ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию
Жеглова Александра Борисовича
"Пучки без кручения на многообразиях и интегрируемые системы",
представленную на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук по специальности 01.01.06
- математическая логика, алгебра и теория чисел

Актуальность темы. Классические проблемы явного построения семейств коммутирующих дифференциальных операторов (ДО) и классификации колец коммутирующих ДО в частных производных (ДОЧП) лежат на стыке алгебры, теории уравнений в частных производных и теории интегрируемых систем, и поэтому неизменно привлекают внимание математического сообщества уже на протяжении более чем столетия. Впервые они появились и исследовались в работах Г.Валленберга (1903), И.Шура (1905) и Дж.Бурхнала-Т.Чаунди (1928), Х.Бейкера (1928). В 70-ых г.г. этим исследованиям был дан новый мощный импульс в работах И.М.Кричевера (1977-1978), И.М.Кричевера и С.П.Новикова (1978), Д.Мамфорда (1978, 1980) и других, в которых была обнаружена тесная связь этой проблематики с современной алгебраической геометрией. В частности, И.М.Кричевер получил классификацию колец коммутирущих обыкновенных ДО для гладких спектральных кривых в терминах геометрических спектральных данных. Эти данные представляют собой проективные гладкие спектральные кривые этих колец, снабженные спектральным пучком - стабильным векторным расслоением, сечения которого определяются через функции Бейкера-Ахиезера пары коммутирующих ДО, а также некоторым дополнительным оснащением (параметрами Тюрина). Кричевером также изложен метод эффективного построения коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов (ОДО) произвольных порядков. Классификация Кричевера впоследствии была переформулирована на абстрактном алгебро-геометрическом языке. Так, на случай особых спектральных кривых она была модифицирована Мамфордом (1989), а абстрактная алгебро-геометрическая версия соответствия между спектральными данными и кольцами ОДО была дана В.Г.Дринфельдом (1977). А.Н.Паршин (2001) определил аналог отображения Кричевера для алгебраических поверхностей, точнее, для геометрических данных (данных Паршина), состоящих из Коэн-Маколеевой поверхности, обильного дивизора Картье на ней, регулярной точки на этом дивизоре и, дополнительно, векторного расслоения на поверхности и некоторых данных тривиализации. Образом отображения является некоторое бесконечномерное подпространство (обобщенное фредгольмово) в двумерном локальном поле, рассматриваемое как точка бесконечномерного грассманиана Сато. Д.В.Осипов (2001) обобщил это отображение на данные произвольной размерности, В то же время А.Н.Паршин (1999) развил элементы техники Шура для колец многомерных псевдо-ДО, а также исследовал в этих кольцах аналог иерархии Кадомцева-Петвиашвили (КП). Таким образом, появилась перспектива того, что грассманов подход к задаче классификации может быть применен и для случая большого количества переменных. Обобщенное отображение Кричевера-Паршина, будучи инъективым, не являлось сюръективным. Эта техническая проблема была решена в работе Х.Курке, Д.Осипова и А.Жеглова (2009), в которой они построили новый тип геометрических данных - формальные проколотые ленты (риббоны) и пучки без кручения на них, на который переносится обобщенное отображение Кричевера-Паршина, устанавливающее биекцию между этими данными и обобщенными фредгольмовыми подпространствами в двумерном локальном поле.

Целью настоящей диссертации А.Б.Жеглова является новое существенное развитие алгебро-геометрического подхода к проблеме классификации колец коммутирующих ДОЧП. Для этого в работе исследуются свойства колец коммутирующих ДО со скалярными коэффициентами, играющих важную роль для решения вышеуказанных классических проблем, а также доказательство существования бесконечных серий коммутирующих операторов в первой алгебре Вейля, лежащих в разных орбитах действия группы автоморфизмов.

Диссертация состоит из введения, шести глав, разбитых на параграфы, и списка литературы. Во введении дается краткий обзор ранее известных результатов и результатов диссертации. Первая глава носит вводный характер. В ней напоминаются необходимые сведения и результаты о классификации колец ОДО, модифицированной по Мамфорду-Муласе, в том числе о классификации в терминах точек большой клетки грассманиана Сато. Напоминается конструкция отображения Кричевера в размерности один, доказываются его свойства, необходимые для последующего изложения, и напоминается связь с классической теорией уравнения КП.

Во второй главе напоминаются необходимые сведения и известные результаты о свойствах колец ДОЧП. Затем доказывается основной результат этой главы - теорема об общих свойствах спектральных данных, одновременно служащая определением алгебро-геометрических спектральных данных колец коммутирующих ДО, удовлетворяющих условиям определенного вида.

В третьей главе излагается теория, посвященная классификации коммутативных подалгебр в пополненной алгебре ДО от двух переменных. Сначала вводятся обозначения и определения и доказываются основные свойства пополненной алгебры дифференциальных операторов $\hat{D}$. Затем вводятся дополнительные определения технического характера, необходимые для дальнейшего изложения, а также доказываются утверждения о том, что кольца коммутирующих операторов в алгебре ДО, порожденные операторами с постоянными старшими символами, приводятся линейными заменами переменных к некоторому специальному виду. Этот раздел является отчасти мотивировкой для разработки последующей теории. Далее в этой главе излагается аналог теории Шура для подкольца $\hat{E}_+$ пополненного кольца двумерных псевдо-ДО, содержащего положительные степени оператора дифференцирования. Для охвата возможно большего класса операторов из $\hat{D}$ вводятся подкольца в $\hat{E}_+$ с особыми условиями роста на коэффициенты операторов (так называемыми условиями (A_α)). При значении $\alpha = 1$ эти условия играют специфическую роль для классификации коммутативных подколец в терминах алгебро-геометрических спектральных данных. В оставшейся части главы дается классификация 1-квази-эллиптичееких колец коммутирующих операторов в терминах подпространств определенного вида (пар Шура) двумерного локального поля. Здесь доказываются аналоги теорем Сато (описывающих соответствие между точками большой клетки грассманиана Сато и операторами из группы Вольтерра) для подпространств в локальном поле, снабженном стандартной топологией. Глава завершается классификацией операторов в терминах геометрических данных. Для этого доказывается эквивалентность категории пар Шура и категории геометрических данных.

Особенно интересна с алгебро-геометрической точки зрения четвертая глава, в которой излагается теория формальных пунктированных лент (риббонов) и пучков без кручения на них. В первом разделе этой главы вводятся определения риббонов и пучков без кручения на них, доказываются технические алгебраические результаты о свойствах когерентности пучков без кручения на риббонах и о пополнении пучков на риббонах. Для этого вводится еще одно важное понятие, используемое в дальнейшем – гладкая точка риббона и пучка

без кручения на нем. Далее напоминается конструкция Паршина, строящая по геометрическим спектральным данным пару подпространств (новую версию пар Шура, связанную с парами Шура из главы 3) в двумерном локальном поле, а также ее обобщение на данные, состоящие из риббона и пучка без кручения на нем. В конце раздела доказывается теорема классификации данных, состоящих из риббона, пучка без кручения на нем, и некоторых тривиализаций, в терминах новых пар Шура, а также подробно объясняется связь новых пар Шура с парами Шура из главы 3. Затем вводится понятие "картинных" когомологий как когомологии некоторого комплекса, построенного по паре Шура. В случае, когда риббон и пучок происходят из геометрических спектральных данных, эти когомологии совпадают с когомологиями спектрального пучка на поверхности. Преимуществом этих когомологий является их легкая вычислимость и наглядность. Результаты этого раздела используются в следующем разделе и главе 5.

Во втором разделе главы 4 излагаются результаты о группе и о функторе Пикара риббона, доказываются основные свойства функции порядка, определенной на структурном пучке риббона и играющей важную роль при изучении группы Пикара риббона. Приводится результат о строении группы Пикара риббона, определенного над артиновым кольцом. Определяются функторы Пикара риббона и соответствующей риббону формальной схемы на категории аффинных нетеровых схем, и излагаются результаты о формальной группе Пикара и формальной группе Брауэра риббона. Эти результаты используются далее для доказательства глобальной представимости функтора Пикара. В этом же разделе доказывается ряд технических результатов о формальных группах Брауэра алгебраической поверхности и риббона, о формальной группе Пикара риббона, а также теорема об обращении в ноль, необходимая для доказательства теорем представимости. В заключение этого раздела доказывается представимость функтора Пикара риббона и его аналогов.

В пятой главе изложены результаты об общих геометрических свойствах данных (алгебраическая поверхность, доминантный морфизм некоторой схемы на нее, квазикогерентный пучок на схеме) из главы 3, и о необходимых условиях, выделяющих среди них спектральные данные алгебр коммутирующих ДОЧП. В конце главы доказываются теорема о преобразованиях Дарбу алгебр ДО с рациональной спектральной поверхностью и теорема о проективном пополнении аффинной плоскости. Последний результат особенно замечателен, так как он показывает, что развитые в диссертации методы, априори относящиеся к теории ДОЧП, оказывются эффективными в решении задач классической алгебраической геометрии и комплексного анализа. Это служит прекрасной манифестацией общего принципа о единстве математики.

Последняя, шестая глава посвящена разбору уже известных примеров коммутирующих ДО и коммутирующих разностных операторов с точки зрения новой теории, построению новых примеров коммутирующих операторов в пополненном кольце ДО, и исследованию их деформаций, описываемых модификациями двумерных аналогов иерархии КП. В первом разделе главы обсуждается широкий класс примеров так называемых "тривиальных" коммутативных алгебр ДО. Найден критерий для описания геометрических данных таких алгебр. Во втором разделе разбираются примеры флагов (поверхностей, дивизор, точка), для которых можно явно вычислить все возможные геометрические данные ранга один и соответствующие пары Шура и алгебры коммутирующих операторов. Попутно получаются примеры поверхностей, которые не могут быть спектральными поверхностями максимальных колец ДО. В третьем разделе определяются модифицированные системы Паршина, а в конце раздела приводится пример геометрических данных, построенных по паре Шура, соответствующие им коммутирующие операторы в кольце ДО, пример модифицированной

системы, определяющей деформации операторов, некоторые ее уравнения – аналоги уравнения Кортевега-де Фриза из классической теории КП, а также точные решения – аналоги рациональных решений уравнения Кортевега-де Фриза.

Основные результаты диссертации. Суммируя вышесказанное, отметим следующие основные результаты диссертации.

– Доказано существование бесконечных серий коммутирующих операторов в первой алгебре Вейля со спектральными кривыми произвольного рода, лежащих в разных орбитах относительно действия группы автоморфизмов.

– Определены алгебро-геометричеекие спектральные данные для алгебр коммутирующих ДОЧП с пустым пересечением характеристических дивизоров и исследованы их основные свойства.

– В пополненном кольце ДОЧП от двух переменных определен класс коммутативных подалгебр, включающий в себя алгебры коммутирующих ДО в частных производных. Алгебры из этого класса классифицированы в терминах специальных подпространств двумерного локального поля (пар Шура) и в терминах геометрических данных (модифицированных данных Паршина).

– Определены формальные проколотые ленты (риббоны) и пучки без кручения на них и исследованы их основные свойства. Доказана восстанавливаемость модифицированных данных Паршина по связанным с ними риббону и пучку без кручения на нем. Установлена биекция между этими объектами и обобщенными фредгольмовыми подпространствами в двумерном локальном поле,

– Изучена группа Пикара риббонов. В частности, доказана про-представимость функтора Пикара для риббонов, удовлетворяющих определенным условиям.

– Получены необходимые условия на геометрические данные, выделяющие среди них спектральные данные алгебр коммутирующих ДОЧП. Как следствие, получены результаты о преобразованиях Дарбу колец ДО с рациональной спектральной поверхностью, и о пополнении аффинной плоскости.

Научная новизна и степень обоснованности результатов диссертации. Все полученные в диссертации результаты являются новыми. Они снабжены полными и строгими математическими доказательствами. Результаты полностью опубликованы в центральных отечественных математических журналах и рецензируемых зарубежных журналах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Замечания. Следующие замечания касаются найденных в тексте незначительных опечаток.

На странице 14, в пятой строке снизу в слове "уравнения"пропущена буква "н".

На странице 17 в формулировке леммы 3 в соответствии с определением 1 перед выражением "... коммутативная подалгебра..."следует добавить слово "эллиптическая".

На странице 20 в формулировке теоремы 1 имеется опечатка в слове "самосопряжен".

На странице 50, строка 12, в фразе "P обратим E" пропущен союз "в"перед "E".

На странице 139, строка 9 снизу, формулу "$...U \supset s$" следует писать "$...U \ni s$".

Необходимо отметить, что все вышеуказанные замечания нисколько не влияют на математическое содержание диссертации.

В заключение следует заметить, что настоящая диссертационная работа является законченным математическим исследованием и представляет собой новый существенный вклад в алгебраическую геометрию, теорию уравнений в частных производных и теорию интегрируемых систем. Диссертация написана ясным и точным математическим языком. Считаю, что диссертация "Пучки без кручения на многообразиях и интегрируемые системы" удовлетворяет требованиям пп. 9-11 "Положения о порядке присуждения ученых степеней"

постановления Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 г. № 842, а ее автор, Жеглов Александр Борисович, несомненно заслуживает присвоения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
доктор физико-математических наук по
специальности 01.01.06 – "математическая
логика, алгебра и теория чисел"
профессор, факультет математики,
профессор

Тихомиров Александр Сергеевич

Почтовый адрес: 119048, Москва, ул. Усачева, 6, к. 313.
тел. +7(495)7729590*12753
E-mail: astikhomirov@mail.ru

04.10.2016

Подпись заверяю
04.10.2016
специалист по кадрам