ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
о диссертации Садовничей Инны Викторовны
«Вопросы равносходимости для операторов
Штурма – Лиувилля и Дирака»»
на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01. 01. 01- вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация И. В. Садовничей посвящена исследованию вопросов спектральной теории операторов Штурма – Лиувилля и Дирака, связанных с равносходимостью разложений функций в ряды по собственным и присоединенным функциям этих операторов с разложениями этих функций в тригонометрические ряды и в интегралы Фурье. Для функции, заданной на прямой изучаются свойства равносходимости с разложением в интеграл Фурье, а для функций на отрезке – с разложением в ряд Фурье по тригонометрической системе.

Исследуемая задача актуальна, она связана с изучением новых закономерностей спектральных разложений и с обоснованиями метода Фурье при решении задач математической физики. Установление теорем о равносходимости позволяет при исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов привлекать богатейший арсенал фундаментальных результатов и методов теории тригонометрических рядов и интегралов Фурье для получения тонких выводов о свойствах спектральных разложений. С другой стороны, эти теоремы значительно расширяют область применимости результатов о сходимости и суммируемости тригонометрических рядов и интегралов Фурье для изучения существенно более общих объектов, какими являются спектральные разложения дифференциальных операторов. Это современный, быстро развивающийся раздел математического анализа, привлекающий внимание ряда известных специалистов в этих областях. С этой тематикой тесно связаны современные исследования по спектральной теории дифференциальных операторов, предпринятые в нашей стране в работах известных специалистов, связанных со школами Б. М. Левитана и А. Г. Костюченко, а также В. А. Ильина и Е. И. Моисеева. Отметим, в частности, исследования Ш. А. Алимова, А. Г. Баскакова, В.А. Винокурова и В. А. Садовничего, В. В. Власова, В. В. Жикова, И. С. Ломова, А. И. Назарова, В. Б. Лидского, В. А. Марченко, А. С. Макина, Г. В. Радзиевского, В. С. Рыхлова, А. М. Седлецкого, А. П. Хромова, А. А. Шкаликова и др. За рубежом эта тематика, берущая начало в работах Г. Биркгофа, Г. Вейля, М. Стоуна, Я. Тамаркина, Е. Титчмарша, также развивается в современных работах П. Г. Бенцингера, П. Джакова и Б. Митягина, М. Маламуда и др.

Таким образом, тема диссертации И. В. Садовничей актуальна и связана с решением важных задач современного спектрального анализа и его приложений.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы, содержащего ссылки на 107 работ, связанных с темой диссертации. Общий объем диссертации составляет 204 стр.

Во введении дан обзор ряда известных результатов, связанных с вопросами равносходимости спектральных разложений с разложениями в ряды и интегралы Фурье, обоснована цель исследования, его актуальность и представлены вынесенные на защиту научные положения.

Глава 1 посвящена вопросу о равносходимости спектрального разложения функции, соответствующего оператору Штурма – Лиувилля на всей оси, и разложения этой функции в интеграл Фурье. Результат опирается на оценки отклонения спектральной функции, отвечающей оператору с равномерно локально суммируемым потенциалом от спектральной функции оператора с нулевым потенциалом, порождающего разложение в интеграл Фурье. Эти оценки получены в Теореме 1.2. Они позволяют показать стремление отклонения к нулю вне некоторой полосы около диагонали и оценить скорость такого стремления в зависимости от спектрального параметра и ширины полосы (Теорема 1.3). В качестве следствий установлены равномерные оценки спектральной функции по всем парам значений аргумента $(x, y) \in R^2$. Эти результаты позволили в §3 получить ряд результатов о равномерной равносходимости спектрального разложения и разложения в интеграл Фурье. Даны также оценки скорости такой равносходимости при стремлении спектрального параметра к бесконечности в зависимости от свойств потенциала и условий на разлагаемую функцию (Теорема 1. 4 и следствия их нее).

Глава 2 посвящена изучению спектральных свойств оператора Штурма – Лиувилля на отрезке в пространстве $L_2[0, \pi]$ с однородными граничными условиями Дирихле и потенциалом – распределением: $q = u'$, $u \in L_2[0, \pi]$. В этом случае проводится сравнение разложения в ряд по системе собственных и присоединенных функций оператора и системе синусов, отвечающей оператору с нулевым потенциалом. В главе 2 исследуются вопросы равномерной равносходимости. Установлена теорема о равномерной равносходимости разложений для функции $f \in L_2[0, \pi]$ и получена оценка скорости равносходимости (Теорема 2.1). Этот результат позволил перенести на систему собственных и присоединенных функций целый ряд глубоких результатов, известных для тригонометрических рядов, включая знаменитую теорему Карлесона о сходимости почти всюду тригонометрического ряда Фурье для функции $f \in L_2[0, \pi]$.

При дополнительных условиях гладкости на разлагаемую функцию $f \in L_2[0, \pi]$ и на функцию $u \in L_2[0, \pi]$, определяющую потенциал, оценки скорости равносходимости могут быть улучшены. Соответствующий результат в терминах принадлежности этих функций пространству Соболева $W_2^{\theta}[0, \pi]$, $0 < \theta < 1/2$ или пространству функций ограниченной вариации приведен в Теореме 2.2. Изучен также вопрос о равномерной равносходимости разложений для любой интегрируемой функции при дополнительных условиях на потенциал (Теорема 2.3 и следствия из нее).

В главе 3, в отличие от главы 2, изучается вопрос о равносходимости разложений в нормах пространств Соболева $W_2^{\theta}[0, \pi]$, а также в нормах

пространства $C^{\theta}[0,\pi]$. Хотя постановки задач и методы их решения близки приведенным в главе 2, теоремы глав 2 и 3 не вытекают друг из друга и представляют собой самостоятельные результаты. Отметим, что приведенные в Теореме 3.1 оценки скорости равносходимости в пространствах $W_2^{\theta}[0,\pi]$, $0<\theta<1/2$, по порядку лучше, чем в теореме 2.2. Теорема 3.2 и следствия из нее дают условия равносходимости в пространствах $C^{\theta}[0,\pi]$, $0<\theta<1/2$, усиливая тем самым классические результаты о равномерной равносходимости.

Глава 4 посвящена вопросу о равносходимости спектральных разложений, отвечающих системам корневых функций на $[0,\pi]$ для двух операторов Дирака с суммируемыми потенциалами. Установлена равносходимость в $L_v[0,\pi]$ рядов по системам корневых функций двух операторов Дирака, для которых их матрицы потенциалов имеют совпадающие элементы на главной диагонали. Для оператора Дирака с нулевыми элементами на главной диагонали это дает равносходимость со спектральным разложением для оператора Дирака с нулевым потенциалом. В случае когда краевые условия регулярны, но не сильно регулярны по Биркгофу, речь идет о подпоследовательностях частных сумм с четными номерами (теорема 4.1 и следствия из нее). Установлены также оценки скорости равносходимости в случае разложений для функции $f\in L_2[0,\pi]$ и получено их уточнение для функций из пространств Соболева $W_2^{\theta}[0,\pi]$ (теорема 4.2 и следствия из нее).

В заключении к диссертации сформулированы ее основные результаты и положения, вынесенные на защиту.

Оценивая диссертацию в целом, отметим, что в ней решен ряд актуальных и принципиальных задач спектральной теории для операторов Штурма – Лиувилля и Дирака. Полученные результаты тщательно доказаны, они представляют собой новые, достоверные факты спектральной теории дифференциальных операторов, связанные единым новым подходом к исследованию проблем равносходимости спектральных разложений. В основе этого подхода лежит понимание общей проблемы равносходимости как проблемы взаимодействия трех основных факторов. К ним относятся: пространство, которому принадлежит потенциал; пространство в котором лежит разлагаемая функция; пространство, в норме которого устанавливается равносходимость. Автор последовательно реализует это новое направление исследований, успешно преодолевая значительные трудности как технического, так и принципиального характера. В совокупности, результаты диссертации вносят фундаментальный вклад в развитие спектральной теории.

В качестве замечаний отметим следующие.

1. В формулировках следствий 1 и 2 из теоремы 1.4 отмечена зависимость константы в оценке скорости равносходимости (1.60) от разлагаемой функции f, но не указано, от каких свойств f зависит эта константа. Явный вид этой зависимости следовало включить в формулировки. Это важно для применений и это можно сделать, анализируя приведенный в тексте вывод оценки (1.60).

2. На стр. 27 введения обсуждаются свойства операторов W, W^{-1}, а их определения даны только на стр. 30. Это же замечание относится к автореферату.

3. К числу факторов, определяющих общую проблему равносходимости, целесообразно добавить также фактор зависимости результатов от различных методов суммирования спектральных разложений. Кроме уже рассмотренных в диссертации методов $(C,1)$ и Абеля важную роль могут сыграть методы Рисса и более общие функциональные методы суммирования. Изучение их взаимосвязи с другими характеристиками равносходимости даст, как нам кажется, полезную перспективу дальнейших исследований.

Эти замечания не снижают высокой оценки диссертации И. В. Садовничей. Первые два носят редакционный характер, третье показывает возможное направление дальнейших исследований. Диссертация является законченным, фундаментальным научным исследованием высокого уровня. Ее основные результаты своевременно опубликованы в 15 работах, 13 из них - в центральных математических изданиях, включенных в список ВАК.

Диссертация прошла апробацию на ведущих научных семинарах в МГУ (семинары под руководством академиков Б. С. Кашина, С. В. Конягина, В. А. Садовничего, В. А. Ильина и Е. И. Моисеева, профессоров В. В. Власова, А. М. Седлецкого, А. А. Шкаликова), в Математическом институте В. А. Стеклова (руководитель семинара член-корреспондент РАН О. В. Бесов), в РУДН (руководитель семинара проф. А. Л. Скубачевский) и др. Содержание диссертации автор неоднократно докладывала на многих Российских и международных научных конференциях. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

На основании изложенного считаю, что диссертация И. В. Садовничей удовлетворяет всем требованиям Положения ВАК к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ, а ее автор, Садовничая Инна Викторовна, несомненно, заслуживает присуждения ей искомой степени.

Доктор физико-математических наук, профессор ГОЛЬДМАН М. Л.

Профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации Российского университета дружбы народов, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6.
Телефон 89163465985. E-mail: seulydia@yandex.ru

специальность - 01.01.01

14.11.2016 г.

Личную подпись проф. Гольдмана М. Л. удостоверяю.
Ученый секретарь Ученого Совета РУДН профессор САВЧИН В. М.