ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации А. Б. Жеглова "Пучки без кручения на многообразиях и интегрируемые системы", представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 (математическая логика, алгебра и теория чисел).

Влияние математики и физики друг на друга является самым плодотворным взаимодействием различных областей знания, и одно из центральных мест тут принадлежит взаимодействию между алгебраической геометрией и математической физикой, последние десятилетия они развиваются в тесном взаимодействии друг с другом. Ясно видимая тенденция состоит в том, что развитые при этом методы и понятия находят все больше применений в других областях математики.

Диссертационная работа А. Б. Жеглова посвящена изучению алгебро-геометрических свойств спектральных данных коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных с помощью алгебро-геометрических и теоретико-числовых методов, развивавшихся в школе А. Н. Паршина. Плодотворность алгебро-геометрических методов подтверждена богатой историей классического одномерного случая коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов, особенно в связи с развитием метода обратной задачи интегрирования нелинейных уравнений.

С другой стороны, много важных вопросов, решенных в размерности один, остаются все ещё не прояснёнными в многомерном случае. Поэтому синтез уже известных алгебро-геометрических методов и новых идей из алгебраической теории чисел, в совокупности с хорошо развитыми отечественной школой методами математической физики, выглядит весьма многообещающим направлением исследований, а тема диссертации, несомненно, актуальна в общематематическом контексте.

Более конкретно. Центральный объект изучения диссертации – коммутативные кольца дифференциальных операторов со скалярными коэффициентами и их алгебро-геометрические спектральные данные, состоящие, в частности, из проективного алгебраического многообразия, дивизора "на бесконечности" и спектрального пучка. Отмечу, что для коммутативных колец *обыкновенных дифференциальных операторов* имеется классификационная теорема И. М. Кричевера, и хорошо развитый (ленинградской и московской школами) метод конечнозонного интегри-

рования, но уже для операторов *от двух переменных* ситуация много хуже. В частности, для обыкновенных дифференциальных операторов удаётся использовать аппарат тета-функций на якобиане спектральной кривой, приводящий, к явным формулам для коммутирующих операторов, и дающий решения важнейших нелинейных уравнений математической физики, а для операторов от двух переменных обратная задача не решена: неизвестно, по каким именно спектральным данным конструируются кольца коммутирующих дифференциальных операторов, есть ли аналоги точных формул.

В работе диссертанта разрабатывается универсальный подход к решению этой задачи для операторов от двух и более переменных, обобщающий теорию для обыкновенных дифференциальных операторов, и основанный на исследовании спектральных пучков на особых проективных алгебраических многообразиях. В частности, формулируется гипотетический ответ для коммутативных алгебр ранга один.

Перейду к рассмотрению содержания диссертации. Во введении диссертации приведен обзор известных результатов, относящихся к изучаемой теме, а также описана программа исследования. В первой главе диссертации сначала напоминается классическая теория классификации коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов, восходящая к И. М. Кричеверу. Потом, с помощью методов проективной алгебраической геометрии, в этой главе доказывается нетривиальный результат о существовании бесконечных серий коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами. Этот результат усиливает, существовавшие до того, теоремы А. Е. Миронова и О. И. Мохова. Таким образом, развитые методы вполне применимы как раз в тех случаях, которые были недоступны для изучения ранее имевшимися средствами. Далее в диссертации вводится понятие алгебро-геометрических спектральных данных для колец коммутирующих дифференциальных операторов и доказывается теорема об их общих свойствах. В частности, в этой главе появляется один из центральных объектов изучения, играющий важную роль во всей теории: пучок без кручения с определенными свойствами. Эти свойства существенно ограничивают возможную геометрию спектральных многообразий колец от двух и более переменных, в отличие от классического одномерного случая, где на геометрию спектральных кривых нет никаких ограничений.

После этого в диссертации излагается обобщение теоремы Кричевера для коммутативных подалгебр операторов в пополненной алгебре дифференциальных операторов от двух переменных. Более конкретно. Сначала вводится некоторое пополнение алгебры дифференциальных операторов от двух переменных со скалярными коэффициентами; такое пополнение содержит как саму алгебру дифференциальных операторов, так и некоторые разностные операторы. Затем развивается аналог теории Шура для операторов в этом пополнении. После этого строится аналог теории М. Сато, и с помощью этих теорий классифицируются коммутативные подалгебры в терминах пар Шура и в терминах геометрических данных (модифицированных данных Паршина), обобщающих геометрические спектральные данные из Главы 2 в размерности два. Интересные вопросы о более тонких свойствах этих геометрических данных, а также о том, какие из них описывают коммутативные подалгебры собственно дифференциальных операторов, исследуются в оставшейся части диссертации. Это делается в том числе с помощью изучения новых алгебро-геометрических объектов формального характера – риббонов. Плодотворность введенных понятий, конструкций и методов продемонстрирована доказательством теорем о замыкании аффинной плоскости и о преобразовании Дарбу алгебр коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных с рациональной спектральной поверхностью.

Помимо этого, диссертация содержит результаты, связанные с описанием необходимых и достаточных условий на спектральные данные, выделяющих класс “тривиальных” коммутативных алгебр, описание некоторых известных примеров с точки зрения новой теории, примеры алгебраических поверхностей, не являющихся спектральными, новые примеры коммутативных колец в пополненном кольце дифференциальных операторов. В диссертации отмечено, что в целом теория может быть в будущем перенесена в высшие размерности, что открывает большие перспективы.

В целом диссертация показывает, что применение разрабатываемых алгебро-геометрических методов к изучению спектральных данных является весьма перспективным подходом, требующим дальнейшего развития, в том числе и с помощью методов, введенных А. Б. Жегловым. Несомненно, что А. Б. Жеглову удалось внести существенный вклад в решение многомерной обратной задачи, получив при этом важные кон-

кретные результаты.

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в алгебраической геометрии, теории интегрируемых систем, теории представлений и других областях современной математики.

Основные результаты диссертации новы, получены её автором лично и обоснованы тщательными и подробными доказательствами. Они своевременно опубликованы: список публикаций по теме диссертации насчитывает 11 наименований, большая часть из которых – публикации в центральных российских и зарубежных изданиях.

Результаты диссертации были представлены на многих научных конференциях и семинарах как в России, так и за рубежом. Они вызвали значительный интерес специалистов и получили достаточное признание.

Полученные результаты могут быть использованы специалистами в Институте математики СО РАН, Математическом институте им. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском Отделении Математического института РАН, в Московском, Новосибирском, Санкт-Петербургском государственных университетах, Высшей школе экономики, других высших учебных заведениях.

Считаю, что диссертационная работа А. Б. Жеглова "Пучки без кручения на многообразиях и интегрируемые системы" соответствует специальности 01.01.06 – "математическая логика, алгебра и теория чисел", по которой она представлена к защите. Автореферат подробно и полно отражает содержание диссертации. Считаю, что автор этой диссертации, Жеглов Александр Борисович, заслуживает присвоения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – "математическая логика, алгебра и теория чисел".

Официальный оппонент, ведущий сотрудник
федерального государственного бюджетного
учреждения науки Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В.А.Стеклова
Российской академии наук
доктор физ.-мат. наук М.В.Бабич
специальность 01.01.06
23 сентября 2016 г.

Подпись М. В. Бабича удостоверяю

191023, Санкт-Петербург,
наб. р. Фонтанка, д.27
e-mail: mbabich@pdmi.ras.ru

Подпись руки М. В. Бабича
УДОСТОВЕРЯЮ
Помощник директора ПОМИ РАН
А.Н. Антонова
09 2016 г.