ОТЗЫВ

официального оппонента
о диссертации В. В. Пржиялковского
«Торические модели Ландау-Гинзбурга»,
представленной в качестве диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук по специальности 01.01.06 —
математическая логика, алгебра и теория чисел

Одна из самых активно развивающихся и резонансных тем в современной математике — тема зеркальной симметрии. Возникшая в конце 20-го века, своим появлением она обязана физической теории струн, описывающей поведение элементарных частиц. Математическая суть зеркальной симметрии выражается в том, что многие многообразия разбиваются на пары (хотя и неоднозначно определенные) похожих по своим инвариантам. В последнее время математиками было сформулировано много конкретных утверждений, уточняющих эту мысль. Одно из них, восходящее к Гивенталю, Хори и Вафе, — гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа, утверждающая существование парного семейства многообразий (так называемых моделей Ландау-Гинзбурга) для гладких многообразий Фано. Диссертационная работа В. В. Пржиялковского посвящена доказательству этой гипотезы для большого класса многообразий Фано.

Говоря о теме диссертации, нельзя не упомянуть о мощной гипотезе гомологической зеркальной симметрии, предложенной Концевичем в 1994 году и тесно связанной с гипотезой зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа. Эта гипотеза утверждает существование двух эквивалентностей категорий, одну из которых разным авторитетным математикам впоследствии удалось доказать для некоторых классов многообразий: для поверхностей дель Пеццо, торических многообразий и некоторых гиперповерхностей. Другая эквивалентность, как раз связанная с гипотезой зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа, оказалась гораздо сложнее, в связи с чем продвижения в последней представляются очень важными. В частности, по этой причине результаты диссертации выглядят весьма многообещающим направлением исследований, а тема диссертации, несомненно, актуальна в общематематическом контексте.

Более конкретно, целью диссертации является создание теории торических моделей Ландау-Гинзбурга, которые были определены диссертантом для объединения разных версий гипотез зеркальной симметрии. Основным модельным примером для их определения, а также для иллюстрации гипотезы зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа послужила конструкция Гивенталя модели Ландау-Гинзбурга для полных пересечений в гладких торических многообразиях; впоследствии она обобщалась в работах разных математиков. Основным достоинством этой конструкции, а также создаваемой диссертантом теории, является эффективность построения таких моделей Ландау-Гинзбурга. Автор формулирует усиленную версию гипотезы зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа, согласно которой для каждого гладкого многообразия Фано и дивизора на нем существует торическая модель Ландау-Гинзбурга, и доказывает ее для большого класса многообразий Фано, а именно:
Для поверхностей дель Пеццо и выбранных дивизоров на них. В этом случае предъявлена явная конструкция торических моделей Ландау-Гинзбурга. Более того, в этом случае доказаны подкорректированные гипотезы Кацаркова-Концевича-Пантева о зеркальной симметрии чисел Ходжа;
Для гладких трехмерных многообразий Фано. В этом случае построены также компактификации Калаби-Яу для торических моделей Ландау-Гизбурга, и явно построены торические вырождения трехмерных многообразий Фано основной серии, соответствующие их моделям. Кроме того, для компактификации Калаби-Яу торических моделей Ландау-Гизбурга многообразий Фано основной серии доказана оригинальная гипотеза, связывающая число Ходжа $h^{1,n-1}$ многообразия и число компонент приводимых слоев его модели Ландау-Гинзбурга. Автор также доказывает, что поляризация слоев компактифицированных торических моделей Ландау-Гинзбурга двойственна по Долгачеву-Никулину поляризации антиканонических сечений многообразий Фано, что позволяет описать эти модели в модулярных терминах и показывает связь этой конструкции с алгебраической теорией чисел. Наконец, в качестве приложения разработанной теории к классическим вопросам бирациональной геометрии найдена новая структура на множестве семейств гладких многообразий Фано: а именно, определены базовые линки, связывающие элементарными проекциями торические вырождения трехмерных многообразий Фано.
Для полных пересечений в проективных пространствах.

Наконец, построены слабые модели Ландау-Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах и для некоторых полных пересечений во взвешенных проективных пространствах. Также автор изучает свойства построенных моделей Ландау-Гинзбурга и их связь с инвариантами исходных многообразий Фано.

Перейдем к рассмотрению содержания диссертации. Диссертация полным объемом 249 страниц включает в себя Введение, 9 глав и список литературы, состоящий из 98 наименований.

Во введении диссертации приведен обзор известных результатов, относящихся к изучаемой теме, представлена литература по теме диссертационного исследования, обоснована актуальность темы и описана структура диссертации.

Глава 1 содержит необходимые для дальнейшего определения и конструкции.

В **Главе 2** определяется центральный объект исследования: торические модели Ландау-Гинзбурга, а также обсуждаются его свойства. В этой же главе сформулирована усиленная гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа.

В **Главе 3** эта гипотеза доказывается для поверхностей дель Пеццо. При этом исследуются торические вырождения поверхностей дель Пеццо и показывается, что этим вырождениям соответствуют торические модели Ландау-Гинзбурга. В этой же главе доказаны подкорректированные гипотезы Кацаркова-Концевича-Пантева о равенстве по-разному определенных чисел Ходжа для ручной компактификации лог-Калаби-Яу торических моделей Ландау-Гинзбурга.

Центральная для диссертации и самая большая **Глава 4** посвящена изучению моделей Ландау-Гинзбурга для трехмерных многообразий Фано. Сначала в этой главе обсуждаются слабые модели Ландау-Гинзбурга для таких многообразий, то есть многочлены Лорана, удовлетворяющие некоторому условию. Далее строятся компактификации лог-Калаби-Яу для слабых моделей и торические вырождения для многообразий Фано основной серии. Значительная часть главы посвящена доказательству теоремы о слоях компактификации Калаби-Яу торической модели Ландау-Гинзбурга для многообразий Фано основной серии, удовлетворяющих условию Долгачева-Никулина. Из теоремы следует единственность, с точностью до флопов, компактификации таких торических моделей.

В **Главе 5** строятся торические модели Ландау-Гинзбурга для полных пересечений в проективных пространствах.

Глава 6 посвящена моделям Ландау-Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах.

В **Главе 7** формулируется гипотеза, связывающая число Ходжа $h^{1,n-1}$ многообразия Фано и число компонент приводимых слоев компактификации его модели Ландау-Гинзбурга. Она доказывается для трехмерных многообразий Фано основной серии, а также для полных пересечений.

В **Главе 8** изучается связь между различными трехмерными многообразиями Фано основной серии через элементарные преобразования (базовые линки) между их торическими вырождениями. Эти преобразования определяют элементарные перестройки соответствующих торических моделей Ландау-Гинзбурга, по которым многообразия Фано можно восстановить путем сглаживания. Тем самым, построенные в 4 главе торические модели Ландау-Гинзбурга применяются для обнаружения новых связей на множестве семейств гладких многообразий Фано.

В **Главе 9** приводится гипотеза, утверждающая существование неф-разбиения для любого взвешенного полного пересечения Фано. Такие неф-разбиения позволяют строить слабые модели Ландау-Гинзбурга при помощи подходящей модификации конструкции Гивенталя. В частности, они строились также в главах 5 и 6. В главе 9 эта гипотеза доказывается для нескольких дополнительных частных случаев, в частности, для пересечений дивизоров Картье и полных пересечений коразмерности 2.

В целом диссертация показывает, что создание теории торических моделей Ландау-Гизбурга для решения гипотезы зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа является весьма перспективным подходом, требующим дальнейшего развития, в том числе и с помощью методов, введенных В. В. Пржиялковским. Несомненно, что В. В. Пржиялковскому удалось внести существенный вклад в решение гипотезы зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа, получив при этом важные конкретные результаты.

Конструкции и доказательства диссертационной работы явно показывают высокий уровень технической подготовленности диссертанта в одной из сложнейших областей современной математики, а также не менее высокий уровень общематематической культуры. Диссертация изложена ясным языком и достаточно объемно и иллюстративно оформлена.

Из замечаний: в тексте было обнаружено незначительное количество незначительных опечаток (например, на страницах 26, 133), что однако ни в коей мере не влияет на "читабельность"диссертации и не приводит к непониманию текста. Еще одно замечание — отсутствие выделенного заключения, в котором были бы представлены дальнейшие перспективы исследований, тем более, что об этих перспективах много говорится в самом тексте диссертации. Однако эти замечания нисколько не снижают высокой оценки диссертации.

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в алгебраической геометрии, теории категорий, теории чисел, зеркальной симметрии, математической физике.

Основные результаты диссертации новы, получены ее автором лично и обоснованы тщательными и подробными доказательствами. Они своевременно опубликованы: список публикаций по теме диссертации насчитывает 12 наименований, большая часть из которых — публикации в центральных российских и зарубежных изданиях.

Результаты диссертации были представлены на многих научных конференциях и семинарах как в России, так и за рубежом. Они вызвали значительный интерес специалистов и получили достаточное признание.

Полученные результаты могут быть использованы специалистами в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском Отделении Математического института РАН, в Московском, Новосибирском, Санкт-Петербургском государственных университетах, Высшей школе экономики, других высших учебных заведениях.

Диссертационная работа В. В. Пржиялковского «Торические модели Ландау-Гинзбурга» соответствует специальности 01.01.06 — «математическая логика, алгебра и теория чисел», по которой она представлена к защите. Автореферат подробно и полно отражает содержание диссертации.

Представленная диссертация удовлетворяет требованиям, предъявляемым ВАК к докторским диссертациям, а ее автор, Пржиялковский Виктор Владимирович, заслуживает присвоения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — «математическая логика, алгебра и теория чисел».

Официальный оппонент,
доцент кафедры Дифференциальной геометрии и приложений
механико-математического факультета
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
"Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова"
доктор физико-математических наук
(специальность – 01.01.06)
10 сентября 2017 г.

Москва, Воробьевы горы, МГУ
главное здание, ауд. 16-19
тел. (495) 939-39-40
email: azheglov@math.msu.su

(А. Б. Жеглов)

Подпись Жеглова А. Б.
заверяю: специалист по
кадрам Филатьева Л. В.