ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу И.В.Садовничей «Вопросы равносходимости для операторов Штурма-Лиувилля и Дирака», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертационная работа И. В. Садовничей посвящена задачам равносходимости спектральных разложений. Изучается оператор Штурма–Лиувилля на конечном отрезке и на всей оси и система Дирака на конечном отрезке.

Задачи равносходимости имеют большую историю. Первые результаты в этой области появились более ста лет назад в работах В. А. Стеклова, Я. Д. Тамаркина, М. Стоуна и А. Хаара. При этом данная тематика оставалась все последующие годы актуальной, привлекая внимание многих известных математиков. Результаты о равносходимости получали Б. М. Левитан, В. А. Марченко, А. П. Хромов, В. А. Ильин и многие другие. В наше время вопросами равносходимости активно занимаются несколько групп исследователей и в России, и за рубежом. В частности, к результатам И. В. Садовничей близки работы П. Джакова и Б. С. Митягина. Исследования в данной области продолжаются, многие вопросы здесь остаются открытыми.

Кратко остановимся на содержании работы. Диссертация состоит из четырех глав, введения и заключения, содержит 204 страницы, список литературы включает 107 наименований. В первой главе рассмотрен оператор Штурма–Лиувилля $ly = -y'' + qy$ на всей оси. Потенциал q предполагается вещественным и равномерно локально суммируемым. А именно,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+h} |q(t)|dt < +\infty,$$

для некоторого $h > 0$. Известно, что такого рода потенциал порождает самосопряженный оператор L в $L_2(\mathbb{R})$. Тогда корректно определена спектральная функция $\theta(x, y, \lambda)$ этого оператора и спектральное разложение

$$(S_\lambda f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, d\theta(x, y, \lambda).$$

В первой главе диссертационной работы получено асимптотическое разложение для $\theta(x, y, \lambda)$ при $\lambda \to +\infty$. На основе этого доказана теорема о равносходимости

$$\|S_\lambda f - S^0_\lambda f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \to 0, \qquad \lambda \to +\infty,$$

т.е. равномерно на $\mathbb{R}$. Здесь $S_\lambda^0 f$ — спектральное разложение для оператора с нулевым потенциалом. Такая равносходимость имеет место для всех функций f вида $f = d\varphi + g$, где $g \in L_2(\mathbb{R})$, а $\varphi \in BV(\mathbb{R})$. Соискатель применяет методы, разработанные В. А. Марченко и Б. М. Левитаном, но в отличие от них, доказывает оценки равномерно на всей оси, а не только на компактах.

Вторая глава посвящена изучению оператора Штурма–Лиувилля на конечном отрезке с потенциалом — распределением и краевыми условиями Дирихле. А именно, предполагается, что $q = u'$, где $u \in L_2[0,\pi]$ — комплекснозначная функция. Спектральное разложение здесь есть частичная сумма ряда

$$(S_m f)(x) = \sum_{n=1}^{m} (f, z_n(x)) y_n(x),$$

где $\{y_n\}_1^\infty$ — собственные и присоединенные функции оператора, а $\{z_n\}_1^\infty$ — биортогональная система. Показано, что для произвольной функции $f \in L_2[0,\pi]$ будет иметь место равномерная на всем отрезке равносходимость

$$\|S_m f - S_m^0 f\|_{L_\infty[0,\pi]} \to 0, \qquad m \to +\infty.$$

Здесь $S_m^0 f$ — спектральное разложение для оператора с нулевым потенциалом; оно совпадает с частичной суммой ряда Фурье функции f по системе синусов. Результаты о равносходимости для операторов с потенциалами такого вида и регулярными краевыми условиями были получены в работах П. Джакова и Б. С. Митягина, однако раскладываемая функция f выбиралась из пространства L_2 с дополнительным условием — суммируемость коэффициентов Фурье в квадрате с логарифмическим весом. Полученный в диссертации результат является весьма глубоким и нетривиальным. Соискателю пришлось проделать здесь тонкую работу для того, чтобы получить результат для произвольной квадратично суммируемой функции без дополнительных условий.

Пусть $W_2^\theta[0,\pi]$ пространство Соболева с дробным показателем гладкости $\theta \in [0,1/2)$. Для случая $f \in W_2^\theta$ соискателем получены оценки скорости равносходимости. Кроме того, найдены различные достаточные условия на потенциал $q = u'$, $u \in L_\infty[0,\pi]$, обеспечивающие равносходимость спектральных разложений произвольной суммируемой функции f.

В третьей главе изучается тот же оператор, что и во второй главе, но изучены другие пространства потенциалов q. Установлена равносходимость разложений по норме пространства Соболева $W_2^\theta[0,\pi]$ и пространства Гельдера $C^\theta[0,\pi]$ для случая, когда $u \in W_2^\theta[0,\pi]$, $(0 < \theta < 1/2)$, а раскладываемая функция $f \in L_2[0,\pi]$. Кроме того, для равносходимости в пространствах Соболева получены оценки скорости равносходимости, равномерные по шару $u \in B_{\theta,R} = \{u : \|u\|_{W_2^\theta} \le R\}$.

В главе 4 рассматривается вопрос о равносходимости спектральных разложений двух одномерных операторов Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ и $\mathcal{L}_{0,U}$ на отрезке $[0,\pi]$. Матричный потенциал $P(x)$ является комплексным и суммируемым. Краевые условия U предполагаются произвольными регулярными по Биркгофу. Доказано, что в случае $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa \in (1,\infty]$, имеет место равносходимость по норме пространства $L_\nu[0,\pi]$, $\nu \in [1,\infty]$, для произвольной вектор–функции $\mathbf{f} \in L_\mu[0,\pi]$, $\mu \in [1,\infty]$, если индексы $\varkappa$, μ и ν

удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{\varkappa}+\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}\leq 1$$

(исключением является случай $\varkappa=\nu=\infty$, $\mu=1$). Отметим, что в работах П. Джакова и Б. С. Митягина этот результат был получен в частном случае, когда $\varkappa=\mu=2$, $\nu=\infty$, а коэффициенты Фурье раскладываемой функции суммируемы в квадрате с логарифмическим весом. Здесь, как и в случае оператора Штурма-Лиувилля соискателю удалось снять это условие. Кроме того, и это является одним из основных достижений соискателя, постановка задачи равносходимости была существенно расширена. Равносходимость изучалась уже в шкалах пространств. Такая постановка создает простор для теоретических исследований и, несомненно, будет востребована во многих задачах математической физики. Утверждение теоремы о равносходимости, в частности, позволяет установить базисность системы корневых функций регулярного оператора Дирака в любом из пространств $L_\mu[0,\pi]$, $\mu\in(1,+\infty)$. Для оператора Дирака с произвольными сильно регулярными по Биркгофу краевыми условиями и потенциалом $P\in L_2[0,\pi]$, получена оценка скорости равносходимости по норме пространства $L_\infty[0,\pi]$ для случая, когда раскладываемая функция $\mathbf{f}\in W_2^\theta[0,\pi]$, $0<\theta\leq 1$, и удовлетворяет краевым условиям.

Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Новым является и сформулированный И. В. Садовничей взгляд на задачу равносходимости, состоящий в рассмотрении троек пространств: пространства, содержащего потенциал q, пространства раскладываемых функций и пространства, по норме которого изучается равносходимость.

Работа носит теоретических характер. Методы и результаты диссертационной работы могут быть использованы в спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и систем, в теории полугрупп, а также при построении математических моделей различных прикладных задач.

Все результаты диссертационной работы являются достоверными и получены с помощью строгих математических доказательств. Все основные результаты диссертации своевременно опубликованы в статьях, входящих в перечень ВАК РФ.

Замечания. Приведенные ниже два замечания носят методический характер и не влияют на общую положительную оценку результатов диссертации.

1) Близкие к рассмотренным в диссертации вопросы о скорости равносходимости были исследованы в работах В.С. Рыхлова [Results in Mathematics 29, no.1 (1996), 153-168 и др.]. Следовало бы сослаться на эти результаты и сравнить их с результатами, полученными в диссертации.

2) Объектом исследования в главе 4 является дифференциальный оператор (4.1) и связанная с ним система дифференциальных уравнений, которую автор называет системой Дирака. На самом деле это не система Дирака, а так называемая система AKNS. Эта система может быть сведена к системе Дирака известной заменой. Поэтому результаты главы 4 для системы AKNS могут быть переформулированы для системы Дирака, что и следовало бы сделать в диссертации.

Заключение. Диссертационная работа И. В. Садовничей «Вопросы равносходимости для операторов Штурма–Лиувилля и Дирака» является цельным и законченным научным исследованием. Содержание диссертационного исследования соответствует специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации. Работа соответствует «Положению о присуждении ученых степеней». Она удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым Высшей аттестационной комиссией Министерства образования и науки Российской Федерации к диссертационным работам на соискание ученой степени доктора физико–математических наук. Автор, Садовничая Инна Викторовна, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
Доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математической физики и
вычислительной математики
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
"Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского"

специальность - 01.01.01

Юрко Вячеслав Анатольевич
e-mail: YurkoVA@info.sgu.ru, Tel: (8452)515538
г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Подпись В.А. Юрко удостоверяю
Ученый секретарь
доцент
"8" 11