ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертационную работу И.В.Садовничей «Вопросы равносходимости для операторов Штурма–Лиувилля и Дирака», представленную на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертационной работе И. В. Садовничей изучаются вопросы равносходимости спектральных разложений для обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка на всей оси и на конечном отрезке.

Пусть L — некоторый оператор, действующий в гильбертовом пространстве H с дискретным спектром. Если система его собственных и присоединенных функций $\{y_n\}$ полна и минимальна в H, то однозначно определена биортогональная система $\{z_n\}$ и каждому элементу $f \in H$ мы можем сопоставить ряд $\sum(f, z_n)y_n$, который и называется спектральным разложением функции f по системе собственных и присоединенных функций оператора L. Легко видеть, что в случае самосопряженного оператора L это разложение можно записать в виде интеграла по проекторнозначной спектральной функции $\int dE_\lambda f$, что позволяет говорить о спектральном разложении, построенному по произвольному самосопряженному оператору (без требования дискретности спектра). Вопросы сходимости таких разложений занимают центральное место в спектральной теории. При этом необходимо учитывать пространство, которому принадлежит раскладываемый вектор f, метрику, по которой мы изучаем сходимость разложения, а также способ суммирования самого разложения (условная/безусловная сходимость, суммирование ряда методом средних, методом Абеля и т.д.). Задачи, которые здесь возникают, очень разнообразны и передко оказываются непростыми. Естественно, что в случае, когда оператор L является возмущением некоторого эталонного оператора L_0, например, если $L = L_0 + B$, где B подчинен L_0 в каком–либо смысле, имеет смысл изучать сходимость спектральных разложений, построенных по оператору L, сравнивая их с разложениями, построенными по оператору L_0. Таким образом, возникает необходимость изучать разность $\sum(f, z_n)y_n - \sum(f, z_n^0)y_n^0$, что и порождает вопросы равносходимости спектральных разложений.

Задачи равносходимости имеют большую историю. Впервые эти вопросы начали изучаться более ста лет назад в работах таких математиков, как В. А. Стеклов, Я. Д. Тамаркин, М. Стоун и А. Хаар. В дальнейшем подобные задачи привлекали к себе внимание многих известных ученых. Так, например, результаты о равносходимости получали Б. М. Левитан, В. А. Марченко, А. П. Хромов, В. А. Ильин, В. А. Садовничий и другие. В настоящее время вопросами равносходимости активно занимаются несколько групп математиков как в России, так и за рубежом.

Диссертация И. В. Садовничей состоит из четырех глав, введения и заключения. Объем диссертации — 204 страницы, литература по теме работы — 107 наименований. Во введении излагается история вопроса, обсуждается актуальность темы исследования, рассказывается об апробации результатов диссертационной работы, далее приводится кратко основное содержание работы.

В главе 1 рассматривается вопрос равносходимости с интегралом Фурье–Стилтьеса спектрального разложения, соответствующего самосопряженному расширению оператора Штурма–Лиувилля, потенциал которого является равномерно локально суммируемым, то есть удовлетворяет условию

$$\omega(h) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+h} |q(t)|dt < +\infty, \quad \forall h > 0.$$

Доказывается равносходимость спектральных разложений данного оператора и невозмущенного оператора по норме пространства $L_\infty(\mathbb{R})$ для случая, когда раскладываемая функция допускает представление $f = d\Phi + g$, где $g \in L_2(\mathbb{R})$, а $\Phi \in BV(\mathbb{R})$. Доказательство теоремы о равносходимости опирается на результаты об асимптотике спектральной функции оператора, полученные в первом параграфе этой главы. Интересно то, что полученные оценки являются равномерными на всей оси, а не только на компактных подмножествах. Даны также достаточные условия, при которых разность между спектральными функциями возмущенного и невозмущенного операторов стремится к нулю с ростом спектрального параметра.

Глава 2 посвящена изучению оператора Штурма–Лиувилля на конечном отрезке с потенциалом — распределением и краевыми условиями Дирихле. Показано, что в случае $q = u'$, $u \in L_2[0,\pi]$ — комплекснозначная функция, для произвольной функции $f \in L_2[0,\pi]$ будет иметь место равномерная на всем отрезке равносходимость разложений в ряд по системе собственных и присоединенных функций оператора и по системе синусов. Полученные результаты о равносходимости замечательны тем, что получено полное соответствие между классами принадлежности потенциала и раскладываемой функции, без каких-либо дополнительных условий.

Для случая функции f, лежащей в шкале пространств Соболева с дробным показателем гладкости $\theta > 0$, И. В. Садовничей получены оценки скорости равносходимости, равномерные по шару $B = \{u : \|u\|_{W_2^\theta} \le R\}$.

В §3 приводятся различные достаточные условия на потенциал — производную функции из пространства $L_\infty[0,\pi]$, обеспечивающие равносходимость спектральных разложений произвольной функции $f \in L_1[0,\pi]$. Этот результат обобщает и развивает теорему В. А. Винокурова и В. А. Садовничего о равносходимости разложений произвольной суммируемой функции в случае, когда потенциал является производной функции ограниченной вариации.

В главе 3 И. В. Садовничая рассматривает проблему равносходимости разложений по системам собственных и присоединенных функций операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами в пространствах Соболева и Гельдера. Доказана равносходимость разложений по норме этих пространств для случая, когда первообразная потенциала принадлежит соответствующему пространству Соболева, а раскладываемая функция квадратично суммируема. Кроме того, для равносходимости в пространствах Соболева получены равномерные оценки скорости равносходимости.

В главе 4 рассматривается вопрос о равносходимости спектральных разложений, отвечающих системам собственных и присоединенных функций двух операторов Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ и $\mathcal{L}_{0,U}$ с суммируемым на конечном отрезке потенциалом P и регулярными по Биркгофу краевыми условиями U. Доказано, что в случае $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa \in (1,\infty]$,

имеет место равносходимость по норме пространства $L_\nu[0,\pi]$, $\nu \in [1,\infty]$, для произвольной функции $f \in L_\mu[0,\pi]$, $\mu \in [1,\infty]$, если индексы $\varkappa$, μ и ν связаны между собой неравенством $1/\varkappa + 1/\mu - 1/\nu \le 1$. Единственным исключительным случаем является ситуация $\varkappa = \nu = \infty$, $\mu = 1$. Как следствие теоремы равносходимости, получены результаты о базисности системы собственных и присоединенных функций оператора Дирака в пространствах Лебега. Приводятся также оценки скорости равносходимости.

Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Как достижение И. В. Садовничей, следует отметить предложенную постановку задачи — рассматривать вопросы равносходимости в тройках пространств: пространстве, содержащем потенциал q, пространстве, содержащем раскладываемую функцию и пространстве, по норме которого изучается равносходимость.

Результаты диссертационной работы и методы исследования, предложенные автором, могут быть использованы в спектральной теории дифференциальных операторов, в теории полугрупп, при решении различных уравнений математической физики.

Все результаты диссертационной работы строго обоснованы. Материалы диссертации опубликованы своевременно в центральной печати. Все основные публикации — в журналах, входящих в список ВАК РФ. Публикации выполнены на высоком математическом уровне. Кроме того, И. В. Садовничая неоднократно докладывала о своих результатах на различных научных семинарах и конференциях.

Отметим следующие замечания.

1. На наш взгляд, в обзоре приведенного во введении следовало упомянуть об исследованиях А.Г. Костюченко, которые не только установили глубокую связь равносходимости спектральных разложений с количественными оценками спектра, но и стимулировали развития теории спектральных разложений.

2. В неравенствах на стр. 176 в неравенстве для $p_2(t)$ трудно понять откуда оно следует.

Диссертация И. В. Садовничей является законченным научным исследованием и вносит существенный вклад в современный анализ. Ее содержание соответствует выбранной специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ. Автореферат верно и полно отражает содержание диссертационной работы. Значительный объем выполненных автором исследований по важной и актуальной теме позволяет заключить, что диссертационная работа «Вопросы равносходимости для операторов Штурма–Лиувилля и Дирака» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК РФ к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико–математических наук, а ее автор, Садовничая Инна Викторовна, безусловно заслуживает присуждения ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент, д.ф.-м.н., профессор
Башкирского государственного педагогического
университета им. М.Акмуллы Я.Т. Султанаев

"01" декабря 2016.

профессор кафедры математики и статистки
физико-математического факультета
специальность 01.01.02
450000, г. Уфа, ул. Октябрьской революции,
д. 3а тел. +7 (347) 272-58-05
e-mail: sultanaevyt@bsunet.ru

Подпись Я.Т. Султанаева
Заверяю: Начальник отдела документационного обеспечения
ФГБОУ ВО «БГПУ им. М.Акмуллы»