метрика Киллинга, в общем случае не являющаяся кэлеровой. В связи с этим процедура кэлерова фактора требует определенной модификации – при этом неизменными остаются калибровочная группа, по которой производится факторизация, и ее представления – так называемые 'поля материи' модели. Мы показали явно, что после исключения вспомогательных калибровочных полей при помощи (алгебраических) уравнений движения получается стандартная (нелинейная) форма модели (4.1.1). Мы считаем, что этот результат послужит хорошей отправной точкой для анализа квантовых свойств модели.

Глава 7. η-деформированные и $\mathbb{Z}_m$-градуированные модели

В данной Главе будет установлена связь между изученными в предыдущих главах сигма-моделями однородных комплексных многообразий и так называемой R-матричной деформацией (или η-деформацией) модели главного кирального поля. Будет показано, что во многих случаях в качестве R-матрицы естественно выбрать комплексную структуру на таргет-пространстве, при этом модифицированное классическое уравнение Янга-Бакстера сводится к интегрируемости этой комплексной структуры [45].

7.1 η-деформация

В работе [84] была предложена деформация модели главного кирального поля с таргет-пространством G ($SU(2)$-случай исследовался ранее в [63]). Начнем с рассмотрения простейшей – однапараметрической – версии этой деформации. Она определяется при помощи линейного оператора R на алгебре Ли $\mathfrak{g}$:

$$R: \quad \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \tag{7.1.1}$$

Требуется, чтобы на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существовала метрика $\langle \bullet, \bullet \rangle$, инвариантная относительно присоединенного действия группы, и в которой оператор R вляется кососимметрическим: $\langle R \circ a, b\rangle = -\langle a, R \circ b\rangle$. Оператор R должен также удовлетворять уравнению

$$N(a,b) := [R \circ a, R \circ b] - R \circ ([R \circ a, b] + [a, R \circ b]) - [a,b] = 0 \qquad \forall\, a, b \in \mathfrak{g} \tag{7.1.2}$$

В дальнейшем мы обсудим смысл этого уравнения, известного в литературе под названием ‘модифицированного классического уравнения Янга-Бакстера’. Пока лишь заметим, что если задан оператор R с нужными свойствами, то действие деформированной модели, выраженное в терминах конусных компонент $J_\pm$ обычного тока $J := -g^{-1}dg$, таково:

$$\mathscr{S}_\eta = \frac{1}{2} \int d^2x \, \langle J_+, \frac{1+\eta^2}{1-\eta\, R} \circ J_- \rangle, \tag{7.1.3}$$

где $\eta \in \mathbb{C}$ – параметр деформации. Мы включили в определение множитель $(1+\eta^2)$, чтобы упростить анализ предела $\eta \to \pm i$ в разделе 7.2.1. Простейший способ построить пару Лакса для данной модели – показать, что нетеровский ток модели является плоским (что само по себе уже весьма нетривиальное свойство). Нетеровский ток определяется формулами

$$\mathcal{K}_+ = -g\left(\tfrac{1+\eta^2}{1+\eta R}\circ J_+\right) g^{-1} := -(1+\eta^2)\, gS_+g^{-1}, \tag{7.1.4}$$

$$\mathcal{K}_- = -g\left(\tfrac{1+\eta^2}{1-\eta R}\circ J_-\right) g^{-1} := -(1+\eta^2)\, gS_-g^{-1} \tag{7.1.5}$$

Уравнение сохранения нетеровского тока $\partial_+\mathcal{K}_- + \partial_-\mathcal{K}_+ = 0$ можно записать в терминах S следующим образом:

$$\partial_+S_- + \partial_-S_+ + \eta\,[R\circ S_-, S_+] - \eta\,[R\circ S_+, S_-] = 0 \tag{7.1.6}$$

(Мы подставили S вместо J, используя определение $J_\pm = (1\pm\eta R)\circ S_\pm$.) Условие плоскости тока J (которое следует из определения $J = -g^{-1}dg$) можно также переписать в терминах S. Используя в том числе важнейшее соотношение (7.1.2), в результате получим:

$$\begin{aligned}\partial_+S_- - \partial_-S_+ + \eta\,[S_+, R\circ S_-] - \eta\,[R\circ S_+, S_-] - (1-\eta^2)\,[S_+, S_-] - \\ -\eta\, R\circ(\partial_+S_- + \partial_-S_+ + \eta\,[R\circ S_-, S_+] - \eta\,[R\circ S_+, S_-]) = 0\end{aligned} \tag{7.1.7}$$

Вторая строка обращается в нуль в силу уравнения движения (7.1.6), и можно также проверить, что зануление первой строки – в это в точности условие плоскости нетеровского тока: $d\mathcal{K} - \mathcal{K}\wedge\mathcal{K} = 0$. Тем самым построен ток $\mathcal{K}$, который сохраняется и при этом является плоским. Это как раз та ситуация, в которой применимо каноническое построение Полмейера [96]. Однопараметрическое семейство плоских связностей $\mathcal{A}$ строится следующим образом:

$$\mathcal{A} = \frac{1+v}{2}\,\mathcal{K}_+\,dx^+ + \frac{1+v^{-1}}{2}\,\mathcal{K}_-\,dx^-\ ,\quad v\in\mathbb{C}^*\,. \tag{7.1.8}$$

Уравнение нулевой кривизны имеет вид

$$\partial_+\mathcal{A}_- - \partial_-\mathcal{A}_+ - [\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_-] = 0 \qquad \text{для всех}\ \ v\in\mathbb{C}^*\,. \tag{7.1.9}$$

Прежде чем перейти к обсуждению геометрического смысла R-матрицы, для полноты обсудим также обобщения приведенной конструкции на случай деформации σ-моделей симметрических пространств, а также двупараметрические деформации модели главного кирального поля.

7.1.1 Симметрические пространства.

Чтобы перейти от таргет-пространства G к фактору G/H, можно сделать подгруппу H группы симметрии теории калибровочной. Ясно, что R-матрица нарушает симметрию неде-

формированной теории $G = G_L \times G_R$ до $G_L \times \widetilde{H}$, где $\widetilde{H} \subset G_R$ – подгруппа, коммутирующая с R. Рассмотрим два случая:

• Пусть $H \subset \widetilde{H}$. Это значит, что R-матрица коммутирует с присоединенным действием H, т.е. $R(hah^{-1}) = hR(a)h^{-1}, h \in H$. Это очень сильное ограничение. Например, пусть рассматриваемое симметрическое пространство – сфера $S^N = SO(N+1)/SO(N)$. Построим разложение $so(N+1) = so(N) \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ – пространство неприводимого над $\mathbb{C}$ представления $so(N)$. Присоединенное представление $so(N)$ также неприводимо при $N > 4$. По лемме Шура ограничения R на $so(N)$ и на $\mathfrak{m}$ пропорциональны тождественным преобразованиям: $R|_{so(N)} = s\,\mathbb{1}$, $R|_{\mathfrak{m}} = r\,\mathbb{1}$. Из уравнения (7.1.2) тогда следует, что $R = i\,\mathbb{1}$ на всей алгебре. В этом случае в действии (7.1.3) деформация отсутствует. Данный аргумент, однако, не исключает более сложные случаи, когда представление стабилизатора приводимо, однако мы не будем здесь углубляться в этот вопрос.

• Универсальный способ состоит в том, чтобы сделать калибровочной подгруппу $H \subset G_L$ группы левой симметрии. Для этого необходимо заменить в действии (7.1.3) обычные производные на ковариантные:

$$\mathcal{S}_\eta = \int d^2x \, \langle J_+, \frac{1}{1-\eta\, R} \circ J_- \rangle, \quad J = -g^{-1}(d-A)g, \quad A \in \mathfrak{h}. \tag{7.1.10}$$

В результате группа глобальной симметрии G_L нарушается до фактора $N_{G_L}(H)/H$ нормализатора H в G_L по H. Действительно, преобразование $g \to kg$ элемента $k \in N_{G_L}(H)$ может быть компенсировано дополнительным преобразованием $A \to kAk^{-1}$. Последнее является допустимым преобразованием в точности потому, что по определению нормализатора $kAk^{-1} \in \mathfrak{h}$. Ясно, что модель, определенная действием (7.1.10), имеет таргет-пространство G/H. Однако нетривиальный вопрос заключается в том, остается ли данная модель интегрируемой, т.е. существует ли для ее уравнений движения представление нулевой кривизны. Проверим это. Уравнения движения, которые следуют из (7.1.10), состоят из двух разных уравнений – одно из них возникает при вариации группового элемента g, а второе – из вариации вспомогательного поля A:

$$\mathscr{D}_+ \mathbb{K}_- + \mathscr{D}_- \mathbb{K}_+ = 0, \tag{7.1.11}$$

$$[\mathbb{K}_-]_{\mathfrak{h}} = [\mathbb{K}_+]_{\mathfrak{h}} = 0 \tag{7.1.12}$$

Ковариантная производная имеет вид $\mathscr{D}M := dM - [A, M]$, а $\mathbb{K}$ – 'ток', определенный следующим образом:

$$\mathbb{K}_- = \frac{1}{1-\eta R_g} \circ (D_- g g^{-1}), \quad \mathbb{K}_+ = \frac{1}{1+\eta R_g} \circ (D_+ g g^{-1}), \quad R_g = Ad_g R Ad_{g^{-1}}\,. \tag{7.1.13}$$

В отсутствие калибровочного поля $\mathbb{K}$ был бы сохраняющимся нетеровским током, однако при наличии калибровочного поля большая часть левой симметрии теряется, поэтому ток

сохраняется лишь ковариантно. Перепишем определения (7.1.13) таким образом:

$$\partial_- g g^{-1} = A_- + (1 - \eta R_g) \circ \mathbb{K}_-, \qquad \partial_+ g g^{-1} = A_+ + (1 + \eta R_g) \circ \mathbb{K}_+ \,. \tag{7.1.14}$$

Вспоминая уравнение (7.1.12), т.е. $[\mathbb{K}_-]_\mathfrak{h} = [\mathbb{K}_+]_\mathfrak{h} = 0$, а также тот факт, что $[A_-]_\mathfrak{m} = [A_+]_\mathfrak{m} = 0$, мы видим, что (7.1.14) напоминает разложение dgg^{-1} на части, отвечающие 'тетраде' и 'связности'. Данное разложение позволяет вычислить A и $\mathbb{K}$ в терминах динамического группового элемента g. Один из способов, как это можно сделать, заключается в использовании теории возмущений по η. При $\eta = 0$ будем иметь $A = [dgg^{-1}]_\mathfrak{h}$ и $\mathbb{K} = [dgg^{-1}]_\mathfrak{m}$.

Из плоскости dgg^{-1} следуют деформированные структурные уравнения Картана:

$$dA - A \wedge A = (1 + \eta^2)\mathbb{K} \wedge \mathbb{K} - \mathscr{D}\mathbb{K} + \eta\, R_g \circ (\mathscr{D} * \mathbb{K}) \tag{7.1.15}$$

Используем уравнения движения (7.1.11), чтобы исключить последний член в структурных уравнениях, и спроектируем оставшееся уравнение на подпространства $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$:

$$\mathfrak{h}: \qquad dA - A \wedge A - (1 + \eta^2)\mathbb{K} \wedge \mathbb{K} = 0 \tag{7.1.16}$$

$$\mathfrak{m}: \qquad \mathscr{D}\mathbb{K} = 0 \tag{7.1.17}$$

Здесь использовались коммутационные соотношения, характерные для симметрического пространства: $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$. Приведенные выше два уравнения, а также условие $\mathscr{D} * \mathbb{K} = 0$, можно получить из условия нулевой кривизны лаксовой связности

$$\mathcal{A} = A + \sqrt{1 + \eta^2} \left(u\, \mathbb{K}_+ dx^+ + \frac{1}{u}\, \mathbb{K}_- dx^- \right) . \tag{7.1.18}$$

Заметим, что оригинальное доказательство интегрируемости η-деформированной модели для симметрических таргет-пространств было дано в [57].

7.1.2 Случай не простой группы симметрии: Двупараметрические деформации.

Как уже упоминалось, саму группу G тоже можно рассматривать как симметрическое протранство: $G = \frac{G \times G}{G_{\text{diag}}}$. Лагранжиан соответствующей σ-модели с дополнительным калибровочным полем имеет вид

$$\mathscr{L} = \mathrm{Tr}(g_1^{-1} \mathscr{D} g_1)^2 + \mathrm{Tr}(g_2^{-1} \mathscr{D} g_2)^2 \,. \tag{7.1.19}$$

g_1 и g_2 – это два групповых элемента, и $\mathscr{D}g := dg - A\, g, A \in \mathfrak{g}$. Теперь мы можем деформировать это действие по аналогии с тем, как мы деформировали (7.1.3), но уже с двумя

параметрами:

$$\widetilde{\mathscr{L}} = \mathrm{Tr}\left((g_1^{-1}\mathscr{D}_+ g_1)\frac{1}{1-\eta_1 R_1}\circ(g_1^{-1}\mathscr{D}_- g_1)\right) + \mathrm{Tr}\left((g_2^{-1}\mathscr{D}_+ g_2)\frac{1}{1-\eta_2 R_2}\circ(g_2^{-1}\mathscr{D}_- g_2)\right). \quad (7.1.20)$$

Исключим вспомогательное калибровочное поле $A = (A_+, A_-)$. Эта процедура описана в приложении Б.3.1. В результате получается лагранжиан

$$\widetilde{\mathscr{L}} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left((J_1 - J_2)_+ \frac{1}{1-\frac{\eta_1}{2}R_{g_1} - \frac{\eta_2}{2}R_{g_2}}\circ(J_1 - J_2)_-\right), \qquad R_g := Ad_g\, R\, Ad_{g^{-1}}\,. \quad (7.1.21)$$

Ясно, что он также калибровочно-инвариантен относительно преобразований $g_1 \to g_1 g$, $g_2 \to g_2 g$, $g \in G$. Простейшее калибровочное условие состоит в выборе $g_1 = 1$ или $g_2 = 1$.

Выведем теперь представление нулевой кривизны для уравнений движения, которые следуют из лагранжиана (7.1.20). Этот вывод весьма аналогичен тому построению, которое мы проделали выше для деформации σ-моделей симметрических пространств. Подробности можно найти в приложении Б.3.2. Вводя ток

$$(\mathscr{K})_\pm = \frac{1}{1 \pm \eta_1 R_{g_1}}\circ(\mathscr{D}_\pm g_1 g_1^{-1}), \quad (7.1.22)$$

можно записать однопараметрическое семейство плоских связностей:

$$\mathscr{A} = A + \left(ab + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\,u\right)\mathscr{K}_+ dx^+ + \left(ab + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\,\tfrac{1}{u}\right)\mathscr{K}_- dx^-,$$
$$a = \tfrac{\eta_1+\eta_2}{2}, \qquad b = \tfrac{\eta_1-\eta_2}{2}, \qquad u \in \mathbb{C}^*\,.$$

Рассматриваемая двупараметрическая модель была впервые найдена в форме (7.1.21) в работе [84], а ее пара Лакса была построена в [83]. Приведенное здесь изложение наиболее близко к работе [76].

7.2 Какова может быть R-матрица? Связь с комплексными структурами.

Перейдем к анализу (и интерпретации) основного уравнения (7.1.2). Основное наблюдение состоит в том, что если R была бы комплексной структурой, т.е. если $R^2 = -1$, то уравнение (7.1.2) было бы идентично уравнению интегрируемости комплексной структуры R на группе Ли G, алгебра Ли которой есть $\mathfrak{g}$. (Левая часть (7.1.2) – это в точности значение тензора Нийенхейса на двух векторах a, b.) Тем самым мы знаем целый класс решений (7.1.1)-(7.1.2): это просто комплексные структуры на группе Ли G, совместные с метрикой $\langle\bullet,\bullet\rangle$ (такие комплексные структуры также называются *ортогональными*). Совместность с метрикой в данном случае означает, что метрика эрмитова относительно выбранной комлексной структуры R, т.е. $\langle R\circ a, R\circ b\rangle = \langle a, b\rangle$. Так как $R^2 = -1$, это то же самое, что требование

кососимметричности R, о котором говорилось в разделе 7.1.

То наблюдение, что свойства R-матрицы весьма похожи на свойства комплексной структуры, будет весьма важно в дальнейшем обсуждении, однако проанализируем сначала, в каких аспектах данная параллель не полна. Во-первых, существование комплексной структуры на группе Ли существенным образом зависит от ее размерности, а именно от того, является ли эта размерность четной или нечетной. Ясно, что на нечетномерном многообразии не может быть комплексной структуры. Тем не менее, к этой категории относятся таргет-пространства многих σ-моделей, например $S^3 = SU(2)$. В такой ситуации одна из возможностей, которая подробно обсуждалась в литературе [84]-[56], состоит в том, чтобы выбрать матрицу R, удовлетворяющую условиям (7.1.2), (7.1.1) и дополнительному требованию

$$R^3 = -R \tag{7.2.23}$$

вместо $R^2 = -1$, которое имело место для комплексной структуры. Иногда говорят, что наличие оператора R, действующего в касательном расслоении к некоторому многообразию и удовлетворяющего данному соотношению, задает f-структуру на многообразии. Этот оператор может иметь на $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ собственные значения $0, \pm i$. Разложим $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ на его собственные пространства:

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_- \ . \tag{7.2.24}$$

Какие условия накладывает зануление оператора N, заданного формулой (7.1.2), на коммутационные соотношения между элементами этих подпространств? Имеется следующий результат:

$$a \in \mathfrak{m}_+, \quad b \in \mathfrak{m}_- : \qquad N(a,b) \equiv 0 \tag{7.2.25}$$

$$a \in \mathfrak{m}_+, \quad b \in \mathfrak{m}_+ : \qquad N(a,b) = -2i\, R \circ [a,b] - 2[a,b], \tag{7.2.26}$$

$$a \in \mathfrak{m}_-, \quad b \in \mathfrak{m}_- : \qquad N(a,b) = 2i\, R \circ [a,b] - 2[a,b], \tag{7.2.27}$$

$$a \in \mathfrak{m}_0, \quad b \in \mathfrak{m}_+ : \qquad N(a,b) = -i\, R \circ [a,b] - [a,b], \tag{7.2.28}$$

$$a \in \mathfrak{m}_0, \quad b \in \mathfrak{m}_- : \qquad N(a,b) = i\, R \circ [a,b] - [a,b], \tag{7.2.29}$$

$$a \in \mathfrak{m}_0, \quad b \in \mathfrak{m}_0 : \qquad N(a,b) = -[a,b]\,. \tag{7.2.30}$$

Зануление оператора N приводит к коммутационным соотношениям:

$$[\mathfrak{m}_\pm, \mathfrak{m}_\pm] \subset \mathfrak{m}_\pm, \quad [\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_\pm] \subset \mathfrak{m}_\pm, \quad [\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0] = 0\ . \tag{7.2.31}$$

Используем стандартное разложение

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha \oplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_{-\alpha} \tag{7.2.32}$$

алгебры Ли на картановскую подалгебру и подпространства положительных/отрицательных

корней. Пусть оператор R действует по правилу

$$R\big|_{\mathfrak{g}_\alpha} = i\,\mathbb{1}, \quad \alpha > 0 \tag{7.2.33}$$

$$R\big|_{\mathfrak{g}_\alpha} = -i\,\mathbb{1}, \quad \alpha < 0 \tag{7.2.34}$$

$$R\big|_{\mathfrak{t}} = 0\,. \tag{7.2.35}$$

Ясно, что такой выбор обеспечивает выполнение полученных ранее коммутационных соотношений. Существует однако некоторая тонкость, связанная с вещественностью действия (7.1.3). Действительно, в (7.2.33)-(7.2.35) мы определили оператор R на *комплексификации* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ исходной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Априори нет никаких причин, почему определенный таким образом оператор R должен допускать ограничение на вещественную форму $\mathfrak{g}$. Другими словами, будем рассматривать $\mathfrak{g}$ как множество стационарных точек полулинейного автоморфизма $^* : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ('комплексное сопряжение'). В действии (7.1.3) мы предполагаем $^*(J_\pm) = J_\pm$ (в случае сигнатуры Минковского на мировом листе, использование которой до сих пор подразумевалось в настоящей Главе). Поэтому вещественность действия будет зависеть от коммутационных соотношений между R и *, а также от фазы ϕ параметра $\eta = |\eta|e^{i\phi}$. Наиболее общее условие, при котором лагранжиан будет вещественным в сигнатуре Минковского (с точностью до общего множителя $1+\eta^2$), таково:

$$^*R = e^{2i\phi} R\,^* \tag{7.2.36}$$

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда оператор R, определенный соотношениями (7.2.33)-(7.2.35), корректно определен на $\mathfrak{g}$, т.е. коммутирует с *, вследствие чего $\phi = 0 \,(\mathrm{mod}\,\pi)$. Например, для $\mathfrak{g} = su(N)$ это выполняется, когда $^*(a) := -a^\dagger$ (здесь a следует рассматривать как $N \times N$-матрицу), в этом случае $\mathfrak{g}$ – компактная вещественная форма $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. В наших приложениях $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = sl(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = su(2)$. Еще один случай, который нам понадобится, – когда $^*(a) := -\sigma_3 a^\dagger \sigma_3^{-1}$. Множество фиксированных точек представляет собой алгебру Ли $su(1,1)$. В обоих примерах за положительные/отрицательные корни можно принять матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В общем случае свойства вещественности оператора R зависят не только от вещественной формы, но и от конкретного выбора разложения на корневые подпространства. Например, алгебра $su(1,1)$ эквивалентна $sl(2,\mathbb{R})$[1]. Последняя вещественная форма определяется соотношением $^*(a) = \bar{a}$ (обычное комплексное сопряжение). Если выбрать в качестве положительного/отрицательного корней те же верхне-/нижне-треугольные матрицы, что и раньше, то оператор R будет чисто мнимым, т.е. он будет анти-коммутировать с *, поэтому для вещественности лагранжиана будет необходимо, чтобы $\phi = \frac{\pi}{2} \,(\mathrm{mod}\,\pi)$.

[1] Две вещественные формы $sl(2,\mathbb{C})$, определенные операторами сопряжения ^{*_1},^{*_2}, называются эквивалентными, если $^{*_2} = Ad_g \, ^{*_1} Ad_{g^{-1}}$ для некоторой матрицы $g \in SL(2,\mathbb{C})$. В настоящем случае $^{*_1}(a) = \bar{a}$, $^{*_2}(a) = -\sigma_3 a^\dagger \sigma_3^{-1}$, а сопрягающий элемент g равен $g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

7.2.1 Предел $\eta \to \pm i$.

До сих пор мы обсуждали в основном мировую поверхность с сигнатурой пространства Минковского. Чтобы связать данное рассмотрение с моделями из предыдущих Глав, рассмотрим также евклидов случай. В этом случае необходимо сделать замену $x^+ \to z, x^- \to \bar{z}$, и оператор сопряжения теперь переставляет два тока: $^*(J_z) = J_{\bar{z}}$. Используя антисимметрию R, мы видим, что условие вещественности теперь имеет вид $^*R = -e^{2i\phi}R^*$, поэтому параметр η нужно умножить на дополнительный множитель i по сравнению со случаем пространства Минковского.

Перейдем к рассмотрению конкретного приложения. Пусть G – компактная группа, и мировая поверхность евклидова. Чтобы действие было вещественным, рассмотрим чисто мнимые значения η. Перепишем действие (7.1.3) следующим образом:

$$\mathscr{S}_\eta = \frac{1}{2}\int d^2x \ \Big((1+i\,\eta)\langle J_z, (J_{\bar{z}})_{\mathfrak{m}_+}\rangle + (1-i\,\eta)\langle J_z, (J_{\bar{z}})_{\mathfrak{m}_-}\rangle + (1+\eta^2)\langle J_z, (J_{\bar{z}})_{\mathfrak{m}_0}\rangle\Big) \qquad (7.2.37)$$

Легко видеть, что существуют предельные значения $\lim\limits_{\eta\to\pm i}\mathscr{S}_\eta$. Для ясности рассмотрим предел $\eta \to i$. В этом случае

$$\mathscr{S}_{\lim} = \lim_{\eta\to i}\mathscr{S}_\eta = \int d^2x\,\langle (J_z)_{\mathfrak{m}_+}, (J_{\bar{z}})_{\mathfrak{m}_-}\rangle \qquad (7.2.38)$$

(Здесь мы использовали свойство $\langle \mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_-\rangle = \langle \mathfrak{m}_-, \mathfrak{m}_-\rangle = 0$, которое следует из антисимметрии R.) Пределы нетеровского тока (7.1.4), а потому и лаксовой пары тоже существуют. Любопытный факт состоит в том, что таргет-пространство модели, которая получается в пределе, отличается от исходного. Причина состоит в том, что действие $\mathscr{S}_{\lim}$ инвариантно относительно группы H калибровочных преобразований, где H – группа, алгебра Ли которой есть $\mathfrak{m}_0$. $\mathfrak{m}_\pm$-проекции токов являются тензорами относительно данной группы, т.е. они преобразуются следующим образом: $(J)_{\mathfrak{m}_\pm} \to h(J)_{\mathfrak{m}_\pm}h^{-1}$, поэтому записанное действие оказывается инвариантным. В результате таргет-пространством оказывается G/H, а не G, как это было для исходной модели (7.1.3). Самый прозрачный пример – это случай $G = SU(N)$, $H = U(1)^{N-1}$ (картановский тор группы G). В этом случае таргет-пространство модели, которая получается в пределе, – это $G/H = SU(N)/U(1)^{N-1}$ – многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^N$. При $N = 3$ это модель, которая обсуждалась во второй части Главы 4 и в Главе 5.

Завершая данную дискуссию, заметим, что хотя модель Главы 5 можно получить из действия (7.1.3) с помощью перехода к пределу, в общем случае модели Главы 4 таким образом получить не удается. Мы видели, что действие вида (4.1.1) задает модель, обладающую представлением Лакса, в случае *произвольного комплексного однородного* таргет-пространства, если его метрика Киллинга вдобавок совместна с комплексной структурой. В качестве примера можно рассмотреть[2] пространство частичных флагов $SU(N)/S(U(n_1)\times\ldots\times U(n_m))$,

[2]Для таргет-пространств такого вида в работе [117] был разработан альтернативный подход к построению пары Лакса, который использует $\mathbb{Z}_m$-градуировку на этих многообразиях. Эквивалентность действий двух моделей (модели из [117] и модели (7.2.38)) будет нами доказана в конце настоящей Главы. Следует ожидать, что результирующие лаксовы связности калибровочно-эквивалентны друг другу.

$\sum_{k=1}^{m} n_k = N$. С другой стороны, описанная ранее предельная процедура всегда дает таргет-пространство вида G/H, где H – *абелева* подгруппа G. Это следует из того факта, что, согласно (7.2.31), подалгебра $\mathfrak{m}_0$ абелева.

7.2.2 Комплексные структуры на группах Ли

Вернемся к другому выбору матрицы R: всюду в дальнейшем мы будем считать, что R – комплексная структура на группе Ли G. Данная возможность уже была упомянута в начале Главы. Во-первых, имеется такой результат:

Утверждение 1. На четномерной компактной простой группе Ли всегда существует ортогональная комплексная структура. (Подразумевается ортогональность относительно метрики Киллинга).

Доказательство. (Ко)-касательное пространство к группе Ли G в точке $g \in G$ дается тетрадой $g^{-1}dg \in \mathfrak{g}$. Поэтому задать левоинвариантную почти комплексную структуру на компактной группе Ли – это то же самое, что задать комплексную структуру на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Если размерность алгебры четная, это всегда возможно. Поэтому вопрос состоит в том, можно ли ее выбрать так, чтобы она дополнительно была ортогональной и интегрируемой. Будем обозначать комплексную структуру на алгебре Ли и соответствующую почти комплексную структуру на группе Ли одной и той же буквой $\mathscr{J}$. Пусть мы выбрали комплексную структуру $\mathscr{J}$ на $\mathfrak{g}$, т.е.

$$\mathscr{J}: \quad \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \qquad \mathscr{J}^2 = -\mathbb{1}. \tag{7.2.39}$$

Требование интегрируемости $\mathscr{J}$ как комплексной структуры на G весьма сильное. Чтобы его записать в явном виде, диагонализуем оператор $\mathscr{J}$ на $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ и обозначим голоморфное- и анти-голоморфное подпространства $\mathfrak{m}_{\pm} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$:

$$\mathscr{J} \circ \mathfrak{m}_{\pm} = \pm i\, \mathfrak{m}_{\pm}\,. \tag{7.2.40}$$

Ясно, что $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_-$. Вычислим значение тензора Нийенхейса $N(a,b) := [R\circ a, R\circ b] - R\circ([R\circ a, b] + [A, R\circ b]) - [a,b]$ на элементах подпространств $\mathfrak{m}_{\pm}$:

$$a \in \mathfrak{m}_{\pm},\ \ b \in \mathfrak{m}_{\mp}: \qquad N(a,b) \equiv 0, \tag{7.2.41}$$

$$a \in \mathfrak{m}_{+},\ \ b \in \mathfrak{m}_{+}: \qquad N(a,b) = -2i\, R\circ[a,b] - 2[a,b], \tag{7.2.42}$$

$$a \in \mathfrak{m}_{-},\ \ b \in \mathfrak{m}_{-}: \qquad N(a,b) = 2i\, R\circ[a,b] - 2[a,b]\,. \tag{7.2.43}$$

Следовательно, обращение в нуль $N(a,b)$ эквивалентно требованию, что $\mathfrak{m}_{\pm}$ – подалгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$:

$$[\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_+] \subset \mathfrak{m}_+, \qquad [\mathfrak{m}_-, \mathfrak{m}_-] \subset \mathfrak{m}_-\,. \tag{7.2.44}$$

Как и ранее, используем стандартное разложение

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha \oplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_{-\alpha} \tag{7.2.45}$$

алгебры Ли на картановскую подалгебру и подпространства положительных/отрицательных корней. Так как все корни спарены, $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{t} \pmod 2$. Будем считать, что комплексная структура $\mathscr{J}$ действует на $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ по правилу

$$\mathscr{J}(a) = i\,a \qquad a \in \mathfrak{g}_\alpha \;\; (\alpha > 0) \tag{7.2.46}$$

$$\mathscr{J}(a) = -i\,a \qquad a \in \mathfrak{g}_\alpha \;\; (\alpha < 0) \tag{7.2.47}$$

Другими словами, $\oplus_{\alpha>0}\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{m}_+$ и $\oplus_{\alpha>0}\mathfrak{g}_{-\alpha} \subset \mathfrak{m}_-$. Ясно, что это требование совместно с коммутационными соотношениями (7.2.44). До сих пор мы по существу просто повторили определения (7.2.33), (7.2.34). Ортогональность $\mathscr{J}$ относительно метрики, т.е. эрмитовость последней, эквивалентна условию, что $(0,2)$- и $(2,0)$-компоненты метрики обращаются в нуль: $\langle \mathfrak{m}_\pm, \mathfrak{m}_\pm \rangle = 0$. Это выполняется, если принять условия (7.2.46)-(7.2.47), что очевидным образом следует из стандартных коммутационных соотношений элементов картановской подалгебры с элементами корневых подпространств, а также из определения киллинговой метрики $\langle a, b\rangle := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_a \mathrm{ad}_b)$. Остается лишь распространить наше определение на элементы картановской подалгебры $\mathfrak{t}$, которая является четномерной в силу того, что группа четномерна. Так как $[\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_\alpha$, зануление тензора Нийенхейса (7.2.42)-(7.2.43) не накладывает дополнительных ограничений. Следовательно, можно выбрать произвольную комплексную структуру на $\mathfrak{t}$, если только она совместна с метрикой. В базисе, в котором ограничение метрики $\langle \bullet, \bullet \rangle\big|_{\mathfrak{t}}$ на $\mathfrak{t}$ пропорционально единичной матрице, это просто означает, что мы должны найти *косо*-симметричную матрицу $\mathscr{J}$, квадрат которой равен минус единице: $\mathscr{J}^2 = -1$. Ясно, что это всегда возможно. ■

Замечание. Утверждение теоремы будет также выполнено в случае, если заменить полупростую группу на произведение полупростой группы и тора (т.е. требование полупростоты на требование редуктивности) и расширить метрику на торическую часть группы так, чтобы она оставалась невырожденной. Ниже мы рассмотрим конкретный пример группы $U(2) = U(1) \times SU(2)$.

Группа Ли, на которой имеется хотя бы одна интегрируемая левоинвариантная комплексная структура, будет, вообще говоря, иметь целое непрерывное семейство интегрируемых комплексных структур (которые получаются правыми сдвигами исходной). Пример данного явления – так называемые гиперкомплексные группы, являющиеся частным случаем гиперкомплексных многообразий. Гиперкомплексное многообразие – это многобразие с тремя $(\mathscr{I}, \mathscr{J}, \mathscr{K})$ попарно антикоммутирующими комплексными структурами, удовлетворяющими условию $\mathscr{I} \circ \mathscr{J} = \mathscr{K}$. Такие многообразия, в частности, интересны потому, что они являются примерами многообразий с редуцированной голономией – голономия един-

ственной аффинной связности без кручения на таком многообразии размерности $4n$ (которая называется 'связностью Обаты') содержится в $GL(n,\mathbb{H})$. Такие многообразия можно считать обобщением гиперкэлеровых, которое получается в результате отбрасывания требования, что ковариантная производная сохраняет метрику. Гиперкомплексные группы были открыты и классифицированы в работах [105] и [79]. Один из наиболее интересных малоразмерных примеров – это группа $G = U(2) = S^1 \times S^3$, к рассмотрению которой мы переходим. Мы покажем, что левоинвариантные комплексные структуры на $U(2)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с комплексными структурами на $\mathbb{R}^4$. Начнем с последних.

7.3 Модель с таргет-пространством $S^1 \times S^3$

7.3.1 Комплексные структуры на $\mathbb{R}^4$

Комплексная структура на $\mathbb{R}^4$ – это оператор $\mathscr{J} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, удовлетворяющий условию

$$\mathscr{J}^2 = -\mathbb{1}_4. \tag{7.3.48}$$

Ортогональная комплексная структура должна также быть совместной с евклидовой метрикой на $\mathbb{R}^4$, т.е. $\mathscr{J}^t \mathscr{J} = \mathbb{1}_4$. Из (7.3.48) следует, что $\mathscr{J}^t = -\mathscr{J}$. Поэтому пространство ортогональных комплексных структур на $\mathbb{R}^4$ – это пространство кососимметричных матриц размера 4×4, удовлетворяющих условию (7.3.48).

Из (7.3.48) следует, что $\det \mathscr{J} = \pm 1$. Так как детерминант вещественной кососимметричной 4×4-матрицы неотрицателен, $\det \mathscr{J} = 1$. В пространстве $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ кососимметричных матриц можно определить оператор дуальности $*$ обычным способом:

$$* : \quad \bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \to \bigwedge^2 \mathbb{R}^4, \quad (*\mathscr{J})_{ab} := \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\mathscr{J}_{cd}\,. \tag{7.3.49}$$

Он задает инволюцию, т.е. $*^2 = 1$. Теперь мы докажем, что ортогональная комплексная структура с необходимостью само- или анти-само-дуальна: $*\mathscr{J} = \pm\mathscr{J}$, в зависимости от значения пфаффиана[3] $\mathrm{Pf}(\mathscr{J}) = \pm 1$. Для этого рассмотрим величину

$$\mathrm{tr}\,(\mathscr{J} \mp *\mathscr{J})^2 = \mathrm{tr}\,\mathscr{J}^2 + \mathrm{tr}\,(*\mathscr{J})^2 \mp 2\,\mathrm{tr}\,(\mathscr{J} * \mathscr{J}) \tag{7.3.50}$$

Легко показать, что $\mathrm{tr}\,(*\mathscr{J})^2 = \mathrm{tr}\,(\mathscr{J}^2) = -4$ и $\mathrm{tr}\,(\mathscr{J} * \mathscr{J}) = -4\mathrm{Pf}(\mathscr{J}) = \mp 4$. Подставляя в формулу выше, будем иметь

$$\mathrm{tr}\,(\mathscr{J} \mp *\mathscr{J})^2 = -4 - 4 + 8 = 0. \tag{7.3.51}$$

[3]Напомним определение пфаффиана: $\mathrm{Pf}(\mathscr{J}) := \frac{1}{8}\,\epsilon_{abcd}\,\mathscr{J}_{ab}\,\mathscr{J}_{cd}$.

В случае кососимметричной матрицы C из условия $\mathrm{tr}\,(C^2) = 0$ следует $C = 0$, поэтому

$$\mathscr{J} = \pm * \mathscr{J} \,. \tag{7.3.52}$$

7.3.2 $S^1 \times S^3$ как гипер-эрмитово многообразие

Выберем базис анти-эрмитовых генераторов алгебры Ли $\mathfrak{u}(2)$, $\sigma_\mu = i\,\{\mathbf{1}, \vec{\sigma}\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Пусть задана комплексная структура $\mathscr{J}$ на $\mathfrak{u}(2) = \mathbb{R}^4$, голоморфное подпространство которой имеет вид

$$\mathfrak{m}_+ = \mathrm{Span}\left((\sigma_+)_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \left(\mathbb{1} - i\,\mathscr{J}\right)_{\mu\nu} \sigma_\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \right) \tag{7.3.53}$$

Интегрируемость этой комплексной структуры неочевидна и нуждается в отдельной проверке. Данная проверка проведена в приложении Б.4. Более того, из приведенного там обсуждения можно получить дополнительную информацию. Определим скалярное произведение $\langle a, b\rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{u}(2)$ следующим образом:

$$\langle a, b\rangle = \mathrm{tr}\,(ab)\,. \tag{7.3.54}$$

Здесь a, b – 2×2 анти-эрмитовы матрица, так же как и матрицы σ_μ выше. Данное скалярное произведение невырожденно и ad-инвариантно – оно служит обобщением скалярного произведения Киллинга (которое в данном случае как раз вырождено). Результаты, полученные в приложении Б.4, можно резюмировать следующим образом:

Лемма 1. Пространство интегрируемых (лево-)инвариантных комплексных структур на $S^1 \times S^3$ совпадает с пространством комплексных структур на $\mathbb{R}^4$. Это пространство $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \sqcup \mathbf{C}\mathrm{P}^1$ – несвязное объединение двух сфер, которые различаются значением пфаффиана $\mathrm{Pf}(\mathscr{J}) = \pm 1$.

Лемма 2. Метрика на $\mathfrak{u}(2)$, определенная в (7.3.54), эрмитова для всех комплексных структур $\mathscr{J}$.

Тем самым мы показали, что многообразие $S^1 \times S^3$ гипер-эрмитово. Это ключевое свойство, которое позволит нам построить деформации модели главного кирального поля группы $S^1 \times S^3$.

7.3.3 Лагранжиан

Пусть $g \in U(2)$ – групповой элемент. Рассмотрим лево-инвариантный ток $J := -g^{-1}dg = J_\mu \sigma_\mu$. Лагранжиан модели имеет вид

$$\mathscr{L} = (J_\mu)_- \, A_{\mu\nu} \, (J_\nu)_+, \qquad A = \mathbb{1} + \eta \, \mathscr{J} \tag{7.3.55}$$

В более инвариантном виде можно записать

$$\mathscr{L} = h(J_-, J_+) + \eta \cdot \omega(J_-, J_+), \tag{7.3.56}$$

где h – введенная ранее метрика на $\mathfrak{u}_2$, а ω – соответствующая кэлерова форма: $\omega = h \circ \mathscr{J}$. Эта форма незамкнута: $d\omega \neq 0$. На самом деле $S^1 \times S^3$ – хорошо известный пример комплексного многообразия, не являющегося кэлеровым. Обычно приводится такой аргумент. Если бы оно было кэлеровым, на нем существовала бы невырожденная два-форма $\Omega : d\Omega = 0$. Объем был бы пропорционален $\int \Omega \wedge \Omega$. Однако группа вторых когомологий $S^1 \times S^3$ тривиальна: $H^2(S^1 \times S^3, \mathbb{R}) = 0$, поэтому $\Omega = du$, откуда следует, что объем равен нулю: $\int \Omega \wedge \Omega = \int d(u \wedge \Omega) = 0$. Форма деформированного лагранжиана (7.3.56) весьма общая: если мы выбираем комплексную структуру $\mathscr{J}$ в качестве R-матрицы, то в результате получается деформация модели главного кирального поля, заключающаяся в добавлении к лагранжиану слагаемого, пропорционального ограничению на мировую поверхность соответствующей кэлеровой формы на групповом таргет-пространстве.

Конфигурационное пространство модели – группа $U(2)$, т.е. однородное пространство. Более того, лагранжиан инвариантен относительно действия группы $U(2)$ на себя. Вследствие этого уравнения движения эквивалентны сохранению соответствующего нетеровского тока $\mathcal{K}$:

$$\partial_+ \mathcal{K}_- + \partial_- \mathcal{K}_+ = 0 \tag{7.3.57}$$

Имеется следующее выражение для тока:

$$\mathcal{K}_+ = g \sigma_\mu g^{-1} \, A_{\mu\nu} \, (J_\nu)_+ \tag{7.3.58}$$

$$\mathcal{K}_- = g \sigma_\mu g^{-1} \, A^t_{\mu\nu} \, (J_\nu)_- \tag{7.3.59}$$

Вводя проекторы $P_{\mathfrak{m}_\pm} = \frac{\mathbb{1} \mp i \mathscr{J}}{2}$ на $\mathfrak{m}_\pm$ (такие как тот, который фигурирует в формуле (7.3.53)), можно записать матрицу A так:

$$A = (1 + i\,\eta) \, P_{\mathfrak{m}_+} + (1 - i\,\eta) \, P_{\mathfrak{m}_-} \tag{7.3.60}$$

Подставляя данное выражение в компоненты тока, получим

$$\mathcal{K}_+ = -g \left((1 - i\,\eta) \, (J_+)_{\mathfrak{m}_+} + (1 + i\,\eta) \, (J_+)_{\mathfrak{m}_-} \right) g^{-1} \tag{7.3.61}$$

$$\mathcal{K}_- = -g \left((1 + i\,\eta) \, (J_-)_{\mathfrak{m}_+} + (1 - i\,\eta) \, (J_-)_{\mathfrak{m}_-} \right) g^{-1} \tag{7.3.62}$$

Эта модель – одна из целого класса моделей, которые обсуждались в разделе 7.1 и которые получаются, если взять в качестве R-матрицы комплексную структуру $\mathscr{J}$. Следовательно, нетеровский ток плоский, и с его помощью можно построить однопараметрическое семейство плоских связностей.

Для определенности будем считать, что $*\mathscr{J} = -\mathscr{J}$, и параметризуем комплексную структуру $\mathscr{J}$ единичным вектором $\vec{n}$:

$$\mathscr{J} = \begin{pmatrix} 0 & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ n_1 & 0 & n_3 & -n_2 \\ n_2 & -n_3 & 0 & n_1 \\ n_3 & n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.3.63}$$

Лагранжиан можно теперь выписать в явном виде:

$$\mathscr{L} = (J_0)_+ (J_0)_- + \eta\,(J_0)_-(\vec{n}\cdot\vec{J})_+ - \eta\,(J_0)_+(\vec{n}\cdot\vec{J})_- + \vec{J}_+\cdot\vec{J}_- + \eta\,\epsilon_{ijk}(J_i)_+(J_j)_-\,n_k \tag{7.3.64}$$

Последний член является на самом деле полной производной: $\epsilon_{ijk}(J_i)\wedge(J_j)\,n_k \propto d(n_k J_k)$. Для наших целей он несуществен, поэтому опустим его. Предел $\eta \to i$ данной модели был изучен в работе [7].

T-дуальность.

Обозначим за φ угол на окружности S^1. Тогда $J_0 = d\varphi$. Выполним в описанной только что модели преобразование T-дуальности вдоль направления φ. Для этого вспомним, что метрика на таргет-пространстве модели (7.3.64) представима в виде простой суммы двух независимых метрик $ds^2 = d\varphi^2 + \widetilde{ds^2}_{S^3}$. Что касается B-поля, то оно с точностью до полной производной, которую мы уже отбросили, имеет вид $B = \eta\,d\varphi\wedge\vec{n}\vec{J}$. Согласно правилам Бушера [39], дуальная модель будет иметь нулевое B-поле и метрику

$$(ds^2)^\vee = (d\widetilde{\varphi} - \eta\,\vec{n}\vec{J})^2 + \widetilde{ds^2}_{S^3} \tag{7.3.65}$$

Метрику на S^3 можно записать в виде метрики расслоения Хопфа:
$\widetilde{ds^2}_{S^3} = \vec{J}\cdot\vec{J} = \vec{J}\cdot(1-\vec{n}\otimes\vec{n})\cdot\vec{J} + (\vec{n}\vec{J})^2$. Направление слоя указывает вектор $\vec{n}$. Если обозначить ψ угловую переменную вдоль слоя расслоения Хопфа, то можно записать $\vec{n}\vec{J} = d\psi - A$, где A – связность в расслоении Хопфа над S^2. После линейной замены переменных дуальная метрика принимает вид

$$(ds^2)^\vee = \eta^2\,(d\widehat{\varphi} - A)^2 + (d\psi - A)^2 + (ds^2)_{S^2} \tag{7.3.66}$$

Ясно, что многообразие представляет собой тотальное пространство $S^1\times S^1$-расслоения над S^2.

Механическая редукция.

Перейдем от конусных переменных $x^{\pm}$ к обычным координатам на мировой поверхности (σ, τ) согласно стандартным формулам $x^{\pm} = \sigma \pm \tau$. Естественная механическая редукция системы (7.3.64) получается в результате замены

$$\varphi = \sigma + \tilde{\varphi}(\tau), \qquad (\vec{J})_\tau = (\vec{J})_\tau(\tau), \qquad (\vec{J})_\sigma = 0 \tag{7.3.67}$$

Последнее выражение означает, что углы на S^3 не зависят от σ. Легко убедиться, что данная редукция является согласованной – в результате нее получается механическая система, описываемая лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + (\vec{J})_\tau^2\right) - \eta\,(\vec{n}\vec{J})_\tau\,. \tag{7.3.68}$$

Данный лагранжиан описывает движение нерелятивистской частицы по $S^1 \times S^3$, взаимодействующей с электромагнитным полем на S^3. Электромагнитный потенциал равен $A = \eta\,\vec{n}\vec{J}$. Движение по S^1 полностью отщепляется от движения по S^3. Ясно, что система интегрируема, так как имеются четыре степени свободы и четыре коммутирующие сохраняющиеся величины: энергия, импульс в направлении φ и два импульса на трехмерной сфере (один из них соответствует левым $U(1)$-вращениям, а второй – правому $U(1)$-вращению, оставляющему вектор $\vec{n}$ неподвижным).

Элементарная механическая редукция T-дуальной модели, описывает свободное движение (движение по геодезической) на многообразии с метрикой (7.3.66).

7.4 Модель с таргет-пространством $AdS_3 \times S^3 \times S^1$

В данном разделе мы рассмотрим применение описанной общей теории в контексте AdS/CFT. В последние годы активно исследовались σ-модели типа Грина-Шварца с таргет-пространствами $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times S^1$ и $AdS_3 \times S^3 \times (S^1)^4$ [90], [33]. Вторую модель можно считать определенным пределом первой, когда радиус одной из сфер обращается в бесконечность. Для простоты будем рассматривать случай $AdS_3 \times S^3 \times (S^1)^4$. После полной фиксации κ-калибровки таргет-пространство σ-модели Грина-Шварца можно рассматривать как прямое произведение $(S^1)^4$ и однородного пространства

$$\mathcal{M}_0 = \frac{G_0 \times G_0}{H_0}, \qquad G_0 = PSU(1,1|2), \;\; H_0 = SU(1,1) \times SU(2)\,, \tag{7.4.69}$$

бозонная часть которого есть $AdS_3 \times S^3$. Так как мы бы хотели рассмотреть случай, когда пространства S^3 и S^1 ‘переплетаются’ посредством комплексной структуры, нас будет

интересовать многообразие

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times S^1 = \frac{G \times G}{H}, \qquad G = G_0 \times U(1), \;\; H = H_0 \times U(1)\,. \tag{7.4.70}$$

Остальные три периодических бозона не принимают непосредственного участия в дальнейшем построении. Начнем с доказательства леммы:

Лемма 3. Любую R-матрицу, заданную на бозонной подалгебре $\widehat{\mathfrak{b}}$ алгебры $su(m_1, m_2|n_1, n_2) \oplus u(1)$, удовлетворяющую уравнению Нийенхейса (7.1.2) ($N = 0$) и условию $R^3 = -R$, можно поднять на всю алгебру.

Доказательство. Структура алгебры $sl(m|n)$ такова: $sl(m|n) = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{f}_1 \oplus \mathfrak{f}_2$, где $\mathfrak{b}$ – бозонная подалгебра, и $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ – два фермионных $\mathfrak{b}$-модуля. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{gathered} [\mathfrak{b}, \mathfrak{f}_1] \subset \mathfrak{f}_1, \qquad [\mathfrak{b}, \mathfrak{f}_2] \subset \mathfrak{f}_2, \\ [\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_1] = 0, \qquad [\mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_2] = 0, \qquad [\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2] \subset \mathfrak{b} \end{gathered} \tag{7.4.71}$$

На языке работы Каца [80] можно сказать, что супералгебра $sl(m|n)$ $\mathbb{Z}$-градуирована, при этом $sl(m|n)_0 = \mathfrak{b}$, $sl(m|n)_1 = \mathfrak{f}_1$, $sl(m|n)_{-1} = \mathfrak{f}_2$ и $sl(m|n)_i = 0$ при $|i| > 1$. Коммутационные соотношения становятся особенно прозрачными, если вспомнить 'определяющее' представление алгебры в терминах $(m+n) \times (m+n)$ матриц: $sl(m|n) = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{b} & \mathfrak{f}_1 \\ \hline \mathfrak{f}_2 & \mathfrak{b} \end{array}\right)$. Дополнительная подалгебра $u(1)$ коммутирует со всем остальным.

Пусть теперь на бозонном подпространстве $\widehat{\mathfrak{b}} := \mathfrak{b} \oplus u(1)$ задан линейный оператор R, удовлетворяющий уравнению (7.1.2). Постулируем, что

$$R\big|_{\mathfrak{f}_1} = i\,\mathbb{1}, \qquad R\big|_{\mathfrak{f}_2} = -i\,\mathbb{1}\,. \tag{7.4.72}$$

Несложно убедиться, что коммутационные соотношения (7.2.31) по-прежнему удовлетворяются. Действительно, $\mathfrak{m}_0 \subset \widehat{\mathfrak{b}}$, следовательно, $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{f}_{1,2}] \subset \mathfrak{f}_{1,2}$. Кроме того, $\mathfrak{m}_+ = (\mathfrak{m}_+)_{\widehat{\mathfrak{b}}} \oplus \mathfrak{f}_1$. С другой стороны, мы знаем, что $[(\mathfrak{m}_+)_{\widehat{\mathfrak{b}}}, \mathfrak{f}_1] \subset \mathfrak{f}_1$ и $[\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_1] = 0$, вследствие чего $[\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_+] \subset \mathfrak{m}_+$. Обратим внимание, что доказательство опирается на тот факт, что коммутационные соотношения (7.2.31) не накладывают никаких условий на коммутатор $[\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_-]$, который является единственным нетривиальным коммутатором для фермионов ($[\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2]$).

В случае вещественной формы $su(m_1, m_2|n_1, n_2)$ фермионы $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ комплексно сопряжены друг другу: $\mathfrak{f}_2 = {}^*(\mathfrak{f}_1)$, поэтому определение (7.4.72) совместно с этой вещественной формой. (Используя нашу старую терминологию, можно сказать, что R коммутирует с комплексным сопряжением: $R^* = {}^*R$.) ■

Из доказательства ясно, что утверждение леммы также остается справедливым, если

заменить $su(m_1, m_2|n_1, n_2)$ на $psu(m_1, m_2|n_1, n_2)$ при условии $m_1 + m_2 = n_1 + n_2$ (коммутационные соотношения (7.4.71) не меняются).

7.4.1 Наш выбор R.

Согласно доказанной лемме достаточно выбрать действие R на бозонной подалгебре $su(1,1) \oplus su(2) \oplus u(1)$. Во-первых, потребуем, чтобы R действовала как комплексная структура на $su(2) \oplus u(1)$:

$$R\big|_{su(2)\oplus u(1)} = \mathscr{J}(\vec{n}) \tag{7.4.73}$$

Как следует из обозначений, комплексная структура зависит от единичного вектора $\vec{n}$. Кроме того, мы выберем стандартное действие R на $su(1,1)$ [76]. В качестве генераторов алгебры $su(1,1)$ в базисе с вещественными структурными константами можно взять $\sigma_1, \sigma_2, i\sigma_3$. (Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – матрицы Паули.) Тогда по определению

$$R(\sigma_1 \pm i\sigma_2) = \pm i\,(\sigma_1 \pm i\sigma_2), \quad R(i\sigma_3) = 0. \tag{7.4.74}$$

Ясно, что R коммутирует с комплексным сопряжением.

До сих пор мы обсуждали действие R-матрицы на одной копии алгебры $psu(1,1|2) \oplus u(1)$. Многообразие $\mathcal{M}$ содержит также в своем определении (7.4.70) как фактор-пространства еще одну копию $PSU(1,1|2) \times U(1)$. Как было показано в разделе 7.1.2, это позволяет в принципе сделать еще одну деформацию при помощи R-матрицы, действующей на эту вторую копию алгебры. Эта возможность была подробно разобрана в работе [76], где было показано, что подобная двупараметрическая деформация приводит к сингулярностям в AdS-части пространства. Такого рода сингулярность является неминуемой при деформации пространств AdS больших размерностей, как например в случае пространства $AdS_5 \times S^5$ [26; 56]. Что касается многообразия $AdS_3 \times S^3 \times S^1$, это единственный случай, при котором можно получить несингулярное пространство после деформации, однако для этого в точности требуется положить второй параметр деформации равным нулю [76]. Так как данный сценарий явно предпочтительнее, мы всюду в дальнейшем будем полагать деформацию однопараметрической. Это приводит в частности к сохранению остаточной $PSU(1,1|2) \times U(1)$ симметрии.

7.4.2 Бозонная часть деформированного пространства.

Хотя бозонная часть таргет-пространства – это групповое многообразие $SL(2,\mathbb{R}) \times SU(2) \times U(1)$, полное таргет-пространство $\mathcal{M}$, включающее также фермионные направления, уже таковым не является. Однако оно является однородным пространством специального вида – алгебра Ли $psu(1,1|2) \oplus u(1) \oplus psu(1,1|2) \oplus u(1)$ его группы супер-изометрий является $\mathbb{Z}_4$-градуированной, а компонента градуировка нуль есть $su(1,1) \oplus su(2) \oplus u(1)$. Действие автоморфизма Ω на этой алгебре Ли, порождающего градуированную структуру (т.е. $\Omega^4 = 1$),

определяется следующим образом:

$$\Omega(a,b) = (b, (-1)^F a), \qquad a \in psu(1,1|2) \oplus u(1), \quad b \in psu(1,1|2) \oplus u(1)\,. \tag{7.4.75}$$

Здесь F – оператор фермионного числа, т.е. $(-1)^F$ равен 1 на бозонном элементе алгебры и -1 на фермионном элементе. Важное свойство, из которого следует, что Ω – гомоморфизм алгебр Ли, состоит в том, что $(-1)^F[a_1, a_2] = [(-1)^F a_1, (-1)^F a_2]$. Определение (7.4.75) является фермионным обобщением $\mathbb{Z}_2$-градуировки, характерной для симметрических пространств. Действительно, бозонная часть таргет-пространства – групповое многообразие $G = SL(2,\mathbb{R}) \times SU(2) \times U(1)$ – можно представить как симметрическое пространство: $G = \frac{G \times G}{G_{diag}}$. $\mathbb{Z}_2$-градуировка на алгебре Ли $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ порождена перестановкой: $\Omega(a,b) = (b,a)$, т.е. это в точности ограничение вышеописанного оператора Ω на бозонный сектор.

Так как таргет-пространство не является групповым многообразием и даже не симметрическим пространством, подход, описанный в разделе 7.1, неприменим напрямую. Однако для случая моделей типа Грина-Шварца на $\mathbb{Z}_4$-градуированных пространствах существует подходящее обобщение [56] [76]. Мы не будем вдаваться в подробности того, как строится это обобщение, и отсылаем интересующегося читателя к соответствующим оригинальным работам. Для нас важно лишь, что подобные обобщения существуют, позволяя включить фермионы в наши общие построения. Будем пока рассматривать бозонную часть пространства. Пусть $g \in PSU(1,1|2) \times U(1)$ – групповой элемент, тогда ток имеет вид

$$J := -g^{-1}dg = \sum_{a=1}^{3} (M)_a\, \lambda^a + \sum_{\mu=0}^{3} (S)_\mu\, \sigma^\mu + \tag{7.4.76}$$

$$+ \sum (\text{фермионные генераторы}), \tag{7.4.77}$$

где $\lambda^1 = \sigma^1, \lambda^2 = \sigma^2, \lambda^3 = i\sigma^3$ – генераторы $su(1,1)$, а $\{\sigma^\mu\} = i\{\mathbb{1}, \vec{\sigma}\}$, как и раньше, – генераторы $u(1) \oplus su(2)$. В этом случае бозонная часть действия совпадает с (7.1.3) и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathscr{S} = \int d^2x\, \big(&-(1+\eta^2)\,(M_3)_+(M_3)_- + (M_1)_+(M_1)_- + (M_2)_+(M_2)_- + \\ &+ 2\eta\,((M_2)_-(M_1)_+ - (M_2)_+(M_1)_-) + (S_\mu)_+\,(\mathbb{1} - \eta\,\mathscr{J})_{\mu\nu}\,(S_\nu)_-\big)\,. \end{aligned} \tag{7.4.78}$$

Ввиду плоскости тока J получим $dM_3 \propto M_1 \wedge M_2$, поэтому первые два члена во второй строке дают топологический вклад в действие. От него классическая интегрируемость модели никак не зависит. Таким образом, мы получили таргет-пространство с метрикой

$$ds^2 = -(1+\eta^2)M_3^2 + M_1^2 + M_2^2 + \sum_{\mu=0}^{3} S_\mu S_\mu, \tag{7.4.79}$$

т.е. получилось произведение 'сплюснутого пространства AdS' и пространства $S^1 \times S^3$ с

недеформированной метрикой. Однако на $S^1 \times S^3$ имеется ненулевое B-поле:

$$B = \eta \, \mathscr{J}_{\mu\nu} S_\mu \wedge S_\nu \, . \tag{7.4.80}$$

Проанализируем эффеты, связанные со 'сплющиванием' пространства AdS (Данная метрика была подробно проанализирована в [102]. Наш параметр η связан с аналогичным параметром μ из этой статьи формулой $\mu = \sqrt{1+\eta^2}$). Эти эффекты оказываются гораздо менее безобидными, чем может показаться на первый взгляд. В подходящих координатах (см. приложение Б.5) сплюснутая метрика принимает вид

$$ds^2 = -d\tau^2 + d\rho^2 + d\psi^2 \, (\mathrm{sh}^2\rho - \eta^2 \mathrm{sh}^4\rho) - 2\sqrt{1+\eta^2}\, \mathrm{sh}^2\rho \, d\psi \, d\tau \tag{7.4.81}$$

Для того чтобы отсутствовала особенность при $\rho \to 0$, нужно, чтобы ψ была угловой координатой с периодом 2π[4]. Кривая, касательный вектор к которой есть $\frac{\partial}{\partial\psi}$, т.е. кривая, которая получается, если зафиксировать ρ и τ, обладает индуцированной метрикой $(ds^2)_{\text{кривая}} = d\psi^2 \, (\mathrm{sh}^2\rho - \eta^2 \mathrm{sh}^4\rho)$, которая при достаточно больших ρ становится времениподобной. Отсюда следует существование замкнутых времениподобных кривых. При $\eta = 1$ данная метрика становится метрикой Гёделя [70], для которой данное патологическое свойство хорошо известно. Один из способов, как можно избежать появления времениподобных кривых, состоит в том, чтобы рассматривать лишь чисто мнимые значения η, однако в этом случае B-поле (7.4.80) также станет мнимым.

7.5 m-симметрические пространства

Ранее в настоящей Главе уже упоминались модели с $\mathbb{Z}_m$-градуированными таргет-пространствами, для уравнений движения которых существуют представления нулевой кривизны. Перейдем к описанию этих моделей[5].

Классическая интегрируемость давно установлена для случая симметрических таргет-пространств [60]. Одно из определений симметрического пространства G/H связано с наличием $\mathbb{Z}_2$-градуировки на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Если ввести разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, можно определить $\mathbb{Z}_2$-градуировку компонент следующим образом: $\deg(\mathfrak{h}) = 0$, $\deg(\mathfrak{m}) = 1$. В этом случае коммутационные соотношения, характеризующие симметрическое пространство, возникают автоматически:

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \qquad \text{(Подалгебра)} \tag{7.5.82}$$

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \qquad \text{(Редуктивность)} \tag{7.5.83}$$

[4]Заметим, что перекрестный член $2\sqrt{1+\eta^2}\,\mathrm{sh}^2\rho \, d\psi \, d\tau$ в этом случае также является гладким, так как $\rho^2 \, d\psi = x dy - y dx$ при $\rho \to 0$, где (x, y) – декартовы координаты, связанные с полярными координатами (ρ, ψ) обычным образом.

[5]Возникновение $\mathbb{Z}_m$-градуировок алгебр Ли в теории классических интегрируемых систем, в особенности в теории цепочки Тоды, обсуждается также в книге [73].

$$[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{h},\qquad\text{(Симметрическое пространство)}\tag{7.5.84}$$

Аналогичным образом можно определить градуировки при помощи других циклических групп $\mathbb{Z}_m$. По определению такая градуировка означает наличие следующего разложения:

$$\mathfrak{g}=\oplus_{i=0}^{m-1}\mathfrak{g}_i,\qquad[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j]\subset\mathfrak{g}_{i+j\bmod m}\ .\tag{7.5.85}$$

Обозначим за H группу Ли, отвечающую подалгебре $\mathfrak{g}_0$. Фактор-пространство G/H называется в этом случае m-симметрическим пространством. В этих терминах обычные симметрические пространства – это 2-симметрические пространства. Можно показать, что, по аналогии с тем, что имеет место для симметрических пространств, уравнения движения специальных σ-моделей с таргет-пространствами G/H можно переписать в виде условия нулевой кривизны однопараметрического семейства связностей. Например, $\mathbb{Z}_4$-градуировка на супералгебре Ли $\mathfrak{psu}(2,2|4)$ использовалась для доказательства интегрируемости σ-модели Грина-Шварца с таргет-пространством $\mathrm{Super}(AdS_5\times S^5)=\frac{PSU(2,2|4)}{SO(1,4)\times SO(5)}$ [27; 35]. В этом случае, однако, метрика на таргет-пространстве не является киллинговой[6], поэтому данная модель не попадает в тот класс, который мы анализируем в настоящей статье.

Модели, рассмотренные в [117], ближе к нашим. Действие этих моделей [117] таково:

$$\widetilde{\mathcal{S}}:=\int_\Sigma d^2x\,\|\partial X\|_G^2+\int_\Sigma X^*\widetilde{\omega},\tag{7.5.86}$$

где $\widetilde{\omega}$ – 2-форма, построенная при помощи $\mathbb{Z}_m$-разложения алгебры Ли (7.5.85). Заметим, что если бы $\widetilde{\omega}$ была кэлеровой формой, то мы бы получили в точности действие (7.1.3). Перейдем теперь к точному определению формы $\widetilde{\omega}$. Разложим ток $J=-g^{-1}dg$ в соответствии с (7.5.85):

$$J=-g^{-1}dg=\sum_{i=0}^{m-1}J^{(i)},\qquad\text{где}\quad J^{(i)}\in\mathfrak{g}_i\ .\tag{7.5.87}$$

Форма $\widetilde{\omega}$ определяется следующим образом:

$$\widetilde{\omega}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(m-k)-k}{m}\,\mathrm{tr}\,(J^{(k)}\wedge J^{(m-k)})\tag{7.5.88}$$

В связи с этой формулой возникает следущий важный вопрос. Из (7.5.88) видно, что форма $\widetilde{\omega}$ зависит от выбора $\mathbb{Z}_m$-градуировки. Как правило, заданная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает много разных градуировок (с различными либо с одинаковыми значениями m). Вопрос состоит в следующем: различны ли модели, определенные формулами (7.5.86)-(7.5.88), при выборе различных градуировок на $\mathfrak{g}$?

Прежде чем ответить на этот вопрос, вспомним, каким образом строятся циклические градуировки на полупростых алгебрах Ли [80]. Будем для простоты рассматривать случай

[6]Эта метрика, например, вырождена в фермионных направлениях.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(N+1)$. Циклическая градуировка может быть построена следующим образом[7]: необходимо выбрать систему из N простых положительных корней $\alpha_1, \dots \alpha_N$, а также максимальный отрицательный корень $\alpha_{N+1} = -\alpha_1 - \dots - \alpha_N$[8]. Этим $N+1$ корням присваивают произвольные (неотрицательные целые) градуировки $m_1, \dots m_N, m_{N+1}$. Тогда градуировки всех остальных корней определяются структурой алгебры Ли, а значение m вычисляется по формуле

$$m = m_1 + \dots + m_{N+1}\,. \tag{7.5.89}$$

Если использовать обычную матричную запись, эта градуировка выглядит таким образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{m_1} & & & \\ & 0 & \mathbf{m_2} & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & 0 & \mathbf{m_N} \\ & & & & 0 \\ \mathbf{m_{N+1}} & & & & \end{pmatrix} \tag{7.5.90}$$

Подалгебра $\mathfrak{g}_0$, отвечающая знаменателю H фактор-пространства G/H, определяется теми m_i, которые равны нулю. Например, если все $m_i > 0$, то результирующее пространство – это многообразие полных флагов $\frac{SU(N+1)}{S(U(1)^{N+1})}$.

В общем случае при определенном выборе целых чисел $m_1, \dots, m_{N+1}$ некоторые из подпространств $\mathfrak{g}_i$ будут тождественно равны нулю. Поэтому естественное ограничение состоит в том, чтобы потребовать $\mathfrak{g}_i \neq 0$ для всех $i \pmod m$. Назовем такую градуировку *допустимой*. При этом все равно остается большое количество возможностей. Например, в случае $SU(3)$ полный набор допустимых градуировок дается следующим списком (с точностью до

[7]Здесь мы ограничимся градуировкой типа $A_N^{(1)}$.

[8]В статье Каца [80] корни $\alpha_1, \dots \alpha_{N+1}$ рассматриваются как положительные простые корни соответствующей аффинной алгебры Ли $\widehat{A}_N$. Рассмотрим случай $N = 2$. Простые положительные корни петлевой алгебры $\mathfrak{su}_3(t, t^{-1})$ можно выбрать таким образом:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_0 = t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данном контексте последний корень α_0 – аналог α_{N+1} – обычно называют ‘мнимым’. Вообще говоря, вся теория циклических градуировок алгебр Ли формулируется Кацем естественным образом в терминах аффинных алгебр Ли и их диаграмм Дынкина.

действия группы Вейля S_3):

$$\mathbb{Z}_2: \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Z}_3: \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 2 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.5.91}$$

$$\mathbb{Z}_4: \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 3 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Z}_5: \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 4 & 0 & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 4 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & 4 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.5.92}$$

$$\mathbb{Z}_6: \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 5 & 0 & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Z}_7: \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 6 & 0 & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & 5 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.5.93}$$

$\mathbb{Z}_2$-градуировка и вторая $\mathbb{Z}_3$-градуировка отвечают однородному пространству $SU(3)/S(U(2)\times U(1)) = \mathbf{C}\mathrm{P}^2$, а все остальные градуировки соответствуют пространству флагов $\mathcal{F}_3$.

Теперь мы готовы дать ответ на поставленный ранее вопрос: какова связь между σ-моделями с действием (7.5.86), если выбраны различные градуировки на соответствующей алгебре Ли? Наше утверждение состоит в следующем:

- По крайней мере для случая однородных пространств унитарной группы модели, определенные формулами (7.5.86)-(7.5.88) при выборе различных градуировок типа $A_N^{(1)}$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ классически эквивалентны моделям, заданным действием (4.1.1) при соответствующем выборе комплексной структуры на таргет-пространстве

Доказательство. Интегрируемая комплексная структура на пространстве флагов определяется выбором множества положительных корней [22]. Для простоты выберем множество верхне-треугольных матриц (Все остальные варианты можно получить при помощи действия группы Вейля, то есть действием перестановки). Обозначим верхне- и нижне-треугольные компоненты токов $J^{(k)}$ за $(J^{(k)})_\pm$. При $k\neq 0$ будем иметь $J^{(k)} = (J^{(k)})_+ + (J^{(k)})_-$. Ясно, что $\mathrm{tr}\,((J^{(k_1)})_+ \wedge (J^{(k_2)})_+) = \mathrm{tr}\,((J^{(k_1)})_- \wedge (J^{(k_2)})_-) = 0$, поэтому форму (7.5.88) можно записать в виде

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m-k)-k}{m} \left(\mathrm{tr}\,(J_+^{(k)} \wedge J_-^{(m-k)}) + \mathrm{tr}\,(J_-^{(k)} \wedge J_+^{(m-k)})\right) = \tag{7.5.94}$$

$$= \text{заменяя } k\to m-k \text{ во втором члене} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m-k)-k}{m}\,\mathrm{tr}\,(J_+^{(k)} \wedge J_-^{(m-k)})$$

Суммирование по k, т.е. по внедиагональным подпространствам алгебры $\mathfrak{su}(N+1)$, можно заменить суммированием по положительным корням $\alpha_{ij}, i<j$:

$$\tilde{\omega} = \sum_{i<j} \frac{(m-k_{ij})-k_{ij}}{m}\, J_{ij}\wedge J_{ji}, \tag{7.5.95}$$

где k_{ij} – градуировка корня α_{ij}. Эта градуировка определяется множеством целых чисел $m_1, \ldots, m_{N+1}$, введенных ранее в (7.5.90). Разрешим условие (7.5.89) следующим образом[9]:

$$m_k = n_k - n_{k+1} \tag{7.5.96}$$

где n_k – целые числа, и $n_{N+2} \equiv n_1 - m$. Простое вычисление показывает, что градуировка k_{ij} имеет вид

$$k_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} m_k = n_i - n_j\,, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant N\,. \tag{7.5.97}$$

Подставляя данное выражение в (7.5.95), получим

$$\tilde{\omega} = \sum_{i<j} J_{ij} \wedge J_{ji} - \sum_{i,j} \frac{n_i - n_j}{m}\, J_{ij} \wedge J_{ji}\,. \tag{7.5.98}$$

Во втором члене мы воспользовались антисимметрией коэффициента $\frac{n_i - n_j}{m}$, чтобы избавиться при суммировании от условия $i < j$. Второй член можно переписать в таком виде:

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{n_i - n_j}{m}\, J_{ij} \wedge J_{ji} = 2 \sum_{i,j=1}^{N} \frac{n_i}{m}\, J_{ij} \wedge J_{ji} = 2 \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{m}\, (J \wedge J)_{ii} = 2 \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{m}\, dJ_{ii} \tag{7.5.99}$$

В последнем равенстве мы учли, что ток (7.5.87) плоский: $dJ - J \wedge J = 0$. Важно заметить, что правая часть данного выражения представляет собой замкнутую, но не точную форму, так как величины J_{ii} являются не 1-формами на пространстве флагов, а связностями в определенных линейных расслоениях над ним (Другими словами, при преобразованиях из знаменателя H фактор-пространства G/H они меняются 'неоднородным образом': $J_{ii} \to J_{ii} + d\alpha_i$).

Заметим, что первое слагаемое в правой части формулы (7.5.98) – это в точности кэлерова форма киллинговой метрики при выборе комплексной структуры, в которой верхнетреугольные генераторы алгебры Ли голоморфны: $\omega = \sum\limits_{i<j} J_{ij} \wedge J_{ji}$. Окончательно перепишем (7.5.98) в виде

$$\tilde{\omega} = \omega - 2 \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{m}\, dJ_{ii} \tag{7.5.100}$$

Доказательство завершено. Действительно, мы показали, что, независимо от выбора градуировки (которая теперь параметризована целыми числами n_i), форма $\tilde{\omega}$ отличается от кэлеровой формы на топологический член. Ясно, что этот топологический член зависит от выбранной градуировки, однако он не дает вклад в уравнения движения. ■

[9]Из формулы (7.5.96) следует, что циклический автоморфизм $\widehat{\Omega}$ алгебры Ли, определяющий $\mathbb{Z}_m$-градуировку, может быть представлен в следующем виде: $\widehat{\Omega}(a) = \Omega a \Omega^{-1}$, где $\Omega = \mathrm{diag}(e^{2\pi i \frac{n_1}{m}}, \ldots, e^{2\pi i \frac{n_{N+1}}{m}})$.

7.6 Обсуждение

Основной целью настоящей Главы было установление связи между σ-моделями с комплексными однородными таргет-пространствами, о которых шла речь в предыдущих главах, и так называемыми η-деформациями σ-моделей, которые были введены в работе [84] и в последние годы нашли применение в теории суперструнных σ-моделей пространства $AdS_5 \times S^5$ и связанных с ним пространств [26; 56].

Сформулируем еще раз, в чем состоят основные сходства и различия этих моделей. Модели, обсуждавшиеся в предыдущих главах, допускают произвольные комплексные однородные таргет-пространства и не содержат свободных параметров (необходимо задать лишь комплексную структуру и общий масштаб метрики). Действия данных моделей совпадают с действием так называемых 'топологических σ-моделей' Виттена [113], поэтому эти модели наследуют все основные черты последних, такие как зависимость лагранжиана от комплексной структуры на таргет-пространстве[10]. Что касается η-деформированных моделей, то, как следует из названия, они являются непрерывными деформациями стандартных σ-моделей с симметрическими таргет-просранствами. Параметр деформации обычно называют $\eta \in \mathbb{C}$. В то время как значение этого параметра характеризует то, насколько сильно деформировано пространство, лагранжиан деформированной модели зависит также от некоторого оператора R, который определяет 'форму' деформации. Для того чтобы деформированная модель оставалась интегрируемой[11], данный оператор должен удовлетворять некоторому уравнению, которое называется в литературе 'классическим модифицированным уравнением Янга-Бакстера'. В настоящей Главе мы особо отметили тот факт, что это уравнение весьма напоминает условие обращения в нуль тензора Нийенхейса, которое в свою очередь является условием интегрируемости почти комплексной структуры. Это и есть ключевой момент, из которого следует, что между двумя классами моделей существует взаимосвязь.

В литературе исследовался наиболее подробно не тот случай, когда R-матрица совпадает с комплексной структурой, а некоторое его обобщение – когда R-матрица удовлетворяет условию $R^3 = -R$. В разделе 7.2.1 было показано, что если деформировать такого рода R-матрицей модель главного кирального поля для группы $SU(N)$, то в пределе $\eta \to \pm i$ возникает σ-модель такого типа, как мы обсуждали ранее, с таргет-пространством $SU(N)/S(U(1)^N)$. Ясно, что этот предел является несколько вырожденным, так как он меняет, например, таргет-пространство модели, однако он, тем не менее, вполне корректно определен. С другой стороны, такого рода предельная процедура дает только таргет-пространства вида G/H с *абелевым* 'знаменателем' H, в то время как изученные нами в предыдущих главах модели допускают и неабелевы H (Вспомним, например, пространства флагов $SU(N)/S(U(n_1) \times U(n_m))$).

В разделах 7.2.1, 7.2.2 мы углубили параллель между R-матрицей и комплексной струк-

[10] Стоит, правда, заметить, что рассматриваемые нами модели являются чисто бозонными и потому, вообще говоря, топологическими не являются.

[11] Здесь речь идет об 'интегрируемости' в слабом смысле, который заключается в том, что уравнения движения допускают представление нулевой кривизны, т.е. для них существует представление Лакса.

турой. На самом деле, если таргет-пространство представлет собой компактную редуктивную группу Ли четной размерности, то на нем всегда можно задать интегрируемую комплексную структуру. Поэтому вместо того чтобы использовать R-матрицу, удовлетворяющую условию $R^3 = -R$, можно взять в качестве R-матрицы в буквальном смысле саму комплексную структуру, удовлетворяющую условию $R^2 = -1$. При таком выборе соответствующая η-деформированная модель является обобщением модели, исследованной в нашей работе [46]. Эту обобщенную модель можно интерпретировать двумя способами. При мнимых значениях параметра η данная модель корректно определена (в том смысле, что действие модели вещественно) только в случае мирового листа с евклидовой сигнатурой – в этом случае она представляет собой интерполяцию между моделью из работы [46] и обычной моделью главного кирального поля (т.е. моделью с нулевым B-полем). При вещественных значениях η модель корректно определена на мировом листе с сигнатурой пространства Минковского и представляет собой унитарную деформацию модели главного кирального поля. В обоих случаях деформация сводится к 'включению' B-поля, пропорционального (незамкнутой) кэлеровой форме на таргет-пространстве.

Возможно, простейший нетривиальный пример возникает в случае таргет-пространства $S^1 \times S^3$. Исследованию этой модели посвящен раздел 7.3. Любопытный факт состоит в том, что пространство $S^1 \times S^3$ также является элементом суперструнных многообразий[12] $AdS_3 \times S^3 \times (S^1)^4$ и $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times S^1$ [90], [33]. В связи с этим возникает естественный вопрос: допускают ли эти модели деформации, индуцированные комплексной структурой? В формальном смысле ответ утвердительный – об этом свидетельствуют результаты работ [56], [76]. Если же проанализировать физические следствия такой деформации, возникает несколько трудностей. Во-первых, для того чтобы данная деформация была допустимой в рамках теории суперструн, деформированное многообразие также должно удовлетворять уравнениям супергравитации. Известно, что по крайней мере в общем случае это не так [25], [116] (В специальных случаях деформированные многообразия могут, однако, по-прежнему удовлетворять уравнениям движения супергравитации [37]). Есть, однако, и более непосредственные трудности: вследствие некомпактности исходного пространства AdS, которое подвергается деформации, деформированное пространство имеет 'голую' сингулярность в тензоре кривизны, которая находится на конечном расстоянии (в смысле собственного времени). В принципе, рассмотренный в настоящей Главе случай пространства AdS_3 мог стать исключением. Так как пространство $AdS_3 \times S^3$ является групповым многообразием, оно допускает двупараметрическое семейство η-деформаций (так называемая 'би-Янг-Бакстерова' деформация [83]). Как было показано в работе [76], в том случае, когда деформация сохраняет левую инвариантность (или правую инвариантность), сингулярность в тензоре кривизны отсутствует. Мы подробно рассмотрели этот случай в разделе 7.4 и обнаружили, однако, что в этом случае на деформированном пространстве возникает обобщенная метрика Гёделя с замкнутыми времениподобными кривыми. Иными словами, самосогласованность η-деформаций многообразий, используемых в теории суперструн, по-прежнему вызывает вопросы, что, однако, не

[12] Т.е. решений уравнений супергравитации

умаляет потенциальную ценность, которую данные деформации представляют для обычных асимптотически свободных σ-моделей.

Приложение A: Кэлеровы структуры на пространстве флагов $\mathcal{F}_3$

В настоящем приложении мы напомним некоторые факты относительно кэлеровых метрик на $\mathcal{F}_3$, т.е. речь пойдет об *интегрируемых* комплексных структурах на $\mathcal{F}_3$. Так как эти структуры переходят друг в друга при перестановке прямых флага, выберем одну из них, отвечающую рассмотренному ранее в Главе 4 случаю $B_{12} = B_{13} = B_{23} = 1$ – это соответствует ситуации, когда $\{J_{12}, J_{13}, J_{23}\}$ – триплет голоморфных один-форм.

Ранее в разделе 4.3.2 мы построили наиболее общую инвариантную метрику на $\mathcal{F}_3$:

$$ds^2 = \sum_{i\neq j} C_{ij}\,|J_{ij}|^2\,, \tag{A.0.101}$$

где константы C_{ij} положительны. В выбранной комплексной структуре метрика (A.0.101) эрмитова, и ей отвечает кэлерова форма

$$\Omega = C_{12}\,J_{12}\wedge J_{21} + C_{13}\,J_{13}\wedge J_{31} + C_{23}\,J_{23}\wedge J_{32}\,. \tag{A.0.102}$$

Метрика кэлерова в том случае, когда форма Ω замкнута, что дает условие

$$C_{12} - C_{13} + C_{23} = 0,$$

которое можно разрешить следующим образом:

$$C_{12} = \lambda_1 - \lambda_2, \quad C_{13} = \lambda_1 - \lambda_3, \quad C_{23} = \lambda_2 - \lambda_3$$

для некоторых констант $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Введем диагональную матрицу $\lambda = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, тогда кэлерова форма (A.0.102) примет вид симплектической формы Кириллова на присоединенной орбите группы $SU(3)$:

$$\Omega = \mathrm{tr}\ (\lambda\, j\wedge j) \quad \text{где} \quad j = -g^{-1}dg\,.$$

Мы видим, что пространство кэлеровых метрик на $\mathcal{F}_3$, заданных с точностью до растяжения, одномерно. Условие эйнштейновости полностью фиксирует оставшийся параметр, поэтому с

точностью до растяжения в кэлер-эйнштейновом случае будем иметь $C_{12} = C_{23} = 1, C_{13} = 2$.

Чтобы построить кэлеровы потенциалы для вышеуказанных метрик, перейдем от унитарного к голоморфному описанию и будем рассматривать пространство флагов $\mathcal{F}_3$ как фактор-пространство $\mathcal{F}_3 = GL(3,\mathbb{C})/B$, где B – борелевская подгруппа верхнетреугольных матриц. Определим невырожденную матрицу

$$U = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & z_1 \\ v_2 & w_2 & z_2 \\ v_3 & w_3 & z_3 \end{pmatrix}, \tag{A.0.103}$$

где v, w, z – три линейно независимых вектора в $\mathbb{C}^3$, параметризующие пространство флагов.

Обозначим за $M_{abc\ldots|mnp\ldots}$ минор, состоящий из строк $abc\ldots$ и столбцов $mnp\ldots$ матрицы U, и запишем кэлеров потенциал в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= C_{12}\,\log\left(\sum_a |M_{a|1}|^2\right) + C_{23}\,\log\left(\sum_{a\neq b} |M_{ab|12}|^2\right) + \\ &+ D\,\log\left(\sum_{a\neq b\neq c} |M_{abc|123}|^2\right) \end{aligned} \tag{A.0.104}$$

с произвольными коэффициентами C_{12}, C_{23}, D. При действии борелевской группы все миноры под знаком каждого из логарифмов умножаются на одну и ту же функцию, что приводит к сдвигу кэлерова потенциала на сумму голоморфной и анти-голоморфной функций. Это построение очевидным образом обобщается на пространство флагов в произвольной размерности. Более того, в рассматриваемом нами случае последнее слагаемое в (A.0.104) на самом деле пропорционально $\log(M_{123|123}) + \log(\overline{M_{123|123}})$, поэтому оно не дает вклад в метрику, и его можно опустить.

Получаем следующий кэлеров потенциал:

$$\mathcal{K} = C_{12}\,\log\|v\|^2 + C_{23}\,\log\left(\|v\|^2\,\|w\|^2 - |v\circ\bar{w}|^2\right). \tag{A.0.105}$$

Постоянные $C_{12} > 0, C_{23} > 0$ произвольны. Кэлеров потенциал калибровочно-инвариантен относительно действия борелевской группы на матрицу (A.0.103) и, следовательно, можно выбрать конкретную калибровку. Например, можно выбрать голоморфную калибровку (что является аналогом перехода к неоднородным координатам в проективном пространстве), однако для того чтобы провести параллель с метрикой, записанной форме (A.0.101), лучше выбрать унитарную калибровку. Это означает, что векторы $v := u_1, w := u_2, z := u_3$ из (A.0.103) следует считать ортонормированными: $u_i \circ \bar{u}_j = \delta_{ij}$. В этом случае метрика, получающаяся из кэлерова потенциала (A.0.105), принимает вид

$$ds^2 = C_{12}\,|j_{12}|^2 + C_{23}\,|j_{23}|^2 + (C_{12} + C_{23})\,|j_{13}|^2$$

Данная метрика эйнштейнова только в случае $C_{12} = C_{23}$.

A.1 Нормальное расслоение к слою проекции $\mathcal{F}_3 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$

Ранее неоднократно упоминался и использовался тот факт, что существует (забывающее) расслоение $\pi : \mathcal{F}_3 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$ со слоем $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Если использовать параметризацию (A.0.103), то

$$\pi(U) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{A.1.106}$$

Один из способов, как можно увидеть, что слоем является сфера $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$, состоит в том, чтобы просто ограничить кэлеров потенциал в точку на базе, т.е. положить в (A.0.105), например, $v = v_0 := (1\ 0\ 0)^t$. Тогда с точностью до несущественных констант останется кэлеров потенциал сферы:

$$\mathcal{K}\big|_{v=v_0} = C_{23}\,\log\left(|w_2|^2 + |w_3|^2\right). \tag{A.1.107}$$

Определение нормального расслоения из формулы присоединения

Первый класс Черна нормального расслоения можно вычислить при помощи метода, предложенного в работах [6; 41] и основанного на вычислении интеграла $\int\limits_{\mathbf{C}\mathrm{P}^1} Ric$ тензора Риччи по сфере $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Для этого прежде всего следует разложить кэлеров потенциал до квадратичного порядка по отклонениям v_2, v_3 от точки v_0 (Пользуясь калибровочной свободой, мы можем положить $v_1 = 1$ и $w_1 = 0$):

$$\mathcal{K} \simeq C_{23}\,\log\|\mathbf{w}\|^2 + C_{12}\,\|\mathbf{v}\|^2 + C_{23}\,\bar{\mathbf{v}} \circ \Pi(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{w}}) \circ \mathbf{v}\,. \tag{A.1.108}$$

В этой формуле $\mathbf{v} = (v_2, v_3), \mathbf{w} = (w_2, w_3)$ и $\Pi(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{w}}) = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{w}\otimes\bar{\mathbf{w}}}{\|\mathbf{w}\|^2}$.

Рассмотрим общий случай, когда L – одномерное комплексное подмногообразие комплексного многообразия M. В этом случае касательное расслоение к M при ограничении на L распадается очевидным образом:

$$TM|_L = TL \oplus NL, \tag{A.1.109}$$

где NL – нормальное расслоение к L в M. В алгебраическом подходе разновидность формулы (A.1.109) называется формулой присоединения. Теперь ограничим рассмотрение на случай, когда L – сфера, т. е. $L = \mathbb{CP}^1$. Так как любое голоморфное расслоение над $\mathbb{CP}^1$ является суммой степеней тавтологического расслоения, соответствующее детерминантное расслоение есть $\det NL = \mathcal{O}(-m)$ для некоторого целого числа m. Вычисляя первый класс

Черна обеих частей равенства (A.1.109) и интегрируя по L, получим

$$\int_L c_1(TM|_L) = \int_L c_1(L) - m. \tag{A.1.110}$$

Вспомним, что первый класс Черна комплексной кривой L – это то же самое, что ее класс Эйлера, поэтому интеграл от $c_1(L)$ – это просто эйлерова характеристика кривой L, т. е. в нашем случае $L = \mathbb{CP}^1$ мы имеем $\int_L c_1(L) = 2$. Чтобы понять, что означает левая часть формулы (A.1.110) с точки зрения дифференциальной геометрии, воспользуемся прежде всего функториальностью класса Черна, из которой, в частности, следует, что $c_1(TM|_L) = c_1(M)|_L$, и, во-вторых, тем фактом, что первый класс Черна многообразия M можно выразить через тензор Риччи следующим образом:

$$c_1(M) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi} R_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge dz_{\bar{j}}.$$

Совмещая эти два факта, перепишем (A.1.110) как

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \frac{\mathrm{i}}{2\pi} R_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge dz_{\bar{j}}\big|_{\mathbb{CP}^1} = 2 - m. \tag{A.1.111}$$

Так как в эту формулу входит только ограничение формы Риччи на L, нам нужно знать лишь разложение метрики в окрестности $L = \mathbb{CP}^1$. Такое разложение легко получить из разложения кэлерова потенциала (A.1.108). Действительно, тензор Риччи можно найти по формуле $R_{i\bar{j}} = -\partial_i \bar{\partial}_j \ln \det g$, где g – кэлерова метрика, вычисленная по кэлерову потенциалу (A.1.108):

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+|w|^2)^2} + \dots & \star \\ \star & C_{12}\,\mathbb{1}_2 + C_{23}\,\Pi(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{w}}) \end{pmatrix} \tag{A.1.112}$$

Смешанные производные кэлерова потенциала, которые здесь обозначены звездочками, а также поправка к метрике на сфере для наших целей не требуются. Дело в том, что нас будет интересовать лишь компонента $R_{w\bar{w}} = -\partial_w \partial_{\bar{w}} \log \det g$ тензора Риччи, а точнее значение $R_{w\bar{w}}$ на сфере $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$, т.е. при $v = 0$, поэтому результат не изменится, если сразу в метрике положить $v = 0$. Это соответствует тому, что мы полагаем $\star = 0$ и опускаем член, обозначенный многоточием. В результате

$$\det g\big|_{v=0} = \frac{C_{12}(C_{12} + C_{23})}{(1 + |w|^2)^2}\,.$$

Следовательно, соотношение (A.1.111) можно переписать в таком виде:

$$2 \times \int_{\mathbb{CP}^1} \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{(1 + |w|^2)^2} = 2 - m.$$

Вычислив интеграл, получаем равенство $m = 0$. Это означает, что детерминантное расслоение $\det N_{\mathbf{C}\mathrm{P}^1}$ тривиально.

Приложение Б: Аспекты η-деформированных и квазилинейных σ-моделей

Б.1 Исключение калибровочных полей из лагранжиана раздела 6.2.2

Запишем уравнения, получающиеся при вариации действия, отвечающего лагранжиану (6.2.36), по полям $\mathcal{A}_{\bar{z}}, \mathcal{B}_{\bar{z}}$:

$$i\,\bar{u}\circ\mathscr{D}_z u = 0 \qquad \Rightarrow \qquad i\,\bar{u}\circ\partial_z u + \mathcal{A}_z + \bar{u}\,\mathcal{B}_z\,u = 0 \tag{Б.1.113}$$

$$\mathscr{D}_z u\otimes\bar{u} + \kappa\sum_{k=1}^{3}\mathscr{D}_z v^k\otimes\bar{v^k} = 0 \qquad \Rightarrow \tag{Б.1.114}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_z u\otimes\bar{u} + \kappa\sum_{k=1}^{3}\partial_z v^k\otimes\bar{v^k} - i\,\mathcal{A}_z\,u\otimes\bar{u} - i\,\mathcal{B}_z\,(u\otimes\bar{u} + \kappa\,\mathbf{1}_2) = 0 \tag{Б.1.115}$$

Мы использовали условия нормировки для упрощения выражений. При $\kappa \neq 0, -1$ можно воспользоваться формулой обращения

$$(\kappa\,\mathbf{1}_2 + u\otimes\bar{u})^{-1} = \frac{1}{\kappa}\left(\mathbf{1}_2 - \frac{1}{1+\kappa}\,u\otimes\bar{u}\right), \tag{Б.1.116}$$

чтобы выразить из предыдущей формулы $\mathcal{B}_z$ через $\mathcal{A}_z$ и поля материи:

$$\mathcal{B}_z = -\frac{i}{1+\kappa}\,(\partial_z u - i\mathcal{A}_z\,u)\otimes\bar{u} - i\sum_{k=1}^{3}\partial_z v^k\otimes\bar{v^k}\circ\left(\mathbf{1}_2 - \frac{1}{1+\kappa}\,u\otimes\bar{u}\right). \tag{Б.1.117}$$

Подстановка

$$\bar{u}\,\mathcal{B}_z\,u = -\frac{i}{1+\kappa}\,\bar{u}\circ(\partial_z u - i\mathcal{A}_z\,u) - i\,\frac{\kappa}{1+\kappa}\sum_{k=1}^{3}(\bar{u}\circ\partial_z v^k)\cdot(\bar{v^k}\circ u) \tag{Б.1.118}$$

в (Б.1.113) даёт

$$\frac{i\,\kappa}{1+\kappa}\left(\bar{u}\circ(\partial_z u - i\mathcal{A}_z\,u) - \sum_{k=1}^{3}(\bar{u}\circ\partial_z v^k)\cdot(\overline{v^k}\circ u)\right) = 0 \qquad \text{(Б.1.119)}$$

Следовательно, мы получаем выражение для $\mathcal{A}_z$:

$$\mathcal{A}_z = -i\,\bar{u}\circ\partial_z u + i\sum_{k=1}^{3}(\bar{u}\circ\partial_z v^k)\cdot(\overline{v^k}\circ u) \qquad \text{(Б.1.120)}$$

Окончательное выражение для $\mathcal{B}_z$ получается из (Б.1.117) при подстановке данного выражения. Заметим, что этот вывод имеет смысл лишь при $\kappa \neq 0$, так как в противном случае выражение (Б.1.119) тождественно обращается в нуль. Напротив, результирующие выражения (Б.1.117), (Б.1.120) несингулярны в пределе $\kappa \to 0$.

Из (Б.1.115) легко видеть, что

$$\mathscr{D}_z u = \partial_z u - i\,\mathcal{A}_z\,u - i\,\mathcal{B}_z\,u = \kappa\left(i\,\mathcal{B}_z u + \sum_{m=1}^{3}\partial_z v^k\,(\overline{v^k}\circ u)\right) \qquad \text{(Б.1.121)}$$

Как только что обсуждалось, поле $\mathcal{B}_z$ несингулярно в пределе $\kappa \to 0$, вследствие чего в этом пределе $\mathscr{D}_z u = O(\kappa)$ и $\lim\limits_{\kappa\to 0}\frac{1}{\kappa}\,\overline{\mathscr{D}_z u}\circ\mathscr{D}_z u = 0$. Следовательно, остаётся вычислить значение $\mathscr{D}_z v^k$ при подстановке $\mathcal{B}_z$ из (Б.1.117) и в пределе $\kappa \to 0$.

Несложное преобразование формулы (Б.1.120) даёт (см. определение (6.2.39))

$$\mathcal{A}_z = i\sum_{m=1}^{3}\overline{w^m}\,\partial_z w^m\,. \qquad \text{(Б.1.122)}$$

При вычислении $\mathscr{D}_z v^k$ полезно следующее равенство:

$$\overline{v^m}\circ(1 - u\otimes\bar{u})\circ v^n = P^{nm} - w^n\overline{w^m} = q^n\overline{q^m}\,. \qquad \text{(Б.1.123)}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}_z v^k = \partial_z v^k - i\,\mathcal{B}_z\,v^k = \\
&= \partial_z v^k - \sum_{m=1}^{3}\partial_z v^m\cdot\overline{q^m}\,q^k - \left(\partial_z u + \sum_{m=1}^{3}\overline{w^m}\,\partial_z w^m\,u\right)w^k = \\
&= (\text{используя (6.2.43)}) = \sum_{m=1}^{3}\partial_z v^m\cdot(\overline{w^m}\,w^k + \overline{s^m}\,s^k) - \left(\partial_z u + \sum_{m=1}^{3}\overline{w^m}\,\partial_z w^m\,u\right)w^k
\end{aligned}$$

Из определения (6.2.39) вектора w^k следует, что $\sum\limits_{m=1}^{3}\partial_z v^m\,\overline{w^m} - \partial_z u = -\sum\limits_{m=1}^{3}v^m\,\partial_z\overline{w^m}$. Кро-

ме того, так как $\sum\limits_{m=1}^{3} \overline{s^m} \cdot v^m = 0$, будем иметь $\sum\limits_{m=1}^{3} \partial_z v^m \cdot \overline{s^m} = -\sum\limits_{m=1}^{3} v^m \cdot \partial_z \overline{s^m}$. Поэтому предыдущую формулу можно упростить:

$$\mathscr{D}_z v^k = -w^k \sum_{m=1}^{3} \left(v^m \, \partial_z \overline{w^m} + u \cdot \overline{w^m} \, \partial_z w^m\right) - s^k \sum_{m=1}^{3} v^m \cdot \partial_z \overline{s^m} \,. \tag{Б.1.124}$$

Теперь несложно вычислить лагранжиан (6.2.36) при подстановке в него вспомогательных калибровочных полей и в пределе $\kappa \to 0$. Получим следующий результат:

$$\mathcal{L} = \left| \sum_{m=1}^{3} \overline{q^m} \cdot \partial_{\bar{z}} s^m \right|^2 + \left| \sum_{m=1}^{3} \overline{w^m} \cdot \partial_{\bar{z}} s^m \right|^2 + \left| \sum_{m=1}^{3} \overline{q^m} \cdot \partial_{\bar{z}} w^m \right|^2 . \tag{Б.1.125}$$

Это лагранжиан, введённый ранее в Главе 4.

Б.2 Квазилинейная формулировка при $\kappa > 0$

Чтобы дополнительно убедиться в несингулярности предела $\kappa \to 0$, рассмотрим снова лагранжиан в квазилинейной формулировке (6.2.36) при $\kappa \neq 0$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\kappa} \overline{\mathscr{D}_z u} \circ \mathscr{D}_z u + \sum_{k=1}^{3} \overline{\mathscr{D}_z v^{(k)}} \circ \mathscr{D}_z v^{(k)} \,, \tag{Б.2.126}$$

и повторим процедуру Приложения Б.1, исключая калибровочные поля и приводя лагранжиан к стандартному виду нелинейной σ-модели пространства флагов.

Выражение для $\mathcal{A}_z$ не зависит от κ, поэтому оно остаётся неизменным:

$$\mathcal{A}_z = i \sum_{m=1}^{3} \overline{w^m} \, \partial_z w^m \,. \tag{Б.2.127}$$

Из (Б.1.117) легко вывести

$$\mathscr{D}_z u = \frac{\kappa}{1+\kappa} \left[-i \, \mathcal{A}_z \, u + \sum_{m=1}^{3} v^m \, \partial_z \overline{w^m} \right] . \tag{Б.2.128}$$

Простые преобразования формулы (Б.1.117) позволяют представить $\mathcal{B}_z$ в следующем виде:

$$\mathcal{B}_z = \mathcal{B}_z^{(\kappa=0)} + i \, \mathscr{D}_z u \otimes \bar{u} \,. \tag{Б.2.129}$$

Тогда

$$\mathscr{D}_z v^k = \mathscr{D}_z^{(\kappa=0)} v^k + w^k\, \mathscr{D}_z u = \text{используя } (.1.124), (.2.127), (.2.128) = \qquad \text{(Б.2.130)}$$
$$= -\frac{1}{1+\kappa}\, w^k \sum_{m=1}^{3} \left(v^m\, \partial_z \overline{w^m} + u \cdot \overline{w^m}\, \partial_z w^m\right) - s^k \sum_{m=1}^{3} v^m \cdot \partial_z \overline{s^m}\,.$$

Процедура, аналогичная той, которая приводит от (Б.1.124) к (Б.1.125), и заключающаяся в возведении в квадрат выражений (Б.2.128) и (Б.2.130), даёт в данном случае лагранжиан

$$\mathcal{L}_\kappa = \left|\sum_{m=1}^{3} \overline{q^m} \cdot \partial_{\bar z} s^m\right|^2 + \left|\sum_{m=1}^{3} \overline{w^m} \cdot \partial_{\bar z} s^m\right|^2 + \frac{1}{1+\kappa}\left|\sum_{m=1}^{3} \overline{q^m} \cdot \partial_{\bar z} w^m\right|^2 . \qquad \text{(Б.2.131)}$$

Таким образом, мы получили σ-модель пространства флагов, однако с несколько несимметричной (‘сплющенной’) метрикой (по сравнению с (Б.1.125)). Тем не менее, $SU(3)$-симметрия здесь также сохранена. Из формулы (Б.2.131) очевидно, что предел $\kappa \to 0$ абсолютно гладкий.

Отметим также, что предел $\kappa \to \infty$ даёт σ-модель с таргет-пространством $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$. При этом $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ параметризуется вектором $s \in \mathbb{C}^3$, и в этом пределе можно полностью избавиться от полей q, w в лагранжиане (Б.2.131):

$$\lim_{\kappa\to\infty} \mathcal{L}_\kappa = \left|\sum_{m=1}^{3} \overline{q^m} \cdot \partial_{\bar z} s^m\right|^2 + \left|\sum_{m=1}^{3} \overline{w^m} \cdot \partial_{\bar z} s^m\right|^2 = \sum_{m,n=1}^{3} \partial_z \bar s^n \partial_{\bar z} s^m\, (q^n \overline{q^m} + w^n \overline{w^m}) =$$
$$= \text{используя соотношение полноты (6.2.43)} = \sum_{m,n=1}^{3} \partial_z \bar s^n \partial_{\bar z} s^m\, (\delta^{mn} - s^n \overline{s^m})\,.$$

В последнем выражении мы узнаём метрику Фубини-Штуди на $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$.

Б.3 η-деформированная модель главного кирального поля как σ-модель со вспомогательными калибровочными полями

Б.3.1 Исключение вспомогательных калибровочных полей

Для начала покажем, каким образом можно исключить вспомогательное калибровочное поле $A_\pm$ из лагранжиана (7.1.20). Существует по крайней мере два способа, как это можно сделать:

1. Прямое исключение. Запишем лагранжиан (7.1.20) в виде

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{L}} &= \mathrm{Tr}\left((A_+ - \mathbb{J}_+\mathcal{S}^{-1})\mathcal{S}(A_- - \mathcal{S}^{-1}\mathbb{J}_-)\right) - \mathrm{Tr}\left(\mathbb{J}_+\mathcal{S}^{-1}\mathbb{J}_-\right) + \\ &+\mathrm{Tr}\left((J_1)_+\frac{1}{1-\eta_1(R_1)_{g_1}}\circ(J_1)_-\right) + \mathrm{Tr}\left((J_2)_+\frac{1}{1-\eta_2(R_2)_{g_2}}\circ(J_2)_-\right),\end{aligned} \tag{Б.3.132}$$

где $(J_i)_\pm = \partial_\pm g_i\, g_i^{-1}$ и

$$\begin{gathered}\mathcal{S} = \tfrac{1}{1-\eta_1(R_1)_{g_1}} + \tfrac{1}{1-\eta_2(R_2)_{g_2}}, \qquad R_g := Ad_g\, R\, Ad_{g^{-1}}\,. \\ \mathbb{J}_- = \tfrac{1}{1-\eta_1(R_1)_{g_1}}\circ(J_1)_- + \tfrac{1}{1-\eta_2(R_2)_{g_2}}\circ(J_2)_-, \\ \mathbb{J}_+ = \tfrac{1}{1+\eta_1(R_1)_{g_1}}\circ(J_1)_+ + \tfrac{1}{1+\eta_2(R_2)_{g_2}}\circ(J_2)_+\end{gathered}$$

Исключая первый член в (Б.3.132), получим:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{L}} &= -\mathrm{Tr}\left(\left(\frac{1}{A^T}\circ(J_1)_+ + \frac{1}{B^T}\circ(J_2)_+\right)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)^{-1}\left(\frac{1}{A}\circ(J_1)_- + \frac{1}{B}\circ(J_2)_-\right)\right) + \\ &+\mathrm{Tr}\left((J_1)_+\frac{1}{A}\circ(J_1)_-\right) + \mathrm{Tr}\left((J_2)_+\frac{1}{B}\circ(J_2)_-\right),\end{aligned}$$

где $A = 1-\eta_1(R_1)_{g_1}, B = 1-\eta_2(R_2)_{g_2}$. Чтобы упростить получившееся выражение, воспользуемся тождествами

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{A}+\tfrac{1}{B} = \tfrac{1}{A}(A+B)\tfrac{1}{B} = \tfrac{1}{B}(A+B)\tfrac{1}{A} \\ \Rightarrow \tfrac{1}{A}(\tfrac{1}{A}+\tfrac{1}{B})^{-1}\tfrac{1}{A} = \tfrac{1}{A}-\tfrac{1}{A+B}, \qquad \tfrac{1}{A}(\tfrac{1}{A}+\tfrac{1}{B})^{-1}\tfrac{1}{B} = \tfrac{1}{A+B}\,,\end{gathered}$$

которые справедливы для обратимых матриц A, B (таких, что $A+B$ и $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$ также обратимы). Используя эти тождества, получим:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{L}} &= \mathrm{Tr}\left((J_1)_+\frac{1}{A+B}(J_1)_-\right) + \mathrm{Tr}\left((J_2)_+\frac{1}{A+B}(J_2)_-\right) - \\ &-\mathrm{Tr}\left((J_1)_+\frac{1}{A+B}(J_2)_-\right) - \mathrm{Tr}\left((J_2)_+\frac{1}{A+B}(J_1)_-\right) = \\ &= \mathrm{Tr}\left((J_1-J_2)_+\frac{1}{A+B}(J_1-J_2)_-\right)\end{aligned}$$

Вспоминая, чему в нашем случае равны A и B, приходим к окончательному виду лагранжиана

$$\widetilde{\mathscr{L}} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left((J_1-J_2)_+\frac{1}{1-\frac{\eta_1}{2}R_{g_1}-\frac{\eta_2}{2}R_{g_2}}\circ(J_1-J_2)_-\right) \tag{Б.3.133}$$

Ясно, что по-прежнему имеется калибровочная инвариантность относительно преобразований $g_1 \to g_1 g, g_2 \to g_2 g,\ g \in G$. Простейшее калибровочное условие состоит в том, чтобы положить $g_1 = 1$ или $g_2 = 1$.

2. Использование преобразования Хаббарда-Стратоновича. Описанное прямое исключе-

ние полей является весьма трудоемкой процедурой. Существует более простой способ, позволяющий получить требуемый результат. Во-первых, выполним в лагранжиане (7.1.20) квадратичное преобразование, вводя новые вспомогательные поля $\pi_\pm \in \mathfrak{g}, \rho_\pm \in \mathfrak{g}$:

$$\widetilde{\mathscr{L}} = -\mathrm{Tr}\,(\pi_+(\mathbb{1} - \eta_1(R_1)_{g_1}) \circ \pi_-) - \mathrm{Tr}\,(\rho_+(\mathbb{1} - \eta_2(R_2)_{g_2}) \circ \rho_-) + \tag{Б.3.134}$$

$$+\mathrm{Tr}\left(\pi_+(\tilde{J}_1)_-\right) + \mathrm{Tr}\left(\pi_-(\tilde{J}_1)_+\right) + \mathrm{Tr}\left(\rho_+(\tilde{J}_2)_-\right) + \mathrm{Tr}\left(\rho_-(\tilde{J}_2)_+\right). \tag{Б.3.135}$$

В этих формулах $(\tilde{J}_i)_\pm = \mathscr{D}_\pm g_i\, g_i^{-1}$. Преобразованное действие линейно по полям $A_\pm$. Варьируя его по $A_\pm$, получим два условия: $\pi_\pm + \rho_\pm = 0$. Оставшуюся часть действия можно выразить через $\pi_\pm$:

$$\widetilde{\mathscr{L}} = -2\,\mathrm{Tr}\left(\pi_+\big(\mathbb{1} - \frac{\eta_1}{2}(R_1)_{g_1} - \frac{\eta_2}{2}(R_2)_{g_2}\big) \circ \pi_-\right) + \tag{Б.3.136}$$

$$+\mathrm{Tr}\,(\pi_+(J_1 - J_2)_-) + \mathrm{Tr}\,(\pi_-(J_1 - J_2)_+)\ .$$

Теперь можно исключить $\pi_\pm$, и при этом получится то же выражение (Б.3.133) для лагранжиана:

$$\widetilde{\mathscr{L}} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left((J_1 - J_2)_+ \frac{1}{1 - \frac{\eta_1}{2}R_{g_1} - \frac{\eta_2}{2}R_{g_2}} \circ (J_1 - J_2)_-\right). \tag{Б.3.137}$$

Б.3.2 Вывод пары Лакса

Выведем теперь пару Лакса для уравнений движения, следующих из лагранжиана (7.1.20). Вариация (7.1.20) относительно g_1, g_2 дает уравнения движения

$$\mathscr{D} * \mathscr{K}_1 = 0, \qquad \mathscr{D} * \mathscr{K}_2 = 0, \tag{Б.3.138}$$

$$(\mathscr{K}_1)_\pm = \tfrac{1}{1\pm\eta_1 R_{g_1}} \circ (D_\pm g_1 g_1^{-1}), \qquad (\mathscr{K}_2)_\pm = \tfrac{1}{1\pm\eta_2 R_{g_2}} \circ (D_\pm g_2 g_2^{-1}) \tag{Б.3.139}$$

Вариация лагранжиана по калибровочному полю A дает дополнительное условие

$$\mathscr{K}_1 + \mathscr{K}_2 = 0\,. \tag{Б.3.140}$$

Уравнения (Б.3.139) можно переписать в виде (7.1.14):

$$\partial_\pm g_1 g_1^{-1} = A_\pm + (1 \pm \eta_1 R_{g_1})(\mathscr{K}_1)_\pm, \qquad \partial_\pm g_2 g_2^{-1} = A_\pm + (1 \pm \eta_2 R_{g_2})(\mathscr{K}_2)_\pm\,. \tag{Б.3.141}$$

Из плоскости токов $dg_1 g_1^{-1}$ и $dg_2 g_2^{-1}$ следуют два структурных уравнения (7.1.15):

$$dA - A \wedge A = (1 + \eta_1^2)\mathscr{K}_1 \wedge \mathscr{K}_1 - \mathscr{D}\mathscr{K}_1 + \eta_1\, R_{g_1}(\mathscr{D} * \mathscr{K}_1) \tag{Б.3.142}$$

$$dA - A \wedge A = (1 + \eta_2^2)\mathscr{K}_2 \wedge \mathscr{K}_2 - \mathscr{D}\mathscr{K}_2 + \eta_2\, R_{g_2}(\mathscr{D} * \mathscr{K}_2) \tag{Б.3.143}$$

Используя уравнения движения (Б.3.138) и условие (Б.3.140), можно выразить все в терминах $\mathscr{K}_1 := \mathscr{K}$:

$$dA - A \wedge A = (1+\eta_1^2)\mathscr{K} \wedge \mathscr{K} - \mathscr{D}\mathscr{K} \tag{Б.3.144}$$

$$dA - A \wedge A = (1+\eta_2^2)\mathscr{K} \wedge \mathscr{K} + \mathscr{D}\mathscr{K}\,. \tag{Б.3.145}$$

Эти два уравнения можно также переписать следующим образом:

$$dA - A \wedge A = (1+\tfrac{\eta_1^2+\eta_2^2}{2})\mathscr{K} \wedge \mathscr{K} \tag{Б.3.146}$$

$$\mathscr{D}\mathscr{K} + \tfrac{\eta_2^2-\eta_1^2}{2}\,\mathscr{K} \wedge \mathscr{K} = 0\,. \tag{Б.3.147}$$

Будем искать семейство плоских связностей в виде

$$\mathscr{A} = A + \alpha\mathscr{K} + \beta * \mathscr{K} \tag{Б.3.148}$$

Накладывая условие плоскости и используя уравнения движения, получим алгебраическое уравнение на α, β, которое можно явно разрешить через одну независимую переменную u. В конечном итоге получим следующее выражение для лаксовой связности:

$$\mathscr{A} = A + \left(ab + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\,u\right)\,\mathscr{K}_+ dx^+ + \left(ab + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\,\tfrac{1}{u}\right)\,\mathscr{K}_- dx^-,$$
$$a = \tfrac{\eta_1+\eta_2}{2}, \qquad b = \tfrac{\eta_1-\eta_2}{2}, \qquad u \in \mathbb{C}^*.$$

Б.4 Проверка интегрируемости комплексных структур на $S^1 \times S^3$

В данном приложении явной проверкой мы убедимся, что комплексные структуры на $S^1 \times S^3$, определенные через свои голоморфные подпространства формулой (7.3.53), интегрируемы. Мы будем использовать представление (7.3.63) для комплексной структуры (в предположении, что она анти-самодуальна). Тогда

$$(\sigma_+)_0 = i(\mathbb{1} + i\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}), \quad \vec{\sigma}_+ = i(\vec{\sigma} + i\,\vec{n}\times\vec{\sigma} - i\,\vec{n}\,\mathbb{1}) \tag{Б.4.149}$$

Приведем вектор $\vec{n}$ к виду $(0,0,1)$ при помощи $SO(3)$-преобразования Λ^t, т.е. $\Lambda^t \circ \vec{n} = (0,0,1) := \vec{n}_0$. Можно найти элемент $g \in SU(2)$, такой что $g\vec{\sigma}g^\dagger = \Lambda \circ \vec{\sigma}$. Тогда из (Б.4.149) следует, что

$$g(\sigma_+)_0 g^\dagger = i(\mathbb{1} + i\,\vec{n}_0\cdot\vec{\sigma}), \tag{Б.4.150}$$
$$g(\Lambda^t \circ \vec{\sigma}_+)g^\dagger = i(\vec{\sigma} + i\Lambda^t \circ (\vec{n}\times(\Lambda\circ\vec{\sigma})) - i\,\vec{n}_0\,\mathbb{1}) = i(\vec{\sigma} + i\,(\vec{n}_0\times\vec{\sigma}) - i\,\vec{n}_0\,\mathbb{1})$$

В последнем уравнении мы воспользовались тем фактом, что для произвольной матрицы $\Lambda \in SO(3)$ справедливо соотношение $\Lambda \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = (\Lambda \circ \vec{a} \times \Lambda \circ \vec{b})$ (Λ – внутренний автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$). Ясно, что $(\sigma_+)_0, \Lambda^t \circ \vec{\sigma}_+$ образуют базис в том же пространстве $\mathfrak{m}_+$, что и исходные матрицы $(\sigma_+)_0, \vec{\sigma}_+$. Поэтому из приведенных формул следует, что эффективно мы привели комплексную структуру $\mathscr{J}$ к каноническому виду с помощью g-преобразования. Теперь мы можем выписать явные выражения для генераторов $\tilde{\sigma}_+ = \sigma_+|_{\vec{n}=\vec{n}_0}$:

$$(\tilde{\sigma}_+)_0 = \begin{pmatrix} i-1 & 0 \\ 0 & i+1 \end{pmatrix}, \quad (\tilde{\sigma}_+)_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{Б.4.151}$$

$$(\tilde{\sigma}_+)_2 = i(\tilde{\sigma}_+)_1, \quad (\tilde{\sigma}_+)_3 = -i\,(\tilde{\sigma}_+)_0 \tag{Б.4.152}$$

Очевидно, что $[\tilde{\mathfrak{m}}_+, \tilde{\mathfrak{m}}_+] \subset \tilde{\mathfrak{m}}_+$ и, следовательно, $[\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_+] \subset \mathfrak{m}_+$, поэтому комплексная структура $\mathscr{J}$ интегрируема. Случай самодуальной комплексной структуры $\mathscr{J}$ можно рассмотреть аналогичным образом. Таким образом, мы доказали Лемму 1 из раздела 7.3.2. Вот доказательство Леммы 2:

Доказательство Леммы 2. Достаточно убедиться, что $(0,2)$-компоненты метрики обращаются в нуль, т.е. что $\langle \mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_+ \rangle = 0$. Это, однако, очевидно из (Б.4.151), так как $\operatorname{tr}((\tilde{\sigma}_+)_0^2) = \operatorname{tr}((\tilde{\sigma}_+)_1^2) = \operatorname{tr}((\tilde{\sigma}_+)_0(\tilde{\sigma}_+)_1) = 0$.

Б.5 ‘Сплющенная’-AdS метрика (а также метрика Гёделя)

Группа $SU(1,1)$ определяется соотношением $g\widehat{\eta}g^\dagger = \widehat{\eta}$, где $\widehat{\eta} = \operatorname{Diag}(1,-1)$. Элементы $SU(1,1)$ можно параметризовать таким образом:

$$g = \begin{pmatrix} z_1 & \bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \tag{Б.5.153}$$

где $|z_1|^2 - |z_2|^2 = 1$. Введем так называемые ‘глобальные координаты’:

$$z_1 = \operatorname{ch}\rho\, e^{it}, \qquad z_2 = \operatorname{sh}\rho\, e^{i\varphi} \tag{Б.5.154}$$

Ток имеет вид

$$J := -g^{-1}dg = -\begin{pmatrix} \bar{z}_1 dz_1 - \bar{z}_2 dz_2 & \bar{z}_1 d\bar{z}_2 - \bar{z}_2 d\bar{z}_1 \\ z_1 dz_2 - z_2 dz_1 & z_1 d\bar{z}_1 - z_2 d\bar{z}_2 \end{pmatrix} = \tag{Б.5.155}$$

$$= \begin{pmatrix} i(\operatorname{sh}^2\rho\, d\varphi - \operatorname{ch}^2\rho\, dt) & -e^{-i(t+\varphi)}(d\rho - i\operatorname{sh}\rho\operatorname{ch}\rho\,(d\varphi - dt)) \\ -e^{i(t+\varphi)}(d\rho + i\operatorname{sh}\rho\operatorname{ch}\rho\,(d\varphi - dt)) & -i(\operatorname{sh}^2\rho\, d\varphi - \operatorname{ch}^2\rho\, dt) \end{pmatrix}$$

Компоненты триады таковы:

$$M_1 - iM_2 = -e^{-i(t+\varphi)}(d\rho - i\,\mathrm{sh}\rho\,\mathrm{ch}\rho\,(d\varphi - dt)), \tag{Б.5.156}$$

$$M_3 = \mathrm{sh}^2\rho\,d\varphi - \mathrm{ch}^2\rho\,dt \tag{Б.5.157}$$

Простой заменой переменных $t = \frac{\tau}{\sqrt{1+\eta^2}}$, $\varphi = \frac{\tau}{\sqrt{1+\eta^2}} - \psi$ приведем метрику к виду (7.4.81):

$$ds^2 = -d\tau^2 + d\rho^2 + d\psi^2\,(\mathrm{sh}^2\rho - \eta^2\mathrm{sh}^4\rho) - 2\sqrt{1+\eta^2}\,\mathrm{sh}^2\rho\,d\psi\,d\tau\,. \tag{Б.5.158}$$

Заключение

Обсудим возможные направления развития идей, изложенных в диссертации.

- В рамках исследования пределов Халдейна спиновых цепочек с $SU(N)$-симметрией было установлено, что если спины в узлах цепочки преобразуются по симметрическим представлениям ранга $\widetilde{m}$, то θ-член результирующей σ-модели периодичен (по $\widetilde{m}$) с периодом m, где $m \leqslant N$ – длина элементарной ячейки (в оригинальном случае $SU(2)$-цепочки имеем $N = m = 2$). Представляет интерес численная проверка следующего отсюда естественного предположения о $\mathrm{mod}\, m$-периодичности по спину $\widetilde{m}$ массовой щели в спиновых цепочках с элементарной ячейкой длины m.

- Возможно исследование пределов Халдейна для спиновых цепочек, аналогичных тем, которые были описаны в Главах 2 и 3, но с гамильтонианом, отличным от (2.2.2), (3.3.18). В этом случае возможны два варианта: в пределе возникнет сигма-модель с разными скоростями распространения для разных мод (т.е. 'квази-релятивистски-инвариантная' модель), либо возникнет сигма-модель с ненулевым B-полем. Действительно, напомним, что формула (3.3.18) для гамильтониана – единственно возможная в предположении, что модель является релятивистски-инвариатной (см. (3.4.46)) и обладает лишь топологическим B-членом (см. (3.4.49)-(3.4.58)). Более того, в литературе исследовался случай цепочек, близких к гейзенберговским [87], непрерывный предел которых в общем случае порождает нетопологическое B-поле. В работе [87] утверждается также, что константа связи B-поля стремится к нулю в длинноволновом пределе. Было бы интересно проверить справедливость данного утверждения для спиновых цепочек с более общими гамильтонианами, а также понять физический смысл этого наблюдения.

- С точки зрения теории интегрируемых моделей необходимо построить так называемые 'спектральные кривые' для сигма-моделей с однородными комплексными таргет-пространствами, обладающих представлением нулевой кривизны. Спектральная кривая лежит в основе метода 'обратной задачи рассеяния для периодических потенциалов', используемого для построения периодических решений интегрируемых уравнений со времен классической теории уравнения Кортевега-де-Фриза [8][9]. При помощи данного подхода Хитчином были найдены [75] гармонические отображения из тора $\mathbb{T}^2$ в $SU(2) \simeq S^3$. Было бы интересно обобщить данное построение на случай рассмотренных в диссертации сигма-моделей пространств флагов.

- Уже давно было обнаружено наличие интегрируемых структур на пространстве (квантовых) когомологий пространств флагов [69]. В частности, была установлена связь между такого рода теориями когомологий и квантово-механическими цепочками Тоды. Впоследствии Некрасовым и Шаташвили [95] данное наблюдение было обобщено на случай спиновых цепочек (XXX, XXZ, XYZ) с одной стороны и некоторых гиперкэлеровых многообразий с другой стороны, таких как кокасательное расслоение к грассманиану $T^*G(k,N)$ (или многообразий Накаджимы [94] в более общем случае). Квантовые когомологии тесно связаны с теорией инвариантов Громова-Виттена и с соответствующей топологической A-моделью Виттена [113]. Действие этой топологической модели по форме в точности совпадает с действием (4.1.1) рассматриваемых нами интегрируемых моделей (для BRST $\mathcal{Q}$-замкнутости действия Виттена необходимо B-поле, пропорциональное кэлеровой форме). Было бы интересно понять, существует ли какая-либо связь между интегрируемыми структурами, возникающими в теории квантовых когомологий и в теории интегрируемых сигма-моделей.

- Еще одно направление дальнейшего развития связано с построением так называемой 'полмейеровской редукции' полученных сигма-моделей пространств флагов. Важное наблюдение Полмейера [96] состоит в том, что редукция сигма-модели с таргет-пространством S^2 дает модель 'синус-Гордон'. Ввиду того что, как упоминалось у предыдущем пункте, топологические сигма-модели пространств флагов связаны с квантово-механическими цепочками Тоды, а модель синус-Гордон представляет собой простейшую полевую теорию Тоды, естественно ожидать, что полмейеровская редукция рассмотренных нами моделей также приведет к обобщенным полевым моделям цепочек Тоды. Стоит также заметить, что теория полмейеровской редукции тесно связана с η-деформациями, рассмотренными в последней главе. Дело в том, что пуассонова структура в пространстве полей редуцированной по Полмейеру модели отличается от пуассоновой структуры исходной сигма-модели, а η-деформация обеспечивает интерполяцию между этими пуассоновыми структурами [57].

- Наконец, в диссертации речь шла о классической интегрируемости сигма-моделей. Естественным образом возникает вопрос и о квантовой интегрируемости данных моделей и связанных с ними моделей. Как хорошо известно, уже в $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$ сигма-модели простейший 'высший' сохраняющийся заряд, наличие которого связано с классической интегрируемостью модели, подвержен квантовым аномалиям [71][16]. Тем не менее, аномалия сокращается, если добавить в систему фермионы [15]. Было бы весьма интересно, во-первых, получить геометрическую формулу для аномалии в общем случае, когда таргет-пространство – пространство флагов (например, понять, выражается ли аномалия через характеристические классы каких-либо расслоений над пространством флагов), и, во-вторых, понять, можно ли и в общем случае сократить аномалию путем добавления фермионных полей. Исследование потенциальных суперсимметричных обобщений нашей модели (см. работы [67; 77]) также может помочь продвинуться в этом направлении.

Заметим также, что с момента написания работ, которые легли в основу диссертации, некоторые из полученных в них результатов получили независимое подтверждение и дальнейшее развитие. Так в работе [87] построены предела Халдейна $SU(3)$ спиновых цепочек, и результаты находятся в полном соответствии с результатами, полученными нами ранее [47][49]. В работе [24] в продолжение нашего исследования сигма-моделей с ненулевым B-полем [44] построены некоторые новые классические решения уравнений движения сигма-модели пространства флагов без B-поля, а в работе [23] частично исследован случай трехмерной мировой поверхности.

Список основных работ автора по теме диссертации

1. Bykov D. The worldsheet low-energy limit of the $AdS_4 \times \mathbf{C}\mathrm{P}^3$ superstring // Nucl. Phys. B. — 2010. — Vol. 838. — P.47–74.

2. Bykov D. Haldane limits via Lagrangian embeddings // Nucl. Phys. B. — 2012. — Vol. 855. — P.100–127.

3. Bykov D. The geometry of antiferromagnetic spin chains // Commun. Math. Phys. — 2013. — Vol. 322. — P.807–834.

4. Быков Д.В. Геометрические аспекты голографической двойственности // Теор. Мат. Физ. — 2014. — Т. 181, вып. 3. — С.436–448.

5. Bykov D. Instantons and holomorphic spheres // Proceedings of the conference "Supersymmetries and Quantum Symmetries", Dubna, 29.07–03.08.2013. — Phys. Part. Nucl. Lett. — 2014. — Vol. 11, № 7. — P.1016–1018.

6. Bykov D. Integrable properties of sigma-models with non-symmetric target spaces // Nucl. Phys. B. — 2015. — Vol. 894. — P.254–267.

7. Быков Д.В. О дифференциальной геометрии раздутий // Теор. Мат. Физ. — 2015. — Т.185, вып.2. — С.313–328.

8. Bykov D. Classical solutions of a flag manifold σ-model // Nucl. Phys. B. — 2016. — Vol. 902. — P.292–301.

9. Bykov D. Complex structures and zero-curvature equations for σ-models // Phys. Lett. B. — 2016. — Vol. 760. — P.341–344.

10. Быков Д.В. Циклические градуировки алгебр Ли и пары Лакса для сигма-моделей // Теор. Мат. Физ. — 2016. — Т.189, вып.3. — С.380–388.

11. Bykov D. Sigma-models with complex homogeneous target spaces // Proceedings of the conference "Quarks-2016", St. Petersburg, 29.05–4.06.2016. — EPJ Web of Conf. — 2016. — Vol. 125. — P.5002.

12. Bykov D. Complex structure-induced deformations of σ-models // JHEP. — 2017. — Vol. 1703. — P.130.

13. Быков Д.В. Квазилинейная формулировка σ-модели пространства флагов // Теор. Мат. Физ. — 2017. — Т.193, вып.3. — С.381–400.

Список литературы

1. *Арефьева И.Я., Корепин В.Е.* Рассеяние в двумерной модели с лагранжианом $(1/\gamma)((d_\mu u)^2/2 + m^2(\cos(u) - 1))$ // Письма в ЖЭТФ. — 1974. — Т. 20, вып. 10. — С. 680—684.
2. *Арнольд В.И., Хесин Б.А.* Топологические методы в гидродинамике. — М.: URSS, 2007. — 392с.
3. *Быков Д.В.* Алгебра симметрии суперструны в $AdS_4 \times \mathbf{C}\mathrm{P}^3$ // Теор. Мат. Физ. — 2010. — Т. 163, вып. 1. — С. 114—131.
4. *Быков Д.В.* Геометрические аспекты голографической двойственности // Теор. Мат. Физ. — 2014. — Т. 181, вып. 3. — С. 436—448.
5. *Быков Д.В.* Квазилинейная формулировка σ-модели пространства флагов // Теор. Мат. Физ. — 2017. — Т. 193, вып. 3. — С. 381—400.
6. *Быков Д.В.* О дифференциальной геометрии раздутий // Теор. Мат. Физ. — 2015. — Т. 185, вып. 2. — С. 313—328.
7. *Быков Д.В.* Циклические градуировки алгебр Ли и пары Лакса для сигма-моделей // Теор. Мат. Физ. — 2016. — Т. 189, вып. 3. — С. 380—388.
8. *Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // Успехи Мат. Наук. — 1976. — Т. 31, вып. 1. — С. 59—146.
9. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. — М.: Наука, 1980. — 319 с.
10. *Захаров В.Е., Михайлов А.В.* Релятивистски инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи // ЖЭТФ. — 1978. — Т. 74, вып. 6. — С. 1953—1973.
11. *Кетов С.В.* Нелинейные сигма-модели в квантовой теории поля и теории струн. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992. — 240с.
12. *Переломов А.М., Попов В.С.* Операторы Казимира для групп $U(n)$ и $SU(n)$ // Ядерная физика. — 1966. — Т. 3. — С. 924—931.
13. *Переломов А.М.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. — М.: Наука, 1987. — 272 с.

14. *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1988. — 240с.

15. *Abdalla E.*, *Abdalla M. C. B.*, *Gomes M.* Anomaly Cancellations in the Supersymmetric $CP^{(N-1)}$ Model // Phys. Rev. D. — 1982. — Vol. 25. — P. 452.

16. *Abdalla E.*, *Abdalla M. C. B.*, *Gomes M.* Anomaly in the Nonlocal Quantum Charge of the $CP^{(n-1)}$ Model // Phys. Rev. D. — 1981. — Vol. 23. — P. 1800.

17. *Affleck I.* The Quantum Hall Effect, Sigma Models At $\theta = \pi$ And Quantum Spin Chains // Nucl. Phys. B. — 1985. — Vol. 257. — P. 397.

18. *Affleck I.*, *Lieb E. H.* A proof of part of Haldane's conjecture on spin chains // Lett. Math. Phys. — 1986. — Vol. 12. — P. 57.

19. *Agricola I.*, *Ferreira A. C.*, *Friedrich T.* The classification of naturally reductive homogeneous spaces in dimensions $n \leqslant 6$. — 2014. — arXiv: 1407.4936.

20. *Aharony O.*, *Bergman O.*, *Jafferis D. L.*, *Maldacena J.* N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals // JHEP. — 2008. — Vol. 0810. — P. 091. — arXiv: 0806.1218.

21. *Alekseev A.*, *Faddeev L.*, *Shatashvili S. L.* Quantization of symplectic orbits of compact Lie groups by means of the functional integral // J.Geom.Phys. — 1988. — Vol. 5. — P. 391–406.

22. *Alekseevsky D. V.* Flag manifolds // Zb. Rad. Mat. Inst. Beograd. (N.S.) — 1997. — Vol. 6(14). — P. 3–35. — 11th Yugoslav Geometrical Seminar (Divčibare, 1996).

23. *Amari Y.*, *Sawado N.* $SU(3)$ Knot Solitons: Hopfions in the F_2 Skyrme-Faddeev-Niemi model. — 2018. — arXiv: 1805.10008.

24. *Amari Y.*, *Sawado N.* BPS Sphalerons in the F_2 Non-Linear Sigma Model // Phys. Rev. D. — 2018. — Vol. 97, issue 6. — P. 065012. — eprint: 1711.00933.

25. *Arutyunov G.*, *Frolov S.*, *Hoare B.*, *Roiban R.*, *Tseytlin A. A.* Scale invariance of the η-deformed $AdS_5 \times S^5$ superstring, T-duality and modified type II equations // Nucl. Phys. B. — 2016. — Vol. 903. — P. 262–303. — arXiv: 1511.05795.

26. *Arutyunov G.*, *Borsato R.*, *Frolov S.* S-matrix for strings on η-deformed AdS5 x S5 // JHEP. — 2014. — Vol. 1404. — P. 002. — arXiv: 1312.3542.

27. *Arutyunov G.*, *Frolov S.* Foundations of the $AdS_5 \times S^5$ Superstring. Part I // J.Phys.A. — 2009. — Vol. 42. — P. 254003. — arXiv: 0901.4937.

28. *Arvanitoyeorgos A.* An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces. Vol. 22. — American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. — 148p. — (Student Mathematical Library).

29. *Arvanitoyeorgos A.* New invariant Einstein metrics on generalized flag manifolds // Transactions of the American Mathematical Society. — 1993. — Vol. 337, issue 2. — P. 981–995.

30. *Atiyah M. F.*, *Hitchin N. J.*, *Singer I. M.* Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. // Proc. R. Soc. Lond., Ser. A. — 1978. — Vol. 362. — P. 425–461.

31. *Audin M.* On the topology of Lagrangian submanifolds. Examples and counter-examples. // Port. Math. (N.S.) — 2005. — Vol. 62, issue 4. — P. 375–419.

32. *Auerbach A.* Interacting Electrons and Quantum Magnetism. — Springer-Verlag, 1994. — 255p.

33. *Babichenko A.*, *Stefanski Jr. B.*, *Zarembo K.* Integrability and the AdS(3)/CFT(2) correspondence // JHEP. — 2010. — Vol. 1003. — P. 058. — arXiv: 0912.1723.

34. *Beisert N.* [et al.] Review of AdS/CFT Integrability: An Overview // Lett. Math. Phys. — 2012. — Vol. 99. — P. 3–32. — arXiv: 1012.3982.

35. *Bena I.*, *Polchinski J.*, *Roiban R.* Hidden symmetries of the $AdS_5 \times S^5$ superstring // Phys. Rev. D. — 2004. — Vol. 69. — P. 046002. — arXiv: hep-th/0305116.

36. *Berezin F.* General Concept of Quantization // Commun.Math.Phys. — 1975. — Vol. 40. — P. 153–174.

37. *Borsato R.*, *Wulff L.* Target space supergeometry of η and λ-deformed strings // JHEP. — 2016. — Vol. 1610. — P. 045. — arXiv: 1608.03570.

38. *Brion M.* Lectures on the geometry of flag varieties // Topics in cohomological studies of algebraic varieties. — Birkhäuser, Basel, 2005. — P. 33–85. — (Trends Math.)

39. *Buscher T. H.* Path Integral Derivation of Quantum Duality in Nonlinear Sigma Models // Phys. Lett. B. — 1988. — Vol. 201. — P. 466–472.

40. *Buyers W. J. L.*, *Morra R. M.*, *Armstrong R. L.*, *Hogan M. J.*, *Gerlach P.*, *Hirakawa K.* Experimental evidence for the Haldane gap in a spin-1 nearly isotropic, antiferromagnetic chain // Phys. Rev. Lett. — 1986. — Vol. 56, issue 4. — P. 371–374.

41. *Bykov D.* Instantons and holomorphic spheres // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2014. — Vol. 11, issue 7. — P. 1016–1018.

42. *Bykov D.* Sigma-models with complex homogeneous target spaces // EPJ Web of Conf. — 2016. — Vol. 125. — P. 5002.

43. *Bykov D.*, *Zarembo K.* Ladders for Wilson loops beyond leading order // J. High Energy Phys. — 2012. — Vol. 1209. — P. 057.

44. *Bykov D.* Classical solutions of a flag manifold σ-model // Nucl. Phys. B. — 2016. — Vol. 902. — P. 292–301. — arXiv: 1506.08156.

45. *Bykov D.* Complex structure-induced deformations of σ-models // JHEP. — 2017. — Vol. 1703. — P. 130. — arXiv: 1611.07116.

46. *Bykov D.* Complex structures and zero-curvature equations for σ-models // Phys. Lett. B. — 2016. — Vol. 760. — P. 341–344. — arXiv: 1605.01093.

47. *Bykov D.* Haldane limits via Lagrangian embeddings // Nucl. Phys. B. — 2012. — Vol. 855. — P. 100–127. — arXiv: 1104.1419.

48. *Bykov D.* Integrable properties of sigma-models with non-symmetric target spaces // Nucl. Phys. B. — 2015. — Vol. 894. — P. 254–267. — arXiv: 1412.3746.

49. *Bykov D.* The geometry of antiferromagnetic spin chains // Comm. Math. Phys. — 2013. — Vol. 322, issue 3. — P. 807–834.

50. *Bykov D.* The worldsheet low-energy limit of the $AdS_4 \times \mathbf{C}\mathrm{P}^3$ superstring // Nucl. Phys. B. — 2010. — Vol. 838. — P. 47–74. — arXiv: 1003.2199.

51. *Calabi E.* Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres // Journal of Differential Geometry. — 1967. — Vol. 1, 1–2. — P. 111–125.

52. *Candu C.*, *Mitev V.*, *Quella T.*, *Saleur H.*, *Schomerus V.* The Sigma Model on Complex Projective Superspaces // JHEP. — 2010. — Vol. 1002. — P. 015. — arXiv: 0908.0878.

53. *Corboz P.*, *Läuchli A. M.*, *Totsuka K.*, *Tsunetsugu H.* Spontaneous trimerization in a bilinear-biquadratic S=1 zig-zag chain // Phys. Rev. B. — 2007. — Dec. — Vol. 76, issue 22. — P. 220404. — arXiv: 0707.1195.

54. *Cremmer E.*, *Scherk J.* The Supersymmetric Nonlinear Sigma Model in Four-Dimensions and Its Coupling to Supergravity // Phys. Lett. B. — 1978. — Vol. 74. — P. 341–343.

55. *D'Adda A.*, *Di Vecchia P.*, *Lüscher M.* Confinement and Chiral Symmetry Breaking in CP^{n-1} Models with Quarks // Nucl. Phys. B. — 1979. — Vol. 152. — P. 125–144.

56. *Delduc F.*, *Magro M.*, *Vicedo B.* An integrable deformation of the $AdS_5 \times S^5$ superstring action // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Vol. 112, issue 5. — P. 051601. — arXiv: 1309.5850.

57. *Delduc F.*, *Magro M.*, *Vicedo B.* On classical q-deformations of integrable sigma-models // JHEP. — 2013. — Vol. 1311. — P. 192. — arXiv: 1308.3581.

58. *Devchand C.*, *Schiff J.* Hidden symmetries of the principal chiral model unveiled // Commun. Math. Phys. — 1998. — Vol. 190. — P. 675–695. — arXiv: hep-th/9611081.

59. *Din A.*, *Zakrzewski W.* General classical solutions in the CP^N model // Nuclear Physics B. — 1980. — Vol. 174, 2–3. — P. 397–406.

60. *Eichenherr H.*, *Forger M.* On the Dual Symmetry of the Nonlinear Sigma Models // Nucl. Phys. — 1979. — Vol. B155. — P. 381.

61. *Faddeev L.* How algebraic Bethe ansatz works for integrable model. — 1996. — arXiv: hep-th/9605187.

62. *Faddeev L.*, *Reshetikhin N.* Integrability Of The Principal Chiral Field Model In (1+1)-Dimension // Annals Phys. — 1986. — Vol. 167. — P. 227.

63. *Fateev V. A.* The sigma model (dual) representation for a two-parameter family of integrable quantum field theories // Nucl. Phys. B. — 1996. — Vol. 473. — P. 509–538.

64. *Forcrand P. de*, *Pepe M.*, *Wiese U.-J.* Walking near a Conformal Fixed Point: the 2-d O(3) Model at theta near pi as a Test Case // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol. 86. — P. 075006. — arXiv: 1204.4913.

65. *Fromholz P.*, *Capponi S.*, *Lecheminant P.*, *Papoular D. J.*, *Totsuka K.* "Haldane" phases with ultracold fermionic atoms in double-well optical lattices. — 2017. — arXiv: 1709.10409.

66. *Fulton W.*, *Harris J.* Representation theory. A first course. — 1st edition. — Springer, 1991. — 551p.

67. *Gates S.*, *Hull C.*, *Roček M.* Twisted multiplets and new supersymmetric non-linear σ-models // Nuclear Physics B. — 1984. — Vol. 248, issue 1. — P. 157–186.

68. *Ginzburg V.* Lectures on Nakajima's quiver varieties // Geometric methods in representation theory. I. Vol. 24. — Soc. Math. France, Paris, 2012. — P. 145–219. — (Sémin. Congr.)

69. *Givental A.* Stationary Phase Integrals, Quantum Toda Lattices, Flag Manifolds and the Mirror Conjecture // Topics in singularity theory, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 180, Amer. Math. Soc. — 1997. — P. 103–115. — arXiv: 9612001.

70. *Gödel K.* An Example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation // Rev. Mod. Phys. — 1949. — Vol. 21. — P. 447–450.

71. *Goldschmidt Y. Y.*, *Witten E.* Conservation Laws in Some Two-dimensional Models // Phys. Lett. B. — 1980. — Vol. 91. — P. 392–396.

72. *Gray A.* Nearly Kähler manifolds. // J. Differ. Geom. — 1970. — Vol. 4. — P. 283–309.

73. *Guest M. A.* Harmonic maps, loop groups, and integrable systems. — Cambridge University Press, 1997. — 194p.

74. *Haldane F.* Nonlinear field theory of large spin Heisenberg antiferromagnets. Semiclassically quantized solitons of the one-dimensional easy Axis Neel state // Phys.Rev.Lett. — 1983. — Vol. 50. — P. 1153–1156.

75. *Hitchin N. J.* Harmonic maps from a 2-torus to the 3-sphere // Journal of Differential Geometry. — 1990. — Vol. 31, issue 3. — P. 627–710.

76. *Hoare B.* Towards a two-parameter q-deformation of $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times M^4$ superstrings // Nucl. Phys. B. — 2015. — Vol. 891. — P. 259–295. — arXiv: 1411.1266.

77. *Hull C. M.*, *Witten E.* Supersymmetric Sigma Models and the Heterotic String // Phys. Lett. B. — 1985. — Vol. 160. — P. 398–402.

78. *Ivanov E. A.* Gauge Fields, Nonlinear Realizations, Supersymmetry // Phys. Part. Nucl. — 2016. — Vol. 47, issue 3. — P. 508–539.

79. *Joyce D.* Compact hypercomplex and quaternionic manifolds // J. Differential Geom. — 1992. — Vol. 35, issue 3. — P. 743–761.

80. *Kac V. G.* A Sketch of Lie Superalgebra Theory // Commun. Math. Phys. — 1977. — Vol. 53. — P. 31–64.

81. *Kenzelmann M.*, *Cowley R. A.*, *Buyers W. J. L.*, *Tun Z.*, *Coldea R.*, *Enderle M.* Properties of Haldane excitations and multiparticle states in the antiferromagnetic spin-1 chain compound CsNiCl_3 // Phys. Rev. B. — 2002. — June. — Vol. 66, issue 2. — P. 024407.

82. *Ketov S. V.* Quantum Non-linear Sigma-Models. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000. — 420p.

83. *Klimcik C.* Integrability of the bi-Yang-Baxter sigma-model // Lett. Math. Phys. — 2014. — Vol. 104. — P. 1095–1106. — eprint: 1402.2105.

84. *Klimcik C.* On integrability of the Yang-Baxter sigma-model // J. Math. Phys. — 2009. — Vol. 50. — P. 043508. — arXiv: 0802.3518.

85. *Koberle R., Kurak V.* Deconfinement In The $\mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1}$ Model By Massless Fermions // Phys.Rev.Lett. — 1987. — Vol. 58. — P. 627–628.

86. *Kostant B., Sternberg S.* Symplectic projective orbits // New directions in applied mathematics (Cleveland, Ohio, 1980). — Springer, New York-Berlin, 1982. — P. 81–84.

87. *Lajkó M., Wamer K., Mila F., Affleck I.* Generalization of the Haldane conjecture to SU(3) chains // Nucl. Phys. B. — 2017. — Vol. 924. — P. 508–577. — arXiv: 1706.06598.

88. *Lawson Jr. H. B.* Surfaces minimales et la construction de Calabi-Penrose // Astérisque. — 1985. — 121–122. — P. 197–211. — Seminar Bourbaki, Vol. 1983/84.

89. *Lieb E. H., Schultz T., Mattis D.* Two soluble models of an antiferromagnetic chain // Annals Phys. — 1961. — Vol. 16. — P. 407–466.

90. *Maldacena J. M.* The Large N limit of superconformal field theories and supergravity // Int. J. Theor. Phys. — 1999. — Vol. 38. — P. 1113–1133. — arXiv: hep-th/9711200 ; — [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].

91. *Maldacena J. M.* Wilson loops in large N field theories // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 80. — P. 4859–4862. — eprint: hep-th/9803002.

92. *Minahan J. A., Zarembo K.* The Bethe ansatz for N=4 superYang-Mills // JHEP. — 2003. — Vol. 0303. — P. 013. — arXiv: hep-th/0212208.

93. *Murray S., Sämann C.* Quantization of Flag Manifolds and their Supersymmetric Extensions // Adv.Theor.Math.Phys. — 2008. — Vol. 12. — P. 641–710. — arXiv: hep-th/0611328.

94. *Nakajima H.* Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces. Vol. 18. — American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. — 132p. — (University Lecture Series).

95. *Nekrasov N. A., Shatashvili S. L.* Supersymmetric vacua and Bethe ansatz // Nucl. Phys. Proc. Suppl. — 2009. — Vol. 192–193. — P. 91–112. — arXiv: 0901.4744.

96. *Pohlmeyer K.* Integrable Hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints // Communications in Mathematical Physics. — 1976. — Oct. — Vol. 46, issue 3. — P. 207–221.

97. *Polyakov A.* Gauge fields and strings. — Harwood Academic Publishers, 1987. — 301p.

98. *Rachel S., Greiter M.* Exact models for trimerization and tetramerization in spin chains // Phys. Rev. B. — 2008. — Vol. 78, issue 13. — P. 134415. — arXiv: 0809.2003.

99. *Randjbar-Daemi S.*, *Salam A.*, *Strathdee J.* Generalized spin systems and sigma models // Phys.Rev. — 1993. — Vol. B48. — P. 3190–3205. — arXiv: hep-th/9210145.

100. *Rao S.*, *Sen D.* Nonlinear field theory of a frustrated Heisenberg spin chain // Nucl. Phys. B. — 1994. — Vol. 424. — P. 547–566. — arXiv: hep-th/9210096.

101. *Read N.*, *Sachdev S.* Some Features Of The Phase Diagram Of The Square Lattice Su(N) Antiferromagnet // Nucl. Phys. B. — 1989. — Vol. 316. — P. 609–640.

102. *Rooman M.*, *Spindel P.* Gödel metric as a squashed anti-de Sitter geometry // Class. Quant. Grav. — 1998. — Vol. 15. — P. 3241–3249. — arXiv: gr-qc/9804027.

103. *Salamon S.* Harmonic and holomorphic maps // Lect. Notes Math. — 1985. — Vol. 1164. — P. 161–224. — [Geometry Semin. "Luigi Bianchi", Lect. Sc. Norm. Super., Pisa 1984].

104. *Shankar R.*, *Read N.* The $\theta = \pi$ Nonlinear σ Model Is Massless // Nucl. Phys. B. — 1990. — Vol. 336. — P. 457–474.

105. *Spindel P.*, *Sevrin A.*, *Troost W.*, *Van Proeyen A.* Extended Supersymmetric Sigma Models on Group Manifolds. 1. The Complex Structures // Nucl. Phys. B. — 1988. — Vol. 308. — P. 662.

106. *Sternberg S.* Minimal coupling and the symplectic mechanics of a classical particle in the presence of a Yang-Mills field // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1977. — Vol. 74, issue 12. — P. 5253–5254.

107. *Tsvelik A.* Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics. — Cambridge University Press, 2007. — 280p.

108. *Uhlenbeck K.* Harmonic maps into Lie groups: classical solutions of the chiral model // Journal of Differential Geometry. — 1989. — Vol. 30, issue 1. — P. 1–50.

109. *Wang H.-C.* Closed manifolds with homogeneous complex structure // Amer. J. Math. — 1954. — Vol. 76. — P. 1–32.

110. *Weinberg S.* The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications. — Cambridge University Press, 2005. — 489p.

111. *Weinstein A.* Neighborhood classification of isotropic embeddings // J. Differential Geom. — 1981. — Vol. 16, issue 1. — P. 125–128.

112. *Witten E.* A New Look At The Path Integral Of Quantum Mechanics. — 2010. — arXiv: 1009.6032.

113. *Witten E.* Topological Sigma Models // Commun.Math.Phys. — 1988. — Vol. 118. — P. 411.

114. *Wong S. K.* Field and particle equations for the classical Yang-Mills field and particles with isotopic spin // Nuovo Cim. — 1970. — Vol. A65. — P. 689–694.

115. *Wood J. C.* Harmonic maps into symmetric spaces and integrable systems // Harmonic maps and integrable systems. — Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1994. — P. 29–55. — (Aspects Math., E23).

116. *Wulff L.*, *Tseytlin A. A.* Kappa-symmetry of superstring sigma model and generalized 10d supergravity equations // JHEP. — 2016. — Vol. 1606. — P. 174. — arXiv: 1605.04884.

117. *Young C. A. S.* Non-local charges, Z(m) gradings and coset space actions // Phys. Lett. B. — 2006. — Vol. 632. — P. 559–565. — arXiv: hep-th/0503008.

118. *Zamolodchikov A. B.*, *Zamolodchikov A. B.* Factorized s Matrices in Two-Dimensions as the Exact Solutions of Certain Relativistic Quantum Field Models // Annals Phys. — 1979. — Vol. 120. — P. 253–291.

119. *Zinn-Justin J.* Path Integrals in Quantum Mechanics. — Oxford University Press, 2004. — 336p.

120. *Zinn-Justin J.* Quantum field theory and critical phenomena. — Clarendon Press, 2002. — 1054p.

Список иллюстраций

Рисунок 1.1. Максимальная параболическая подгруппа, стабилизирующая флаг. Стр. 29.

Рисунок 1.2. Разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_-$. Стр. 35.

Рисунок 1.3. Процедура, которая показывает, что из наличия цикла в полном ориентированном графе следует наличие циклического треугольника. Стр. 36.

Рисунок 1.4. Вершина-‘сток’ и вершина-‘источник’ в ориентированном графе. Стр. 37.

Рисунок 1.5. Примеры раскрашенных диаграмм Дынкина и соответствующих им пространств когерентных состояний. Стр. 41.

Рисунок 1.6. Применение теоремы Стокса при интегрировании по контуру, расположенному на сфере. Стр. 45.

Рисунок 2.1. Пространственно-временная решетка, используемая при построении континуального интеграла для оператора эволюции спиновой цепочки. Стр. 63.

Рисунок 2.2. Обозначения различных членов, входящих в разложение гамильтониана спиновой цепочки вблизи неелевского состояния. Стр. 74.

Рисунок 2.3. Фазовая диаграмма спиновой цепочки с гамильтонианом $\tilde{H}$. Стр. 80.

$$\tilde{H} = J_1 \sum_i \left(\cos\theta \, (\mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+1}) + \sin\theta \, (\mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+1})^2 \right) + J_2 \sum_i \left(\cos\theta \, (\mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+2}) + \sin\theta \, (\mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+2})^2 \right) .$$

Рисунок 3.1. Спиновая цепочка, порождающая σ-модель с таргет-пространством $\frac{U(6)}{U(2)\times U(2)\times U(1)\times U(1)}$. Стр. 91.

Рисунок 4.1. Допустимые инстантонные числа для различных комплексных структур на пространстве флагов $\frac{U(3)}{U(1)^3}$. Стр. 112.

Рисунок 5.1. Почти комплексные структуры на пространстве флагов $\frac{U(3)}{U(1)^3}$, обладающие следующим свойством: соответствующие почти голоморфные кривые являются решениями уравнений движения рассматриваемой в Главе 5 сигма-модели. Стр. 120.

Рисунок 6.1. Параметризация пространства флагов $\frac{U(3)}{U(1)^3}$, отвечающая простейшему колчану $L_1 \to L_2 \to \mathbb{C}^3$, где $L_1 \simeq \mathbb{C}$ и $L_2 \simeq \mathbb{C}^2$. Стр. 134.

Рисунок 6.2. Колчанная диаграмма, описывающая кэлеров фактор для пространства флагов. Стр. 138.

Рисунок 6.3. Форма матрицы калибровочного поля $(\mathcal{A}_{m-1})_z$, получающаяся за один шаг рекуррентной процедуры исключения вспомогательных полей из лагранжиана. Стр. 142.

Рисунок 6.4. Форма матрицы калибровочного поля $(\mathcal{A}_{m-1})_z$, получающаяся в конце рекуррентной процедуры исключения вспомогательных полей из лагранжиана. Стр. 142.