РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А. Ю. ИШЛИНСКОГО

На правах рукописи

Назайкинский Владимир Евгеньевич

ОБОБЩЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА МАСЛОВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

01.01.03 – математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2014

Оглавление

Введение 4

Глава 1. Новое интегральное представление канонического оператора Маслова и локализация быстроосциллирующих решений 11

1.1. Двумерный случай 11

1.2. Многомерный случай 23

1.3. Примеры. Локализация волновых пучков 26

Глава 2. Канонический оператор для уравнений, вырождающихся на границе области 39

2.1. Пример: одномерный случай 42

2.2. Операторы, вырождающиеся на границе 48

2.3. Фазовое пространство 55

2.4. Лагранжевы многообразия в $\mathbf{\Phi}$ и сопутствующие объекты 61

2.5. Канонический оператор 64

2.6. Быстроосциллирующие и локализованные решения 69

2.7. Асимптотические решения двумерного волнового уравнения, вырождающегося на границе области 86

Глава 3. Канонический оператор Маслова и некоторые задачи эллиптической теории 91

3.1. Квазиклассическая теория Лефшеца 92

3.2. Вычисление форм dm_k 97

3.3. Интегральные операторы Фурье–Маслова на многообразиях с коническими особенностями 100

3.4. Принцип локальности относительного индекса 118

3.5. Формула индекса для квантованных контактных преобразований на многообразиях с коническими особенностями 120

Глава 4. Туннельный канонический оператор и газ Бозе–Маслова 129
4.1. Определение туннельного канонического оператора 133
4.2. Газ Бозе–Маслова 136

Заключение 148
Список литературы 150

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Канонический оператор Маслова [26] (см. также [5, 27, 32, 39, 41]) применяется для построения коротковолновых (высокочастотных или быстроосциллирующих) асимптотических решений широкого класса дифференциальных уравнений с вещественными характеристиками. Асимптотики в виде канонического оператора представляют собой далеко идущее обобщение лучевых разложений в задачах оптики, электродинамики и т. д. и ВКБ-асимптотик в уравнениях квантовой механики. Эти асимптотики основаны на некоторых решениях уравнений классической (гамильтоновой) механики и в каком-то смысле автоматически и глобально позволяют написать по ним решения уравнений квантовой и волновой механики с учетом наличия в задаче фокальных точек и каустик. В основе конструкции канонического оператора Маслова лежит фундаментальный геометрический объект — лагранжево многообразие в фазовом пространстве, отвечающем конфигурационному пространству, на котором рассматривается исходное дифференциальное уравнение. Канонический оператор по сути осуществляет редукцию исходного дифференциального уравнения в частных производных на конфигурационном пространстве к обыкновенному дифференциальному уравнению вдоль траекторий гамильтонова векторного поля на лагранжевом многообразии. Лагранжево многообразие не универсально даже для фиксированного дифференциального уравнения, оно, как и решение редуцированного обыкновенного дифференциального уравнения — амплитуда — зависит от рассматриваемой для исходного уравнения задачи. Очень важно, что амплитуда на лагранжевом многообразии — гладкая функция, в том числе и в окрестности лагранжевых особенностей, в отличие от амплитуды в обычных лучевых или ВКБ-разложениях. Для многих типов задач (и для разных исходных дифференциальных уравнений) имеются рецепты или алгоритмы построения соответствующих многообразий и амплитуд. Если таковые построены, то ответ в исходной задаче для соответствующего дифференциального уравнения дается каноническим оператором, примененным к амплитуде; этот ответ автоматиче-

ски включает в себя такие объекты и операции в лучевых разложениях, как поведение в каустических областях, переход через каустики, сращивание различных асимптотических представлений и т.д.

Представление решения в виде канонического оператора можно назвать формулой достаточно условно, это скорее алгоритм или набор вполне определенных правил, позволяющих реализовать решение в виде более или менее явных аналитических формул, содержащих либо быстроосциллирующие экспоненты, либо интегралы от таких экспонент. Здесь нужно отметить, во-первых, что эти формулы, как правило, не являются одинаковыми и универсальными для всех значений независимых переменных; в разных (зависящих от задачи) областях они имеют разные (асимптотические) представления, и во-вторых, даже в фиксированных областях эти представления могут определяться не единственным образом, удачный их выбор может существенно упростить (локальный) вид решения и позволить выразить его, например, через хорошо известные специальные или даже элементарные функции.

Развитие мощных интерактивных систем математических вычислений, таких как Wolfram Mathematica®, предъявляет новые требования к инструментарию построения асимптотических формул. Эти системы позволяют в режиме диалога менять входные параметры вычислений и визуализировать результаты вычислений в наглядной графической форме, тем самым позволяя в режиме «реального времени» анализировать решение задачи. Но для того, чтобы это было возможно, асимптотические формулы должны быть максимально простыми и удобными в реализации средствами указанных систем. Существующие формулы канонического оператора Маслова не всегда удовлетворяют это условию. Часто бывает так, что формула есть, а эффективно воспользоваться ею нельзя. Таким образом, актуальна задача получения возможно более простых выражений для канонического оператора, особенно в окрестности каустик, где вычисления включают интегрирование быстроосциллирующих функций.

Несмотря на всю свою универсальность, стандартный канонический оператор не дает ответа во многих задачах с вырождением. Одной из таких задач является построение асимптотических решений для волнового уравнения

с вырождением на границе. Эта задача важна и с физической точки зрения, поскольку такое уравнение можно использовать для моделирования в линейном приближении наката длинных волн (в частности, волн цунами) на пологий берег. Поэтому актуальна задача обобщения асимптотик, задаваемых каноническим оператором, на случай уравнений с вырождением такого рода.

Применения канонического оператора не ограничиваются асимптотиками решений уравнений математической физики. Частным случаем интегральных операторов Фурье–Маслова (операторов, ядрами Шварца которых служат функции, представимые с помощью канонического оператора) являются квантованные канонические и контактные (однородные канонические) преобразования, которые играют важную роль в эллиптической теории — первые служат естественным обобщением [54, 55] геометрических эндоморфизмов комплексов в теории Лефшеца [66], а для последних Вайнстейном [108] была поставлена проблема индекса, решенная впоследствии для случая замкнутых гладких многообразий Эпстейном и Мельроузом [80] и Лейштнамом, Нестом и Цыганом [91]. Эллиптическая теория на многообразиях с особенностями (см., например, [100]) является одним из естественных вариантов эллиптической теории вне рамок классической ситуации гладких многообразий, и актуальна задача вычисления индекса в этом случае. При этом, естественно, нуждается в обобщении и само определение интегральных операторов Фурье–Маслова.

Цели и задачи диссертационной работы:

(а) Разработать метод построения осциллирующих и локализованных асимптотических решений волнового уравнения в области с переменной скоростью, обращающейся в нуль на границе области.

(б) Изучить структуру быстроосциллирующих решений уравнений с вещественными характеристиками в окрестности каустик и разработать метод построения простых интегральных представлений для таких решений.

(в) Распространить результаты теории индекса квантованных контактных преобразований со случая замкнутых гладких многообразий на многообразия с коническими особенностями и выяснить, как будет описываться вклад конических точек.

(г) Вычислить асимптотику числа состояний и энтропии для модели газа Бозе–Маслова и построить для него термодинамическое лагранжево многообразие, на котором определен соответствующий туннельный канонический оператор Маслова.

Научная новизна. В диссертационной работе впервые получены следующие результаты.

1. В рамках канонического оператора Маслова предложен и разработан метод построения новых интегральных представлений быстроосциллирующих функций в окрестности каустик и фокальных точек на основе специального класса систем координат на лагранжевых многообразиях (эйконал-координаты). Полученное этим методом представление существенно упрощает локальный вид решения в окрестности каустик и эффективно при построении широкого класса асимптотических решений линейных гиперболических уравнений и систем с переменными коэффициентами (в частности, решений вида волновых пучков и решений задач с локализованными начальными данными или правыми частями).

2. Доказано, что в задачах о распространении волн с локализованными начальными данными локализованную в окрестности точки начальную функцию можно представить с помощью канонического оператора на инвариантном относительно гамильтониана задачи лагранжевом многообразии, представляющем собой объединение траекторий соответствующей системы Гамильтона, выпущенных из косферы на этой точкой, что позволяет существенно упростить формулы для асимптотических решений и сделать их эффективными в компьютерной реализации.

3. Предложен и разработан метод построения асимптотик решений многомерного волнового уравнения, вырождающегося на границе области. Этот метод основан на новом фазовом пространстве, отвечающем таким уравнениям, которое получается как расширение стандартного фазового пространства и на обобщении канонического оператора Маслова на лагранжевы подмногообразия такого фазового пространства, и приводит, в частности, к новым простым формулам для максимальной амплитуды в точках границы области решения

задачи Коши для такого волнового уравнения с локализованными начальными данными специального вида.

4. Для задаваемого квантованным каноническим преобразованием (интегральным оператором Фурье–Маслова) невырожденного эндоморфизма эллиптического комплекса на гладком компактном многообразии в том случае, когда у классического канонического преобразования имеются гладкие многообразия неподвижных точек и эти многообразия либо симплектические, либо лагранжевы, получены асимптотические формулы, выражающие вклад таких многообразий в число Лефшеца эндоморфизма.

5. Доказаны формулы индекса для удовлетворяющих некоторым условиям симметрии квантованных контактных (однородных канонических) преобразований на компактном многообразии с коническими особенностями, выражающие индекс в виде полусуммы индекса квантованного контактного преобразования на гладком компактном многообразии — дубле исходного многообразия с вырезанными окрестностями конических точек — и явно выписываемого инварианта конормального символа. Инвариант конормального символа выражен через кратности его особых точек в комплексной плоскости.

6. Получены асимптотические формулы для энтропии и числа состояний газа Бозе–Маслова, и н этой основе построено термодинамическое лагранжево многообразие, на котором определен отвечающий газу Бозе–Маслова туннельный канонический оператор.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Асимптотические методы решения задач математической физики сами по себе представляют теоретический интерес. Полученное в работе новое интегральное представление канонического оператора Маслова в окрестности фокальных точек может быть использовано для построения эффективных формул, позволяющих провести аналитическо-численное исследование доставляемых каноническим оператором асимптотических решений, при котором система Гамильтона решается численно, а дальнейший расчет ведется по аналитическим формулам с минимальным числом интегрирований. Асимптотические решения волнового уравнения с локализованными начальны-

ми данными в области, на границе которой скорость распространения волн обращается в нуль, могут быть использованы для исследования моделей, описывающих в линейном приближении распространение и накат на берег длинных волн, в частности, волн цунами. Формулы индекса для интегральных операторов Фурье–Маслова на многообразиях с особенностями представляют интерес в эллиптической теории на многообразиях с особенностями и показывают, какие изменения претерпевают соответствующие инварианты, хорошо известные в случае замкнутых гладких многообразий, при наличии конических особых точек и каким образом можно описывать вклад конических точек в эти формулы. Асимптотика статистической суммы в подходе В.П. Маслова к квантованию термодинамики задается туннельным каноническим оператором. Вычисление асимптотики числа состояний и энтропии для газа Бозе–Маслова дает пример такого туннельного канонического оператора и важно с точки зрения развития упомянутого подхода.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах лаборатории механики природных катастроф Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, отдела математической физики Математического института им. В.А. Стеклова РАН, отдела теоретической физики Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Института математики Потсдамского университета (Германия), 55 и 56 научных конференциях МФТИ, а также на международных конференциях «Jean Leray '99» (Карлскруна, Швеция, 1999), Spring School «Operator Algebras and Index Theory on Manifolds with Singularities» (Потсдам, Германия, 2000), «PDE 2000» (Клаусталь, Германия, 2000), «The fourth international conference of differential and functional-differential equations» (Москва, 2005), «XVI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум» (Батилиман, Украина, 2005), «C^*-algebras and elliptic theory. II», (Бендлево, Польша, 2006), «Асимптотические методы и математическая физика» (Москва, 2010), «XXI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум» (Батилиман, Украина, 2010), «Асимптотические методы теории дифференциальных уравнений» (Челябинск, 2011), «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» (Москва, 2011), «XXII

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум» (Батилиман, Украина, 2011), «Days on Diffraction 2012» (С.-Петербург, 2012), «International Conference on Applied Mathematics» (Ираклион, Греция, 2013).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 17 печатных работах в рецензируемых журналах из списка ВАК, входящих в международные индексы цитирования.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, четырех глав, заключения и списка литературы (108 наименований). Объем диссертации составляет 159 страниц.

Благодарности. Автор признателен В. П. Маслову и С. Ю. Доброхотову за внимание и поддержку.

Глава 1

Новое интегральное представление канонического оператора Маслова и локализация быстроосциллирующих решений

В данной главе рассматривается новое интегральное представление канонического оператора Маслова и на примере показано, как оно может применяться для локализации быстроосциллирующих решений типа волновых пучков. Основными результатами являются конструкция указанного представления и доказательство того факта, что доставляемый им класс быстроосциллирующих функций совпадает с классом, задаваемым «стандартным» каноническим оператором Маслова [26, 39] на том же лагранжевом многообразии (теорема 1.1). Все включенные в данную главу результаты опубликованы в совместных работах, но получены лично автором, за исключением примера в пп. 1.3.2, 1.3.3, который был проанализирован совместно с С. Ю. Доброхотовым и Г. Макракисом.

Основные результаты первой главы опубликованы в статье [17]. Изложение в разделе 1.1 и в п. 1.3.1 следует работе [17], в разделе 1.2 — работе [69], а в пп. 1.3.2, 1.3.3 — работе [16].

1.1. Двумерный случай

Пусть Λ^2 — лагранжево многообразие в четырехмерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^4_{(x,p)}$ с координатами $(x,p) = (x_1, x_2, p_1, p_2)$. Функции, задающие вложение $\Lambda^2 \subset \mathbb{R}^4_{(x,p)}$, будем обозначать через $x = X(\alpha)$, $p = P(\alpha)$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ — координаты на Λ^2. Для упрощения будем обозначать через α также точки на Λ^2. В этом разделе будет построено представление канонического оператора Маслова на Λ^2.

1.1.1. Эйконал и эйконал-координаты

Поскольку Λ^2 лагранжево, уравнение Пфаффа

$$d\tau(\alpha) = P(\alpha)\, dX(\alpha) \equiv P_1(\alpha)\, dX_1(\alpha) + P_2(\alpha)\, dX_2(\alpha) \tag{1.1}$$

локально разрешимо на Λ^2 (более точно, оно разрешимо в произвольной односвязной области $U \subset \Lambda^2$). Вещественное решение $\tau(\alpha)$ уравнения (1.1) называется *эйконалом* (или *действием*) в U; если U связно, то эйконал определяется с точностью до аддитивной константы. Будем предполагать, что многообразие Λ^2 удовлетворяет следующему условию.

Условие 1.1. Форма $P(\alpha)\, dX(\alpha)$ не обращается в нуль ни при каком $\alpha \in \Lambda^2$.

Таким образом, если τ — эйконал в окрестности U некоторой точки из Λ^2, то $d\tau \neq 0$, и, следовательно, (предполагая, что U достаточно мало), мы можем дополнить τ другой функцией ψ так, что (τ, ψ) будет системой координат в U. Систему координат такого типа назовем *эйконал-координатами*. Понятно, что эйконал-координаты существуют в окрестности произвольной точки $\alpha \in \Lambda^2$. Функции (X, P), выраженные через эйконал-координаты, будем записывать в виде $(X(\tau, \psi), P(\tau, \psi))$ (хотя более правильно было бы писать $(X(\alpha(\tau, \psi)), P(\alpha(\tau, \psi)))$) или просто (X, P), опуская соответствующие аргументы. Такие же обозначения будем использовать для произвольных функций на Λ^2.

Лемма 1.1. *В эйконал-координатах справедливы соотношения*

$$\langle P, X_\tau \rangle = 1, \qquad \langle P, X_\psi \rangle = 0, \qquad \langle P_\psi, X_\tau \rangle = \langle P_\tau, X_\psi \rangle. \tag{1.2}$$

1.1.2. Мера и якобианы

В конструкции канонического оператора участвует также некоторая вещественная мера на Λ^2. Будем считать для упрощения изложения, что Λ^2 ориентируемо и мера задается формой объема $d\mu$. В эйконал-координатах (τ, ψ) на Λ^2 имеем $d\mu = \mu\, d\tau \wedge d\psi$, где $\mu \equiv \mu(\tau, \psi)$ — гладкая не обращающаяся в нуль

функция, называемая *плотностью* меры $d\mu$ в координатах (τ, ψ). Без ограничения общности (заменяя ψ на $-\psi$ при необходимости) будем считать, что $\mu > 0$. Заметим, что во многих физических задачах координата τ есть так называемое «собственное время» и плотность μ равна 1. Введем теперь якобианы

$$\mathcal{J} = \frac{D(X)}{D\mu} = \frac{1}{\mu} \det \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(\tau, \psi)} = \frac{1}{\mu} \det(X_\tau, X_\psi), \quad \widetilde{\mathcal{J}} = \mu \det(P, P_\psi) \tag{1.3}$$

$$\mathcal{J}^\varepsilon = \frac{D(X - i\varepsilon P)}{D\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu} \det \frac{\partial(X_1 - i\varepsilon P_1, X_2 - i\varepsilon P_2)}{\partial(\tau, \psi)}, \qquad \varepsilon \in [0, 1]. \tag{1.4}$$

В противоположность плотности μ меры $d\mu$ якобианы (1.3), (1.4) *не зависят* от специального выбора эйконал-координат и, следовательно, корректно определены глобально на Λ^2.

Лемма 1.2. *Справедливы соотношения*

$$|\mathcal{J}| = \frac{\|X_\psi\|}{|\mu|\,\|P\|}; \qquad \mathcal{J}^\varepsilon(\alpha) \neq 0 \quad \textit{для всех } \alpha \in \Lambda^2 \textit{ и } \varepsilon > 0. \tag{1.5}$$

Доказательство. (1) (Ср. [76].) Первое равенство заведомо справедливо, если $X_\psi = 0$. В противном случае достаточно принять во внимание равенство $X_\tau = aX_\psi + bP$, $b = 1/P^2$, вытекающее из (1.2), а также второе соотношение в (1.2).

Второе равенство доказано в [1, 27]. □

1.1.3. Индекс Маслова неособых точек и замкнутых путей

Зафиксируем некоторую регулярную точку $\alpha_0 \in \Lambda^2$, которую назовем *центральной точкой*. Без ограничения общности будем считать, что $\mathcal{J}(\alpha_0) > 0$. Далее, пусть $\alpha \in \Lambda$ — произвольная неособая точка. Зафиксируем некоторый путь $\gamma(\alpha_0, \alpha) \in \Lambda^2$, соединяющий α_0 с α, и определим *индекс Маслова* точки α формулой

$$m(\alpha) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \operatorname{Arg} \mathcal{J}^\varepsilon \Big|_{\alpha_0}^{\alpha}, \tag{1.6}$$

где приращение аргумента вычисляется вдоль пути $\gamma(\alpha_0, \alpha)$. На практике лучше использовать интегральную формулу

$$m(\alpha) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \operatorname{Im} \int\limits_{\gamma(\alpha_0, \alpha)} \frac{d\,\mathcal{J}^\varepsilon}{\mathcal{J}^\varepsilon}. \tag{1.7}$$

Индекс $m(\alpha)$ — целое число, *зависящее от выбора пути* $\gamma(\alpha, \alpha_0)$ (и не меняющееся при непрерывной деформации пути). В частности, $m(\alpha_0) = 0$, если в качестве пути, соединяющего точку α_0 с нею же самой, взять путь, гомотопный тривиальному (все время остающемуся в α_0).

Пусть γ — некоторый замкнутый путь на Λ^2, тогда мы можем определить *индекс Маслова* $m(\gamma)$ *пути* γ, положив

$$\operatorname{ind}\gamma = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\operatorname{Arg}_\gamma \mathcal{J}^\varepsilon\big|_{\alpha_0}^{\alpha_0} = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\operatorname{Im}\oint_\gamma \frac{d\,\mathcal{J}^\varepsilon}{\mathcal{J}^\varepsilon} = \frac{1}{\pi i}\oint_\gamma \frac{d\,\mathcal{J}^\varepsilon}{\mathcal{J}^\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0. \tag{1.8}$$

Пример 1.1. Пусть Λ^2 — лагранжево многообразие

$$\begin{gathered}\Lambda^2 = \{(x,p)\colon x = X(\tau,\psi),\ p = P(\tau,\psi),\ \ \tau\in\mathbb{R},\ \psi\in\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\},\\ \text{где}\quad X(\tau,\psi) = \tau\mathbf{n}(\psi),\quad P(\tau,\psi) = \mathbf{n}(\psi),\quad \mathbf{n}(\psi) = (\cos\psi,\sin\psi)^T,\end{gathered} \tag{1.9}$$

с мерой $\mu = d\tau\wedge d\psi$. Зафиксируем центральную точку α_0 с координатами $\tau_0 = \delta > 0$, $\psi = 0$. Легко видеть, что

$$\mathcal{J}^\varepsilon = \det\begin{pmatrix}\cos\psi & (\tau - i\varepsilon)\sin\psi\\ -\sin\psi & (\tau - i\varepsilon)\cos\psi\end{pmatrix} = (\tau - i\varepsilon).$$

Поэтому точки с ненулевой координатой τ — неособые. Для индекса $m(\alpha)$ имеем

$$m(\alpha) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{Im}\int_{(\delta,0)}^{(\tau,\psi)}\frac{d\tau}{\tau - i\varepsilon} = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\Big(\arctan\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}\Big) - \arctan\Big(\frac{\delta}{\varepsilon}\Big)\Big).$$

Это выражение равно 0, если $\tau > 0$, и -1, если $\tau < 0$. Поэтому $m(\alpha(\tau,\psi)) = 0$ для $\tau > 0$ и $m(\alpha(\tau,\psi)) = -1$ для $\tau < 0$. Отметим, что в этом примере индекс не зависит от выбора пути.

1.1.4. Регулярные и особые карты. Канонический атлас

Канонический оператор Маслова $K = K^h_{(\Lambda^2,\mu)}$ сопоставляет любой функции[1] $A\in C_0^\infty(\Lambda^2)$ быстроосциллирующую функцию $u(x,h) = [K^h_{(\Lambda^2,\mu)}A](x,h)$

[1] Условие, что A — функция с компактным носителем, удобно при общетеоретических исследованиях. Если же проекция лагранжева многообразия на конфигурационное пространство правильная (то есть прообраз каждого компактного множества компактен), то $C_0^\infty(\Lambda^2)$ можно без особых затруднений заменить на $C^\infty(\Lambda^2)$. Это мы и делаем в наших примерах, в которых носители функций, на которые действует канонический оператор, *не*компактны.

от переменной $x \in \mathbb{R}^2$, где $h \to +0$ — малый параметр. Как и в стандартной конструкции канонического оператора [26, 39], удобно разбить его определение на две части, локальную и глобальную. В локальном определении многообразие Λ^2 покрывается специальными связными односвязными областями, называемыми *каноническими картами*, и канонический оператор определяется отдельно в каждой карте (то есть на функциях с носителем из соответствующей карты). При переходе к глобальному определению выражения в различных картах сравниваются и собираются вместе с помощью разбиения единицы.

Канонические карты бывают двух типов, *неособые* (регулярные) и *особые*.

Неособые карты. Точка $\alpha \in \Lambda^2$ называется *неособой*, если $\mathcal{J}(\alpha) \neq 0$. Соответственно *неособая карта* — это произвольная связная односвязная область $U \subset \Lambda^2$, состоящая из неособых точек. Так как $\mathcal{J}(\alpha) \neq 0$, то существует гладкое решение $\alpha(x) = (\tau(x), \psi(x))$ системы уравнений

$$X(\tau, \psi) = x. \tag{1.10}$$

Решая эту систему, мы переходим от координат $\alpha = (\tau, \psi)$ на Λ^2 к координатам $x = (x_1, x_2)$ конфигурационного пространства.

Особые карты. Согласно определению неособые карты покрывают все Λ^2, кроме фокальных (особых) точек, где $\mathcal{J}(\alpha) = 0$. Около фокальных точек нужен другой тип карт. Пусть $\alpha^* \in \Lambda^2$ — фокальная точка. Выберем некоторые эйконал-координаты (τ, ψ) на Λ^2 в окрестности точки α^*, координаты которой обозначим через (τ^*, ψ^*). Рассмотрим уравнение

$$\langle P(\tau, \psi), x - X(\tau, \psi) \rangle = 0. \tag{1.11}$$

Лемма 1.3. *Уравнение* (1.11) *определяет гладкую функцию*

$$\tau = \tau(x, \psi) \tag{1.12}$$

в окрестности точки $(x^*, \psi^*) \in \mathbb{R}^3$, *где* $x^* = X(\tau^*, \psi^*)$, *такую что* $\tau^* = \tau(x^*, \psi^*)$.

Лемма 1.4. *Существует такая окрестность* W *точки* $(x^*, \psi^*) \in \mathbb{R}^3$, *что выполнены условия*:

(i) *Дифференциал* $d(\tau_\psi)$ *не обращается в нуль ни в одной точке множества*

$$\Pi = \{(x,\psi) \in W : \tau_\psi(x,\psi) = 0\}, \tag{1.13}$$

которое, таким образом, является двумерной поверхностью.

(ii) *Отображение* $(x,\psi) \longmapsto (x, \tau_x(x,\psi))$ *— диффеоморфизм поверхности* Π *на окрестность* $U \subset \Lambda^2$ *точки* $\alpha^* \in \Lambda^2$.

(iii) *Справедливо неравенство* $\det(P, P_\psi)\big|_{\tau=\tau(x,\psi)} \neq 0$ *при* $(x,\psi) \in W$.

Область $U \subset \Lambda^2$ вместе с эйконал-координатами (τ,ψ) и функцией (1.12), заданной на W, называется *особой картой* на Λ^2. Без потери общности мы будем предполагать, что U и W связны и односвязны.

Канонический атлас. Из предыдущего следует, что Λ^2 может быть покрыто неособыми и особыми картами. Выберем и зафиксируем локально конечное покрытие $\Lambda^2 = \bigcup_j U_j$ многообразия Λ^2 неособыми и особыми картами. Предположим, что пересечение любого набора карт U_j связно и односвязно (разумеется, оно может быть и пустым). Такое покрытие называется *каноническим атласом*; далее мы рассматриваем только карты U_j из канонического атласа и называем их *каноническими картами*. Без потери общности будем считать, что в каждой карте заданы эйконал-координаты.

1.1.5. Канонический оператор в неособых картах

Определение канонического оператора в этом случае совпадает со стандартным. Пусть $U_j \subset \Lambda^2$ — неособая карта. Тогда из теоремы о неявной функции немедленно следует, что U_j диффеоморфно проектируется на некоторое открытое подмножество в $\mathbb{R}^2_x$, переменные $x = (x_1, x_2)$ могут быть использованы как локальные координаты в U_j, а $\alpha = \alpha(x)$ можно определить как решение уравнений (1.10).

Выберем эйконал τ в карте U_j и дополнительную координату ψ. *Определим индекс Маслова* m_j *в карте* U_j, положив $m_j = m(\alpha_j)$ для некоторой точки $\alpha_j \in U_j$. Теперь построим канонический оператор K_j на функциях $\varphi(\alpha) =$

$\varphi(\tau,\psi)\in C_0^\infty(U_j)$ в неособых картах по формуле

$$\begin{aligned}[K_j\varphi](x,k) &= \frac{e^{i\tau(\alpha)/h-i\pi m_j/2}\varphi(\alpha)}{\sqrt{|\mathcal{J}(\alpha)|}}\Big|_{\alpha=\alpha(x)}\\ &\equiv e^{i\tau(x)/h-i\pi m_j/2}\varphi(\tau,\psi)\sqrt{\frac{\mu(\tau,\psi)|P(\tau,\psi)|}{|X_\psi(\tau,\psi)|}}\Big|_{\substack{\tau=\tau(x)\\ \psi=\psi(x)}}.\end{aligned} \tag{1.14}$$

1.1.6. Канонический оператор в особой карте

Пусть теперь $U_j\subset\Lambda^2$ — особая карта с эйконал-координатами (τ,ψ). Рассмотрим якобианы $\mathcal{J}(\tau,\psi)$ и $\widetilde{\mathcal{J}}(\tau,\psi)$ в некоторой неособой точке $\alpha_j=(\tau^j,\psi^j)\in U_j$. Второе выражение не обращается в нуль нигде в U_j, в противоположность $\mathcal{J}(\tau,\psi)$, которое может изменять (и обычно изменяет) знак при движении по карте. *Определим индекс Маслова m_j особой карты U_j, положив $m_j=m(\alpha_j)$ если $\mathcal{J}(\tau,\psi)$ и $\widetilde{\mathcal{J}}(\tau,\psi)$ имеют одинаковый знак в точке α_j, и $m_j=m(\alpha_j)+1$, если они имеют разные знаки.*

Пример 1.2. Рассмотрим опять многообразие (1.9). Выберем особую карту U_{sing} как окрестность окружности $\{\tau=0\}=\{p=\mathbf{n}(\psi),x=0\}$ с помощью неравенства $|\tau|<\tau_0$, где τ_0 — некоторое положительное число. Имеем $\mathcal{J}=\tau$, $\widetilde{\mathcal{J}}=\det(P,P_\psi)=1$. Поэтому, если мы возьмем $\alpha=(\tau,\psi)$ с положительным τ, то знаки $\mathcal{J}$ и $\widetilde{\mathcal{J}}$ совпадают и $m(U_{sing})=0$. Легко видеть, что результат будет таким же, если взять точку $\alpha=(\tau,\psi)$ с отрицательным τ.

Теперь мы определим канонический оператор в особой карте U_j, действующий на функцию $\varphi\in C_0^\infty(U_j)$ по формуле

$$[K_j\varphi](x,h)=\frac{e^{i(\pi/4-\pi m_j/2)}}{(2\pi h)^{1/2}}\int\Big[e^{i\tau/h}\varphi(\tau,\psi)\sqrt{\mu|\det(P,P_\psi)|}\Big]_{\tau=\tau(x,\psi)}d\psi. \tag{1.15}$$

Теорема 1.1. *Особый канонический оператор (1.15) совпадает с точностью до $O(h)$ со стандартным каноническим оператором Маслова [26, 39]. В частности, индекс Маслова особой карты U_j совпадает по модулю 4 с индексом Маслова соответствующей особой карты в стандартной конструкции канонического оператора.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\mu \equiv 1$ и носитель $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в малой окрестности особой точки $(\tau_0, \psi_0) \in U_j$. Повернем систему координат на x-плоскости (и соответственно двойственную систему координат в p-плоскости), так чтобы было выполнено равенство $P_2(\tau_0, \psi_0) = 0$. Тогда в качестве координат на лагранжевом многообразии в окрестности точки (τ_0, ψ_0) можно взять (x_1, p_2). Действительно, в точке (τ_0, ψ_0) справедливы следующие соотношения. Так как $P_2 = 0$, то $\langle P, X_\tau\rangle \equiv P_1 X_{1\tau}$ и, следовательно, $X_{1\tau} \neq 0$. Далее, $0 \neq \det(P, P_\psi) \equiv P_1 P_{2\psi}$, откуда следует, что $P_{2\psi} \neq 0$, и, наконец, $0 = \langle P, X_\psi\rangle \equiv P_1 X_{1\psi}$, откуда следует, что $X_{1\psi} = 0$, поскольку $P_1 \neq 0$. Поэтому

$$\det \frac{(X_1, P_2)}{(\tau, \psi)} = \det \begin{pmatrix} X_{1\tau} & X_{1\psi} \\ P_{2\tau} & P_{2\psi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} X_{1\tau} & 0 \\ P_{2\tau} & P_{2\psi} \end{pmatrix} = X_{1\tau} P_{2\psi} \neq 0$$

и по теореме о неявной функции уравнения

$$x_1 = X_1(\tau, \psi), \qquad p_2 = P_2(\tau, \psi) \tag{1.16}$$

однозначно разрешимы относительно (τ, ψ) в окрестности рассматриваемой точки. Мы обозначим решение через $\tau = T(x_1, p_2)$, $\psi = \psi(x_1, p_2)$ и положим

$$x_2(x_1, p_2) = X_2(T(x_1, p_2), \psi(x_1, p_2)), \qquad p_1(x_1, p_2) = P_1(T(x_1, p_2), \psi(x_1, p_2)),$$

так что уравнения многообразия Λ^2 в окрестности рассматриваемой точки имеют в канонических координатах (x_1, p_2) вид $x_2 = x_2(x_1, p_2)$, $p_1 = p_1(x_1, p_2)$.

Используя канонические координаты (x_1, p_2), запишем действие стандартного канонического оператора на функцию φ в виде

$$[K\varphi](x, h) = \frac{e^{i(\pi/4 - \pi\widetilde{m}_j/2)}}{(2\pi h)^{1/2}} \int e^{\frac{i}{h}(S(x_1, p_2) + p_2 x_2)} \left[\frac{\varphi(\tau, \psi)}{\sqrt{|\mathcal{J}_s(\tau, \psi)|}}\right]_{\substack{\tau = T(x_1, p_2) \\ \psi = \psi(x_1, p_2)}} dp_2, \tag{1.17}$$

где

$$S(x_1, p_2) = T(x_1, p_2) - p_2 x_2(x_1, p_2)$$

— действие в особой канонической карте с координатами (x_1, p_2),

$$\mathcal{J}_s(\tau, \psi) = \det \frac{(X_1, P_2)}{(\tau, \psi)},$$

а $\widetilde{m}_j$ задается следующим образом. Пусть $\alpha \in U_j$ — некоторая неособая точка. Тогда $\widetilde{m}_j = m(\alpha)$, если $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}_s$ имеют одинаковый знак в точке α, и $\widetilde{m}_j = m(\alpha_j) + 1$ в противном случае. Применим к выражениям (1.15) и (1.17) $1/h$-преобразование Фурье по переменной x_2 и покажем, что полученные выражения совпадают с точностью до $O(h)$, т.е.

$$\frac{e^{-i\pi m_j/2}}{2\pi h}\int\left[e^{\frac{i}{h}(\tau-p_2x_2)}\varphi\sqrt{|\det(P,P_\psi)|}\right]_{\tau=\tau(x,\psi)}d\psi dx_2 = e^{-i\pi\widetilde{m}_j/2}e^{\frac{i}{h}S(x_1,p_2)}\left[\frac{\varphi}{\sqrt{|\mathcal{J}_s|}}\right]_{\substack{\tau=T(x_1,p_2)\\ \psi=\psi(x_1,p_2)}}+O(h). \quad (1.18)$$

Для этого вычислим интеграл в левой части доказываемого равенства (1.18) с помощью метода стационарной фазы [56, гл. 3]. Интеграл этот обозначим через $I = I(x_1, p_2, h)$, а его фазовую функцию — через

$$\Phi(x, p_2, \psi) = \tau(x, \psi) - p_2x_2.$$

Уравнения для стационарной точки (ψ_*, x_{2*}) имеют вид

$$\Phi_\psi(x_1, x_{2*}, p_2, \psi_*) = 0, \qquad \Phi_{x_2}(x_1, x_{2*}, p_2, \psi_*) = 0. \quad (1.19)$$

Решим эти уравнения. Функция $\tau(x, \psi)$ определяется из равенства (1.11); дифференцируя это равенство с учетом леммы 1.1, находим

$$\tau_\psi = \frac{\langle x - X, P_\psi\rangle}{1 - \langle x - X, P_\tau\rangle}, \qquad \tau_x = \frac{P}{1 - \langle x - X, P_\tau\rangle}. \quad (1.20)$$

Уравнения стационарной точки вместе с равенством (1.11), таким образом, приводят к соотношениям

$$\langle P, x - X\rangle = 0, \qquad \langle P_\psi, x - X\rangle = 0, \qquad p_2 = \frac{P_2}{1 - \langle x - X, P_\tau\rangle},$$

откуда в силу условия $\det(P, P_\psi) \neq 0$ следует, что в стационарной точке $X = x$ и, следовательно, $P_2 = p_2$. Более подробно,

$$X_1(\tau(x_1, x_{2*}, \psi_*), \psi_*) = x_1, \quad P_2(\tau(x_1, x_{2*}, \psi_*), \psi_*) = p_2,$$
$$X_2(\tau(x_1, x_{2*}, \psi_*), \psi_*) = x_{2*}.$$

Из первых двух уравнений в силу однозначной разрешимости уравнений (1.16) следует, что

$$\tau(x_1, x_{2*}, \psi_*) = T(x_1, p_2), \qquad \psi_* = \psi(x_1, p_2),$$

а из третьего уравнения теперь получаем

$$x_{2*} = X_2(T(x_1, p_2), \psi(x_1, p_2)) = x_2(x_1, p_2).$$

Вычислим матрицу вторых производных фазовой функции по переменным интегрирования в стационарной точке. Дифференцируя соотношения (1.20) и учитывая, что в стационарной точке выполнено равенство $x = X$, получаем

$$\Phi_{\psi\psi} = -\langle X_\psi, P_\psi\rangle, \quad \Phi_{\psi x_2} = P_{2\psi} - \langle X_\tau, P_\psi\rangle P_2, \quad \Phi_{x_2x_2} = P_2(2P_{2\tau} - \langle X_\tau, P_\tau\rangle),$$

так что в точке (τ_0, ψ_0), с учетом того факта, что $P_2(\tau_0, \psi_0)) = 0$, имеем

$$\det \Phi'' = \det \begin{pmatrix} -\langle X_\psi, P_\psi\rangle & P_{2\psi} \\ P_{2\psi} & 0 \end{pmatrix} = P_{2\psi}^2 \neq 0.$$

Таким образом, стационарная точка рассматриваемого интеграла невырождена, и метод стационарной фазы можно применить. В результате получаем [56, с. 117, теорема 2.1]

$$I(x_1, p_2, h) = e^{-i\pi(m_j+1)/2 + i\pi\sigma_+(\Phi'')/2} \left[\frac{e^{i\Phi/h}\varphi\sqrt{|\det(P, P_\psi)|}}{\sqrt{|\det \Phi''|}}\right]_{\substack{\tau=T(x_1,p_2)\\ \psi=\psi(x_1,p_2)\\ x_2=x_2(x_1,p_2)}} + O(h),$$

где $\sigma_+(\Phi'')$ — положительный индекс инерции (число положительных собственных значений) матрицы $-\Phi''$, равный в нашем случае единице (вычислить его достаточно в точке (τ_0, ψ_0)). Заметим, что

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2(x_1, p_2), p_2, \psi(x_1, p_2)) &= \tau(x_1, x_2(x_1, p_2), \psi(x_1, p_2)) - p_2x_2(x_1, p_2) \\ &= T(x_1, p_2) - p_2x_2(x_1, p_2) = S(x_1, p_2),\end{aligned}$$

так что осталось доказать, что

$$\left[\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{J}_s|}}\right]_{\substack{\tau=T(x_1,p_2)\\ \psi=\psi(x_1,p_2)}} = \left[\frac{\sqrt{|\det(P, P_\psi)|}}{\sqrt{|\det \Phi''|}}\right]_{\substack{\tau=T(x_1,p_2)\\ \psi=\psi(x_1,p_2)\\ x_2=x_2(x_1,p_2)}}, \qquad m_j = \widetilde{m}_j. \tag{1.21}$$

Мы опустим весьма громоздкое общее вычисление, ограничившись случаем, когда $(x_1, p_2) = (X_1(\tau_0, \psi_0), P_2(\tau_0, \psi_0))$. В этом случае в силу леммы 1.1 и соотношений $P_2(\tau_0, \psi_0) = X_{1\psi}(\tau_0, \psi_0) = 0$ имеем

$$\mathcal{J}_s \det(P, P_\psi) = P_1 X_{1\tau} P_{2\psi}^2 = (P_1 X_{1\tau} + P_2 X_{2\tau}) P_{2\psi}^2 = P_{2\psi}^2 = -\det \Phi'',$$

так что первое соотношение в (1.21) выполнено. Что касается второго соотношения, заметим, что знаки $\mathcal{J}_s$ и $\det(P, P_\psi)$ одинаковы в точке (τ_0, ψ_0), а, значит, и вблизи нее. Если α — неособая точка, лежащая вблизи (τ_0, ψ_0), то $\mathcal{J}_s$ и $\det(P, P_\psi)$ одновременно имеют в этой точке либо тот же знак, что и $\mathcal{J}$ (и тогда $m_j = \widetilde{m}_j = m(\alpha)$, либо противоположный (и тогда $m_j = \widetilde{m}_j = m(\alpha) + 1$).

Теорема доказана. □

1.1.7. Глобальное определение канонического оператора и формулы коммутации с h-псевдодифференциальными операторами

Поскольку в силу теоремы (1.1) представленная здесь конструкция локальных канонических операторов дает асимптотически тот же результат, что и стандартная конструкция [26, 39], переход к глобальному определению канонического оператора и формулы коммутации с h-псевдодифференциальными операторами получаются из соответствующих построений в стандартном случае автоматически. Для полноты изложения приведем соответствующие формулировки.

Для того, чтобы глобально определить канонический оператор, нужно выбрать локальные эйконал-координаты τ_j и числа (индексы) m_j (или, что эквивалентно, аргументы якобианов $\mathcal{J}$ и $\widetilde{\mathcal{J}}$) в канонических картах таким образом, что локальные канонические операторы совпадают с точностью до $O(h)$ на пересечении соответствующих канонических карт. Это возможно, если для базиса независимых циклов $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ на Λ^2 выполнено *условие квантования Бора–Зоммерфельда*

$$\frac{2}{\pi h} \oint_{\gamma_j} P(\alpha)\, dX(\alpha) \equiv \operatorname{ind} \gamma_j \pmod 4, \qquad j = 1, \dots, N. \tag{1.22}$$

Здесь $\operatorname{ind}\gamma_j$ — индекс Маслова цикла γ_j и N — число Бетти многообразия Λ^2. (Число N независимых циклов на многообразии из примера 1.1 равно единице, и $\operatorname{ind}\gamma_1 = 0$.)

Пусть выполнены условия (1.22), и пусть $\{\mathbf{e}_j\}$ — локально конечное разбиение единицы на Λ^2, подчиненное покрытию $\{U_j\}$. Определим глобальный канонический оператор $K^h_{\Lambda^2}$, действующий на гладкие функции $\varphi(\alpha)$ на Λ^2 по формуле

$$u(x,h) = K^h_{\Lambda^2}\varphi \equiv \sum_j K_j(\mathbf{e}_j\varphi), \tag{1.23}$$

где суммирование производится по всем картам U_j канонического атласа на Λ^2.

Теорема 1.2. *Если условия квантования выполнены, то канонический оператор Маслова $K^2_{\Lambda^2}$, определенный формулой (1.23), с точностью до $O(h)$ не зависит от выбора карт U_j и разбиения единицы $\mathbf{e}_j$.*

Рассмотрим (псевдо)дифференциальный оператор с малым параметром h [27]

$$\widehat{L} = L(\overset{2}{x}, \overset{1}{\widehat{p}}, h) \equiv L\left(\overset{2}{x}, -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}, h\right) \tag{1.24}$$

с гладким символом

$$L(x,p,h) = H_0(x,p) - ihH_1(x,p) = h^2H_2(x,p) + \dots .$$

Напомним, что $H_0(x,p)$ называется *главным символом* оператора $\widehat{L}$, или (классическим) *гамильтонианом*, а функция

$$H_{sub}(x,p) = H_1(x,p) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 H_0(x,p)}{\partial x_j \partial p_j}$$

— *субглавным символом* оператора $\widehat{L}$.

Теорема 1.3. *Пусть $\varphi \in C^\infty_0(\Lambda^2)$, тогда*

$$\widehat{L}(K^h_{\Lambda^2}\varphi) = K^2_\Lambda(H_0|_{\Lambda^2}\varphi) + O(h), \tag{1.25}$$

где $H_0|_{\Lambda^2}$ *— сужение функции* $H_0(x,p)$ *на лагранжево многообразие* Λ^2*. Если сверх того* $H_0(x,p) \equiv 0$ *на* Λ^2 *и мера* $d\mu$ *инвариантна по отношению к сдвигам вдоль траекторий гамильтонова векторного поля*

$$\frac{d}{dt} = H_{0p}(x,p)\frac{\partial}{\partial x} - H_{0x}(x,p)\frac{\partial}{\partial p}, \tag{1.26}$$

тогда

$$\widehat{L}(K^h_{\Lambda^2}\varphi) = -ihK^h_{\Lambda^2}\Big(\frac{d\varphi}{dt} - H_{sub}|_{\Lambda^2}\varphi\Big) + O(h^2). \tag{1.27}$$

1.2. Многомерный случай

Конструкции двумерного случая непосредственно обобщаются на многомерный случай. Кратко изложим без доказательств соответствующие результаты, следуя работе [69].

Пусть Λ — лагранжево многообразие в пространстве $\mathbb{R}^{2n}_{(x,p)}$, снабженное мерой $d\mu$ и центральной точкой α_0. Вложение $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}_{(x,p)}$ будем задавать функциями

$$x = X(\alpha), \qquad p = P(\alpha).$$

1.2.1. Основное условие и эйконал-координаты

Будем считать, что многообразие Λ удовлетворяет следующему условию:

Условие 1.2. Форма $P(\alpha)\,dX(\alpha)$ не обращается в нуль ни при каком $\alpha \in \Lambda$.

Итак, если τ — эйконал, т.е. решение уравнения $d\tau(\alpha) = P(\alpha)\,dX(\alpha)$ в окрестности U некоторой точки на Λ, то $d\tau \neq 0$, так что (при условии, что U достаточно мала) можно дополнить τ некоторыми функциями $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$, такими что $(\tau, \psi) \equiv (\tau, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ — система координат в U. Координаты такого рода, как и выше, будем называть *эйконал-координатами*. Выражение функций $(X(\alpha), P(\alpha))$ через эйконал-координаты будет обозначаться $(X(\tau,\psi), P(\tau,\psi))$ или даже просто (X,P), опуская аргументы. Через $\mu = \mu(\tau,\psi)$ обозначим плотность меры $d\mu$ в эйконал-координатах (τ,ψ), так что

$$d\mu = \mu(\tau,\psi)\,d\tau \wedge d\psi_1 \wedge \dots \wedge d\psi_{n-1}.$$

Справедлив аналог леммы 1.1:

$$\langle P, X_\tau \rangle = 1, \qquad \langle P, X_{\psi_j} \rangle = 0, \qquad j = 1, \dots, n-1, \tag{1.28}$$

$$\langle P_{\psi_j}, X_\tau \rangle = \langle P_\tau, X_{\psi_j} \rangle, \quad \langle P_{\psi_j}, X_{\psi_k} \rangle = \langle P_{\psi_k}, X_{\psi_j} \rangle, \quad j, k = 1, \dots, n-1. \tag{1.29}$$

1.2.2. Канонический оператор в неособой карте

Определим якобиан

$$\mathcal{J}(\tau, \psi) = \frac{1}{\mu(\tau, \psi)} \det \frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(\tau, \psi)}$$

В эйконал-координатах модуль якобиана можно вычислить по формуле

$$|\mathcal{J}(\tau, \psi)| = \frac{\sqrt{\det(X^*_\psi(\tau, \psi) X_\psi(\tau, \psi))}}{|\mu(\tau, \psi)||P(\tau, \psi)|}, \tag{1.30}$$

где $X^*_\psi X_\psi = \big(\langle X_{\psi_j}, X_{\psi_k} \rangle\big)$ — матрица Грама векторов $X_{\psi_1}, \dots, X_{\psi_{n-1}}$.

Точки, в которых якобиан $\mathcal{J}(\tau, \psi)$ не обращается в нуль, называются *неособыми*, и в неособых картах канонический оператор задается стандартной формулой [26, 39], которая с учетом выражения для якобиана может быть переписана в виде

$$[K\varphi](x, h) = e^{\frac{i}{h}\tau(x) - i\pi m/2} \varphi(\tau, \psi) \frac{\sqrt{|\mu(\tau, \psi)||P(\tau, \psi)|}}{\sqrt[4]{\det(X^*_\psi(\tau, \psi) X_\psi(\tau, \psi))}} \bigg|_{\substack{\tau = \tau(x) \\ \psi = \psi(x)}}, \tag{1.31}$$

где $\tau = \tau(x)$, $\psi = \psi(x)$ — выражение эйконал-координат (τ, ψ) через канонические координаты $x = (x_1, \dots, x_n)$ в неособой карте, а m — индекс неособой карты.

1.2.3. Канонический оператор вблизи фокальных точек

Пусть $\Gamma \subset \Lambda$ — множество фокальных точек, и пусть $\alpha_* \in \Gamma$. Пусть (τ, ψ) — эйконал-координаты на Λ в окрестности точки α_*. Координаты самой точки α_* обозначим через (τ_*, ψ_*). Пусть $k = \operatorname{rank} X_\psi(\tau_*, \psi_*)$. Очевидно $k < n - 1$, так как иначе точка α_* не была бы фокальной. Возьмем k линейно независимых столбцов матрицы $X_\psi(\tau_*, \psi_*)$ и разделим переменные ψ на две группы ψ' и ψ'',

где первая группа включает переменные, соответствующие выбранным столбцам, а вторая группа включаети все остальные переменные[2]. Предположим (при необходимости изменив нумерацию переменных ψ), что $\psi' = (\psi_1, \dots, \psi_k)$ и $\psi'' = (\psi_{k+1}, \dots, \psi_{n-1})$. Заметим, что матрица Грама $X^*_{\psi'} X_{\psi'}$ обратима в окрестности точки (τ_*, ψ_*).

Рассмотрим систему из $k+1$ уравнения

$$\langle P(\tau,\psi), x - X(\tau,\psi)\rangle = 0, \qquad \langle X_{\psi_j}(\tau,\psi), x - X(\tau,\psi)\rangle = 0, \quad j = 1,\dots,k. \tag{1.32}$$

Предложение 1.1. *Система* (1.32) *задает гладкие функции*

$$\tau = \tau(x,\psi''), \qquad \psi' = \psi'(x,\psi'') \tag{1.33}$$

в окрестности точки (x_*, ψ''_*), *где* $x_* = X(\tau_*, \psi_*)$, *такие что* $\tau_* = \tau(x_*, \psi''_*)$ *и* $\psi'_* = \psi'(x_*, \psi''_*)$. *Существует окрестность* W *точки* $(x_*, \psi''_*) \in \mathbb{R}^{2n-1-k}$, *такая что выполнены следующие условия*:

(i) *Дифференциалы* $d\tau_{\psi_{k+1}}, \dots, d\tau_{\psi_{n-1}}$ *линейно независимы в каждой точке множества*

$$\Pi = \{(x,\psi'') \in W : \tau_{\psi''}(x,\psi'') = 0\},$$

которое поэтому является n*-мерным подмногообразием.*

(ii) *Образ* U *многообразия* Π *при отображении* $(x,\psi'') \longmapsto (x, \tau_x(x,\psi''))$ *содержится в* Λ *и является окрестностью точки* α_* *в* Λ.

(iii) *При* $(x,\psi'') \in W$ *выполнено условие* $\det M(\tau(x,\psi''), \psi'(x,\psi''), \psi'') \neq 0$, *где*

$$M = \begin{pmatrix} P & X_{\psi'} & P_{\psi''} - P_{\psi'}(X^*_{\psi'}X_{\psi'})^{-1}X^*_{\psi'}X_{\psi''} \end{pmatrix}. \tag{1.34}$$

Область $U \subset \Lambda$ вместе с эйконал-координатами (τ, ψ) и функциями (1.33) назовем *новой особой картой* на Λ. Без ограничения общности предполагаем, что и U, и W связны и односвязны.

[2] При $k = 0$ группа переменных ψ' пуста, и дальнейшие формулы подвергаются очевидным изменениям. Это всегда так для рассмотренного в предыдущем разделе случая $n = 2$.

Определим *индекс Маслова* m_U новой особой карты формулой

$$m_U = \frac{1}{\pi}\left(\arg \mathcal{J}^\varepsilon(\alpha_0)\big|_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} + \operatorname*{var}_\gamma \arg \mathcal{J}^1(\alpha) - \sum_{s=1}^{2n-k-1} \arg \lambda_s\right), \tag{1.35}$$

где γ — путь, соединяющий центральную точку α_0 с точкой α_*,

$$\mathcal{J}^\varepsilon(\alpha) = \frac{d(X_1 - i\varepsilon P_1) \wedge \dots \wedge d(X_n - i\varepsilon P_n)}{d\mu}, \tag{1.36}$$

а λ_s — собственные значения $(2n-k-1)\times(2n-k-1)$ матрицы

$$\begin{pmatrix} E - i\tau_{xx}(x_*, \psi''_*) & -i\tau_{x\psi''}(x_*, \psi''_*) \\ -i\tau_{\psi'' x}(x_*, \psi''_*) & -i\tau_{\psi''\psi''}(x_*, \psi''_*) \end{pmatrix},$$

аргументы которых выбираются в интервале $\arg\lambda_j \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. При $\varphi \in C_0^\infty(U)$ полагаем

$$[K_U^{1/h}\varphi](x,h) \quad = \quad \frac{e^{-i\pi m_U/2}}{(2\pi h)^{\frac{n-1-k}{2}}} \int \left.\frac{e^{i\frac{\tau}{h}}\varphi\sqrt{|\mu \det M|}}{\sqrt{\det(X^*_{\psi'} X_{\psi'})}}\right|_{\substack{\tau=\tau(x,\psi'')\\ \psi'=\psi'(x,\psi'')}} \chi(x,\psi'')\, d\psi'', \tag{1.37}$$

где M — матрица (1.34), а $\chi(x,\psi'')$ — гладкая срезающая функция на W, такая что $\chi = 1$ на Π и для каждого x функция $\chi(x,\cdot)$ имеет компактный носитель в $W_x = \{\psi'' \colon (x,\psi'') \in W\}$. При $k = 0$ (координаты ψ' отсутствуют) формула (1.37) приобретает вид

$$[K_U^{1/h}\varphi](x,h) = \frac{e^{-i\pi m_U/2}}{(2\pi h)^{\frac{n-1-k}{2}}} \int \left[e^{i\frac{\tau}{h}}\varphi\sqrt{|\mu \det(P, P_\psi)|}\right]_{\tau=\tau(x,\psi)} \chi(x,\psi)\, d\psi. \tag{1.38}$$

Мы опустим дальнейшие формулировки, касающиеся перехода к глобальному определению и коммутации с h-псевдодифференциальными операторами, которые вполне аналогичны двумерному случаю.

1.3. Примеры. Локализация волновых пучков

1.3.1. Асимптотика решения уравнения Гельмгольца с радиально симметричным коэффициентом преломления

Рассмотрим задачу о нахождении быстроосциллирующих решений уравнения Гельмгольца уравнения Гельмгольца

$$[h^2\Delta + n^2(x)]u(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1.39}$$

где $h = k^{-1} \to 0$, коэффициент преломления $n(x)$ — гладкая всюду положительная функция, зависящая только от $|x|$, $n(x) \equiv n(|x|)$ и равная 1 для $|x| > R_0$. Более точно, рассмотрим решения, отвечающие лагранжеву многообразию Λ^2, проходящему через окружность

$$\Lambda^1_0 = \{(x,p) \in \mathbb{R}^4_{p,x} \colon x = 0, p = n(0)\mathbf{n}(\psi),\ \psi \in \mathbb{S}^1\}, \qquad \mathbf{n}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

и инвариантному относительно гамильтонова векторного поля, соответствующего гамильтониану $\mathcal{H}(x,p) = p^2 - n^2(x)$.

Для нахождения многообразия Λ^2 в явном виде и определения эйконал-координат на Λ^2 воспользуемся принципом Мопертюи–Якоби и перейдем к эквивалентному однородному первой степени гамильтониану

$$H(x,p) = \frac{|p|}{n(|x|)} = |p|C(|x|).$$

Решение соответствующей гамильтоновой системы с начальными условиями на Λ^1_0 можно искать в виде

$$X(\tau,\psi) = \rho(\tau)\mathbf{n}(\psi), \qquad P(\tau,\psi) = \mathcal{P}_\rho(\tau)\mathbf{n}(\psi);$$

решая соответствующие уравнения, получаем, что $\rho(\tau)$ — обратная функция к функции

$$T(r) = \int_0^r n(r)\,dr,$$

а $\mathcal{P}_\rho(\tau) = n(\rho(\tau))$. Пара (τ,ψ) образует систему эйконал-координат на Λ^2. Мы видим, что для больших $|\tau|$ это многообразие совпадает с многообразием (1.9), но параметризация здесь другая. (Эти две параметризации отличаются для больших τ сдвигом

$$\delta\tau = \int_0^{R_0} (n(r) - 1)\,dr \quad (1.41)$$

по переменной τ.)

Легко видеть, что в таких эйконал-координатах многообразие Λ^2 целиком покрывается одной особой канонической картой. Действительно, уравне-

ние (1.11) имеет глобальное решение $\tau(x,\psi) = T(\langle x, \mathbf{n}(\psi)\rangle)$. Множество

$$\Pi = \{(x,\psi)\colon \tau_\psi(x,\psi) = 0\}$$

имеет вид

$$\Pi = \{(x,\psi)\colon x \perp \mathbf{n}_\psi(\psi)\} = \{(x,\psi)\colon x \parallel \mathbf{n}(\psi)\},$$

и $d(\tau_\psi) \neq 0$ на Π, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau\psi) = n(|x|)\mathbf{n}'(\psi) \neq 0 \quad \text{на} \quad \Pi.$$

Отображение $(x,\psi) \longmapsto (x, \tau_x(x,\psi))$ действует на Π по формуле

$$\Pi \ni (x,\psi) \longmapsto (x, n(|x|)\mathbf{n}(\psi))$$

и, как легко видеть, является диффеоморфизмом Π на Λ^2. Окончательно имеем

$$\det(P, P_\psi) = \mathcal{P}_\rho^2(\tau)\det(\mathbf{n}, \mathbf{n}_\psi) = \mathcal{P}_\rho^2(\tau) = n^2(\rho(\tau)) \neq 0.$$

Поэтому многообразие Λ^2 действительно покрывается одной особой картой.

Мера, инвариантная относительно векторного поля, заданного гамильтонианом $\mathcal{H}(x,p)$, имеет вид

$$d\mu = \frac{1}{n^2(\rho(\tau))}\, d\tau \wedge d\psi.$$

Поэтому

$$[K_\Lambda^2\varphi](x,h) = \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{1/2} \int\limits_0^{2\pi} e^{\frac{i}{h}T(\langle x, \mathbf{n}(\psi)\rangle)}\varphi(\langle x, \mathbf{n}(\psi)\rangle, \psi)\, d\psi. \tag{1.42}$$

Покажем, что этот интеграл можно выразить через бесселеву функцию. Прямые вычисления приводят к следующему утверждению

Лемма 1.5. *Существует гладкая замена переменных $y = g(x)$, $\widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}(x,\psi)$, такая что справедливо равенство $T(\langle x, \mathbf{n}(\psi)\rangle = \langle y, \mathbf{n}(\widetilde{\psi})\rangle$. Более того,*

$$g(x) = \frac{T(|x|)}{|x|}, \qquad \left.\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\psi}\right|_\Pi = \sqrt{\frac{|x|n(|x|)}{T(|x|)}}. \tag{1.43}$$

Воспользовавшись этим результатом и выбрав $\varphi \equiv 1$, получим

$$\begin{aligned}[K^h_{\Lambda^2}1](x) &= \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{1/2} \int\limits_0^{2\pi} e^{\frac{i}{h}\left\langle \frac{T(|x|)}{|x|}x, \mathbf{n}(\widetilde{\psi})\right\rangle} \left(\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\psi}\right)^{-1} d\widetilde{\psi} \\ &= \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{2\pi} e^{\frac{i}{h}\left\langle \frac{T(|x|)}{|x|}x, \mathbf{n}(\widetilde{\psi})\right\rangle} \sqrt{\frac{T(|x|)}{|x|n(|x|)}}\, d\widetilde{\psi} + O(h)\right).\end{aligned} \tag{1.44}$$

Амплитуды в этих двух интегралах совпадают на множестве Π; следовательно, разность амплитуд можно представить как произведение гладкой функции на τ_ψ, и интегрирование по частям показывает, что разность интегралов действительно есть $O(h)$ по сравнению с главным членом. Завершая вычисления, находим

$$\begin{gathered}\left(\frac{2\pi h}{i}\right)^{1/2} [K^2_\Lambda 1](x,k) = a(|x|)\mathbf{J}_0\left(\frac{T(|x|)}{h}\right) + O(h), \\ a(|x|) = 2\pi\sqrt{\frac{T(|x|)}{|x|n(|x|)}},\end{gathered} \tag{1.45}$$

где $\mathbf{J}_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Мы видим, что канонический оператор на этом многообразии дает «искаженную» функцию Бесселя с множителем $a(|x|)$, стремящимся к единице при $|x| \to \infty$ и, что более важно, с фазовым сдвигом $\delta\tau$ (1.41): для $R > R_0$ формула (1.45) имеет вид

$$\left(\frac{2\pi h}{i}\right)^{1/2} [K^2_\Lambda 1](x) = a(|x|)\mathbf{J}_0\left(\frac{|x| + \delta\tau}{h}\right) + O(h).$$

Если же в уравнении Гельмгольца (1.39) $n(x) = 1$ при всех x, то лагранжево многообразие Λ^2 совпадает с многообразием (1.9), а асимптотическое решение превращается в точное, с точностью до постоянного множителя равное функции Бесселя $\mathbf{J}_0(|x|/h)$.

1.3.2. Локализация волновых пучков

Рассмотрим уравнение

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -ihc\frac{\partial\Psi}{\partial x_3} - \frac{h^2c}{2k}\Delta_\perp\Psi - \frac{h^2q}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_3^2}, \qquad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \tag{1.46}$$

известное в оптике как уравнение параксиального приближения [89]. По существу уравнение (1.46) — это трехмерное уравнение Шрёдингера для свободной частицы, но с другим значением массы и с дополнительным членом первого порядка, отвечающим дрейфу (сносу)[3]. Используя полученное в 1979 г. М. Берри и Н. Балажем [67] точное решение

$$\psi(x,t) = \exp\biggl(-\frac{i}{h}\Bigl(\frac{t^3}{3a^2}+\frac{xt}{a}\Bigr)\biggr)\,\mathrm{Ai}\biggl(-\sqrt[3]{\frac{2}{ah^2}}\Bigl(x+\frac{t^2}{2a}\Bigr)\biggr) \tag{1.47}$$

(где $\mathrm{Ai}(z)$ — функция Эйри, а $a>0$ — постоянная) одномерного уравнения Шрёдингера

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{1.48}$$

для свободной частицы, для уравнения 1.46 можно построить точные решения

$$\begin{aligned}\Psi_0(x,t) = h^{-2/3}\exp\biggl(-\frac{i}{h}\Bigl(\frac{q^3t^3}{3a^2}+\frac{(x_3-ct)qt}{a}+\frac{\lambda^2ct}{2k}\Bigr)\biggr)\\ \times\,\mathrm{Ai}\biggl(-\sqrt[3]{\frac{2}{ah^2}}\Bigl(x_3-ct+\frac{q^2t^2}{2a}\Bigr)\biggr)\mathbf{J}_0\biggl(\frac{\lambda\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{h}\biggr),\end{aligned} \tag{1.49}$$

известные в оптике как пучки Эйри–Бесселя. Здесь $\mathbf{J}_0(r)$ — функция Бесселя нулевого порядка, а $\lambda>0$ — постоянная. При $h\to+0$ функция (1.49) локализована в окрестности полупространства $\Pi_t=\{x\in\mathbb{R}^3_x\colon x_3\ge ct-q^2t^2/(2a)\}$. Точнее говоря, она экспоненциально убывает при $h\to+0$ локально равномерно по x вне Π_t, а внутри Π_t она осциллирует, причем $\Psi_0(x,t)=O(1)$, если $x\in\Pi_t$ не лежит в объединении плоскости $\{x_3=ct-q^2t^2/(2a)\}$ и полупрямой $\{x_1=x_2=0, x_3\ge ct-q^2t^2/(2a)\}$ (именно для этого мы включили множитель $h^{-2/3}$ в определение функции $\Psi_0(x,t)$), а максимум модуля $|\Psi_0|$ достигается в «движущейся» точке $(x_1=x_2=0, x_3=ct-q^2t^2/(2a))$, в которой $|\Psi_0|\sim h^{-2/3}$.

С точки зрения физики недостатком как решения (1.47), так и решения (1.49) является то, что они не принадлежат пространству L_2; иными словами, энергия соответствующих пучков бесконечна. Поэтому с точки зрения современной теории уравнений с частными производными функция (1.49) — обобщенное

[3] От этого дополнительного члена можно избавиться стандартной подстановкой $\Psi(x_\perp,x_3,t)=\Phi(x_\perp,x_3-ct,t)$. Отсюда ясно, что точно также можно рассмотреть более общее, чем (1.46), уравнение, в котором скорость дрейфа отлична от c (но по-прежнему постоянна).

решение уравнения Шрёдингера (1.46) (см. [11, 13]). Для практического использования нужно «обрезать» эти пучки на бесконечности. Покажем, как можно сделать это, используя формулы раздела 1.2 для канонического оператора Маслова и одну теорему Хёрмандера [86] о свойствах быстроосциллирующих интегралов, сохранив при этом структуру, основанную на функциях Эйри и Бесселя. Именно, построим с помощью канонического оператора локализованное решение, соответствующее решению (1.49). Для этого скомбинируем двумерное лагранжево многообразие (1.9), отвечающее функции Бесселя $\mathbf{J}_0$, с одномерным лагранжевым многообразием, соответствующим функции Эйри. Пусть $\mathbb{R}^6_{(x,p)}$ — шестимерное фазовое пространство с координатами $p = (p_1, p_2, p_3)$, $x = (x_\perp, x_3)$. В дальнейшем мы пользуемся обозначениями $p_\perp = (p_1, p_2)$, $x_\perp = (x_1, x_2)$. Выберем начальное многообразие $\Lambda^3_0 \subset \mathbb{R}^6_{(x,p)}$ в виде

$$\Lambda^3_0 = \{p_\perp = \lambda \mathbf{n}(\psi), p_3 = \phi, x_\perp = \mathbf{n}(\psi)\alpha, x_3 = a\phi^2/2\}.$$

Переменные $\alpha_1 = \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = \phi \in \mathbb{R}$ и $\alpha_3 = \psi \in \mathbb{S} = \mathbb{R} \pmod{2\pi}$ суть координаты Λ^3_0, а λ — некоторое положительное число. Зафиксируем центральную точку на Λ^3_t с координатами $(\alpha, \phi_0, \psi_0) = (+0, \phi_0, 0)$, где $\phi_0 > 0$.

Рассмотрим гамильтониан

$$H = cp_3 + \frac{c}{2k}p_\perp^2 + \frac{q}{2}p_3^2$$

и соответствующий фазовый поток g^t_H на фазовом пространстве $\mathbb{R}^6_{(x,p)}$. Действуя на многообразие Λ^3_0 фазовым потоком g^t_H, получаем семейство $\{\Lambda^3_t = g^t_H \Lambda^3_0\}$ трехмерных лагранжевых многообразий

$$\Lambda^3_t = \{p_\perp = \lambda \mathbf{n}(\psi), p_3 = \phi, x_\perp = \mathbf{n}(\psi)(\alpha + t\lambda c/k), x_3 = a\phi^2/2 + tq\phi + tc\},$$

где переменные (α, ϕ, ψ) являются координатами на каждом из Λ^3_t. При фиксированном t многообразие Λ^3_t диффеоморфно произведению двумерной плоскости на окружность. Его также можно представить как расслоение, базой которого является парабола, а слоями — двумерные цилиндры. Проекция параболы на ось x_3 — полуось, а проекция цилиндра — - две «склеенные» в одной точке плоскости. Поэтому проекция многообразия Λ^3_t на конфигурационное простран-

ство $\mathbb{R}^3_x$ представляет собой четыре «склеенные» движущиеся полупространства $\prod = \{x_3 \geq -t^2/(2a)\}$. Пусть $A(\alpha, \phi, \psi)$ — гладкая амплитуда на Λ^3_t.

Лемма 1.6. *Результат действия канонического оператора Маслова на многообразии Λ^3_t на функцию $A(\alpha, \phi, \psi)$ может быть представлен в виде*

$$[K^h_{\Lambda^3_t} A](x,t) = \frac{i\lambda}{2\pi} e^{\frac{i}{h}\frac{tc\lambda^2}{2k} - \frac{i}{h}\frac{a}{3}\phi_0^3} \times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} \left[e^{\frac{i}{h}\left(\lambda\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle + \phi(x_3 - ct) - \frac{a}{6}\phi^3 - \frac{1}{2}tq\phi^2\right)} A(\alpha,\psi,\phi)\Big| \right]_{\alpha=\alpha(x,t,\phi,\psi)} d\psi\, d\phi. \quad (1.50)$$

где функция $\alpha(x,t,\phi,\psi)$ дается формулой (1.55) ниже. Функция

$$\Phi(x,t) = [K^h_{\Lambda^3_t} A](x,t)$$

является асимптотическим решением уравнения Шрёдингера (1.46).

Доказательство. Воспользуемся формулами раздела 1.2. В качестве центральной точки на Λ^3_t при любом t возьмем точку с координатами $(\alpha_0, \phi_0, \psi_0) = (+0, \phi_0, 0)$. Найдем сначала эйконал (фазу) τ:

$$\tau = \int_{(\alpha_0,\phi_0,\psi_0)}^{(\alpha,\phi,\psi)} P\, dX = \lambda\alpha + \theta(\phi),$$

где

$$\theta(\phi) = \frac{a}{3}\phi^3 + \frac{tq}{2}\phi^2 - \frac{a}{3}\phi_0^3 - \frac{tq}{2}\phi_0^2.$$

Приращение фазы вдоль траектории, состоящей из центральных точек, равно

$$\int_0^t \big(\langle p, H_p\rangle - H\big)|_{p_\perp = \lambda n(0), p_3 = \phi_0} dt = \frac{tc\lambda^2}{2k} + \frac{tq\phi_0^2}{2}.$$

Перейдем к эйконал-координатам (τ, ϕ, ψ). «Старая» координата α выражается через τ по формуле

$$\alpha = (\tau - \theta)/\lambda, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\tau} = \frac{1}{\lambda}, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\phi} = a\phi^2 + tq\phi.$$

Матрица Якоби $\dfrac{\partial X}{\partial(\tau,\phi,\psi)}$ задается формулой

$$\frac{\partial X}{\partial(\tau,\phi,\psi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial\tau}\cos\psi & \frac{\partial\alpha}{\partial\phi}\cos\psi & -\sin\psi(\alpha + t\lambda\frac{c}{k}) \\ \frac{\partial\alpha}{\partial\tau}\sin\psi & \frac{\partial\alpha}{\partial\phi}\sin\psi & \cos\psi(\alpha + t\lambda\frac{c}{k}) \\ 0 & a\phi + tq & 0 \end{pmatrix},$$

а якобиан — ее определитель — формулой

$$J = J^{(1,2,3)} \equiv J(\tau,\phi,\psi) \equiv \det\frac{\partial X}{\partial(\tau,\phi,\psi)} \equiv -(a\phi + tq)\left(\alpha(\tau,\phi) + t\lambda\frac{c}{k}\right).$$

Фокальные точки определяются из уравнений

$$\alpha(\tau,\phi) + t\lambda\frac{c}{k} = 0, \tag{1.51}$$

$$a\phi + tq = 0. \tag{1.52}$$

Решения уравнения (1.51) задают ось x_3 — множество $\{x_\perp = 0\}$ — в $\mathbb{R}^3_x$. Уравнение (1.52) определяет в полупространстве Π_t луч $\Gamma_t = \{x_\perp = 0, x_3 \geq x_3^*(t)\}$ и двумерную плоскость $\Sigma_t = \{x_3 = x_3^*(t)\}$, где $x_3^*(t) \equiv -\frac{t^2q^2}{2a} + ct$. Таким образом, каустиками являются плоскость Σ_t и луч Γ_t. В точке $x_\perp = 0$, $x_3 = x_3^*(t)$ (в которой пересекаются эти две каустики) матрица Якоби $\dfrac{\partial X}{\partial(\tau,\phi,\psi)}$ приобретает вид

$$\frac{\partial X}{\partial(\tau,\phi,\psi)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}\cos\psi & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda}\sin\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и имеет минимально возможный ранг, равный 1. Таким образом, точка $x_\perp = 0, x_3 = x_3^*(t)$ является наиболее сильной фокальной точкой на Λ^3_t. Определитель матрицы (P, P_ϕ, P_ψ) равен

$$\det(P, P_\phi, P_\psi) = \det\begin{pmatrix} \lambda\cos\psi & 0 & -\lambda\sin\psi \\ \lambda\sin\psi & 0 & \lambda\cos\psi \\ \phi & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\lambda^2 \neq 0. \tag{1.53}$$

Таким образом, многообразие Λ^3_t покрывается одной особой картой (которую обозначим через U), а канонический оператор определяется через интегрирование по ϕ и ψ. Приведем соответствующие формулы, следуя разделу 1.2. Учи-

тывая, что (в силу глобальности карты U) влияние ее индекса Маслова на решение сводится к выбору постоянного унимодулярного множителя, мы этот множитель опустим. Найдем решение $\tau(x,t,\phi,\psi)$ уравнения

$$\begin{aligned}\langle P, x-X\rangle &\equiv \lambda\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle - \tau + \theta - t\frac{\lambda^2 c}{k} + \phi x_3 - \phi\left(\frac{a\phi^2}{2} + tq\phi + tc\right)\\ &\equiv -\tau + \lambda\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle + \phi(x_3 - ct) - \frac{a}{6}\phi^3 - \frac{1}{2}tq\phi^2 - \frac{a}{3}\phi_0^3 - \frac{1}{2}tq\phi_0^2 = 0.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\tau(x,t,\phi,\psi) = \lambda\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle + \phi(x_3 - ct) - \frac{a}{6}\phi^3 - \frac{1}{2}tq\phi^2 - \frac{a}{3}\phi_0^3 - \frac{1}{2}tq\phi_0^2. \quad (1.54)$$

Мы также можем написать

$$\alpha(x,t,\phi,\psi) = \langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle - \frac{t\lambda c}{k} + \frac{\phi}{\lambda}\left(x_3 - \frac{a}{2}\phi^2 - tq\phi - ct\right). \quad (1.55)$$

Зададим меру $\mu = d\tau \wedge d\phi \wedge d\psi$ на Λ_0^3. Из вида гамильтоновой системы вытекает, что мера $(g_H^t)^{-1*}\mu$ на Λ_t^3 записывается в эйконал-координатах (τ,ϕ,ψ) на Λ_t^3 точно таким же образом. так что канонический оператор Маслова можно записать в виде (1.38):

$$\begin{aligned}[K^h_{\Lambda_t^3}A](x,h) &= \frac{i}{2\pi h}e^{\frac{i}{h}(\frac{tc\lambda^2}{2k}+\frac{tq\phi_0^2}{2})}\\ &\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left[e^{i\frac{\tau}{h}}A(\alpha(x,t,\phi,\psi),\phi,\psi)\sqrt{\left|\det(P,P_\phi,P_\psi)\right|}\right]_{\tau=\tau(x,t,\phi,\psi)} d\psi\, d\phi. \quad (1.56)\end{aligned}$$

При этом, если амплитуда $A(\alpha,\phi,\psi)$ не зависит от t явно, то функция (1.56) представляет собой асимптотическое решение уравнения (1.46). Теперь, используя формулы (1.53), (1.54) и (1.55), получаем выражение (1.50). □

1.3.3. Выражение через функции Эйри и Бесселя

Используем одну теорему Хёрмандера для упрощения интеграла (1.56). Напомним универсальную конструкцию из теории интегральных операторов Фурье [86], которая (будучи переформулирована для случая асимптотик по малому параметру h) предписывает следующее: чтобы построить быстроосцил-

лирующие функции, (локально) соответствующие данному лагранжеву многообразию Λ, нужно найти вещественнозначную *невырожденную фазовую функцию* $\Phi(x,\theta)$, зависящую от параметров $\theta\in\mathbb{R}^m$ ($m\geq 0$) и *задающую* многообразие Λ в том смысле, что дифференциалы $d\Phi_{\theta_j}(x,\theta)$, $j=1,\dots,m$, линейно независимы на множестве

$$C_\Phi=\{(x,\theta)\colon \Phi_\theta(x,\theta)=0\}$$

и локально имеет место представление

$$\Lambda=\Lambda_\Phi\equiv\{(x,p)\colon \exists\theta\in C_\Phi\ p=\Phi_x(x,\theta)\}.$$

Тогда искомые быстроосциллирующие функции имеют вид

$$u(x,h)=\left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{m/2}\int\dots\int e^{\frac{i}{h}\Phi(x,\theta)}A(x,\theta)\,d\theta_1\dots d\theta_m \tag{1.57}$$

с некоторой *амплитудой* $A(x,\theta)$ — гладкой функцией с компактным по переменной θ носителем.

Теорема 1.4 (ср. [86, теор. 3.2.1]). *Пусть $u(x,h)$ и $u_1(x,h)$ — две быстроосциллирующие функции вида (1.57) с одной и той же фазовой функцией Φ и разными амплитудами $A(x,\theta)$ и $A_1(x,\theta)$. Если $A(x,\theta)=A_1(x,\theta)$ на C_Φ, то*

$$u(x,h)-u_1(x,h)=O(h).$$

Далее, пусть $\Phi_1(x,\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}^{m_1}$ и $\Phi_2(x,\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}^{m_2}$ — две невырожденные фазовые функции, задающие одно и то же лагранжево многообразие Λ. Тогда соответствующие быстроосциллирующие интегралы вида (1.57) задают один и тот же класс быстроосциллирующих функций[4].

Возьмем аксиально-симметричную (не зависящую от переменной ψ) амплитуду $A=A(\alpha,\phi)$ на многообразии Λ^3_0. Формула Хёрмандера утверждает, что $A(\alpha(x,t,\phi,\psi),\phi)$ можно заменить другой гладкой функцией $A'(x,t,\psi,\phi)$,

[4] И можно явно выписать закон преобразования амплитуд при переходе от одного представления к другому, чего мы здесь не делаем.

совпадающей с нею на многообразии C_τ, и это приведет лишь к малой поправке в ответе. Мы изменим функцию A в два этапа.

1. Положим $x_3 = X_3 = \frac{a}{2}\phi^2 + tq\phi + ct$ в (1.55). Это дает гладкую функцию

$$\alpha'(x,t,\phi,\psi) = \alpha(x,t,\phi,\psi)|_{x_3=X_3} = \langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle - \frac{t\lambda c}{k}.$$

Очевидно, функции $A(\alpha(x,t,\phi,\psi),\phi)$ и $A(\alpha'(x,t,\psi),\phi)$ совпадают на C_τ, и мы можем использовать последнюю вместо первой в интеграле (1.56). Теперь представим функцию $A(\alpha'(x,t,\phi,\psi),\phi)$ в виде

$$A_1 = \frac{A\big(\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\big) + A\big(-\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\big)}{2} + \langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle \frac{A\big(\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\big) - A\big(-\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\big)}{2\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle}.$$

Первое слагаемое и второе слагаемое без множителя $\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle$ суть четные функции от $\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle$ и, стало быть, гладкие функции от $\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle^2$. Таким образом, мы можем заменить в них $\langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle^2$ на $x_\perp^2$, не меняя их значения на Λ_t^3. В результате получим

$$A_1' = \frac{A\big(|x_\perp| - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\big) + A\big(-|x_\perp| - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\big)}{2} + \langle \mathbf{n}(\psi), x_\perp\rangle \frac{A\big(|x_\perp| - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\big) - A\big(-|x_\perp| - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\big)}{2|x_\perp|}.$$

Это представление позволяет факторизовать интеграл (1.50) и воспользоваться следующими интегральными представлениями функций Бесселя $\mathbf{J}_0$ и $\mathbf{J}_1 = -\mathbf{J}_0'$:

$$\mathbf{J}_0\Big(\frac{\lambda|x_\perp|}{h}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\frac{i\lambda}{h}\langle x_\perp, \mathbf{n}(\psi)\rangle}\, d\psi,$$

$$\mathbf{J}_1\Big(\frac{\lambda|x_\perp|}{h}\Big) = \frac{1}{2\pi i|x_\perp|}\int_0^{2\pi} \langle x_\perp, \mathbf{n}(\psi)\rangle e^{\frac{i\lambda}{h}\langle x_\perp, \mathbf{n}(\psi)\rangle}\, d\psi.$$

В итоге получаем

$$u = \frac{C}{2h} e^{\frac{i}{h}\left(\frac{tc\lambda^2}{2k} + \frac{tq\phi_0^2}{2}\right)} \times \Big[\mathbf{J}_0\Big(\frac{\lambda\rho}{h}\Big) \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(A\Big(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\Big) + A\Big(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\Big)\Big) e^{\frac{i}{h}(\phi(x_3 - ct) - \frac{a}{6}\phi^3 - \frac{1}{2}tq\phi^2)}\, d\phi + \mathbf{J}_1\Big(\frac{\lambda\rho}{h}\Big) \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(A\Big(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\Big) - A\Big(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \phi\Big)\Big) e^{\frac{i}{h}(\phi(x_3 - ct) - \frac{a}{6}\phi^3 - \frac{1}{2}tq\phi^2)}\, d\phi\Big], \quad (1.58)$$

где $\rho = |x_\perp|$. Положим

$$\begin{aligned}
f_1^+(\rho, t, z) &= \frac{1}{4}\Big(A\Big(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big) + A\Big(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big) \\
&\quad + A\Big(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big) + A\Big(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big)\Big), \\
f_2^+(\rho, t, z) &= \frac{1}{4\sqrt{z}}\Big(A\Big(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big) - A\Big(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big) \\
&\quad + A\Big(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big) - A\Big(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big)\Big), \\
f_3^+(\rho, t, z) &= \frac{1}{4}\Big(A\Big(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big) + A\Big(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big) \\
&\quad - A\Big(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big) - A\Big(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big)\Big), \\
f_4^+(\rho, t, z) &= \frac{1}{4\sqrt{z}}\Big(A\Big(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big) - A\Big(\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big) \\
&\quad - A\Big(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, \sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big) + A\Big(-\rho - \frac{t\lambda c}{k}, -\sqrt{z} - \frac{qt}{a}\Big)\Big),
\end{aligned}$$

и далее

$$\begin{aligned}
f_j^-(\rho, t, z) &= 3f_j^+(\rho, t, 0) - 3f_j^+(\rho, t, -z) + f_j^+(\rho, t, -2z), \qquad z < 0, \\
f_j(\rho, t, z) &= \begin{cases} f_j^-(\rho, t, z) & \text{для } z < 0, \\ f_j^+(\rho, t, z) & \text{для } z > 0, \end{cases}
\end{aligned} \quad (1.59)$$

и

$$Z(x, t) = \frac{t^2q^2 + 2a(x - ct)}{a^2}.$$

Используя формулы (1.58) и (1.59), после некоторых вычислений получаем следующее утверждение.

Теорема 1.5. *Пусть $A(\alpha,\phi)$ — финитная функция и*

$$\Psi(\rho,x_3,t)=\frac{C_0}{h^{6/5}}e^{\frac{i}{h}\frac{tc\lambda^2}{2k}}e^{-\frac{it^3}{3ha^2}}e^{-\frac{ixt}{ah}}\times\left[\mathrm{Ai}\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{ah^2}}\left(x_3-ct+\frac{q^2t^2}{2a}\right)\right)\left(f_1(\rho,t,Z(x_3,t))\mathbf{J}_0\left(\frac{\lambda\rho}{h}\right)+f_3(\rho,t,Z(x_3,t))\mathbf{J}_1\left(\frac{\lambda\rho}{h}\right)\right)+i\sqrt[3]{\frac{2h}{a}}\,\mathrm{Ai}'\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{ah^2}}\left(x_3-ct+\frac{q^2t^2}{2a}\right)\right)\times\left(f_2(\rho,t,Z(x_3,t))\mathbf{J}_0\left(\frac{\lambda\rho}{h}\right)+f_4(\rho,t,Z(x_3,t))\mathbf{J}_1\left(\frac{\lambda\rho}{h}\right)\right)\right]. \quad (1.60)$$

Тогда существует решение $\tilde{\Psi}(\rho,x_3,t)$ уравнения (1.46) с ограниченной L_2-нормой, такое что при $t\in[0,\,\tilde{t}]$ выполнена оценка

$$\tilde{\Psi}(\rho,x_3,t)-\Psi(\rho,x_3,t)=O(h),$$

где $\tilde{C}$ и $\tilde{t}$ — не зависящие от h постоянные.

Замечание. 1. Все коэффициенты в последней формуле — гладкие финитные функции переменных (ρ,x_3), а функция $\Psi(x,t)$ принадлежит пространству L_2.

2. Последняя формула может быть представлена в виде

$$\Psi=\left(a_0(\rho,x_3,t)-iha_1(\rho,x_3,t)\frac{\partial}{\partial x_3}-iha_2(\rho,x_3,t)\frac{\partial}{\partial\rho}+h^2a_3(\rho,x_3,t)\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial x_3}\right)\Psi_0,$$

где Ψ_0 — решение (1.49), а коэффициенты $a_j(\rho,x_3,t)$ — гладкие функции, финитные относительно x_1,x_2,x_3.

3. Если амплитуда имеет вид $A(\alpha,\phi)=A_1(\alpha)A_2(\phi)$, то функция Ψ факторизуется и может быть представлена в виде произведения $\Psi_1(x_3,t)\Psi_2(\rho,t)$.

4. Подчеркнем, что несмотря на достаточно громоздкое представление функций f_j, их компьютерная реализация не представляет особого труда, и анализ зависимости функций (1.60) как от переменной t, так и от параметров проводится с помощью программы *Wolfram Mathematica*[5] очень оперативно, в режиме реального времени. Аналогичный анализ, основанный на вычислении быстроосциллирующих интегралов, занимает существенно больше времени (десятки минут), а оперативное изменение параметров практически невозможно.

[5] Wolfram Mathematica®9, `www.wolfram.com`.

Глава 2

Канонический оператор для уравнений, вырождающихся на границе области

В данной главе рассматриваются результаты, полученные в серии статей [18, 42, 43, 72, 74], посвященных построению асимптотических (быстроосциллирующих и локализованных) решений волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(c^2(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0, \qquad u = u(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,T], \tag{2.1}$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, на гладкой границе $\partial\Omega$ которой скорость $c(x)$ распространения волн имеет вырождение порядка квадратного корня из расстояния до границы:

$$c^2(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}); \qquad c(x) > 0,\ x \in \Omega; \qquad c(x) = 0,\ \nabla(c^2(x)) \neq 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{2.2}$$

Такие уравнения возникают, например, при моделировании в линейном приближении наката на берег длинных волн, в частности, волн цунами (см. [52, 103] и цитированную там литературу). «Пространственная часть»

$$L = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} c^2(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

волнового оператора в (2.1) в терминологии из [51] представляет собой оператор второго порядка с неотрицательной характеристической формой в Ω, причем определенная на границе $\partial\Omega$ функция Фикеры [51, с. 9] тождественно равна нулю, так что постановка корректной задачи для оператора L в подходящих пространствах не требует классических граничных условий [83]. Соответственно и задачу Коши для уравнения (2.1) нужно рассматривать без граничных условий на $\partial\Omega$, а выбор конкретной самосопряженной реализации оператора L в $L^2(\Omega)$ приходится описывать другим способом; физически естественным является условие конечности энергии, которое математически описывается как расширение по Фридрихсу [6, § 10.3] оператора L с первоначальной области определения $C_0^\infty(\Omega)$.

Отправной точкой для инициированных в [21] и проведенных в [18, 42, 43, 72, 74] исследований послужило важное наблюдение из [105] (где для одномерного уравнения (2.1) в $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ были построены быстроосциллирующие асимптотические решения), что так как для таких уравнений решения соответствующей гамильтоновой системы уходят на бесконечность по импульсам за конечное время, одновременно выходя по переменным x на границу области, то граница эта может в определенном смысле рассматриваться как каустика, и асимптотические решения в ее окрестности можно строить в соответствии с основной идеей канонического оператора Маслова [26, 39] в виде обратного преобразования Фурье от ВКБ-функции в импульсном представлении. (Отметим, что используемая идея продолжения траекторий «через бесконечность» чрезвычайно естественна и встречается в самых разных контекстах; см., например, [87].) Разумеется, в силу некомпактности возникающих здесь лагранжевых многообразий «стандартный» канонический оператор Маслова непосредственно применить нельзя, и его конструкцию приходится модифицировать (причем соответствующие условия регуляризации на бесконечности интегралов по импульсам тесно связаны с выбором самосопряженной реализации оператора L). На основе этой идеи в [21, 72] были получены локализованные асимптотические решения одномерного уравнения (2.1) в $\Omega = \mathbb{R}_+$ со скоростью $c(x) = \sqrt{x}$ и удовлетворяющей условию (2.2) скоростью $c(x)$ общего вида соответственно, а в [18] она была реализована в двумерном случае для уравнения (2.1) в полуплоскости $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ со скоростью $c(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}$. Во всех этих статьях рассматривались решения конечной энергии. В работе [42] асимптотические решения в одномерном случае были построены для нефридрихсовых самосопряженных расширений оператора L. Наконец, в заметке [43] были даны адекватные геометрические структуры для рассматриваемого круга задач. Именно, предъявлено фазовое пространство $\mathbf{\Phi}$, отвечающее уравнению (2.1) с вырождением типа (2.2) в области Ω произвольной размерности n с гладкой границей $\partial\Omega$. Это фазовое пространство не совпадает с кокасательным расслоением $T^*\Omega$, а содержит его как плотное открытое подмножество, и траектории гамильтоновой системы в $\mathbf{\Phi}$ на бесконечность не уходят. Для завершения теории оставалось построить кано-

нический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях Λ в $\mathbf{\Phi}$. Частично это было сделано в [74] для случая, когда $n = 2$, а Λ инвариантно относительно отвечающего уравнению (2.1) гамильтонова векторного поля, и на основе этих результатов были получены асимптотические решения с конечной энергией задачи Коши для двумерного уравнения (2.1) с локализованными начальными данными. В статье [45] построен канонический оператор Маслова на лагранжевом многообразии Λ в $\mathbf{\Phi}$ в общем случае (n произвольно, инвариантность многообразия Λ относительно гамильтонова векторного поля не требуется). Отметим, что формулы из [45] являются новыми и для ситуаций, рассмотренных в [18, 72, 74]. Именно, в указанных работах канонический оператор в картах, отвечающих окрестности границы $\partial\Omega$, задается несобственными интегралами, которые при $x \in \partial\Omega$ сходятся лишь в смысле главного значения по Коши. В статье [45] определение канонического оператора в каждой из карт оно включает лишь интегрирование гладкой функции с компактным носителем, что как с практической, так и с теоретической точки зрения является несомненным преимуществом.

Описанные результаты позволяют строить быстроосциллирующие асимптотические решения конечной энергии для уравнения (2.1). Переход в задаче Коши от быстроосциллирующих решений к решениям с локализованными начальными данными осуществляется на основе результатов из [22, 46]. Задача Коши с локализованными правыми частями сводится к задаче Коши с локализованными начальными данными с помощью хорошо известного принципа Дюамеля. При этом, используя локализованность правой части, вычисления удается значительно упростить на основе операторного метода Маслова [27]; это было сделано в [73]. Исследовать *близость асимптотических решений к точным* можно методом интегралов энергии (см., например, [12, с. 480] и в абстрактной формулировке [6, § 8.2, теорема 5]); отметим, что быстроосциллирующие функции, доставляемые каноническим оператором, бесконечно дифференцируемы в $\overline{\Omega}$, а следовательно (см., например, [18, предложения 1, 2 и теорема 1]; рассуждения в общем случае аналогичны), удовлетворяют условию конечности энергии и лежат в области определения волнового оператора.

В данной главе представлены результаты, полученные лично автором. Основные результаты опубликованы в [18, 42, 43, 45, 46, 71–74, 95] Изложение следует работам [42, 43, 45, 46, 73, 74, 95].

2.1. Пример: одномерный случай

Рассмотрим сначала простой одномерный пример, следуя статье [42].

Для волнового уравнения

$$\eta_{tt} - (c^2(x)\eta_x)_x \equiv (\partial_t^2 - \partial_x c^2(x)\partial_x)u = 0, \quad \eta = \eta(x,t), \\ x \in \mathbf{R}_+ = (0,\infty), \quad t \in [0,T], \tag{2.3}$$

с гладкой скоростью $c(x)$, стабилизирующейся на бесконечности к постоянной $c_\infty > 0$, а при $x = 0$ вырождающейся так, что $c(x) = \sqrt{x}\varkappa(x)$, где функция $\varkappa(x)$ — гладкая и строго положительная вплоть до точки $x = 0$, рассмотрим задачу Коши с сосредоточенными вблизи точки $x = 1$ начальными условиями

$$\eta|_{t=0} = V\left(\frac{x-1}{\mu}\right), \qquad \eta_t|_{t=0} = 0. \tag{2.4}$$

Здесь $V(y)$, $y \in \mathbf{R}$ — гладкая финитная вещественная функция, а μ — малый положительный параметр. Задача (2.3), (2.4) возникает при линеаризации одномерных уравнений мелкой воды и хорошо известна в т. н. теории наката (см., напр., [52, 103] и цитированную там литературу). С математической точки зрения быстроосциллирующие асимптотические решения уравнения (2.3) изучались в [105], асимптотика при $\mu \to 0$ решения задачи (2.3), (2.4) была построена в [21, 72], а ее двумерного аналога со скоростью $c(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}$ — в [18]. Пространственная часть волнового оператора в уравнении (2.3) определялась в [18, 21, 72, 105] как расширение по Фридрихсу оператора $\ell = -\partial_x c^2(x)\partial_x$, заданного на $C_0^\infty(\mathbf{R}_+)$, что отвечает физически естественному условию конечности интеграла энергии [6, 12]. Однако у ℓ имеются и другие самосопряженные расширения.

2.1.1. Самосопряженные расширения оператора ℓ и задача Коши

Оператор ℓ с областью определения $C_0^\infty(\mathbf{R}_+)$ в пространстве $L^2(\mathbf{R}_+)$ симметричен, положителен и имеет индексы дефекта $(1,1)$. Все его самосопряженные расширения могут быть описаны следующим образом (см., напр., [72, теорема 1 и замечание 2]):

Предложение 2.1. *Пусть D_θ, $\theta \in [0,\pi)$ — линейное многообразие гладких функций $v(x)$, $x \in \mathbf{R}_+$, таких, что $v(x) = 0$ при достаточно больших x и справедливо представление $v(x) = a\ln x + b(x)$, где $b(x)$ — гладкая функция на замкнутой полуоси $\overline{\mathbf{R}}_+$, причем $a\cos\theta + b(0)\sin\theta = 0$. Тогда оператор, определяемый дифференциальным выражением ℓ на D_θ, существенно самосопряжен в $L^2(\mathbf{R}_+)$, и соответствующие замыкания — самосопряженные операторы L_θ — при различных θ различны и исчерпывают все возможные самосопряженные расширения оператора ℓ с $C_0^\infty(\mathbf{R}_+)$. Все операторы L_θ полуограничены снизу, т. е. $(L_\theta\psi,\psi) \geq -C_\theta \|\psi\|^2$, $\psi \in D(L_\theta)$, с некоторой постоянной C_θ, где $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ — соответственно норма и скалярное произведение в $L^2(\mathbf{R}_+)$. Расширению по Фридрихсу отвечает значение $\theta = 0$.*

Зафиксируем $\theta \in [0,\pi)$. Через (2.3_θ) обозначим уравнение (2.3), в котором волновой оператор определен как $\partial_t^2 + L_\theta$, и рассмотрим задачу Коши (2.3_θ), (2.4). Пусть $\mathcal{C}_\theta^2([0,T])$ — пространство функций $v \in C^2([0,T];L^2(\mathbf{R}_+))$, таких, что $v(t) \in D(L_\theta)$ при каждом $t \in [0,T]$ и $L_\theta v \in C([0,T];L^2(\mathbf{R}_+))$. *Сильным решением* задачи Коши (2.3_θ), (2.4) называется функция $\eta \in \mathcal{C}_\theta^2([0,T])$, удовлетворяющая уравнению (2.3_θ) и начальным условиям (2.4) (см. [6, п. 8.2]). Для $\psi \in D(L_\theta)$ определим энергетическую норму формулой

$$\|\psi\|_\theta = \big[(\psi, L_\theta\psi) + (C_\theta + 1)\|\psi\|^2\big]^{1/2}. \tag{2.5}$$

Предложение 2.2. *Для любого $v \in \mathcal{C}_\theta^2([0,T])$ выполнено энергетическое неравенство*

$$\|v(t)\|_\theta + \|v_t(t)\| \leq C(t)\big(\|v(0)\|_\theta + \|v_t(0)\| + \max_{\tau\in[0,t]} \big\|[(\partial_t^2 + L_\theta)v](\tau)\big\|\big), \quad t \in [0,T], \tag{2.6}$$

где $C(t)$ — не зависящая от v непрерывная функция. В частности, задача Коши (2.3_θ), (2.4) корректна в норме (2.5).

2.1.2. Задача об асимптотике и ее редукция к случаю быстроосциллирующих решений

Пусть $\eta = \eta(\cdot,\mu) \in \mathcal{C}^2_\theta([0,T])$ — решение задачи Коши (2.3_θ), (2.4). Мы хотим найти такую функцию $\eta_{as} = \eta_{as}(\cdot,\mu) \in \mathcal{C}^2_\theta([0,T])$, что[1]

$$\|\eta(t,\mu) - \eta_{as}(t,\mu)\|_\theta = O(\mu) \qquad \text{при } \mu \to 0 \text{ равномерно по } t \in [0,T]. \tag{2.7}$$

Следуя [72, 77], сведем построение асимптотики η_{as} решения η при $\mu \to 0$ к построению некоторых быстроосциллирующих решений уравнения (2.3_θ). Пусть $S(x)$ — гладкая вещественная функция, такая, что $S(1) = 0$ и $S'(1) = 0$, и пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+)$, $\varphi(x) = 1$ в окрестности точки $x = 1$ и $\varphi(x) = 0$ вне достаточно малой окрестности точки $x = 1$. Далее, пусть $V(y,\mu) = V(y) - \mu y^2 V'(y) S''(1)/2$, и пусть $\widetilde{V}(\rho,\mu) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho x} V(y,\mu)\,dy$ — преобразование Фурье функции $V(y,\mu)$.

Предложение 2.3. *Выполнено соотношение*

$$V\left(\frac{x-1}{\mu}\right) = 2\,\mathrm{Re}\int_\mu^\infty \widetilde{V}(\rho,\mu) e^{\frac{i\rho}{\mu}S(x)}\varphi(x)\,d\rho + R(x,\mu), \qquad \text{где } \|R(\cdot,\mu)\|_\theta = O(\mu). \tag{2.8}$$

Рассмотрим задачу Коши с быстроосциллирующими начальными данными ($h \to 0$)

$$u_{tt} + L_\theta u = 0, \qquad u|_{t=0} = e^{\frac{i}{h}S(x)}\varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = 0, \tag{2.9}$$

Предложение 2.4. *Пусть $u_{as} = u_{as}(\cdot,h) \in \mathcal{C}^2_\theta([0,T])$ — асимптотическое решение задачи (2.9) с точностью $O(h^2)$, т. е. начальные условия в (2.9) выполнены для u_{as} в точности, а $\big\|[(\partial_t^2 + L_\theta)u_{as}](t,h)\big\| = O(h^2)$ равномерно по*

[1] Из (2.7), в частности, следует, что $|\eta(x,t,\mu) - \eta_{as}(x,t,\mu)| \le C_K\mu$, $x \in K$, для любого компактного подмножества $K \subset \mathbf{R}_+$. Более тонкие поточечные оценки будут даны в подробной публикации.

$t \in [0,T]$. *Тогда функция*

$$\eta_{as}(t,\mu) = 2\,\mathrm{Re}\int\limits_{\mu}^{\infty} \widetilde{V}(\rho,\mu) u_{as}(t,\mu/\rho)\,d\rho$$

удовлетворяет оценке (2.7), *т. е. является асимптотикой решения задачи Коши* (2.3_θ), (2.4).

Действительно, $\|\eta(0,\mu) - \eta_{as}(0,\mu)\|_\theta + \|\eta_t(0,\mu) - (\eta_{as})_t(0,\mu)\| = O(\mu)$ в силу (2.4), (2.8) и (2.9),

$$\big\|[(\partial_t^2 + L_\theta)(\eta - \eta_{as})](t,\mu)\big\| \\ \leq 2\int\limits_{\mu}^{\infty} |\widetilde{V}(\rho,\mu)|\,\big\|[(\partial_t^2 + L_\theta)u_{as}](t,\mu/\rho)\big\|d\rho \leq C\int\limits_{\mu}^{\infty}\frac{\mu^2 d\rho}{\rho^2} = C\mu,$$

и остается применить предложение 2.2.

2.1.3. Канонический оператор для задачи (2.9)

Асимптотическое решение u_{as} задачи (2.9) при малых t выражается через канонический оператор Маслова [39, 41] на лагранжевых многообразиях, получаемых сдвигом начального многообразия $\{p = S'(x)\}$ на время $\pm t$ вдоль траекторий системы Гамильтона $\dot{x} = c(x)\operatorname{sign} p$, $\dot{p} = -c'(x)|p|$, отвечающей гамильтониану $H(x,p) = c(x)|p|$. (Проще всего, пользуясь свободой в выборе функции $S(x)$, взять начальное многообразие, инвариантное относительно системы Гамильтона. Тогда решение при разных t выражается через канонический оператор на одном и том же лагранжевом многообразии.) Однако при больших t конструкция канонического оператора из [39, 41] в данной задаче не применима, поскольку траектории этой системы уходят на бесконечность по импульсу p за конечное время (одновременно заходя по координате x в точку вырождения $x = 0$), и как только волна доходит до точки $x = 0$, носитель функции, к которой следовало бы применить канонический оператор, становится некомпактным. Таким образом, определение канонического оператора необходимо расширить, причем так, что получающиеся в результате его применения функции будут принадлежать области определения $D(L_\theta)$ оператора L_θ.

Для $\theta = 0$ соответствующее определение канонического оператора было дано в [21, 72, 105], здесь же мы не предполагаем, что $\theta \neq 0$. Для упрощения формул всюду далее считаем, что $c(1) = \varkappa(0) = 1$.

Пусть $\Lambda_\pm = \{(x,p) \in \mathbf{R}^2 \colon x > 0,\ p = c^{-1}(x)\}$ и $\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$. Лагранжево многообразие Λ является линией уровня гамильтониана ($\Lambda = \{(x,p) \colon H(x,p) = 1\}$), а каждая из его компонент $\Lambda_\pm$ — траекторией гамильтонова векторного поля. В качестве глобальной координаты на Λ возьмем время τ вдоль траектории, считая, что момент времени $\tau = 0$ соответствует уходу траектории в бесконечно удаленную точку $(x,p) = (0, \pm\infty)$; тогда $\tau = \pm\int_0^x c(\xi)^{-1}\,d\xi$ (верхний знак соответствует Λ_+, а нижний — Λ_-), и координата τ изменяется на полуоси $(0,\infty)$ для Λ_+ и полуоси $(-\infty, 0)$ для Λ_-. Через $\widehat{C}_0^\infty(\Lambda)$ обозначим пространство кусочно гладких функций $\varphi(\tau)$ с компактным носителем, гладких при $\tau \neq 0$. Таким образом, сужения функции $\varphi \in \widehat{C}_0^\infty(\Lambda)$ на $\Lambda_\pm$ суть финитные гладкие функции на $[0,\infty)$ и $(-\infty, 0]$ соответственно.

Определим на Λ канонический оператор. Для этого покроем Λ каноническими картами $U_+ = \{\tau > \tau_0\}$, $U_- = \{\tau < -\tau_0\}$ с канонической координатой x («неособые» карты) и $\widetilde{U}_+ = \{0 < \tau < 2\tau_0\}$, $\widetilde{U}_- = \{0 > \tau > -2\tau_0\}$ с канонической координатой p («особые» карты). Здесь $\tau_0 > 0$ — достаточно малое число. Фазы (действия) и якобианы в канонических картах задаются формулами (в правых частях которых τ, p, x понимаются как функции на Λ, выраженные через каноническую координату в соответствующей карте)

$$S_\pm(x) = \tau - \int_0^1 \frac{d\xi}{c(\xi)},\ J_\pm(x) = \pm c(x) \text{ в } U_\pm;$$

$$\widetilde{S}_\pm(p) = S_\pm(x) - px,\ \widetilde{J}_\pm(p) = -c'(x)|p| \text{ в } \widetilde{U}_\pm.$$

При этом $S_+(1) = 0$, $S'_+(1) = 1$, $S_+(0) = S_-(0)$. Аргументы якобианов выберем по правилу $\arg J_+(x) = 0$, $\arg \widetilde{J}_+(p) = \pi$, $\arg J_-(x) = \arg \widetilde{J}_-(p) = -\pi$. Через $\widehat{C}_0^\infty(U_\pm) (= C_0^\infty(U_\pm))$ и $\widehat{C}_0^\infty(\widetilde{U}_\pm)$ обозначим пространства функций из $\widehat{C}_0^\infty(\Lambda)$ с носителями в соответствующих канонических картах. Определим локальные канонические операторы

$$K_\pm^h \colon \widehat{C}_0^\infty(U_\pm) \to L^2(\mathbf{R}_+), \qquad [K_\pm^h \varphi](x) = e^{\frac{i}{h}S_\pm(x)} J_\pm^{-1/2}(x)\varphi(x),$$

и

$$\widetilde{K}^h_\pm\colon \widehat{C}^\infty_0(\widetilde{U}_\pm) \to L^2(\mathbf{R}_+),$$
$$[\widetilde{K}^h_\pm\varphi](x) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi h}} \int\limits_0^\infty e^{\frac{i}{h}\left(\widetilde{S}_\pm(\pm p)\pm px\right)} \widetilde{J}_\pm^{-1/2}(\pm p)\varphi(\pm p)\,dp,$$

где ветви квадратных корней из якобианов выбираются в соответствии с зафиксированными выше значениями аргумента, а несобственные интегралы во второй строке понимаются как осцилляторные интегралы [60, § 7.8]. Далее, определим канонический оператор

$$K^h\colon \widehat{C}^\infty_0(\Lambda) \to L^2(\mathbf{R}_+), \qquad K^h\varphi = K^h_+(e_+\varphi) + K^h_-(e_-\varphi) + \widetilde{K}^h_+(\widetilde{e}_+\varphi) + \widetilde{K}^h_-(\widetilde{e}_-\varphi), \tag{2.10}$$

где $1 = e_+ + e_- + \widetilde{e}_+ + \widetilde{e}_-$ — разбиение единицы в $\widehat{C}^\infty_0(\Lambda)$, подчиненное покрытию многообразия Λ картами $U_\pm, \widetilde{U}_\pm$.

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi \in \widehat{C}^\infty_0(\Lambda)$. Тогда $\widetilde{K}^h_\pm\varphi = a(h)\ln x + b(x,h)$, где функция $b(x,h)$ непрерывна при $x = 0$ и выполнены соотношения*

$$a(h) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}+\frac{i}{h}S_+(0)}}{\sqrt{2\pi h}}\big(\varphi_- - \varphi_+\big),$$
$$b(0,h) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}+\frac{i}{h}S_+(0)}}{\sqrt{2\pi h}}\Big\{A(h)\varphi_+ - \overline{A}(h)\varphi_- + \sum_{j=1}^{n-1} h^j\left[(D_j^+\varphi)_+ + (D_j^-\varphi)_-\right]\Big\} + O(h^n),$$

где $A(h) = \pi i - 2\gamma + 2\ln h$, γ — постоянная Эйлера, $D_j^\pm$ — дифференциальные операторы порядка не выше j, а нижние индексы $\pm$ у φ и $D_j^\pm\varphi$ обозначают предельные значения справа и слева при $\tau = 0$.

Для $\varphi \in \widehat{C}^\infty_0(\Lambda)$ обозначим $T(\varphi) = a(h)\cos\theta + b(0,h)\sin\theta$. Пусть $\widehat{C}^\infty_\theta(\Lambda)$ — пространство функций $\varphi \in \widehat{C}^\infty_0(\Lambda)$, зависящих от h так, что они равномерно по h ограничены вместе со всеми производными и $T(\varphi) = O(h^\infty)$. Пусть $\psi_0(x) \in C^\infty_0(\overline{\mathbf{R}}_+)$, $\psi_0(0) = 1$. Положим

$$K^h_\theta\varphi = K^h\varphi - T(\varphi)\psi_0\operatorname{cosec}\theta, \qquad \varphi \in \widehat{C}^\infty_\theta(\Lambda).$$

Тогда $K^h_\theta\varphi \in D(L_\theta)$ в силу теоремы 2.1 и определения оператора L_θ. Далее, из теоремы 2.1 вытекает, что функция $\varphi(x,h)$, имеющая асимптотическое разложение $\varphi \sim \sum_{k=0}^\infty h^k\varphi_k$, где функции $\varphi_k \in \widehat{C}^\infty_0(\Lambda)$ сами зависят от h, но равномерно

по h ограничены вместе с производными, принадлежит пространству $\widehat{C}^\infty_\theta(\Lambda)$, если скачки функций φ_k при $\tau = 0$ удовлетворяют рекурсивной цепочке условий сопряжения

$$\varphi_{0+} = \frac{\cos\theta - \overline{A}(h)\sin\theta}{\cos\theta - A(h)\sin\theta}\varphi_{0-}, \quad \varphi_{k+} = \frac{(\cos\theta - \overline{A}(h)\sin\theta)\varphi_{k-} + F_k(h)}{\cos\theta - A(h)\sin\theta},$$

$k = 1, 2, \ldots$, где $F_k(h)$ зависит только от значений функций $\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}$ и их производных порядка не выше k при $\tau = 0$ и равномерно ограничено по h. Дальнейшее построение быстроосциллирующих асимптотических решений задачи (2.9) следует стандартной схеме [26, 39], используемой при применении канонического оператора (для случая $\theta = 0$ она был реализована в [72]), и мы опускаем соответствующие рассуждения.

Далее мы рассматриваем общий многомерный случай и будем интересоваться только случаем расширения по Фридрихсу, как представляющим наибольший интерес с физической точки зрения (решения конечной энергии).

2.2. Операторы, вырождающиеся на границе

2.2.1. Класс операторов $\mathrm{DEG}\,\overline{\Omega}$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n_x$ — конечная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Будем рассматривать в Ω дифференциальные операторы второго порядка

$$P = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=1}^n b_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k} + c(x)$$

где $a_{jk}(x) = a_{kj}(x)$, $b_k(x)$ и $c(x)$ — гладкие функции в замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω. Имея в виду в дальнейшем построение быстроосциллирующих асимптотических решений с малым параметром $h \to 0$, перепишем оператор P в терминах операторов

$$\widehat{p}_j = -ih\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

для чего умножим его на $-h^2$. Произведение $D = -h^2 P$ имеет вид

$$D = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)\widehat{p}_j\widehat{p}_k - ih\sum_{k=1}^n b_k(x)\widehat{p}_k - h^2 c(x). \tag{2.11}$$

Нас будут интересовать операторы (2.11), вырождающиеся на $\partial\Omega$ вполне определенным образом. Пусть $\psi(x)$ — определяющая функция границы $\partial\Omega$, т. е.

$$\psi(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}); \qquad \psi(x) > 0,\ x \in \Omega; \qquad \psi(x) = 0,\ \nabla\psi(x) \neq 0,\ x \in \partial\Omega. \quad (2.12)$$

Далее, пусть

$\operatorname{Vect}\overline{\Omega}$ — алгебра Ли гладких векторных полей в $\overline{\Omega}$;

$\operatorname{Vect}_\partial\overline{\Omega} \subset \operatorname{Vect}\overline{\Omega}$ — подалгебра Ли полей, всюду касательных к $\partial\Omega$.

Элементы из $\operatorname{Vect}_\partial\overline{\Omega}$ можно охарактеризовать следующим образом: поле $W \in \operatorname{Vect}\overline{\Omega}$ принадлежит $\operatorname{Vect}_\partial\overline{\Omega}$, если

$$W\psi = f\psi \qquad \text{для некоторой функции } f \in C^\infty(\Omega).$$

Определение 2.1. Будем говорить, что оператор (2.11) в области Ω принадлежит классу $\operatorname{DEG}\overline{\Omega}$, если его можно представить для некоторых M, N в виде

$$D = h^2\left(\sum_{j=1}^{M} V_j\psi V_{j+M} + \sum_{j=1}^{N} W_j W_{j+N} + W_{2N+1} - c(x)\right),$$

где $V_j \in \operatorname{Vect}\overline{\Omega}$, $j = 1, \ldots, 2M$, $W_j \in \operatorname{Vect}_\partial\overline{\Omega}$, $j = 1, \ldots, 2N+1$, и $c(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

2.2.2. Преобразования Фурье и Ганкеля

В определении шкалы гильбертовых пространств, в которых будут рассматриваться операторы класса $\operatorname{DEG}\overline{\Omega}$ и в других дальнейших построениях используются преобразование Фурье и преобразование Ганкеля нулевого порядка. Выпишем их в интересующей нас нормировке, включающей малый параметр h, и заодно введем обозначения, которыми будем в дальнейшем пользоваться. Прямое и обратное преобразование Фурье определяются в одномерном случае формулами

$$\widetilde{f}(p) \equiv [\mathcal{F}^h_{x\to p} f](p) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi h}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/h} f(x)\, dx,$$

$$f(x) \equiv [\mathcal{F}^{-h}_{p\to x} \widetilde{f}](x) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi h}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/h} \widetilde{f}(p)\, dp.$$

Прямое и обратное преобразование Ганкеля действуют на функции на полуоси $[0,\infty)$ и задаются формулами (ср. [4, с. 11]):

$$\check{f}(E) \equiv [\mathcal{G}^h_{x\to E} f](E) = -\frac{i}{h}\int\limits_0^\infty \mathbf{J}_0\left(\frac{2}{h}\sqrt{Ex}\right) f(x)\,dx,$$

$$f(x) \equiv [\mathcal{G}^h_{x\to E} \check{f}](x) = \frac{i}{h}\int\limits_0^\infty \mathbf{J}_0\left(\frac{2}{h}\sqrt{Ex}\right) \check{f}(E)\,dE,$$

где [7, с. 29, формула (5)]

$$\mathbf{J}_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{iz\cos\theta}\,d\theta \tag{2.13}$$

— функция Бесселя нулевого порядка. Напомним свойства преобразования Ганкеля:

$$\int\limits_0^\infty \overline{\check{f}(E)}\check{g}(E)\,dE = \int\limits_0^\infty \overline{f(x)}g(x)\,dx \tag{2.14}$$

(равенство Парсеваля) и

$$\begin{gathered}\mathcal{G}^h_{x\to E}\left[-h^2\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial x}f(x)\right](E) = E\check{f}(E),\\ \mathcal{G}^h_{x\to E}[xf(x)](E) = -h^2\frac{\partial}{\partial E}E\frac{\partial}{\partial E}\check{f}(E).\end{gathered} \tag{2.15}$$

Кроме того, непосредственное вычисление показывает, что ядро

$$\mathcal{K}(x,E) = h^{-1}\mathbf{J}_0(2\sqrt{Ex}/h)$$

преобразования Ганкеля удовлетворяет оценкам

$$\left|h^{m+l}\frac{\partial^{m+l}\mathcal{K}(x,E)}{\partial x^m \partial E^l}\right| \le C_{m+l}\frac{h^{-1/2}E^m x^l}{(h+\sqrt{xE})^{m+l+1/2}}. \tag{2.16}$$

Нам потребуются также преобразование Фурье в многомерном случае. Пусть $x = (x_1,\dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p = (p_1,\dots p_n) \in \mathbb{R}^n$, и пусть $I \subset \{1,\dots,n\}$ — некоторое подмножество, а

$$\overline{I} = \{1,\dots,n\} \setminus I$$

— дополнительное подмножество. Преобразование Фурье по переменным $x_{\overline{I}} = \{x_j\}_{j\in\overline{I}}$ определяется как произведение соответствующих одномерных преобразований Фурье:

$$[\mathcal{F}^h_{x_{\overline{I}}\to p_{\overline{I}}} f](x_I, p_{\overline{I}}) = \frac{e^{-i\pi|\overline{I}|/4}}{(2\pi h)^{|\overline{I}|/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{|\overline{I}|}} e^{-i\langle p_{\overline{I}}, x_{\overline{I}}\rangle/h} f(x)\, dx_{\overline{I}},$$

$$[\mathcal{F}^{-h}_{p_{\overline{I}}\to x_{\overline{I}}} g](x) = \frac{e^{i\pi|I|/4}}{(2\pi h)^{|I|/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{|\overline{I}|}} e^{i\langle p_{\overline{I}}, x_{\overline{I}}\rangle/h} g(x_I, p_{\overline{I}})\, dp_{\overline{I}},$$

где $|\overline{I}|$ — число элементов во множестве $\overline{I}$,

$$\langle p_{\overline{I}}, x_{\overline{I}}\rangle = \sum_{j\in\overline{I}} p_j x_j, \qquad dx_{\overline{I}} = \prod_{j\in\overline{I}} dx_j$$

и т.д. Наконец, для функций на полуплоскости

$$\overline{\mathbb{R}}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_1 \geq 0\}$$

мы определим преобразование Ганкеля–Фурье $\mathcal{GF}^h_{\overline{I}}$, где $I \subset \{2, \dots, n\}$, а

$$\overline{I} = \{2, \dots, n\} \setminus I,$$

как композицию преобразования Ганкеля по переменной x_1 и преобразования Фурье по переменным x_j, $j \in \overline{I}$:

$$[\mathcal{GF}^h_{\overline{I}} f](E, x_I, p_{\overline{I}}) = -\frac{ie^{-i\pi|\overline{I}|/4}}{h(2\pi h)^{|\overline{I}|/2}} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^{|\overline{I}|}} \mathbf{J}_0\left(\frac{2}{h}\sqrt{Ex_1}\right) e^{-i\langle p_{\overline{I}}, x_{\overline{I}}\rangle/h} f(x)\, dx_1\, dx_{\overline{I}},$$

$$[\mathcal{GF}^{-h}_{\overline{I}} g](x) = \frac{ie^{i\pi|\overline{I}|/4}}{h(2\pi h)^{|\overline{I}|/2}} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^{|\overline{I}|}} \mathbf{J}_0\left(\frac{2}{h}\sqrt{Ex_1}\right) e^{i\langle p_{\overline{I}}, x_{\overline{I}}\rangle/h} g(E, x_I, p_{\overline{I}})\, dE\, dp_{\overline{I}}.$$

Если $I = \emptyset$, то вместо $\mathcal{F}^h_{x_{\overline{I}}\to p_{\overline{I}}} f$ пишем просто $\mathcal{F}^h f$ или $\widetilde{f}$, а вместо $\mathcal{GF}^h_{\overline{I}} f$ — $\mathcal{GF}^h f$.

2.2.3. Функциональные пространства $\mathfrak{H}^s(\Omega)$

Введем основные функциональные пространства, в которых будут изучаться вырожденные уравнения и в которые будет действовать канонический оператор. Поскольку речь идет о быстроосциллирующих (или локализованных) решениях, естественно, что нормы в этих пространствах будут зависеть от малого

параметра $h \in (0, 1]$, неформально говоря, определяющего «скорость» осцилляций или убывания.

(a) Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n$. Определим тогда $\mathfrak{H}^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$ как обычное пространство Соболева с параметром h, в котором норма задается формулой

$$\|u\|_s = \|(1 - h^2\Delta)^{s/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + p^2)^{s/2}\widetilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.17}$$

где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$.

(b) Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n_+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_1 > 0\}$. Стандартным образом [59, § IV.9] введем гильбертову шкалу $\{\mathfrak{H}^s(\mathbb{R}^n_+)\}$, ассоциированную с оператором $1 - h^2\Delta_1$, где

$$\Delta_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

— самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}^n_+)$, полученный расширением по Фридрихсу с множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ на (можно показать, что в данном случае расширение совпадает с замыканием с $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$). Норма в $\mathfrak{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ имеет вид

$$\|u\|_s = \|(1 - h^2\Delta_1)^{s/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}, \tag{2.18}$$

или, с учетом свойств преобразований Фурье и Ганкеля,

$$\|u\|_s = \|(1 + E + p')^{s/2}\mathcal{G}\mathcal{F}^h u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}, \tag{2.19}$$

где $p' = (p_2, \ldots, p_n)$.

(c) Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — конечная область с гладкой границей $\partial\Omega$, а

$$1 = \sum_{k=0}^{N} e_k^2(x), \qquad e_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

— разбиение единицы на замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω, подчиненное конечному открытому покрытию

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{k=0}^{N} \Omega_k, \qquad \Omega_k \subset \mathbb{R}^n,$$

такому что $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ и для каждого $k = 1, \dots, N$ существуют локальные координаты $y = (y_1, \dots, y_n)$ в Ω_k, в которых пересечение $\Omega \cap \Omega_k$ задается неравенством $y_1 > 0$. Распределение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ принадлежит пространству $\mathfrak{H}^s(\Omega)$, если $e_0 u \in \mathfrak{H}^s(\mathbb{R}^n)$ и $e_k u \in \mathfrak{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ (в соответствующих координатах $(y_1, \dots, y_n)$) для каждого $k = 1, \dots, N$. Положим

$$\|u\|_s = \left\{ \sum_{k=0}^{N} \|e_k u\|_s^2 \right\}^{1/2}, \tag{2.20}$$

где каждая из норм в правой части определяется в соответствующих локальных координатах формулой (2.17) (при $k = 0$) или (2.18) (при $k > 0$).

Стандартными средствами доказывается

Предложение 2.5. *Пространство $\mathfrak{H}^s(\Omega)$ гильбертово и (с точностью до эквивалентности норм с константами, не зависящими от параметра h) не зависит от выбора покрытия $\{\Omega_k\}$ и разбиения единицы $\{e_k\}$. Множество $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в каждом из пространств $\mathfrak{H}^s(\Omega)$. Кроме того, $\mathfrak{H}^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, и для любого компакта $K \subset \Omega$ норма (2.20) при $\operatorname{supp} u \subset K$ эквивалентна стандартной соболевской норме (2.17) пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Определение 2.2. Пусть $f(x) = f(x, h) \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Будем писать $f = O(h^N)$, если $\|f\|_s = O(h^N)$ для любого $s \in \mathbb{R}$.

Следующее утверждение, доказательство которого вполне аналогично доказательству непрерывности дифференциальных операторов в обычных пространствах Соболева, объясняет выбор пространств $\mathfrak{H}^s(\Omega)$ в качестве тех функциональных пространств, в которых предполагается изучать вырождающиеся на границе операторы.

Предложение 2.6. *Если $D \in \operatorname{DEG} \overline{\Omega}$, то при каждом s верна оценка*

$$\|Du\|_s \le C_s \|Du\|_{s+2}, \qquad u \in C_\infty(\Omega),$$

с постоянной C_s, не зависящей от h. Таким образом, оператор D продолжается по непрерывности до ограниченного оператора из $\mathfrak{H}^{s+2}(\Omega)$ в $\mathfrak{H}^s(\Omega)$ для всех s.

2.2.4. Вырождающиеся уравнения волнового типа

Важные примеры операторов из $\mathrm{DEG}\,\overline{\Omega}$ возникают из уравнений волнового типа с вырождением на границе. В области Ω рассмотрим более общее, чем (2.1), вырождающееся уравнение

$$-h^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sum_{j,k=1}^{n}\widehat{p}_j(\psi(x)a_{jk}(x)\widehat{p}_k u)=0, \tag{2.21}$$

где $\psi(x)$ как и выше, определяющая функция границы $\partial\Omega$, а $a_{jk}(x)$ — гладкие функции в $\overline{\Omega}$, причем матрица $A(x)=(a_{jk}(x))$ — симметрическая, вещественная и строго положительно определена при всех $x\in\overline{\Omega}$. Уравнение (2.1) получается, если в уравнении (2.21) положить $a_{jk}(x)=\delta_{jk}$ и $\psi(x)=c^2(x)$. Обозначим

$$\ell u=\sum_{j,k=1}^{n}\widehat{p}_j(\psi(x)a_{jk}(x)\widehat{p}_k u).$$

Тогда $\ell\in\mathrm{DEG}\,\overline{\Omega}$. Действительно,

$$\ell u=-h^2\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\psi(x)\frac{\partial}{\partial x_k}-h^2\psi(x)\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{jk}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Как уже указывалось во введении к этой главе, граничные условия на Ω в классическом смысле для уравнения (2.21) не нужны, однако необходимо описать область определения оператора в левой части уравнения (2.21). Пусть $D(x)=A^{1/2}(x)$ — положительный квадратный корень из положительной матрицы $A(x)$, $d_{jk}(x)$ — элементы матрицы $D(x)$. Через

$$T\colon L^2(\Omega)\longrightarrow L^2(\Omega,\mathbb{C}^n)$$

обозначим оператор, полученный как замыкание оператора, заданного на области определения $C_0^\infty(\Omega)$ выражением

$$\mathfrak{t}u=-ih\sqrt{\psi(x)}\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n}d_{1k}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\\ \sum\limits_{k=1}^{n}d_{2k}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^{n}d_{nk}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\end{pmatrix}\equiv\sqrt{\psi}\mathfrak{d}u.$$

Положим $L = T^*T$.

Предложение 2.7. *Оператор L является расширением по Фридрихсу оператора, задаваемого на $C_0^\infty(\Omega)$ дифференциальным выражением ℓ. Его область определения $\mathcal{D}(L)$ содержит пространство $C^\infty(\overline{\Omega})$ гладких функций в замыкании области Ω. Кроме того,*

$$\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(L^{1/2}), \qquad \|Tu\| = \|L^{1/2}u\|, \quad u \in \mathcal{D}(L^{1/2}).$$

Доказательство. Первое и последнее утверждения очевидны, так как $(u, \ell v) = (Tu, Tv)$ для $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ и, следовательно, область определения замыкания формы $(u, \ell v)$ совпадает с $\mathcal{D}(T)$. Докажем, что $C^\infty(\overline{\Omega}) \subset D(L)$. Введем функцию [18, с. 75]

$$\varphi_\varepsilon(\tau) = \int\limits_0^\tau \frac{\chi_\varepsilon(\theta)d\theta}{\theta|\ln\theta|}\left(\int\limits_0^\infty \frac{\chi_\varepsilon(\theta)d\theta}{\theta|\ln\theta|}\right)^{-1},$$

где $\chi_\varepsilon(\theta) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \le \chi_\varepsilon(\theta) \le 1$, $\chi_\varepsilon(\theta) = 0$ при $\theta \notin (\varepsilon, \sqrt{\varepsilon})$ и $\chi_\varepsilon(\theta) = 1$ при $\theta \in (2\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}/2)$. Пусть $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Положим $u_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(\psi(x))u(x)$. Тогда $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, и аналогично [18, с. 75–76] показывается, что $u_\varepsilon \to u$ и $\mathfrak{t}u_\varepsilon \to \mathfrak{t}u$ в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$, так что $u \in \mathcal{D}(T)$ и $Tu = \mathfrak{t}u = \sqrt{\psi}\mathfrak{d}u$, где $\mathfrak{d}u \in C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{C}^n)$. Если теперь $w \in C_0^\infty(\Omega)$, то интегрирование по частям показывает, что

$$(Tu, Tw) \equiv (\sqrt{\psi}\mathfrak{d}u, \sqrt{\psi}\mathfrak{d}w) = (\psi\mathfrak{d}u, \mathfrak{d}w) = (\mathfrak{d}^*\psi\mathfrak{d}u, w) = (\mathfrak{t}^*\mathfrak{t}u, w) = (\ell u, w)$$

(где $\mathfrak{d}^*$ и $\mathfrak{t}^*$ — формально сопряженные к $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{t}$ соответственно), откуда немедленно следует, что $Tu \in \mathcal{D}(T^*)$, $u \in D(L)$ и $Lu = \ell u$. □

Следствие 2.1. *Справедливо включение $\mathfrak{H}^2(\Omega) \subset \mathcal{D}(L)$.*

2.3. Фазовое пространство

Для конечной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n_x$ с гладкой границей $\partial\Omega$ введем фазовое пространство $\mathbf{\Phi}$, ассоциированное с уравнениями, вырождающимися на границе [43, 45, 95].

2.3.1. Определение пространства Φ и его инвариантность

Пусть $T_0^*\Omega \simeq \Omega \times \mathbb{R}^n_p \setminus \{0\}$ — кокасательное расслоение области Ω с выброшенным нулевым сечением, снабженное каноническими формами

$$\omega^1 = p\,dx \equiv p_1\,dx_1 + \cdots + p_n\,dx_n,$$
$$\omega^2 = d\omega^1 = dp\,dx \equiv dp_1 \wedge dx_1 + \cdots + dp_n \wedge dx_n.$$

Раздутое фазовое пространство **Φ** строится следующим образом. Пусть $\psi(x)$ — определяющая функция границы $\partial\Omega$, т. е. выполнены условия (2.12). Возьмем достаточно малую воротниковую окрестность $\overline{U} \subset \overline{\Omega}$ границы $\partial\Omega$ в $\overline{\Omega}$, и пусть $a(x)$ — векторное поле в $\overline{U}$ такое, что

$$d\psi(a) \equiv \langle a, \nabla\psi\rangle = 1 \qquad \text{в } \overline{U}.$$

Рассмотрим прямое произведение $T^*\overline{U} \times \mathbb{R} \times (0,\infty)$ с координатами

$$(y,\eta,q,E), \qquad (y,\eta) \in T^*\overline{U}, \quad q \in \mathbb{R}, \quad E \in (0,\infty),$$

и оснастим его симплектической формой

$$\varpi^2 = d\eta \wedge dy + dE \wedge dq.$$

Лемма 2.1 ([43, лемма 1])**.** *Подмножество $V \subset T^*\overline{U} \times \mathbb{R} \times (0,\infty)$, задаваемое уравнениями*

$$\langle a(y),\eta\rangle = 0, \qquad \psi(y) = q^2E,$$

представляет собой гладкое $2n$-мерное симплектическое многообразие (относительно суженияформы ϖ^2), а его подмножество $V_\infty \subset V$, выделяемое дополнительным уравнением $q = 0$, представляет собой гладкое подмногообразие коразмерности 1 в V.

Доказательство. Обозначим $f_1 = \langle a(y),\eta\rangle$, $f_2 = \psi(y) - q^2E$ и вычислим скобку Пуассона этих функций: $\{f_1, f_2\} = 1$. Значит, их дифференциалы линейно независимы, так что уравнения $f_1 = f_2 = 0$ определяют гладкое подмногообразие V. Кроме того, отсюда же следует, что ограничение симплектической формы ϖ^2 на V невырожденно (см. п. Г доказательства теоремы Дарбу в [2,

§43, с. 202]). Наконец, при $q = 0$ множитель при dq в разложениях дифференциалов df_1 и df_2 по дифференциалам координат нулевой, так что ограничение дифференциала dq на V невырождено, откуда следует последнее утверждение леммы 2.1. □ □

Лемма 2.2. *Пусть* $U \stackrel{def}{=} \overline{U} \cap \Omega$ *и* $W_0 = \{(x,p) \in T^*_0 U \colon \langle a(x), p\rangle = 0\}$. *Отображение*

$$f \colon V \setminus V_\infty \longrightarrow T^*_0\Omega, \quad (y,\eta,q,E) \longmapsto (x,p) : \quad x = y, \quad p = \eta + q^{-1}\nabla\psi(y) \tag{2.22}$$

есть корректно определенный симплектоморфизм на свой образ $T^*_0 U \setminus W_0$.

Доказательство. Имеем $y \in \overline{U}$, а так как $q \neq 0$ вне V_∞, то $\psi(y) = q^2 E > 0$ и соответственно $x \notin \partial\Omega$, так что $x = y \in U \subset \Omega$, и мы доказали, что отображение (2.22) корректно определено. Далее,

$$\langle a(x), p\rangle = \langle a(y), \eta\rangle + \langle a(y), q^{-1}\nabla\psi(y)\rangle = q^{-1} \neq 0,$$

так что образ отображения f лежит в $T^*_0 U \setminus W_0$. Образ отображения

$$g \colon T^*_0 U \setminus W_0 \longrightarrow T^*\overline{U} \times \mathbb{R} \times (0,\infty), \qquad (x,p) \longmapsto (y,\eta,q,E),$$

задаваемого формулой

$$y = x, \quad \eta = p - \langle a(x), p\rangle \nabla\psi(x), \quad q = \langle a(x), p\rangle^{-1}, \quad E = \psi(x)\langle a(x), p\rangle^2$$

лежит в $V \setminus V_\infty$. Действительно,

$$\langle a(y), \eta\rangle = \langle a(y), p\rangle - \langle a(y), p\rangle\langle a(y), \nabla\psi(x)\rangle = 0,$$
$$q^2 E = \psi(y), \quad q = \langle a(y), p\rangle^{-1} \neq 0.$$

Непосредственное вычисление показывает, что оно является двусторонним обратным к f и что f переводит ограничение формы ϖ^2 на V в стандартную симплектическую форму ω^2 на $T^*_0 U \setminus W_0$. □

Фазовое пространство $\mathbf{\Phi}$ получается из V и $T^*_0\Omega$ склейкой по построенному выше отображению f. Несложные выкладки показывают, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2 ([43, предложения 1–3]; [45, теорема 1]). *Множество*

$$\mathbf{\Phi} = V \cup_f T_0^*\Omega,$$

получающееся из дизъюнктного объединения $V \sqcup T_0^*\Omega$ отождествлением точек, связанных отображением f, наделено естественной структурой гладкого симплектического многообразия, при которой вложения $V \subset \mathbf{\Phi}$ и $T_0^*\Omega \subset \mathbf{\Phi}$ суть симплектоморфизмы на свои образы. Более того, $\mathbf{\Phi} = T_0^*\Omega \sqcup \mathbf{\Phi}_\infty$, причем $T_0^*\Omega$ — открытое всюду плотное подмногообразие, а $\mathbf{\Phi}_\infty = V_\infty$ — подмногообразие размерности $2n-1$. Конструкция пространства $\mathbf{\Phi}$ естественна: если $\mathbf{\Phi}_1$ и $\mathbf{\Phi}_2$ — два разных пространства $\mathbf{\Phi}$, полученных из $T_0^*\Omega$ такой конструкцией, то тождественное отображение

$$\mathbf{\Phi}_1 \supset T_0^*\Omega \xrightarrow{id} T_0^*\Omega \subset \mathbf{\Phi}_2$$

продолжается по непрерывности до симплектоморфизма многообразия $\mathbf{\Phi}_1$ на $\mathbf{\Phi}_2$.

Предложение 2.8. *Каноническая 1-форма $\omega^1 = p\,dq$ на $T_0^*\Omega$ гладким образом продолжается на $\mathbf{\Phi}$.*

Доказательство. Действительно, в окрестности точек из $\mathbf{\Phi}_\infty$ ее можно задать формулой

$$\omega^1 = \eta\,dy + E\,dq + d(qE). \qquad \square$$

Таким образом, $\mathbf{\Phi}$ — точное симплектическое пространство (т. е. симплектическая форма имеет на нем глобально определенную первообразную).

2.3.2. Связь фазового пространства с операторами класса DEG

Оказывается, что построенное нами фазовое пространство весьма естественно с точки зрения класса $\mathrm{DEG}\,\overline{\Omega}$ вырождающихся операторов. Чтобы увидеть это, покажем, как можно охарактеризовать операторы класса $D \in \mathrm{DEG}\,\overline{\Omega}$ в терминах их символов. Запишем оператор (2.11) в виде

$$D = H(\overset{2}{x}, \overset{1}{\widehat{p}}),$$

где $H(x,p) = H_0(x,p) - ihH_1(x,p)$, номера над операторами, согласно [27], обозначают порядок их действия, и

$$H_0(x,p) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)p_jp_k, \quad H_1(x,p) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)p_k$$

Определение 2.3 (см., например, [61, с. 116–117])**.** Функции

$$\sigma(D)(x,p) = H_0(x,p) \equiv \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)p_jp_k, \tag{2.23}$$

$$\sigma_{sub}(D)(x,p) = H_1(x,p) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_0(x,p)}{\partial x_k \partial p_k} \equiv \sum_{k=1}^{n}\left(b_k(x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{jk}(x)}{\partial x_j}\right)p_k \tag{2.24}$$

называются соответственно *главным* и *субглавным символом* оператора D.

Замечание. Заметим, что в рассматриваемой ситуации сужение субглавного символа на границу совпадает с функцией Фикеры [51, с. 9].

Предложение 2.9 ([45, предложение 3])**.** *Оператор D вида (2.11) принадлежит классу* $\mathrm{DEG}\,\overline{\Omega}$ *тогда и только тогда, когда его главный и субглавный символы продолжаются по непрерывности до гладких функций на фазовом пространстве* $\mathbf{\Phi}$.

Отсюда легко следует, в частности, что отвечающий уравнению (2.21) гамильтониан [43, формула (2)]

$$H(x,p) = \sqrt{\psi(x)}\langle p, A(x)p\rangle^{1/2}, \tag{2.25}$$

где $\langle \xi, \eta\rangle = \sum_{j=1}^{n}\xi_j\eta_j$, продолжается до гладкой функции на Φ, так что соответствующая система Гамильтона, которая в координатах пространства $T_0^*\Omega$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_{0p} \equiv A(x)p\langle p, \sqrt{\psi(x)}A(x)p\rangle^{-1/2}, \\ \dot{p} &= -H_{0x} \equiv -\frac{1}{2}\Big\langle p, \frac{\partial(\sqrt{\psi}A)}{\partial x}(x)p\Big\rangle\langle p, A(x)p\rangle^{-1/2}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

продолжается до гладкой системы обыкновенных дифференциальных уравнений на $\mathbf{\Phi}$.

Теорема 2.3 ([43, предложение 4])**.** *Все траектории указанной системы Гамильтона на* $\mathbf{\Phi}$ (*которые содержат траектории исходной системы* (2.26) *в качестве подынтервалов*) *неограниченно продолжаются вперед и назад по времени.*

2.3.3. Канонические локальные координаты на $\mathbf{\Phi}$ вблизи $\mathbf{\Phi}_\infty$

Конструкция п. 2.3.1, будучи применена локально, дает удобные локальные координаты на $\mathbf{\Phi}$ в окрестности произвольной точки «подмногообразия на бесконечности» $\mathbf{\Phi}_\infty$. Именно, возьмем произвольную точку границы $\partial\Omega$. В окрестности этой точки определяющую функцию границы (при необходимости перенумеровывая координаты и меняя знак координаты x_1) можно записать в виде $\psi(x) = x_1 - g(x')$, где $g(x')$ — гладкая функция переменных $x' = (x_2, \dots, x_n)$, а векторное поле a взять равным $a(x) = (1, 0, \dots, 0)$. Тогда множество V над такой окрестностью задается уравнениями

$$y_1 = g(y') + q^2 E, \qquad \eta_1 = 0,$$

и в качестве локальных координат на V (и, следовательно, на $\mathbf{\Phi}$) в окрестности соответствующих точек из $\mathbf{\Phi}_\infty$ можно взять (q, x', E, η'). Еще более простая картина получается, если вместо координаты x_1 взять $y_1 = x_1 - g(x')$, а остальные координаты оставить без изменения. В новых локальных координатах $(y_1, x') = (y_1, x_2, \dots, x_n)$, в которых область Ω задается уравнением $y_1 > 0$, p_1 будет двойственным импульсом к y_1, а переменные

$$\eta' = p' + p_1 \nabla g(x')$$

— двойственными импульсами к $x_2, \dots, x_n$. Замена переменных, дающая локальные координаты в окрестности $\mathbf{\Phi}_\infty$, имеет вид

$$q = 1/p_1, \qquad E = x_1 p_1^2,$$

а $x' = (x_2, \dots, x_n)$ и $\eta' = (\eta_2, \dots, \eta_n)$ остаются без изменений. Многообразие $\mathbf{\Phi}_\infty$ описывается в этих координатах уравнением $q = 0$, а фундаментальные формы имеют вид

$$\omega^1 = \eta'\, dx' + E\, dq + d(qE), \qquad \omega^2 = d\eta' \wedge dx' + dE \wedge dq.$$

2.4. Лагранжевы многообразия в $\mathbf{\Phi}$ и сопутствующие объекты

2.4.1. Лагранжево многообразие

Под *лагранжевым многообразием* в фазовом пространстве $\mathbf{\Phi}$ мы будем понимать гладкое отображение $\jmath\colon \Lambda \longrightarrow \mathbf{\Phi}$ гладкого n-мерного многообразия Λ в $\mathbf{\Phi}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Отображение $\jmath$ — локальный диффеоморфизм на образ (т.е. производное отображение $\jmath_*$ инъективно).

2. Справедливо соотношение $\jmath^*(dp \wedge dq) = 0$ (лагранжевость).

Таким образом, мы не налагаем условие, что Λ является вложенным подмногообразием в $\mathbf{\Phi}$; впрочем, это условие и не является необходимым для построения канонического оператора. Тем не менее, локально мы будем для удобства отождествлять Λ с его образом в $\mathbf{\Phi}$.

Через α будем обозначать точки на Λ, а также локальные координаты $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ на Λ. Это не приведет к недоразумениям. Отображение $\jmath$ будем задавать функциями $x = X(\alpha), p = P(\alpha)$ при $\alpha \notin \Lambda_\infty = \jmath^{-1}\mathbf{\Phi}_\infty$ или функциями $q = Q(\alpha)$, $E = \mathcal{E}(\alpha)$, $y = X(\alpha)$, $\eta = \Theta(\alpha)$ при α близких к Λ_∞.

2.4.2. Мера, канонические карты и якобианы

Мера. Многообразие Λ будем считать ориентируемым. Пусть на Λ задана *мера* — гладкая форма объема $d\mu$. Для упрощения формул будем использовать только системы координат $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ на Λ, согласованные с ориентацией и такие, что $d\mu = d\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_n$.

Введем теперь на Λ *канонические карты* и соответствующие координаты.

Стандартные канонические карты. Пусть $\alpha_0 \in \Lambda \setminus \Lambda_\infty$. Тогда точка $\jmath(\alpha_0)$ лежит в $T^*_0\Omega$, в качестве канонических координат на $\mathbf{\Phi}$ в ее окрестности можно взять (x, p), и в окрестности точки α_0 на Λ можно пользовать-

ся стандартной теорией канонического оператора [26, 39, 41]. Напомним конструкцию соответствующих канонических карт и якобианов. По лемме о локальных координатах [1, лемма 3.3.1] существует такое (возможно, пустое) подмножество $I = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, что набор функций $(X_I(\alpha), P_{\overline{I}}(\alpha)) = (X_{j_1}(\alpha), \dots, X_{j_1}(\alpha), P_{j_{k+1}}(\alpha), \dots, P_{j_n}(\alpha))$, где $\overline{I} = \{j_{k+1}, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\} \setminus I$, можно взять в качестве локальных координат на Λ в некоторой окрестности U точки α_0. Иными словами, якобиан

$$\mathcal{J}_I(\alpha) = \frac{D(X_I, P_{\overline{I}})}{D\alpha} = \det \frac{\partial(X_I, P_{\overline{I}})}{\partial \alpha}$$

отличен от нуля в окрестности точки α, и уравнения $x_I = X_I(\alpha)$, $p_{\overline{I}} = P_{\overline{I}}(\alpha)$ однозначно разрешимы относительно α в окрестности точки $(\alpha_0, x_{I0}, p_{\overline{I}0})$, где $x_{I0} = X_I(\alpha_0)$, $p_{\overline{I}0} = P_{\overline{I}}(\alpha_0)$: $\alpha = \alpha(x_I, p_{\overline{I}})$. Окрестность U, снабженная такими координатами $(x_I, p_{\overline{I}})$, называется *канонической картой типа* I; для краткости мы будем обозначать ее через U_I. Чтобы зафиксировать правильным образом знаки якобианов, внешних произведений и т. п., условимся, что в наборах типа $(x_I, p_{\overline{I}})$ координаты всегда упорядочиваются по возрастанию индексов. Иными словами

$$(x_I, p_{\overline{I}}) = (z_1, \dots, z_n), \qquad \text{где } z_j = x_j, \text{ если } j \in I, \text{ и } z_j = p_j \text{ иначе.}$$

Аналогично, $dx_I \wedge dp_{\overline{I}} = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$. В этих обозначениях для меры $d\mu$ в карте U_I имеем выражение

$$d\mu = \mathcal{J}_I^{-1}(\alpha(x_I, p_{\overline{I}}))dx_I \wedge dp_{\overline{I}} = \mathcal{J}_I^{-1}(x_I, p_{\overline{I}})dx_I \wedge dp_{\overline{I}}.$$

(Такая вольность в обозначениях не приведет к недоразумениям.) Каноническая карта U_I, для которой $\overline{I} = \varnothing$, называется *неособой*, и соответствующий якобиан обозначается просто через $\mathcal{J}(x)$.

Нестандартные канонические карты. Пусть теперь $\alpha_0 \in \Lambda_\infty$. В окрестности такой точки стандартная теория канонического оператора неприменима. Определим канонические карты в окрестности точки α_0 для этого случая. Рассмотрим точку $x_0 = X(\alpha_0)$. Существует такой индекс $j \in \{1, \dots, n\}$, что в

окрестности точки x_0 область Ω задается неравенством

$$x_j > f(x') \quad \text{(случай (a)) или} \quad x_j < f(x') \quad \text{(случай (b))},$$

где $f(x')$ — гладкая функция переменных $x' = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. В качестве канонических координат на $\mathbf{\Phi}$ в окрестности точки $\jmath(\alpha_0)$ можно взять переменные (q, x', E, η'), связанные вне $\mathbf{\Phi}_\infty$ со стандартными каноническими координатами (x, p) заменой переменных (ср. п. 2.3.3)

$$q = p_j^{-1}, \quad E = (x_j - f(x'))p_j^2, \quad \eta' = p' + p_j \frac{\partial f(x')}{\partial x'}$$

в случае (a) и

$$q = -p_j^{-1}, \quad E = (f(x') - x_j)p_j^2, \quad \eta' = p' - p_j \frac{\partial f(x')}{\partial x'}$$

в случае (b). Поскольку симплектическая форма в координатах (q, x', E, η') имеет вид $\omega^2 = dE \wedge dq + d\eta \wedge dx$, мы можем опять применить лемму о локальных координатах [1, лемма 3.3.1] и заключить, что существует такое подмножество $I = \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n\}$, что набор функций

$$(x_I, \eta_{\overline{I}}, q) = (X_I(\alpha), \Theta_{\overline{I}}(\alpha), Q(\alpha))$$

или

$$(x_I, \eta_{\overline{I}}, E) = (X_I(\alpha), \Theta_{\overline{I}}(\alpha), \mathcal{E}(\alpha)),$$

где на сей раз $\overline{I} = \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n\} \setminus I$, образует систему локальных координат на Λ в окрестности U точки α_0. Карту с координатами $(x_I, \eta_{\overline{I}}, q)$ будем обозначать через U_{Iq} и называть *нестандартной канонической картой типа* (I, q), а карту с координатами $(x_I, \eta_{\overline{I}}, E)$ — через U_{IE} и называть *нестандартной канонической картой типа* (I, E). Соответствующие якобианы обозначим через

$$\mathcal{J}_{Iq}(\alpha) = \frac{D(X_I, \Theta_{\overline{I}}, Q)}{D\alpha}, \qquad \mathcal{J}_{IE}(\alpha) = \frac{D(X_I, \Theta_{\overline{I}}, E)}{D\alpha}$$

соответственно.

Канонический атлас. Для дальнейшего зафиксируем какое-либо локально конечное покрытие многообразия Λ каноническими картами такое, что сами канонические карты и все их пересечения стягиваемы; это покрытие будем называть *каноническим атласом*.

2.4.3. Действие в канонических картах

Поскольку $d\omega^1 = \omega^2$, а $j^*\omega^2 = 0$, форма $j^*\omega^1$ локально точна на Λ; решение $\tau(\alpha)$ уравнения Пфаффа

$$d\tau = j^*\omega^1$$

будем называть *эйконалом* на ω. Эйконал определен лишь локально и с точностью до аддитивной константы.

Предполагая, что в каждой карте канонического атласа эйконал $\tau(\alpha)$ зафиксирован каким-либо (вообще говоря, своим для каждой карты) образом, определим в этих картах действия, полагая

$$\begin{aligned}
S_I(x_I, p_{\overline{I}}) &= [\tau(\alpha) - \langle p_{\overline{I}}, X_{\overline{I}}(\alpha)\rangle]_{\alpha=\alpha(x_I,p_{\overline{I}})} && \text{в карте } U_I,\\
S_{Iq}(x_I, \eta_{\overline{I}}, q) &= [\tau(\alpha) - \langle \eta_{\overline{I}}, x_{\overline{I}}(\alpha)\rangle - qE(\alpha)]_{\alpha=\alpha(x_I,\eta_{\overline{I}},q)} && \text{в карте } U_{Iq},\\
S_{IE}(x_I, \eta_{\overline{I}}, E) &= [\tau(\alpha) - \langle \eta_{\overline{I}}, x_{\overline{I}}(\alpha)\rangle - 2q(\alpha)E]_{\alpha=\alpha(x_I,\eta_{\overline{I}},E)} && \text{в карте } U_{IE},
\end{aligned}$$

где снова использованы обозначения вида

$$\langle x_{\overline{I}}, p_{\overline{I}}\rangle = \sum_{j\in\overline{I}} x_j p_j.$$

2.5. Канонический оператор

2.5.1. Локальный канонический оператор

Зафиксируем каким-либо образом в канонических картах аргументы соответствующих якобианов и определим локальные канонические операторы следующими формулами.

Канонический оператор в карте U_I. В стандартной канонической карте U_I локальный канонический оператор $K_I\colon C_0^\infty(U_I) \to C^\infty(\overline{\Omega})$ определяется стандартной формулой [26, 39, 41]

$$[K_I\varphi](x,h) = \frac{e^{i\pi|\overline{I}|/4}}{(2\pi h)^{|\overline{I}|/2}} \int e^{\frac{i}{h}(S_I(x_I,p_{\overline{I}})+\langle x_{\overline{I}},p_{\overline{I}}\rangle)} \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\mathcal{J}_I(\alpha)}}\Big|_{\alpha=\alpha(x_I,p_{\overline{I}})} dp_{\overline{I}}. \tag{2.27}$$

(В неособой карте ($\overline{I} = \varnothing$) интеграл по $p_{\overline{I}}$ отсутствует. Мы опускаем аналогичные замечания ниже.)

Канонический оператор в карте U_{IE}. В карте U_{IE} локальный канонический оператор $K_{IE}\colon C_0^\infty(U_{IE}) \to C^\infty(\overline{\Omega})$ определим формулой

$$[K_{IE}\varphi](x,h) = \frac{e^{i\pi(|\overline{I}|/4+1/2)}}{h(2\pi h)^{|\overline{I}|/2}} \int \mathbf{J}_0\left(\frac{2}{h}\sqrt{E(x_j - f(x'))}\right)\times$$
$$\times\, e^{\frac{i}{h}(S_{IE}(x_I,\eta_{\overline{I}},E)+\langle x_{\overline{I}},\eta_{\overline{I}}\rangle)} \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\mathcal{J}_I(\alpha)}}\Big|_{\alpha=\alpha(x_I,\eta_{\overline{I}},E)} dp_{\overline{I}}dE \tag{2.28}$$

в случае (a) и

$$[K_{IE}\varphi](x,h) = \frac{e^{i\pi(|\overline{I}|/4+1/2)}}{h(2\pi h)^{|\overline{I}|/2}} \int \mathbf{J}_0\left(\frac{2}{h}\sqrt{E(f(x') - x_j)}\right)\times$$
$$\times\, e^{\frac{i}{h}(S_{IE}(x_I,\eta_{\overline{I}},E)+\langle x_{\overline{I}},\eta_{\overline{I}}\rangle)} \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\mathcal{J}_I(\alpha)}}\Big|_{\alpha=\alpha(x_I,\eta_{\overline{I}},E)} dp_{\overline{I}}dE \tag{2.29}$$

в случае (b). Отметим, что поскольку $\operatorname{supp}\varphi$ компактен и лежит в $\subset U_{IE}$, интегрирование по E в (2.28) и (2.29) в действительности происходит по некоторому конечному промежутку $[E_1, E_2]$, причем $E_1 > 0$.

Канонический оператор в карте U_{Iq} В карте U_{Iq} локальный канонический оператор $K_{Iq}\colon C_0^\infty(U_{Iq}) \to C^\infty(\overline{\Omega})$ определим формулой

$$[K_{Iq}\varphi](x,h) = \frac{e^{i\pi(|\overline{I}|/4+1/4)}}{h^{3/2}(2\pi h)^{|\overline{I}|/2}} \int \mathbf{J}_0\left(\frac{2}{h}\sqrt{E(x_j - f(x'))}\right)\times$$
$$\times\, e^{\frac{i}{h}(S_{Iq}(x_I,\eta_{\overline{I}},q)-qE+\langle x_{\overline{I}},\eta_{\overline{I}}\rangle)}\chi(E) \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\mathcal{J}_I(\alpha)}}\Big|_{\alpha=\alpha(x_I,\eta_{\overline{I}},q)} dp_{\overline{I}}dqdE \tag{2.30}$$

в случае (a) и

$$[K_{Iq}\varphi](x,h) = \frac{e^{i\pi(|\overline{I}|/4+1/4)}}{h^{3/2}(2\pi h)^{|\overline{I}|/2}} \int \mathbf{J}_0\left(\frac{2}{h}\sqrt{E(f(x)-x_j)}\right)\times \\ \times e^{\frac{i}{h}(S_{Iq}(x_I,\eta_{\overline{I}},q)-qE+\langle x_{\overline{I}},\eta_{\overline{I}}\rangle)}\chi(E)\frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\mathcal{J}_I(\alpha)}}\Big|_{\alpha=\alpha(x_I,\eta_{\overline{I}},q)} dp_{\overline{I}}dqdE \quad (2.31)$$

в случае (b). Здесь $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ — срезающая функция такая, что $\chi(\mathcal{E}(\alpha)) = 1$ при $\alpha \in U_{Iq}$.

В предыдущих двух абзацах j — индекс, использованный в п. 2.4.2 при определении канонических координат в картах U_{Iq} и U_{IE}.

Альтернативные выражения для локального канонического оператора в нестандартных картах. Выражения для канонического оператора в нестандартных канонических картах можно переписать в значительно более коротком виде, используя обозначение преобразования Ганкеля–Фурье, если с помощью замены переменной $x_j \mapsto \pm(x_j - f(x')$, перейти к случаю, когда область Ω локально задается неравенством $x_j > 0$. Выпишем соответствующие формула для случая, когда $j = 1$. В карте U_{IE} локальный канонический оператор $K_{IE}\colon C_0^\infty(U_{IE}) \to C^\infty(\overline{\Omega})$ задается формулой

$$[K_{IE}\varphi](x,h) = \mathcal{GF}_{\overline{I}}^{-h}\left[e^{\frac{i}{h}S_{IE}(x_I,\eta_{\overline{I}},E)}\frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\mathcal{J}_I(\alpha)}}\Big|_{\alpha=\alpha(x_I,\eta_{\overline{I}},E)}\right], \quad (2.32)$$

а локальный канонический оператор $K_{Iq}\colon C_0^\infty(U_{Iq}) \to C^\infty(\overline{\Omega})$ в карте U_{Iq} — формулой

$$[K_{Iq}\varphi](x,h) \;=\; \mathcal{GF}_{\overline{I}}^{-h} \circ \chi(E) \circ \mathcal{F}_{q\to E}^{h}\left[e^{\frac{i}{h}S_{Iq}(x_I,\eta_{\overline{I}},q)}\frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\mathcal{J}_I(\alpha)}}\Big|_{\alpha=\alpha(x_I,\eta_{\overline{I}},q)}\right] \quad (2.33)$$

Для дальнейшего каким-либо образом пронумеруем канонические карты индексом l и будем обозначать их через U_l, соответствующий канонический оператор через K_l, а эйконал в карте U_l — через τ_l.

Действие канонического оператора в пространства $\mathfrak{H}^s$. Из представления локальных канонических операторов через преобразования Фурье и Ганкеля–Фурье немедленно вытекает следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть* $\varphi \in C_0^\infty(U_l)$. *Тогда* $K_l\varphi \in \mathfrak{H}^s(\Omega)$ *для любого* $s \in \mathbb{R}$, *и*

$$\|K_l\varphi\| \le C_s$$

с постоянными C_s, *не зависящими от* h *при* $h \to 0$.

Локальная формула коммутации. Установим теперь, каким образом операторы из $\mathrm{DEG}\,\overline{\Omega}$ действуют на функции, представимые каноническим оператором.

Теорема 2.5. *Пусть* $D \in \mathrm{DEG}\,\overline{\Omega}$. *Тогда в карте* U_l *существует последовательность дифференциальных операторов* P_{lk} *порядка* k, $k = 0, 1, 2, \dots$, *таких, что*

$$DK_l\varphi = K_l\left(\sum_{k=0}^{N}(-ih)^k P_{lk}\varphi\right) + O(h^{N+1})$$

для любого $N \ge 0$ *и любой функции* $\varphi \in C_0^\infty(U_l)$. *Кроме того,*

$$P_{l0} = \sigma(D)|_\Lambda,$$

а если многообразие Λ *инвариантно относительно гамильтонова векторного поля, соответствующего гамильтониану* $H = \sigma(D)$, *то*

$$P_{l1} = \frac{d}{dt} + \sigma_{sub}(D),$$

где d/dt *— производная вдоль гамильтонова векторного поля, отвечающего гамильтониану* H.

Доказательство. Доказательство этого факта для локальных канонических операторов в стандартных канонических картах хорошо известно (см., например, [39, гл. 1, § 8]). Вычисление для нестандартных карт основано на подстановке представления (2.13) в формулы для локальных канонических операторов, в результате которой действие локального канонического оператора на функцию описывается осциллирующим интегралом специального вида, и дальнейших довольно громоздких вычислений в духе теоремы Хёрмандера 1.4. □

2.5.2. Глобальное определение канонического оператора

Сравнение локальных канонических операторов. Стандартным методом с использованием метода стационарной фазы доказывается следующая теорема.

Теорема 2.6. *Пусть $U_l \cap U_m \neq \varnothing$. Существует такая последовательность дифференциальных операторов $R_k \equiv R_{(lm)k}$, $k = 1, 2, \dots$, в $U_l \cap U_m$, что*

$$K_l\varphi = e^{\frac{i}{h}\tau_{lm}+i\pi\sigma_{lm}} K_m\left(\varphi + \sum_{k=1}^{N}(-ih)^k R_k\varphi\right) + O(h^{N+1})$$

для любого $N \geq 0$ и любой функции $\varphi \in C_0^\infty(U_l)$, где

$$\tau_{lm} = \tau_l(\alpha) - \tau_m(\alpha) = \text{const} \qquad \text{в } U_l \cap U_m,$$

а $\sigma_{lm} \in \mathbb{Z}$ зависит от выбора аргументов якобианов в определении локальных канонических операторов K_l и K_m.

Условие квантования и глобализация. Предположим теперь, что выполнено *условие квантования*: класс когомологий многообразия Λ с коэффициентами в $\mathbb{R}/(2\mathbb{Z})$, определяемый коциклом

$$\varkappa_{lm} = \frac{1}{\pi h}\tau_{lm} + \sigma_{lm}$$

покрытия $\{U_l\}$, тривиален. Тогда, умножая каждый из операторов K_l на постоянный унимодулярный множитель, можно добиться того, чтобы

$$K_l\varphi = K_m\varphi + O(h), \qquad \varphi \in C_0^\infty(U_l \cap U_m),$$

для любых l и m. Пусть $\{e_l(\alpha)\}$ — гладкое разбиение единицы на Λ, подчиненное каноническому покрытию $\{U_l\}$. Определим канонический оператор на Λ формулой

$$K_\Lambda^h\varphi = \sum K_l e_l\varphi, \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Lambda). \tag{2.34}$$

Теорема 2.7. *Канонический оператор* (2.34) *с точностью до* $O(h)$ *не зависит от выбора разбиения единицы. Для* $D \in \operatorname{DEG}\overline{\Omega}$ *справедлива формула коммутации*

$$DK_\Lambda^h\varphi = K_\Lambda^h\left(\sum_{k=0}^{N}(-ih)^k P_k\varphi\right) + O(h^{N+1}), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Lambda), \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

где P_k *— дифференциальные операторы порядка* k*, причем*

$$P_{l0} = \sigma(D)|_\Lambda,$$

а если многообразие Λ *инвариантно относительно гамильтонова векторного поля, соответствующего гамильтониану* $H = \sigma(D)$*, то*

$$P_{l1} = \frac{d}{dt} + \sigma_{sub}(D),$$

где d/dt *— производная вдоль гамильтонова векторного поля, отвечающего гамильтониану* H*.*

Доказательство. Теорема 2.7 стандартным образом [39, теорема 9.3, с. 179] вытекает из теоремы 2.6 и теоремы о коммутации 2.5 для локальных канонических операторов с учетом того факта, что фазовые множителе подобраны так, чтобы в главном члене локальные канонические операторы совпадали на пересечениях карт. □

Формулы коммутации дают возможность использовать канонический оператор для построения решений уравнений, операторы в которых принадлежат классу $\operatorname{DEG}\overline{\Omega}$.

2.6. Быстроосциллирующие и локализованные решения

Локализованные источники в задачах распространения волн естественно описывать функциями вида $V(x/\mu)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — пространственная переменная, $\mu > 0$ — малый параметр, а функция $V(y)$ «достаточно быстро»

убывает на бесконечности. При построении асимптотических решений уравнений в частных производных с такими начальными данными или правыми частями удобно представить функцию $V(x/\mu)$ с помощью канонического оператора Маслова [39] на некотором лагранжевом многообразии, поскольку такое представление дает возможность воспользоваться хорошо разработанными методами квазиклассического приближения. Как отмечалось в [22], простейшее выражение этого типа в виде обратного преобразования Фурье

$$V\Big(\frac{x}{\mu}\Big) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{\frac{i}{\mu}\langle p,x\rangle} \widetilde{V}(p)\, dp, \tag{2.35}$$

где $\langle p, x\rangle = p_1x_1 + \cdots + p_nx_n$ и

$$\widetilde{V}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle p,y\rangle} V(y)\, dy, \tag{2.36}$$

которое использовалось, например, в [15] и которое есть не что иное, как примененный к функции $\widetilde{V}(p)$ канонический оператор Маслова на лагранжевой плоскости $L = \{(x, p) \in \mathbf{R}^{2n}\colon x = 0\}$, не особенно эффективно в задачах, для которых соответствующий классический гамильтониан (как, например, гамильтониан $H(x, p) = c(x)|p|$, отвечающий волновому уравнению) имеет на ней особенность (при $p = 0$). В двумерном случае ($n = 2$) представление, основанное на избегающем эту особенность лагранжевом многообразии

$$\Lambda_0^2 = \{(x, p) \in \mathbf{R}^4\colon x = \mathbf{n}(\psi)\tau,\ p = \mathbf{n}(\psi)\}, \tag{2.37}$$

где $\mathbf{n}(\psi) = {}^t(\cos\psi, \sin\psi)$, τ пробегает вещественную прямую $\mathbf{R}$, а ψ — окружность $\mathbf{S}^1$, появилось в [20, 68, 99] и было доказано в [22]. Оно задается интегралом

$$V\Big(\frac{x}{\mu}\Big) \simeq \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} e^{-i\pi/4} \int\limits_0^\infty \big[K_{\Lambda_0^2}^{\mu/\rho}\big(\widetilde{V}(\rho\mathbf{n}(\psi))\mathrm{e}(\tau)\big)\big](x)\sqrt{\rho}\, d\rho \tag{2.38}$$

по параметру ρ, где $K_{\Lambda_0^2}^h$ — канонический оператор с малым параметром $h > 0$ на многообразии Λ_0^2, а $\mathrm{e}(\tau) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ — срезающая функция, равная единице в окрестности нуля, и было применено в ряде последующих работ (см. например, [76, 78]).

Замечание 2.1. Отметим, что лагранжево многообразие Λ_2^0 диффеоморфно двумерному цилиндру $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^1$, и его проекция на x-плоскость представляет собой двулистное накрытие, разветвляющееся над точкой $x = 0$, в которую проектируется целая окружность $\Lambda_0^1 = \{(x, p) \in \mathbf{R}^4 \colon x = 0,\ |p| = 1\}$, целиком состоящая из фокальных точек, так что это лагранжево многообразие (как и рассматриваемые ниже более общие многообразия) не находится в общем положении и соответственно не охватывается теорией катастроф (см., например, [3]). Канонический оператор Маслова на Λ_2^0 интересен и сам по себе, без всякой связи с интегральным представлением (2.38). Так, действие его на функцию, тождественно равную единице, приводит к функции Бесселя нулевого порядка [17].

При использовании представлений, подобных (2.38), в задаче Коши вычисления значительно упрощаются, если вместо Λ_0^2 использовать лагранжево многообразие Λ^2, также проходящее через окружность Λ_0^1, но при этом еще и инвариантное относительно гамильтонова векторного поля, соответствующего гамильтониану задачи. По-видимому, впервые возможность такой замены в представлении (2.38) была обнаружена (в одномерной ситуации) в [77, Lemma 4]. В дальнейшем, уже в двумерной ситуации, представление (2.38) с заменой Λ_0^2 на Λ^2 было анонсировано в [72, теорема 2] и [74, Proposition 1].

В данном разделе мы доказываем это представление. С неформальной точки зрения ситуация проста. Рассмотрим правую часть формулы (2.38) (с заменой Λ_0^2 на Λ^2) как осциллирующий интеграл. Фундаментальное свойство таких интегралов (первоначально явно сформулированное для случая интегральных распределений Фурье Хёрмандером [62, Theorem 3.2.1]) состоит в том, что класс задаваемых ими функций при фиксированной фазовой функции полностью определяется соответствующим последней лагранжевым многообразием. Нетрудно убедиться, что это лагранжево многообразие в данном случае есть в точности L (какое бы подходящее Λ^2 ни взять), откуда следует, что рассматриваемое представление эквивалентно представлению (2.35) через преобразование Фурье — остается только проверить правильность выбора амплитудной функции.

Строгая математическая реализация этого рассуждения приводит к теореме, доказательство которой опирается на новые формулы для канонического оператора в окрестности фокальных точек и каустик, о которых шла речь в главе 1 и метод стационарной фазы [56].

2.6.1. Лагранжево многообразие Λ^2

В четырехмерном фазовом пространстве $\mathbf{R}^4$ с координатами (x_1, x_2, p_1, p_2) рассмотрим произвольное лагранжево многообразие Λ^2, обладающее следующими свойствами: (i) Λ^2 содержит окружность $\Lambda^1_0 = \{(x,p) \in \mathbf{R}^4 \colon x = 0,\ |p| = 1\}$; (ii) сужение на Λ^2 формы $p\,dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2$ не обращается в нуль ни в одной точке многообразия Λ_2.

Так как Λ^2 лагранжево и $p\,dx|_{\Lambda^1_0} = 0$, то в окрестности подмногообразия Λ^1_0 на Λ_2 существует и единственна функция τ, такая что $d\tau = p\,dx|_{\Lambda^2}$ и $\tau|_{\Lambda^1_0} = 0$. Будем называть ее *действием* или *эйконалом*. Далее, пусть ψ — гладкая функция на Λ^2 со значениями на окружности $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R} \pmod{2\pi}$, такая, что на Λ_0 выполнено соотношение $p = \mathbf{n}(\psi) = {}^t(\cos\psi, \sin\psi)$. Тогда дифференциалы $d\tau$ и $d\psi$ линейно независимы в каждой точке подмногообразия Λ^1_0 и, следовательно, набор функций (τ, ψ) является системой координат на Λ^2 в некоторой окрестности этого подмногообразия. Это частный случай введенных в главе 1 *эйконал-координат*. В дальнейших построениях часть многообразия Λ^2, лежащая вне произвольно малой окрестности подмногообразия Λ^1_0, не играет никакой роли, так что мы ее отбросим и будем без ограничения общности считать, что Λ^2 — достаточно узкая двумерная «цилиндрическая полоска», задаваемая в эйконал-координатах уравнениями

$$x = X(\tau,\psi), \quad p = P(\tau,\psi), \qquad \tau \in (-\tau_0, \tau_0), \quad \psi \in \mathbf{S}^1.$$

При этом согласно (1.2) выполнены тождества (где $X_\tau = \partial X/\partial\tau$ и т. д.)

$$\langle P, X_\tau\rangle = 1, \qquad \langle P, X_\psi\rangle = 0, \qquad \langle P_\psi, X_\tau\rangle = \langle P_\tau, X_\psi\rangle, \tag{2.39}$$

а подмногообразие Λ^1_0 выделяется уравнением $\tau = 0$, причем выполнены соот-

ношения (последнее из которых вытекает из трех предыдущих с учетом (2.39))

$$\begin{gathered} X(0,\psi) = X_\psi(0,\psi) = 0, \qquad P(0,\psi) = \mathbf{n}(\psi), \\ P_\psi(0,\psi) = \mathbf{n}'(\psi), \qquad X_\tau(0,\psi) = \mathbf{n}(\psi). \end{gathered} \tag{2.40}$$

В дальнейшем без дополнительных оговорок отождествляем функции от переменных $(\tau,\psi) \in (-\tau_0,\tau_0)\times\mathbf{S}^1$ с соответствующими функциями на Λ^2.

2.6.2. Канонический оператор Маслова

Лагранжево многообразие Λ^2 удовлетворяет условиям квантования [39, §8]. Действительно, единственным (с точностью до гомотопии) нетривиальным циклом γ в Λ^2 является подмногообразие Λ^1_0, и в силу (2.40) тривиален класс когомологий формы $p\,dx$:

$$\oint\limits_\gamma p\,dx = \int\limits_0^{2\pi} P(0,\psi)\frac{\partial X}{\partial\psi}(0,\psi)\,d\psi = 0.$$

Далее (здесь $(Y;Z)$ означает матрицу со столбцами Y и Z),

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}\gamma &= \operatorname*{var}_{\psi\in[0,2\pi]} \arg\det\frac{\partial(X-iP)}{\partial(\tau,\psi)}(0,\psi) = \operatorname{var}\arg\det(X_\tau - iP_\tau; X_\psi - iP_\psi)|_{\tau=0} \\ &= \operatorname{var}\arg\det(\mathbf{n}(\psi) - iP_\tau(0,\psi); -i\mathbf{n}'(\psi)) \\ &= \operatorname{var}\arg\bigl[-\det(P_\tau(0,\psi);\mathbf{n}'(\psi)) - i\bigr] = 0, \end{aligned}$$

поскольку величина в квадратных скобках не покидает нижней полуплоскости.

Таким образом (см. [39, теорема 8.1]), канонический оператор Маслова корректно определен на Λ^2; чтобы фиксировать его определение однозначно, нужно еще задать действие на Λ^2 (в качестве такового возьмем τ), меру на Λ^2 (в качестве нее возьмем форму объема $d\tau\wedge d\psi$) и аргумент якобиана $J(\tau,\psi) = \det(X_\tau(\tau,\psi); X_\psi(\tau,\psi))$ в какой-либо неособой точке (т.е. в точке, где этот якобиан не равен нулю). Имеем $J(0,\psi) = 0$ (т.е. все точки из Λ^1_0 являются фокальными на Λ^2); далее с учетом формул (2.39), (2.40) при $\tau = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{n}', X_{\tau\psi}\rangle - 1 = \langle\mathbf{n}', X_{\tau\psi}\rangle - \langle\mathbf{n}, X_\tau\rangle &= \langle P_\psi, X_{\tau\psi}\rangle + \langle P_{\psi\psi}, X_\tau\rangle \\ &= \langle\mathbf{n}',\mathbf{n}'\rangle - \langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle = 0, \\ \langle\mathbf{n}, X_{\tau\psi}\rangle = \langle P, X_{\tau\psi}\rangle = \langle P, X_{\tau\psi}\rangle + \langle P_\psi, X_\tau\rangle &= \langle P, X_\tau\rangle_\psi = 0, \end{aligned}$$

откуда $X_{\tau\psi}(0,\psi) = \mathbf{n}'(\psi)$, $J_\tau(0,\psi) = \det(\mathbf{n}(\psi);\mathbf{n}'(\psi)) = 1$ и знак якобиана $J(\tau,\psi)$ совпадает со знаком τ (при достаточно малых τ). Мы выберем значение $\arg J(+0,\tau) = 0$.

Канонический оператор на Λ^2 зададим формулой (1.15). Заметим, что уравнение

$$\langle P(\tau,\psi), x - X(\tau,\psi)\rangle = 0 \tag{2.41}$$

имеет при $(x,\psi) \in U \times \mathbf{S}^1$, где U — достаточно малая окрестность нуля в $\mathbf{R}^2$, единственное гладкое решение $\tau = \tau(x,\psi)$, такое что $\tau(0,\psi) = 0$. Это следует из теоремы о неявной функции, так как $X|_{\tau=0} = 0$ и $\langle P, x - X\rangle_\tau|_{\tau=0,x=0} = -\langle P, X_\tau\rangle = -1$. Выберем настолько малое $\delta \in (0,\tau_0)$, что $X(\tau,\psi) \in U_1$ и $\det(P;P_\psi) > 0$ при $(\tau,\psi) \in (-\delta,\delta)\times\mathbf{S}^1$, где $U_1 \Subset U$ — меньшая окрестность нуля в $\mathbf{R}^2$. Это возможно, поскольку $\det(P;P_\psi)|_{\tau=0} = \det(\mathbf{n};\mathbf{n}') = 1$. Пусть $\varkappa(x) \in C_0^\infty(U)$ — срезающая функция, равная единице в U_1. На функциях $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda^2)$ с носителем во множестве $(-\delta,\delta)\times\mathbf{S}^1$ канонический оператор Маслова задается формулой

$$[K^h_{\Lambda^2}\varphi](x,h) = \frac{e^{i\pi/4}\varkappa(x)}{\sqrt{2\pi h}} \int\limits_0^{2\pi} \left[e^{i\tau/h}\varphi(\tau,\psi)\sqrt{\det(P;P_\psi)}\right]_{\tau=\tau(x,\psi)} d\psi. \tag{2.42}$$

2.6.3. Основной результат

В весьма широких пределах формула, представляющая локализованную функцию $V(x/\mu)$ через канонический оператор, выглядит одинаково вне зависимости от того, какой конкретный смысл придается требованию достаточно быстрого убывания на бесконечности функции $V(y)$, так что с физической точки зрения выбор того или иного условия не играет первостепенной роли. Однако оценка остаточного члена в этой формуле уже, естественно, зависит от того, какие условия наложены на $V(y)$. Из всего многообразия существующих здесь вариантов мы для определенности остановимся на следующем.

Условие 2.1. Преобразование Фурье (2.36) функции $V(y)$, $y \in \mathbf{R}^2$ — обычная (не обобщенная) функция, гладкая вне нуля, и удовлетворяет оценкам

$$|\widetilde{V}^{(\beta)}(p)| \le C_{\beta s}|p|^{-|\beta|}(1+|p|)^{-s}, \qquad |\beta|, s = 0,1,2,\dots, \tag{2.43}$$

с некоторыми (зависящими от функции V) постоянными $C_{\beta s}$.

Замечание 2.2. В качестве некоторой мотивировки условия А отметим следующие обстоятельства.

1. Функции, удовлетворяющие условию А, действительно убывают на бесконечности (как $(1+|y|)^{-2}$, причем при дифференцировании скорость убывания увеличивается); обратно, если $(1+|y|)^{|\alpha|}V^{(\alpha)}(y) \in L^1(\mathbf{R}^2)$ для всех α, то $V(y)$ удовлетворяет условию А. Таким образом, хотя условие и сформулировано в удобных скорее для доказательства теоремы терминах преобразования Фурье, проверка его для исходной функции чаще всего не будет затруднительной. В частности, функции класса Шварца (и подавно финитные функции) ему удовлетворяют.

2. По-видимому, при переходе от функций, удовлетворяющих условию А, к функциям из класса Шварца (или даже финитным) не происходит радикального улучшения оценок для остаточного члена в формуле представления.

3. Условию А удовлетворяет (с некоторым запасом) функция

$$V(y) = (1 + (y_1/b_1)^2 + (y_2/b_2)^2)^{-3/2}$$

(ее преобразование Фурье есть $\widetilde{V}(p) = \exp\{-\sqrt{b_1^2p_1^2 + b_2^2p_2^2}\}$), которая довольно широко используется в литературе (в частности, при моделировании локализованных начальных данных для волнового уравнения); упомянем здесь лишь работы [19, 23, 52, 102, 106], дальнейшую библиографию можно найти в [17].

Теорема 2.8. *Пусть функция $V(y)$ удовлетворяет условию А. Тогда справедливо представление*

$$V\Big(\frac{x}{\mu}\Big) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}}e^{-i\pi/4}\int\limits_0^\infty \big[K^{\mu/\rho}_{\Lambda^2}\big(\widetilde{V}(\rho\mathbf{n}(\psi))\mathrm{e}(\tau)\big)\big](x)\sqrt{\rho}\,d\rho + R(x,\mu), \qquad (2.44)$$

где $K^h_{\Lambda^2}$ — канонический оператор Маслова (2.42) на лагранжевом многообразии Λ^2, срезающая функция $\mathrm{e}(\tau) \in C_0^\infty((-\delta,\delta))$ равна единице в окрестности нуля, а остаточный член $R(x,\mu)$ удовлетворяет при $\mu \to 0$ следующим оценкам:

$$\big|(-i\mu\nabla)^\alpha R(x,\mu)\big| \le C_\alpha\mu, \qquad |\alpha| = 0,1,2,\dots, \quad x \in \mathbf{R}^2, \qquad (2.45)$$

где $\nabla = \partial/\partial x$, *с некоторыми постоянными* C_α;

$$\|R(x,\mu)\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \le C\mu^2\sqrt{|\ln\mu|}, \qquad \|\nabla R(x,\mu)\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \le C\mu \tag{2.46}$$

с некоторой постоянной C, *которая, как и* C_α, *зависит от функции* $V(y)$.

Замечание 2.3. 1. Оценки (2.45) устанавливают малость остатка $R(x,\mu)$ и его μ-производных по x (т. е. производных по x, умноженных на μ в степени, равной порядку производной) в равномерной норме и показывают, что остаток действительно мал по сравнению с функцией $V(x/\mu)$ (у которой все μ-производные суть $O(1)$ в равномерной норме).

2. Оценки (2.46) *не вытекают* из оценок (2.45). Тот факт, что они все же верны, свидетельствует о том, что и остаток $R(x,\mu)$ является в каком-то смысле «локализованной» функцией. Оценки (2.46) очень важны, если представления вида (2.44) использовать при анализе волновых процессов. Квадрат модуля градиента (с точностью до множителя) имеет смысл плотности энергии, и вторая оценка из (2.46) означает, что энергетическая норма остатка $R(x,\mu)$ мала по сравнению с энергетической нормой самой функции $V(x/\mu)$, которая есть $O(1)$:

$$\iint\left|\nabla\left(V\left(\frac{x}{\mu}\right)\right)\right|^2 dx = \frac{1}{\mu^2}\iint\left|(\nabla V)\left(\frac{x}{\mu}\right)\right|^2 dx = \iint|\nabla V(y)|^2\,dy = \text{const}\,.$$

Аналогично, первая оценка из (2.46) означает, что L^2-норма остатка $R(x,\mu)$ мала по сравнению с L^2-нормой самой функции $V(x/\mu)$, которая есть $O(\mu)$. Рассуждая как в доказательстве теоремы, несложно выписать оценки для L^2-норм дальнейших производных. Мы опускаем их, так как они не имеют особого физического смысла.

3. Если рассматривать «анизотропное» волновое уравнение с гамильтонианом

$$H(x,p) = \sqrt{\sum a_{jk}(x)p_jp_k},$$

где $a_{jk}(x)$ — положительно определенный тензор квадрата скорости, то для построения лагранжева многообразия Λ^2, инвариантного относительно гамильтонова векторного поля, траектории нужно выпускать не из окружности Λ^1_0, а из

эллипса

$$\widetilde{\Lambda}_0^1 = \Big\{(x,p) \in \mathbf{R}^4 \colon x = 0,\ \sum a_{jk}(0) p_j p_k = 1\Big\}.$$

Результаты наши можно применить и в этой ситуации, совершив линейную замену переменных x, такую, что двойственная замена в импульсных переменных приводит форму $a_{jk}(0)p_jp_k$ к сумме квадратов.

2.6.4. Доказательство теоремы

Пусть $F(x,\mu)$ — правая часть формулы (2.44) без остаточного члена:

$$\begin{aligned} F(x,\mu) &= \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} e^{-i\pi/4} \int_0^\infty \big[K_{\Lambda^2}^{\mu/\rho}\big(\widetilde{V}(\rho\mathbf{n}(\psi))\mathrm{e}(\tau)\big)\big](x)\sqrt{\rho}\,d\rho \\ &= \frac{\varkappa(x)}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \big[e^{i\rho\tau/\mu}\widetilde{V}(\rho\mathbf{n}(\psi))\mathrm{e}(\tau)\sqrt{\det(P;P_\psi)}\big]_{\tau=\tau(x,\psi)}\,\rho\,d\rho d\psi. \end{aligned}$$

Вместо того, чтобы сравнивать функции $V(x/\mu)$ и $F(x,\mu)$ непосредственно, мы сравним их преобразования Фурье, а затем получим оценки для $R(x,\mu)$, возвращаясь к переменным x. Для этого запишем разность $R(x,\mu) = V(x/\mu) - F(x,\mu)$ в виде

$$R(x,\mu) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbf{R}^2} e^{i\langle p,x\rangle/\mu}\big(\widetilde{V}(p) - W(p,\mu)\big)\,dp,$$

где функция $W(p,\mu)$ получается из $F(x,\mu)$ преобразованием Фурье. Выпишем ее:

$$\begin{aligned} W(p,\mu) &= \frac{1}{2\pi\mu^2} \iint e^{-i\langle p,x\rangle/\mu} F(x,\mu)\,dx \\ &= \frac{1}{(2\pi\mu)^2} \int_0^\infty \iiint e^{\frac{i}{\mu}(\rho\tau(x,\psi) - \langle p,x\rangle)} \widetilde{V}(\rho\mathbf{n}(\psi))\chi(x,\psi)\,\rho\,d\rho d\psi dx \\ &= \Big(\frac{r}{2\pi\mu}\Big)^2 \int_0^\infty \iiint e^{\frac{ir}{\mu}(\xi\tau(x,\psi) - \langle \mathbf{n}(\omega),x\rangle)} \widetilde{V}(r\xi\mathbf{n}(\psi))\chi(x,\psi)\,\xi\,d\xi d\psi dx. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Здесь обозначения пределов в интегралах, кроме интегралов по ρ и ξ, опущены,

$$\chi(x,\psi) = \varkappa(x)\Big[\mathrm{e}(\tau)\sqrt{\det\big(P(\tau,\psi);P_\psi(\tau,\psi)\big)}\Big]\Big|_{\tau=\tau(x,\psi)},$$

$$\chi \in C_0^\infty(U \times \mathbf{S}^1), \qquad \chi(0,\psi) \equiv 1,$$

и при переходе от второй строки к третьей мы представили p в виде $p = r\mathbf{n}(\omega)$ ($\omega \in \mathbf{S}^1$, $r = |p| \in [0, \infty)$) и сделали замену переменной интегрирования $\rho = r\xi$.

Итак, чтобы оценить $R(x, \mu)$, прежде всего мы оценим разность

$$\Delta(p, \mu) = \widetilde{V}(p) - W(p, \mu). \tag{2.48}$$

Здесь удобно выделить два случая: $|p| \geq \mu$ и $|p| < \mu$.

2.6.5. Случай $|p| \geq \mu$

Интеграл (2.47) при $r = |p| \geq \mu$ мы исследуем с помощью метода стационарной фазы [56], причем в роли малого параметра будет выступать частное μ/r. Проведем сначала формальные вычисления. Найдем стационарные точки по переменным (x, ξ, ψ) фазовой функции

$$\Phi(x, \xi, \psi, \omega) = \xi\tau(x, \psi) - \langle \mathbf{n}(\omega), x\rangle \tag{2.49}$$

этого интеграла. Уравнения стационарной точки имеют вид

$$\begin{aligned}
\Phi_x(x, \xi, \psi, \omega) &= \xi\tau_x(x, \psi) - \mathbf{n}(\omega) \\
&= \frac{\xi P(\tau(x, \psi), \psi)}{1 - \langle x - X(\tau(x, \psi), \psi), P_\tau(\tau(x, \psi), \psi)\rangle} - \mathbf{n}(\omega) = 0, && (2.50)\\
\Phi_\xi(x, \xi, \psi, \omega) &= \tau(x, \psi) = 0, && (2.51)\\
\Phi_\psi(x, \xi, \psi, \omega) &= \xi\tau_\psi(x, \psi) = \frac{\xi\langle x - X(\tau(x, \psi), \psi), P_\psi(\tau(x, \psi), \psi)\rangle}{1 - \langle x - X(\tau(x, \psi), \psi), P_\tau(\tau(x, \psi), \psi)\rangle} = 0; && (2.52)
\end{aligned}$$

в (2.50) и (2.52) мы воспользовались выражением для производных функции $\tau(x, \psi)$, данным в [17, первая формула без номера после (56)]. Найдем решение уравнений (2.50)—(2.52). Из (2.50) ясно, что $\xi \neq 0$. Тогда из (2.52) вытекает, что $\langle x - X, P_\psi\rangle = 0$. В сочетании с уравнением (2.41), определяющим функцию $\tau(x, \psi)$, и линейной независимостью векторов P и P_ψ ($\det(P; P_\psi) \neq 0$) это приводит к заключению, что $x = X(\tau(x, \psi), \psi) = X(0, \psi) = 0$ (мы воспользовались уравнением (2.51)). Теперь уравнение (2.50) приобретает вид $\xi\mathbf{n}(\psi) = \mathbf{n}(\omega)$, откуда окончательно получаем, что стационарная точка задается уравнениями

$$x = 0, \qquad \xi = 1, \qquad \psi = \omega. \tag{2.53}$$

Матрица вторых производных фазовой функции Φ в стационарной точке имеет вид (мы опускаем промежуточные вычисления)

$$\Phi''(0,1,\omega,\omega)=\begin{pmatrix}\tau_{x_1x_1}(0,\omega) & \tau_{x_1x_2}(0,\omega) & \cos\omega & -\sin\omega\\ \tau_{x_2x_1}(0,\omega) & \tau_{x_2x_2}(0,\omega) & \sin\omega & \cos\omega\\ \cos\omega & \sin\omega & 0 & 0\\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.54}$$

Определитель этой матрицы равен единице (так что стационарная точка невырожденна), а сигнатура — нулю (два собственных значения положительны и два отрицательны). Поэтому формально вклад стационарной точки (2.53) в интеграл (2.47) в соответствии с [56, гл. III, теорема 2.1 и следствие 2.1] и с учетом того факта, что $\Phi(0,1,\omega,\omega)=0$, равен $\widetilde{V}(p)$.

Проведем теперь соответствующие оценки.

Заметим, что $\tau_x=P(1-\langle x-X,P_\tau\rangle)^{-1}$ не обращается в нуль (это противоречило бы первому соотношению в (2.39)). Положим

$$a=\frac{1}{2\max|\tau_x(x,\psi)|},\qquad b=\frac{2}{\min|\tau_x(x,\psi)|}$$

(где и максимум, и минимум берутся по множеству $\operatorname{supp}\chi$). Поскольку $|\mathbf{n}(\omega)|=1$, из определения a и b и формулы (2.50) следует, что на носителе подынтегрального выражения в (2.47) справедливы неравенства

$$|\Phi_x|\ge\frac12\quad\text{при }\xi\in[0,a],\qquad |\Phi_x|\ge\frac{2}{b}\xi\quad\text{при }\xi\in[b,\infty).$$

На полуоси $\mathbf{R}_+$ выберем разбиение единицы

$$1=\theta_1(\xi)+\theta_2(\xi)+\theta_3(\xi),$$
$$\operatorname{supp}\theta_1\subset[0,a],\quad \operatorname{supp}\theta_2\subset[a/2,2b],\quad \operatorname{supp}\theta_3\subset[b,\infty)$$

и представим интеграл (2.47) в виде

$$W(p,\mu)=W_1(p,\mu)+W_2(p,\mu)+W_3(p,\mu),$$

где для $j=1,2,3$

$$W_j(p,\mu)=\Big(\frac{r}{2\pi\mu}\Big)^2\int\limits_0^\infty\iiint e^{\frac{ir}{\mu}\Phi(x,\xi,\psi,\omega)}\widetilde{V}(r\xi\mathbf{n}(\psi))\chi(x,\psi)\xi\theta_j(\xi)\,d\xi d\psi dx. \tag{2.55}$$

Оценим W_1. Для этого, пользуясь соотношением $\Phi_x \geq 1/2$, проинтегрируем N раз по частям по переменным x, подводя экспоненту под знак дифференциала (при этом дифференцированию будет подвергаться только сомножитель $\chi(x,\psi)$ в амплитуде). При каждом интегрировании будет возникать множитель μ/r. Учитывая, что область интегрирования компактна, а подынтегральное выражение ограничено, получим оценку

$$|W_1(p,\mu)| \leq C_N\Big(\frac{\mu}{|p|}\Big)^{N-2}, \qquad N = 0,1,2,\dots . \tag{2.56}$$

Далее оценим W_3. Для этого опять N раз проинтегрируем по частям. На сей раз при каждом интегрировании будет возникать множитель $\mu/(r\xi)$, и с учетом быстрого убывания функции $\widetilde{V}(q)$ при $q \to \infty$ получим ($s > \max\{0, 2-N\}$)

$$\begin{aligned} |W_3(p,\mu)| &\leq \widetilde{C}_{Ns}\Big(\frac{\mu}{r}\Big)^{N-2}\int\limits_b^\infty \frac{\xi^{1-N}d\xi}{(1+r\xi)^s} \\ &= \widetilde{C}_{Ns}\Big(\frac{\mu}{r}\Big)^{N-2}\int\limits_b^\infty \frac{\xi^{1-N-s}d\xi}{(r+1/\xi)^s} \leq C_{Ns}\mu^{N-2}|p|^{-s}, \qquad N = 0,1,2,\dots . \end{aligned} \tag{2.57}$$

Обратимся теперь к интегралу W_2. Стационарная точка (2.53) лежит как раз на носителе подынтегрального выражения W_2. Поскольку в силу быстрого убывания функции $\widetilde{V}(q)$ и ее производных на бесконечности и выполненных на носителе подынтегрального выражения соотношений $a/2 \leq \xi \leq 2b$ и $|\mathbf{n}(\psi)| = 1$ производные амплитудной функции $V(r\xi\mathbf{n}(\psi))\chi(x,\psi)\xi\theta_2(\xi)$ этого интеграла удовлетворяют оценкам

$$\Big|\frac{\partial^\alpha}{\partial(x,\xi,\psi)^\alpha}V(r\xi\mathbf{n}(\psi))\chi(x,\psi)\xi\theta_2(\xi)\Big| \leq C_{\alpha s}(1+r)^{-s}, \quad |\alpha|, s = 0,1,2,\dots ,$$

мы заключаем в соответствии с [56, гл. III, теорема 2.1 и следствие 2.1], что

$$W_2(p,\mu) = \widetilde{V}(p) + Q(p,\mu), \tag{2.58}$$

где остаточный член $Q(p,\mu)$ удовлетворяет оценкам

$$|Q(p,\mu)| \leq C_s\frac{\mu}{|p|}(1+|p|)^{-s}, \qquad s = 1,2,\dots . \tag{2.59}$$

2.6.6. Случай $|p| < \mu$

В этом случае подынтегральные выражения в W_1 и W_2 ограничены, частное $|p|/\mu$ ограничено, и потому, ввиду ограниченности промежутка интегрирования,

$$|W_1(p,\mu)| + |W_2(p,\mu)| \le C \qquad \text{при } |p| < \mu. \tag{2.60}$$

Кроме того, в силу условия A справедлива оценка

$$|\widetilde{V}(p)| \le C \qquad \text{при } |p| < \mu. \tag{2.61}$$

Займемся оценкой интеграла I_3. Мы воспользуемся первой строкой в (2.57) и далее при $N = 2, 3$ и достаточно большом s находим

$$|W_3(p,\mu)| \le \text{const} \int\limits_b^\infty \frac{\xi^{-1}d\xi}{(1+r\xi)^s} = \text{const} \int\limits_{br}^\infty \frac{\xi^{-1}d\xi}{(1+\xi)^s} \le \text{const}|\ln|p||,$$

$$|W_3(p,\mu)| \le \text{const}\,\frac{\mu}{r} \int\limits_b^\infty \frac{\xi^{-2}d\xi}{(1+r\xi)^s} \le \text{const}\,\frac{\mu}{|p|},$$

так что окончательно

$$|W_3(p,\mu)| \le C \min\Big\{|\ln|p||; \frac{\mu}{|p|}\Big\}. \tag{2.62}$$

2.6.7. Оценка остатка $R(x,\mu)$

Из результатов предыдущих двух пунктов получаем (слегка огрубляя их), что разность $\Delta(p,\mu)$ удовлетворяет следующей оценке:

$$|\Delta(p,\mu)| \le C \begin{cases} \mu^N/|p|^N + \mu/(|p|(1+|p|)^N), & |p| \ge \mu, \\ \min\{|\ln|p||; \mu/|p|\}, & |p| < \mu. \end{cases} \tag{2.63}$$

(Здесь N произвольно велико, а постоянная, разумеется, зависит от N.) Оценим функцию $R(x,\mu)$ и ее производные, которые задаются формулой

$$(-i\mu\nabla)^\alpha R(x,\mu) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\mathbf{R}^2} e^{i\langle p,x\rangle/\mu} p^\alpha \Delta(p,\mu)\, dp. \tag{2.64}$$

Чтобы получить оценки (2.45), представим правую часть формулы (2.64) в виде J_1+J_2, где J_1 — интеграл по области $|p|\le\mu$, а J_2 — интеграл по области $|p|\ge\mu$. Переходя к полярным координатам, можно оценить J_1 следующим образом:

$$|J_1|\le\operatorname{const}\int\limits_0^{\mu}\min\{|\ln r|;\mu/r\}r^{|\alpha|+1}\,dr=\operatorname{const}\left(\int\limits_0^{r_*}|\ln r|r^{|\alpha|+1}\,dr+\mu\int\limits_{r_*}^{\mu}r^{|\alpha|}\,dr\right)$$

где $r_*\in(0,\mu)$ находится из уравнения $r_*|\ln r_*|=\mu$. Очевидно, что

$$\mu\int\limits_{r_*}^{\mu}r^{|\alpha|}\,dr=O(\mu^{|\alpha|+2}),\qquad\int\limits_0^{r_*}|\ln r|r^{|\alpha|+1}\,dr=\frac{1}{|\alpha|+2}|\ln r_*|r_*^{|\alpha|+2}(1+o(1))$$
$$\le\operatorname{const}\frac{(|\ln r_*|r_*)^{|\alpha|+2}}{|\ln r_*|^{|\alpha|+1}}=\operatorname{const}\frac{\mu^{\alpha+2}}{|\ln r_*|^{|\alpha|+1}}=o(\mu^{|\alpha|+2}),$$

так что $J_1=O(\mu^{|\alpha|+2})$. Далее, аналогичным образом переходя к полярным координатам, получаем при достаточно большом N, что

$$|J_2|\le\operatorname{const}\left(\int\limits_{\mu}^{\infty}\mu^N r^{|\alpha|+1-N}\,dr+\mu\int\limits_{\mu}^{\infty}(1+r)^{-N}r^{\alpha}\,dr\right)=O(\mu),$$

и мы приходим к оценкам (2.45).

Получим теперь оценки (2.46). Заметим прежде всего, что из (2.64) по теореме Парсеваля вытекает соотношение

$$\|(-i\mu\nabla)^{\alpha}R\|_{L^2}=\mu\,\|p^{\alpha}\Delta\|_{L^2}$$

Разбивая аналогично предыдущему интеграл в определении нормы $\|p^{\alpha}\Delta\|_{L^2}$ в сумму интегралов по трем областям $|p|\le r_*$, $r_*\le|p|\le\mu$ и $|p|\ge\mu$, где по-прежнему $r_*|\ln r_*|=\mu$, переходя к полярным координатам и используя оценки (2.63), получаем при $\alpha=0$ (мы опускаем более подробные выкладки)

$$\|\Delta\|_{L^2}^2\le\operatorname{const}\left(\int\limits_0^{r_*}|\ln r|^2r\,dr+\int\limits_{r_*}^{\mu}\frac{\mu^2}{r^2}r\,dr+\int\limits_{\mu}^{\infty}\frac{\mu^{2N}}{r^{2N}}r\,dr+\int\limits_{\mu}^{\infty}\frac{\mu^2}{r^2}\frac{r\,dr}{1+r^N}\right)$$
$$=O(\mu^2)+O(\mu^2|\ln\mu|)+O(\mu^2)+O(\mu^2|\ln\mu|)=O(\mu^2|\ln\mu|),$$

а при $|\alpha| = 1$ —

$$\|p\Delta\|_{L^2}^2 \le \mathrm{const}\left(\int_0^{r_*} |\ln r|^2 r^3\,dr + \int_{r_*}^{\mu} \frac{\mu^2}{r^2} r^3\,dr + \int_{\mu}^{\infty} \frac{\mu^{2N}}{r^{2N}} r^3\,dr + \int_{\mu}^{\infty} \frac{\mu^2}{r^2}\frac{r^3\,dr}{1+r^N}\right)$$
$$= O(\mu^4/(\ln\mu)^2) + O(\mu^4) + O(\mu^4) + O(\mu^2) = O(\mu^2),$$

так что $\|R\|_{L^2} = \mu\,\|\Delta\|_{L^2} = O(\mu^2\sqrt{\ln\mu})$, $\|\nabla R\|_{L^2} = \|p\Delta\|_{L^2} = O(\mu)$, и теорема доказана. □

2.6.8. О функциях, удовлетворяющих условию A

Предложение 2.10. **(i)** *Пусть функция $V \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ удовлетворяет условию*

$$(1+|y|)^{|\alpha|} V^{(\alpha)}(y) \in L^1(\mathbf{R}^2), \qquad |\alpha| = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.65}$$

Тогда она удовлетворяет и условию A.

(ii) *Если функция $V(y)$ удовлетворяет условию A, то она удовлетворяет и оценкам*

$$|V^{(\alpha)}(y)| \le C_\alpha (1+|y|)^{-|\alpha|-2}, \qquad |\alpha| = 0, 1, 2, \dots , \tag{2.66}$$

с некоторыми постоянными C_α (и, в частности, лежит в пространстве $L^2(\mathbf{R}^2)$ вместе со всеми своими производными).

Доказательство. **(i)** Непрерывность функции $\widetilde{V}(p)$ и оценки (2.43) при $\beta = 0$ вытекают из того, что функция $V(y)$ и все ее производные лежат в пространстве $L^1(\mathbf{R}^2)$. Далее, в силу неравенств $|p^\beta| \le |p|^{|\beta|} \le 2^{|\beta|} \max_{|\gamma|=|\beta|} |p^\gamma|$, оценки (2.43) при $\beta = \widetilde{\beta}$ эквивалентны оценкам

$$|p^\gamma \widetilde{V}^{(\widetilde{\beta})}(p)| \le C_{\widetilde{\beta}s} (1+|p|)^{-s}, \qquad |\gamma| = |\widetilde{\beta}|, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

(с другими постоянными $C_{\widetilde{\beta}s}$), т.е. оценкам вида (2.43) с $\beta = 0$ для функций $p^\gamma \widetilde{V}^{(\widetilde{\beta})}(p)$, так что в силу уже доказанного достаточно показать, с учетом свойств преобразования Фурье, что если функция $V(x)$ обладает свойством (2.65), то им же обладает и функция $(x^{\widetilde{\beta}} V(x))^{(\gamma)}$ при $|\gamma| = |\widetilde{\beta}|$. Последнее же очевидно.

(ii) Поскольку все функции $V^{(\alpha)}(y)$ гладкие, оценки (2.66) достаточно доказать при больших $|y|$. Для доказательства возьмем гладкое разбиение единицы в $\mathbf{R}^2$ вида $e_1(p) + e_2(p) = 1$, $\operatorname{supp} e_1 \subset \{|p| < 2\}$, $\operatorname{supp} e_2 \subset \{|p| > 1\}$, и представим $V^{(\alpha)}(y)$ в виде

$$V^{(\alpha)}(y) = \frac{1}{2\pi}\iint e^{i\langle p,y\rangle} e_1(p|y|) p^\alpha \widetilde{V}(p)\,dp + \frac{1}{2\pi}\iint e^{i\langle p,y\rangle} e_2(p|y|) p^\alpha \widetilde{V}(p)\,dp \equiv I_1 + I_2.$$

Область интегрирования в интеграле I_1 содержится в круге $\{|p| < 2/|y|\}$. Так как функция $\widetilde{V}(p)$ ограничена, переходя к полярным координатам, получаем

$$|I_1| \le \text{const} \int\limits_0^{2/|y|} t^{|\alpha|+1}\,dt \le \text{const}|y|^{-|\alpha|-2}.$$

Для оценки интеграла I_2 воспользуемся тождеством

$$\frac{i}{|y|}\Big\langle \Omega, \frac{\partial}{\partial p}\Big\rangle e^{i\langle p,y\rangle} = -e^{i\langle p,y\rangle}, \qquad \text{где} \qquad \Omega = \frac{y}{|y|},$$

и проинтегрируем по частям $n = |\alpha| + 3$ раз; в результате получим

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{i^n}{2\pi|y|^n}\iint e^{i\langle p,y\rangle}\Big\langle \Omega, \frac{\partial}{\partial p}\Big\rangle^n \big(e_2(p|y|)p^\alpha \widetilde{V}(p)\big)\,dp \\ &= \frac{i^n}{2\pi}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \iint e^{i\langle p,y\rangle}|y|^{-n}\Big[\Big\langle \Omega, \frac{\partial}{\partial p}\Big\rangle^{n-k} e_2(p|y|)\Big]\Big[\Big\langle \Omega, \frac{\partial}{\partial p}\Big\rangle^{k}\big(p^\alpha \widetilde{V}(p)\big)\Big]\,dp \\ &\equiv \sum_{k=0}^{n} I_{2k}. \end{aligned}$$

Во всех интегралах I_{2k}, кроме последнего ($k = n$), область интегрирования содержится в кольце $\{|y|^{-1} \le |p| \le 2|y|^{-1}\}$, а в последнем — во множестве $\{|p| > |y|^{-1}\}$. Из оценок (2.43) следует, что подынтегральное выражение в I_{2k} оценивается через $\text{const}|y|^{-k}|p|^{|\alpha|-k}(1+|p|)^{-s}$, где s произвольно велико. Пере-

ходя к полярным координатам, для интегралов I_{2k} получаем оценки

$$|I_{2k}| \le \mathrm{const}|y|^{-k} \int\limits_{1/|y|}^{2/|y|} r^{|\alpha|-k+1}\,dr \le \mathrm{const}|y|^{-k} = \mathrm{const}|y|^{-|\alpha|-2}, \;\; k \le |\alpha|+1;$$

$$|I_{2,n-1}| \le \mathrm{const}|y|^{-n+1} \int\limits_{1/|y|}^{2/|y|} r^{-1}\,dr = \mathrm{const}|y|^{-|\alpha|-2}\ln 2, \qquad k = |\alpha|+2;$$

$$|I_{2n}| \le \mathrm{const}|y|^{-n} \int\limits_{1/|y|}^{\infty} \frac{r^{-2}\,dr}{(1+r)^s} \le \mathrm{const}|y|^{-|\alpha|-3}|y| = \mathrm{const}|y|^{-|\alpha|-2}, \quad k = |\alpha|+3.$$

Складывая все эти оценки, завершаем доказательство. □

2.6.9. О задачах с локализованной правой частью

В приложениях часто встречаются задачи с локализованной правой частью. Покажем, следуя [73], как такие задачи можно сводить к задачам с эффективно вычисляемыми локализованными начальными данными. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \nabla c^2(x)\nabla\eta = \frac{\partial g(t)}{\partial t} V\left(\frac{x}{\mu}\right), \quad \eta|_{t=0} = 0, \quad \eta_t|_{t=0} = 0, \qquad t \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}^2_x. \tag{2.67}$$

Здесь $V(y)$ — гладкая функция на $\mathbb{R}^2_y$, убывающая быстрее, чем $1/|y|_1^{\kappa}$, $\kappa_1 > 2$, при $|y| \to \infty$, а $g(t)$ — гладкая функция на $[0,\infty)$, убывающая быстрее, чем $1/t^{\kappa_2}$, $\kappa_2 > 1$, при $t \to \infty$, $g(t) = 0$ при $t \le 0$, а μ — малый параметр, $0 < \mu \ll 1$.

Используя принцип Дюамеля, можно показать [73, § 2], что

$$\eta = \eta_1 + \frac{\partial\eta_2}{\partial t} + \eta_3, \tag{2.68}$$

$$\eta_1 = \sqrt{2\pi}\cos(tD)\,\mathrm{Re}\,\tilde g(D) V\left(\frac{x}{\mu}\right), \quad \eta_2 = \sqrt{2\pi}\cos(tD)\frac{\mathrm{Im}\,\tilde g(D)}{D}\,V\left(\frac{x}{\mu}\right), \tag{2.69}$$

$$\eta_3 = -\,\mathrm{Re}(G(D,t))V\left(\frac{x}{\mu}\right), \tag{2.70}$$

где

$$G(\zeta,t) = \int\limits_0^{\infty} e^{-i\zeta\xi} g(t+\xi)\,d\xi = e^{i\zeta t}\int\limits_t^{\infty} e^{-i\zeta\xi} g(\xi)\,d\xi,$$

а

$$\tilde{g}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} G(\zeta, 0)$$

— преобразование Фурье функции $g(t)$.

Эти выражения вычислять непосредственно довольно затруднительно, так как в них входит функции от оператора с переменными коэффициентами.

Обозначим $c_0 = c(0)$, $L_x^0 = -c_0^2 \nabla^2$, и $D_x^0 = \sqrt{L_x^0}$.

Предложение 2.11 ([73, Lemma 3.1]). *Замена оператора D в формулах (2.69) and (2.70) оператором D_x^0 приводит к ошибке $R = O(\mu)$ (в смысле равномерной нормы) в формуле (2.68) для решения η задачи (2.67).*

Доказательство основано на операторном методе Маслова [27].

2.7. Асимптотические решения двумерного волнового уравнения, вырождающегося на границе области

Используем результаты предыдущих разделов, чтобы построить асимптотическое решение одной задачи, возникающей, в частности, при описании распространения длинных волн на воде (например, волн цунами) в линейном приближении к уравнениям мелкой воды [52, 92, 103].

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$\eta_{tt} - \langle \nabla, c^2(x) \nabla \rangle \eta = 0, \qquad \eta|_{t=0} = V_0\left(\frac{x - x_0}{\mu}\right), \quad \eta_t|_{t=0} = 0, \tag{2.71}$$

где t — время, $x = (x_1, x_2)$ — координаты, $\nabla = {}^t(\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$, $\eta = \eta(x, t)$ — возвышение свободной поверхности, $c(x) = \sqrt{gD(x)}$ — скорость распространения волны (g — ускорение свободного падения, $D(x)$ — глубина водоема в точке x), $V_0(z)$ — достаточно быстро убывающая при $|z| \to \infty$ функция, задающая форму начального мгновенного возмущения («поршневая» модель цунами [92]), $\mu > 0$ — малый параметр, характеризующий отношение размеров источника к характерному линейному масштабу в задаче.

Будем считать, что функция V_0 удовлетворяет условию (2.66).

Уравнение (2.71) рассматривается в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (водоем) с гладкой границей $\partial\Omega$ (берег), причем предполагается, что $D(x)$ — гладкая функция в $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $D(x) > 0$ в Ω, $D(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$ и $\nabla D(x) \neq 0$ при $x \in \partial\Omega$. Считаем, что x_0 — внутренняя точка области Ω. Решение будем искать в классе функций с конечным интегралом энергии

$$J^2(t) = \|\eta_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|c(x)\nabla\eta\|^2_{L_2(\Omega)}\,.$$

Начальное условие согласно результатам раздела 2.6 представим следующим образом. Рассмотрим траектории системы Гамильтона

$$\dot{x} = H_p(x,p), \quad \dot{p} = -H_x(x,p), \tag{2.72}$$

отвечающей гамильтониану

$$H(x,p) = c(x)|p|, \tag{2.73}$$

с начальными точками на окружности

$$\Lambda_0 = \{(x,p) \in T^*_0\Omega \colon x = x_0, |p| = 1\}.$$

Обозначим через $(X(\alpha,\psi), P(\alpha,\psi))$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, решение системы Гамильтона (2.72) с начальными условиями

$$(X(0,\psi), P(0,\psi)) = (x_0, \mathbf{n}(\psi)) \equiv {}^t(\cos\psi, \sin\psi)$$

(здесь α — «время» вдоль траекторий системы (2.72)). Согласно теореме 2.3 траектории системы (2.72) на фазовом пространстве $\mathbf{\Phi}$, отвечающем области Ω, безгранично продолжаются вперед и назад по времени $\alpha \in (-\infty, \infty)$. Объединение всех траекторий с начальными условиями (2.7) дает лагранжево многообразие — лагранжево локальное вложение $\jmath\colon \Lambda \longrightarrow \mathbf{\Phi}$, где Λ — бесконечный цилиндр $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ с координатами (α,ψ).

Снабдим это лагранжево многообразие мерой $d\alpha \wedge d\psi$ и отмеченной точкой на окружности Λ_0, так что эйконал (действие) на Λ будет иметь вид

$$\tau(\alpha,\psi) = c_0\alpha, \qquad \text{где } c_0 = c(x_0). \tag{2.74}$$

В соответствии с теоремой 2.8 начальное условие можно представить в виде

$$V_0\left(\frac{x-x_0}{\mu}\right)=\sqrt{\frac{\mu c_0}{2\pi}}e^{-i\pi/4}\int\limits_0^\infty K_\Lambda^{\mu/\rho}[\theta(\alpha)\widetilde{V}_0(\rho\mathbf{n}(\psi))]\sqrt{\rho}\,d\rho+O(\mu), \tag{2.75}$$

где K_Λ^h — канонический оператор Маслова на лагранжевом многообразии Λ с мерой $d\alpha\wedge d\psi$ и отмеченной точкой на окружности Λ_0, $\theta(\alpha)$ — финитная срезающая функция, равная единице в окрестности точки $\alpha=0$, а

$$\widetilde{V}_0(k)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}e^{i\langle k,z\rangle}V_0(z)\,dz,\qquad k=(k_1,k_2)\in\mathbb{R}^2 \tag{2.76}$$

— преобразование Фурье функции $V_0(z)$.

Представление (2.75) начального условия через канонический оператор позволяет построить асимптотическое решение задачи (2.71) в соответствии со стандартной схемой из [18, 75, 76] включающей построение быстроосциллирующих решений в соответствии со схемой из [26, 39] и последующее интегрирование по параметру ρ. Поскольку начальное условие для η_t нулевое, решение представляется в виде полусуммы двух функций, отвечающих распространению по характеристикам в положительном и отрицательном направлениях или, что то же самое, вещественной части любой из этих двух функций [76]. Многообразие Λ по построению инвариантно относительно гамильтонова векторного поля гамильтониана (2.73), а уравнение переноса на Λ имеет вид $d\varphi/dt=0$. Поэтому решение в любой момент времени t задается каноническим оператором на Λ, примененным к начальной функции $\theta(\alpha)\widetilde{V}_0(\rho\mathbf{n}(\psi))$, сдвинутой вдоль траектории, умноженным на быстроосциллирующий множитель, отвечающий приращению эйконала за время t, с последующим интегрированием по параметру ρ и взятием вещественной части. Это рассуждение похоже на используемые в задачах, в которых участвуют погранслойные разложения [10]. Используя такую конструкцию (и почти дословно воспроизводя рассуждения из [75, 76]), приходим к следующей теореме:

Теорема 2.9. *Решение задачи* (2.71) *дается формулой*

$$\eta(x,t)=\operatorname{Re}\left\{\sqrt{\frac{\mu c_0}{2\pi}}e^{-i\pi/4}\int\limits_0^\infty e^{-i\rho c_0 t/\mu}K_\Lambda^{\mu/\rho}[\theta(\alpha-t)\widetilde{V}_0(\rho\mathbf{n}(\psi))]\sqrt{\rho}\,d\rho\right\}+O(\mu) \tag{2.77}$$

Замечание 2.4. В частности, в неособой карте формула (2.77) приводит к хорошо известному выражению (см., например, [76])

$$\eta(x,t)=\sqrt{\frac{\mu c_0}{c(x)|X_\psi(\alpha(x),\psi(x))|}}\,\mathrm{Re}\left[e^{-i\pi m}F\left(\frac{c_0(\alpha(x)-t)}{\mu},\psi(x)\right)\right]+O(\mu), \tag{2.78}$$

где m — индекс Маслова рассматриваемой карты [26, 39], $(\alpha(x),\psi(x))$ — выражение координат (α,ψ) через координаты $x=(x_1,x_2)$ в неособой карте, а

$$F(s,\psi)=\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty e^{i\rho s}\widetilde{V}_0(\rho n(\psi))\sqrt{\rho}\,d\rho.$$

Более точно, формула (2.78) описывает только вклад в асимптотику данной неособой карты. Для вычисления асимптотики в окрестности точки (x,t) следует просуммировать вклады всех канонических карт U, проекция $\boldsymbol{\pi}(U\cap\Lambda_t)$ пересечения которых с окружностью $\Lambda_t=\{(\alpha,\psi)\in\Lambda\colon \alpha=t\}$ на $\overline{\Omega}$ пересекается с указанной окрестностью точки x. (Здесь $\boldsymbol{\pi}\colon \boldsymbol{\Phi}\longrightarrow\overline{\Omega}$ — естественная проекция.) Проекция $\gamma_t=\boldsymbol{\pi}(\Lambda_t)$ самой окружности Λ_t на $\overline{\Omega}$ есть как раз фронт волны в момент времени t.

Теорема 2.9 позволяет асимптотически вычислить амплитуду волны при выходе на берег. Часть Λ_∞ лагранжева многообразия Λ, проектирующаяся в точки берега $\partial\Omega$, есть в точности пересечение $\Lambda\cap\boldsymbol{\Phi}_\infty$. Записывая канонический оператор K_Λ^h в нестандартных локальных координатах в окрестности точек из $\boldsymbol{\Phi}_\infty$, получаем выражение для указанной амплитуды. В частности, рассмотрим случай, когда «источник» $V_0(y)$ имеет вид

$$V_0(y)=W_0(U_\beta y),\qquad U_\beta=\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix},$$
$$W_0(z)=\frac{A}{(1+(z_1/b_1)^2+(z_2/b_2)^2)^{3/2}},\qquad b_1\geq b_2.$$

Линии уровня функции $V_0(y)$ представляют собой эллипсы, большая ось которых составляет угол β с осью абсцисс. Для случая $b_1=b_2$ (круговой источник) начальные условия такого вида для двумерного волнового уравнения рассматривались в [23, 52, 106]. При $c(x)=\mathrm{const}$ задача Коши с таким начальным

условием имеет точное решение в алгебраических функциях (см. [19]. В несимметричном случае ($b_1 \neq b_2$) также можно получать эффективные решения в терминах алгебраических или известных специальных функций [70, 73, 78, 102]. Преобразование Фурье функции V_0 вычисляется следующим образом:

$$\widetilde{W}_0(k) = Ab_1b_2e^{-\sqrt{b_1^2k_1^2+b_2^2k_2^2}}, \qquad \widetilde{V}_0(k) = \widetilde{W}_0(U_\beta k).$$

Предположим, что область вблизи рассматриваемой точки границы задается неравенством

$$x_1 > f(x_2),$$

а соответствующие указанному участку границы точки из Λ_∞ на лагранжевом многообразии Λ покрываются нестандартной канонической картой с каноническими координатами (q, x_2). Тогда вычисления в [74, с. 395-396] показывают, что

$$\eta(f(x_2), x_2, t) \asymp \frac{\sqrt{2D_0}A}{\sqrt{\operatorname{tg}\Theta(x_2)}|X_\psi(T(x_2), \psi(x_2)|^{1/2}} \operatorname{Re} \frac{e^{-i\pi m/2}l_1l_2}{(l - ic_0(T(x_2) - t))^2}$$

где $(\alpha = T(x_2), \psi = \psi(x_2))$ — решение системы уравнений

$$X(\alpha, \psi) = (f(x_2), x_2))$$

(в частности, $T(x_2)$ — время прихода траектории системы гамильтона в точку $(f(x_2), x_2) \in \partial\Omega$), m — индекс Маслова соответствующей траектории, $l_j = b_j\mu$ — полуоси источника,

$$l = \sqrt{l_1^2\cos^2(\psi - \beta) + l_2^2\sin^2(\psi - \beta)},$$

а $\Theta(x_2)$ — угол наклона дна относительно горизонтальной плоскости в точке $(f(x_2), x_2)$. Для частного случая, когда $c^2(x_1, x_2) = \gamma x_1$, этот результат совпадает с результатом, полученным в [18]. В одномерном случае аналогичные формулы получены в [21, 40, 72].

Глава 3

Канонический оператор Маслова и некоторые задачи эллиптической теории

Квантованные канонические преобразования, или интегральные операторы Фурье–Маслова — интегральные операторы, ядра которых представимы в виде канонического оператора Маслова на лагранжевом многообразии—графике канонического преобразования, примененного к некоторой амплитуде—функции на этом графике, естественно входят в круг вопросов эллиптической теории. Именно, представляет интерес как вопрос как об индексе таких операторов (в случае их эллиптичности), так и о числе Лефшеца задаваемых такими операторами эндоморфизмов эллиптических комплексов.

Число Лефшеца эндоморфизма комплекса определяется как альтернированная сумма следов операторов, индуцированных эндоморфизмом на группах когомологий этого комплекса. Классическая теорема Атьи–Ботта–Лефшеца дает выражение для числа Лефшеца в том случае, когда указанный комплекс является комплексом эллиптических операторов на гладком многообразии, а эндоморфизм геометрический, т. е. индуцирован некоторым отображением многообразия в себя. Разработанное в [54, 55, 82] направление в теории Лефшеца имеет дело с эндоморфизмами, задаваемыми интегральными операторами Фурье–Маслова (и, таким образом, ассоциированными с каноническими преобразованиями кокасательного расслоения) и дает асимптотические (квазиклассические), а не точные формулы для числа Лефшеца. При этом входящие в комплекс эллиптические операторы, так же как и операторы, задающие эндоморфизм, зависят от малого параметра $h \in (0, 1]$ таким образом, как это типично для операторов квантовой механики, и речь идет об асимптотике числа Лефшеца при $h \to 0$. В разделе 3.2 приводятся некоторые новые результаты в этом направлении для случая, когда каноническое преобразование имеет невырожденные многообразия неподвижных точек.

Задача о вычислении индекса интегральных операторов Фурье–Маслова

(или квантованных контактных преобразований) была поставлена Вайнстейном [107, 108] и решена для операторов на гладких многообразиях в [80, 91]. В разделе 3.5 вычислен индекс интегральных операторов Фурье–Маслова на многообразиях с коническими особенностями.

Первым основным результатом данной главы является теорема 3.3 о формуле Лефшеца для случая, когда когда каноническое преобразование имеет невырожденные многообразия неподвижных точек. Вторым основным результатом является формула индекса для интегральных операторов Фурье–Маслова на многообразиях с коническими особенностями (теорема 3.12). Все основные результаты получены лично автором и опубликованы в работах [48–50, 93]. Для полноты изложения в разделе 3.1 приведены некоторые известные результаты, касающиеся теории Лефшеца, в разделе 3.3 — полученные в соавторстве результаты о квантовании контактных преобразований на многообразиях с коническими особенностями, а в разделе 3.4 — полученные в соавторстве результаты о принципе локальности относительного индекса.

Изложение следует работам [48–50, 93].

3.1. Квазиклассическая теория Лефшеца

Напомним определение числа Лефшеца. Пусть

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{D_0} E_1 \xrightarrow{D_1} \cdots \xrightarrow{D_{m-1}} E_m \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

— комплекс векторных пространств над полем $\mathbb{C}$ с конечномерными когомологиями, и пусть

$$T = \{T_j : E_j \longrightarrow E_j\}|_{j=0,\dots,m} \tag{3.2}$$

— эндоморфизм комплекса (3.1), т. е. набор линейных отображений. таких что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E_0 & \xrightarrow{D_0} & E_1 & \xrightarrow{D_1} & \cdots & \xrightarrow{D_{m-1}} & E_m & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle T_0} & & \downarrow{\scriptstyle T_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle T_m} & & \\ 0 & \longrightarrow & E_0 & \xrightarrow{D_0} & E_1 & \xrightarrow{D_1} & \cdots & \xrightarrow{D_{m-1}} & E_m & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3.3}$$

коммутативна. Эндоморфизм (3.2) задает корректно определенные операторы

$$\widetilde{T}_j : H^j(E) \longrightarrow H^j(E), \qquad j = 0, \dots, m, \tag{3.4}$$

в конечномерных когомологиях $H^j(E)$ комплекса (3.1), и число Лефшеца эндоморфизма (3.2) определяется как альтернированная сумма

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(D, T) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \operatorname{Tr} \widetilde{T}_j. \tag{3.5}$$

(Заметим, что при $T = \mathrm{id}$ мы получаем в точности эйлерову характеристику комплекса (3.1).) Классическая теорема Атьи–Ботта–Лефшеца [65, 90] имеет дело со случаем, когда (3.1) — эллиптический комплекс дифференциальных операторов на гладком компактном многообразии M без края, а отображение (3.2) — геометрический эндоморфизм, ассоциированный с гладким отображением $f\colon M \longrightarrow M$:

$$\begin{aligned} E_j &= C^\infty(M, F_j), \quad \text{где } F_j \text{ — векторное расслоение над } M; \\ T_j\varphi(x) &= A_j(x)\varphi(f(x)), \quad \text{где } A_j(x)\colon F_{jf(x)} \longrightarrow F_{jx} \text{ — гомоморфизм.} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Предположим, что неподвижные точки отображения f невырожденны в том смысле, что

$$\det\left(1 - \frac{\partial f}{\partial x}(x)\right) \neq 0, \qquad x \in \operatorname{fix}(f), \tag{3.7}$$

где $\operatorname{fix}(f)$ — множество неподвижных точек отображения f. Тогда неподвижные точки изолированы, и теорема Атьи–Ботта–Лефшеца утверждает, что

$$\mathcal{L} = \sum_{x \in \operatorname{fix}(f)} \frac{\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \operatorname{Tr} A_j(x)}{\left|\det\left(1 - (\partial f/\partial x)(x)\right)\right|}. \tag{3.8}$$

Таким образом, число Лефшеца эндоморфизма (3.2) выражается в классических терминах. Заметим также, что операторы D_j сами по себе не входят в (3.8); только *существование* комплекса (3.1), для которого диаграмма (3.3) коммутативна, существенно в этой теореме.

Если не ограничиваться комплексами *дифференциальных* операторов, а рассматривать также и псевдодифференциальные операторы, то класс геомет-

рических эндоморфизмов не является естественными рамками для задачи о нахождении числа Лефшеца. Геометрические эндоморфизмы являются подклассом более общего класса интегральных операторов Фурье–Маслова, и поэтому желательно иметь формулу Лефшеца для случая, когда (3.1) — эллиптический комплекс *псевдодифференциальных операторов*, а эндоморфизм (3.2) задается интегральными операторами Фурье–Маслова. В частном случае такая формула была получена Б. В. Федосовым [82], который рассматривал эндоморфизмы, порожденные эволюционными операторами для уравнения Шрёдингера. Общая теория для гладких компактных многообразий была разработана Б. Ю. Стерниным и В. Е. Шаталовым [54, 55]. Оказывается, что при переходе к эндоморфизмам, ассоциированным с преобразованиями фазового пространства, теория с необходимостью становится асимптотической. Чтобы получить осмысленные формулы, необходимо ввести малый параметр $h \in (0, 1]$ и рассматривать h^{-1}-псевдодифференциальные операторы и интегральные операторы Фурье–Маслова [24, 41], ассоциированные с каноническим преобразованием $g\colon T^*M \longrightarrow T^*M$. Тогда число Лефшеца зависит от h и при подходящих предположениях о множестве неподвижных точек преобразования g квазиклассическое выражение для главного члена асимптотики числа Лефшеца при $h \to 0$ получается применением метода стационарной фазы к следовым интегралам, представляющим число Лефшеца. Классический результат Атьи–Ботта (для случая, когда f — диффеоморфизм) можно вывести из асимптотической формулы для числа Лефшеца весьма простой процедурой масштабирования: умножение *дифференциального* оператора D_j на h^{k_j} (где $k_j = \operatorname{ord} D_j$) превращает его h^{-1}-(псевдо)дифференциальный оператор, геометрические эндоморфизмы представляются интегральными операторами Фурье–Маслова с линейными фазовыми функциями, и остается применить асимптотическую формулу и заметить, что число Лефшеца в этом специальном случае не зависит от h.

В работах [54, 55] рассматривался и случай невырожденных изолированных неподвижных точек преобразования g, и случай, когда у g имеются невырожденные *многообразия* неподвижных точек. Однако утверждение, сформулированное для последнего случая в указанных работах, представляет собой

просто теорему существования, устанавливающую, что главный член асимптотического разложения числа Лефшеца можно выразить интегралом по компоненте наибольшей размерности множества $\mathrm{fix}(g)$ от известных выражений относительно некоторой гладкой комплекснозначной меры, зависящей лишь от g. В указанных работах не приводится никакого выражения для этой меры. В разделе 3.2 мы вычислим эту меру явно для двух важных частных случаев.

Опишем кратко основные результаты, полученные в [54, 55]. Пусть M — гладкое замкнутое многообразие размерности n. Предположим, что M ориентировано и снабжено положительной формой объема dx. Для канонического преобразования

$$g\colon T^*M \longrightarrow T^*M \tag{3.9}$$

и гладкой функции φ на T^*M, удовлетворяющей подходящим условиям на бесконечности в слоях кокасательного расслоения через $T(g,\varphi)$ обозначается интегральный оператор Фурье–Маслова с параметром h с амплитудой φ, ассоциированный с каноническим преобразованием g. (Предполагается, что график преобразования g является квантованным лагранжевым подмногообразием в $T^*M \times T^*M$; подробные определения можно найти в [24, 41], а точные условия, гарантирующие, что оператор $T(g,\varphi)$ для классов амплитуд φ, интересных в рассматриваемой ситуации, корректно определен, приведены в статье [55]). Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^\infty(M,F_1) & \xrightarrow{\widehat{D}} & C^\infty(M,F_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{T}_1} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{T}_2} & & \\ 0 & \longrightarrow & C^\infty(M,F_1) & \xrightarrow{\widehat{D}} & C^\infty(M,F_2) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3.10}$$

где F_1 и F_2 — векторные расслоения над M,

$$\widehat{T}_1 = \widehat{T}_1(g,\varphi_1), \qquad \widehat{T}_2 = \widehat{T}_2(g,\varphi_1)$$

— интегральные операторы Фурье–Маслова, ассоциированные с некоторым каноническим преобразованием (3.9), а $\widehat{D}$ — эллиптический h^{-1}-псевдодифференциальный оператор на M. По определению, требование эллиптичности означает, что для $\widehat{D}$ существует h^{-1}-псевдодифференциальный регуляризатор, т. е.

h^{-1}-псевдодифференциальный оператор $\widehat{R}$ на M, такой что символы операторов $1-\widehat{D}\widehat{R}$ и $1-\widehat{R}\widehat{D}$ принадлежат классу Хёрмандера $S^{-\infty}(M)$.

Теорема 3.1 ([54, 55]). *Предположим, что преобразование g имеет только изолированные неподвижные точки $\alpha_1,\dots,\alpha_N$, причем они невырожденны, т. е.*

$$\det(1-g_*(\alpha_k))\neq 0,\qquad k=1,\dots,N.$$

Тогда число Лефшеца диаграммы (3.10) имеет асимптотику

$$\mathcal{L}=\sum_{k=1}^{N} e^{\frac{i}{h}S_k}\frac{\operatorname{Tr}\varphi_1(\alpha_k)-\operatorname{Tr}\varphi_2(\alpha_k)}{\sqrt{1-g_*(\alpha_k)}}+O(h), \tag{3.11}$$

где φ_1 и φ_2 — амплитуды операторов $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$, S_k — значение производящей функции преобразования g (выбор которого зафиксирован в определении интегральных операторов Фурье–Маслова $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$) в точке α_k, а ветвь квадратного корня выбрана специальным образом.

Для случая, когда каноническое преобразование (3.9) может иметь многообразия неподвижных точек, в [55] была доказана следующая теорема.

Теорема 3.2 ([55]). *Пусть множество $\operatorname{fix}(g)$ неподвижных точек канонического преобразования g представляет собой конечное дизъюнктное объединение гладких компактных многообразий G_k без края, и пусть для всех k ядро оператора $1-g_*$ в каждой точке многообразия G_k совпадает с касательным пространством к G_k (условие невырожденности). Тогда число Лефшеца диаграммы (3.10) имеет асимптотику*

$$\mathcal{L}=\left(\frac{1}{2\pi h}\right)^{\max\dim G_k/2}\left[\sum_k e^{\frac{i}{h}S_k}\int\limits_{G_k}\left(\operatorname{Tr}\varphi_1(\alpha)-\operatorname{Tr}\varphi_2(\alpha)\right)dm_k(\alpha)+O(h)\right], \tag{3.12}$$

где суммирование производится по многообразиям G_k максимальной размерности, S_k — значение (с необходимостью постоянное) производящей функции на многообразии G_k, а dm_k — некоторая невырожденная форма объема на G_k.

Явные выражения для dm_k не были найдены в [55].

3.2. Вычисление форм dm_k

В данном разделе мы вычислим формы dm_k явно в следующих двух случаях, «крайних» с точки зрения свойств сужения формы ω^2 на G_k:

1. Размерность $\dim G_k$ четна, и $\operatorname{rank} \omega^2|_{G_k} = \dim G_k$. Иначе говоря, G_k — симплектическое подмногообразие в T^*M (здесь ω^2 — стандартная симплектическая форма на T^*M).

2. Размерность $\dim G_k$ совпадает с $\dim M$, и G_k — лагранжево подмногообразие в T^*M.

В дальнейшем индекс k мы опускаем и пишем просто G и dm.

Поскольку асимптотическое разложение числа Лефшеца в теореме 3.2 получается применением метода стационарной фазы к быстроосциллирующему интегралу, стационарные точки фазовой функции которого по переменным интегрирования невырожденны, форма dm в любой точке $\alpha \in G$ зависит только от $g_*(\alpha)$ и от касательной плоскости $T_\alpha G \subset T_\alpha T^*M$. Кроме того, условие невырожденности гласит, что

$$T_\alpha G = \ker(1 - g_*(\alpha)),$$

так что dm всецело определяется производным отображением $g_*(\alpha)$ (с точностью до множителя ± 1, зависящего от выбора ветвей квадратного корня в определении канонического оператора). Итак, ситуация следующая: задано линейное симплектическое отображение

$$A = g_* \colon \Phi \longrightarrow \Phi,$$

где $\Phi = T_\alpha T^*M$, и нужно указать форму объема dm на $L = \ker(1 - A)$, такую что выполнено (3.12).

Рассмотрим случай 1 (L симплектическое). Тогда имеется косоортогональное разложение (под косоортогональностью подразумевается ортогональность относительно симплектической формы ω^2 [2])

$$\Phi = L \oplus L^\circ;$$

здесь через $\circ$ обозначено косоортогональное дополнение. Утверждается, что L° инвариантно относительно A. Действительно, это следует из того факта, что A

сохраняет форму ω^2. Более того, нетрудно видеть, что L° — также симплектическое пространство, причем

$$\ker\left((1-A)\big|_{L^\circ}\right) = \{0\}$$

в силу условия невырожденности. Положим $l = \dim L \equiv \dim G$ и определим форму

$$dm = \frac{\left(\omega^2\big|_L\right)^{\wedge\frac{l}{2}}}{l!\sqrt{\det(1-A)\big|_{L^\circ}}}. \tag{3.13}$$

Рассмотрим более сложный случай 2 (L лагранжево). Тогда $L^\circ = L$, и естественного косоортогонального разложения не существует.

Лемма 3.1. (i) *Существует естественный изоморфизм*

$$\Phi/L \simeq L^*$$

(*где* L^* — *двойственное пространство*).

(ii) *Справедливо соотношение*

$$\operatorname{Im}(1-A) = L.$$

Более того, отображение $1-A$ *пропускается через* L *и индуцирует изоморфизм*

$$\widetilde{1-A}\colon L^* \longrightarrow L.$$

Доказательство. Утверждение (i) очевидно. Далее, для любых $x \in L$ и $y \in \Phi$ имеем

$$\omega^2(x, Ay) = \omega^2(Ax, Ay) = \omega^2(x, y),$$

поскольку A сохраняет форму ω^2 и $Ax = x$. Вычитая правую часть из левой, получаем

$$\omega^2(x, y - Ay) = 0.$$

Поскольку это верно для любого $x \in L$, видим, что $y - Ay \in L^\circ = L$. Оставшаяся часть утверждения (ii) очевидна. □

Таким образом, на L имеется корректно определенная невырожденная билинейная форма

$$B(x,y) = \langle \widetilde{(1-A)}^{-1} x, y\rangle,$$

где угловые скобки обозначают спаривание между L и L^*.

Кроме того, форма $B(x,y)$ симметрична: $B(x,y) = B(y,x)$. Чтобы проверить это, возьмем произвольную лагранжеву плоскость L_1, дополняющую L до Φ:

$$L \oplus L_1 = \Phi.$$

Тогда имеется естественный изоморфизм $L_1 \simeq L^*$, и оператор A в этом разложении пространства Φ представляется (2×2)-матрицей вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Q & 1 \end{pmatrix},$$

где Q действует из $L_1 \simeq L^*$ в L. Пусть $q, q' \in L_1$. Тогда

$$0 = \omega^2(q,q') = \omega^2(Aq, Aq') = \langle Qq, q'\rangle - \langle q, Qq'\rangle.$$

Мы видим, что оператор Q симметрический и потому такова же форма $B(x,y)$. Приведем квадратичную форму $(1/2)B(x,x)$ к главным осям в некотором базисе в L:

$$B(x,x) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j^2,$$

где все числа $\varepsilon_j = \pm 1$ а x_j — координаты относительно этого базиса. Теперь можно определить форму объема на L, полагая

$$dm = \sqrt{\prod \varepsilon_j}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \tag{3.14}$$

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2. Тогда мера dm в формуле (3.12) задается равенством (3.13) в случае 1 и равенством (3.14) в случае 2, где знак квадратного корня зависит от выбора знаков якобианов в определении канонического оператора, задающего интегральные ядра операторов T_1 и T_2.*

Доказательство. Чтобы вычислить число Лефшеца $\mathcal{L}$ диаграммы (3.10), как и в [55], воспользуемся универсальной формулой для числа Лефшеца (см.,например, [82] и дальнейшие ссылки в этой работе)

$$\mathcal{L} = \operatorname{Tr}(\widehat{T}_1(1 - \widehat{R}\widehat{D})) - \operatorname{Tr}(\widehat{T}_2(1 - \widehat{D}\widehat{R})),$$

где $\widehat{R}$ — h^{-1}-псевдодифференциальный регуляризатор оператора $\widehat{D}$. Операторы $\widehat{T}_1(1 - \widehat{R}\widehat{D})$ и $\widehat{T}_2(1 - \widehat{D}\widehat{R})$, как и сами операторы $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$, представляют собой интегральные операторы Фурье–Маслова, а значит. их следы записываются в виде быстроосциллирующих интегралов. Вычисление этих быстроосциллирующих интегралов по переменным, трансверсальным многообразию G, с помощью метода стационарной фазы [56], приводит к нужному результату. □

3.3. Интегральные операторы Фурье–Маслова на многообразиях с коническими особенностями

3.3.1. Контактные преобразования

В симплектической и контактной геометрии гладких многообразий хорошо известна связь между контактными и $\mathbb{R}_+$-однородными каноническими преобразованиями. Такая же связь имеется и для преобразований, определенных в косферических и кокасательных расслоениях многообразий с изолированными особенностями. Мы будем использовать исключительно язык $\mathbb{R}_+$-однородных канонических преобразований, т. е. понимать контактные преобразования как однородные канонические.

Пусть M — компактное многообразие с коническими особыми точками $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$. (Соответствующее определение, а также определение кокасательного расслоения многообразия M и псевдодифференциальных операторов в весовых пространствах Соболева на M можно найти в монографиях [96, 100, 101] и др.)

Определение 3.1. *Каноническим преобразованием* пространства T^*M кокаса-

тельного расслоения $T^*M \to M$ называется гладкий диффеоморфизм

$$g : T^*M \to T^*M$$

многообразий с краем, такой что

$$g^*\omega^2 = \omega^2,$$

где ω^2 — симплектическая форма на T^*M.

Напомним, что в конических и цилиндрических координатах в окрестности ∂T^*M она имеет вид

$$\omega^2 = -\frac{dp \wedge dr}{r} + \omega^2_{T^*\Omega} = dp \wedge dt + \omega^2_{T^*\Omega}.$$

(Здесь $\omega^2_{T^*\Omega}$ — стандартная симплектическая структура на кокасательном расслоении $T^*\Omega$ гладкого многообразия $\Omega = \Omega_1 \sqcup \ldots \sqcup \Omega_N$, где Ω_i — базы конусов, соответствующих особым точкам.)

В частности, по определению имеем

$$g(T^*\overset{\circ}{M}) = T^*\overset{\circ}{M} \quad \text{и} \quad g(\partial T^*M) = \partial T^*M,$$

где

$$\overset{\circ}{M} = M \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$$

— внутренность многообразия M. Сформулируем теорему о структуре канонического преобразования вблизи ∂T^*M. В конических координатах (r, ω, p, q) на первом и $(\widetilde{r}, \widetilde{\omega}, \widetilde{p}, \widetilde{q})$ на втором экземпляре T^*M, отображение задается гладкими функциями

$$\begin{aligned} &\widetilde{r} = r\rho(r, \omega, p, q), \;\; \widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}(r, \omega, p, q), \\ &\widetilde{p} = \widetilde{p}(r, \omega, p, q), \quad \widetilde{q} = \widetilde{q}(r, \omega, p, q). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Пусть $\Omega = \Omega_1 \sqcup \ldots \sqcup \Omega_N = \partial\widetilde{M}$ (где многообразие с краем $\widetilde{M}$ — раздутие многообразия M в конических точках). Сужение преобразования g на границу $\partial T^*M \equiv \mathbb{R}^1_p \times T^*\Omega$ задается формулами

$$\begin{aligned} &\widetilde{p} = \widetilde{p}(0, \omega, p, q), \\ &\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}(0, \omega, p, q), \\ &\widetilde{q} = \widetilde{q}(0, \omega, p, q). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Теорема 3.4. (a) *Последние две строки в* (3.16) *задают семейство*

$$g(p) : T^*\Omega \to T^*\Omega$$

симплектоморфизмов многообразия $T^*\Omega$. *Это семейство будет называться конормальным семейством канонического преобразования* g.

(b) *Отображение* $\widetilde{p} = \widetilde{p}(0, \omega, p, q)$ *имеет вид*

$$\widetilde{p} = p + c(\omega, q),$$

где $c(\omega, q)$ — *локально постоянная функция* (*в частности, она постоянна над каждой компонентой связности множества* Ω).

В контактной ситуации добавляется еще требование $\mathbb{R}_+$-однородности преобразования g в слоях T^*M.

Определение 3.2. *Контактным* (или *однородным каноническим*) *преобразованием* называется каноническое преобразование

$$g : T^*M\backslash\{0\} \to T^*M\backslash\{0\}$$

пространства T^*M с выброшенным нулевым сечением $\{0\}$, перестановочное со стандартным действием в слоях мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ положительных чисел.

С учетом однородности теорему 3.4 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3.5. *Сужение* $\widetilde{g}$ *преобразования* g *на край* $\partial T^*M \cong \mathbb{R}^1_p \times T^*\Omega$ *переводит его в* ∂T^*M *и имеет вид*

$$\widetilde{g}(p, \xi) = (p, g_p(\xi)), \quad p \in \mathbb{R}^1, \quad \xi = (\omega, q) \in T^*\Omega, \tag{3.17}$$

где $g_p(\cdot)$ — *однородное* (*с параметром* p) *семейство канонических преобразований пространства* $T^*\Omega$, *т. е.*

$$g_p^*\omega^2_{T^*\Omega} = \omega^2_{T^*\Omega} \quad \textit{при всех} \quad p \in \mathbb{R}, \tag{3.18}$$

$$g_{\lambda p}(\lambda\xi) = \lambda g_p(\xi), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \tag{3.19}$$

где

$$\lambda\xi \equiv \lambda(\omega, q) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega, \lambda q)$$

— стандартное действие группы $\mathbb{R}_+$ *в слоях расслоения* $T^*\Omega$.

Таким образом, преобразование g_p определено при $p \neq 0$ на всем $T^*\Omega$, а при $p = 0$ — на $T^*\Omega\backslash\{0\}$. При больших $|q|$ преобразование g_p асимптотически однородно (p фиксировано):

$$g_p(\lambda\xi) = \lambda g_0(\xi) + O(1), \quad \lambda \to +\infty. \tag{3.20}$$

Предположим временно, что базы Ω_j, $j = 1, \ldots, N$, конусов в особых точках многообразия M связны. Тогда существует такая перестановка

$$\mu : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, N\}$$

на множестве $\{1, \ldots, N\}$, что

$$g(\pi^{-1}(\Omega_j)) = \pi^{-1}(\Omega_{\mu(j)}), \quad j = 1, \ldots N \tag{3.21}$$

и, следовательно,

$$g_p(T^*(\Omega_j)) = T^*\Omega_{\mu(j)}, \quad j = 1, \ldots N. \tag{3.22}$$

Если базы конусов не связны, это утверждение может не иметь места. В этом случае условие (3.21) (и (3.22)) просто постулируется; оно играет важную роль в условиях, накладываемых на носитель ядра Шварца квантованного контактного преобразования — ИОФ, ассоциированного с g.

В последующих пунктах ИОФ, ассоциированный с g, будет определяться в локальных картах с последующей склейкой. При этом будут использоваться специальные локальные координаты на графике

$$L_g = \{(\xi, \widetilde{\xi}) \in T^*M\backslash\{0\} \times T^*M\backslash\{0\} \,|\, \widetilde{\xi} = g(\xi)\}$$

преобразования g (напомним, что $g(\partial T^*M) \subset \partial T^*M$). С учетом сказанного выше, видно, что для любой точки $z \in L_g$ реализуется по крайней мере одна из двух возможностей:

(i) $\pi(z) \in \overset{\circ}{M} \times \overset{\circ}{M}$, где $\pi = (\pi_1, \pi_2) : T^*M\backslash\{0\} \times T^*M\backslash\{0\} \to M \times M$ — естественная проекция. В этом случае на $\overset{\circ}{M}$ существуют координатные окрестности $U_1 \ni \pi_1(z)$ и $U_2 \ni \pi_2(z)$ с координатами $(x_1, \dots, x_n)$ и $(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$, соответственно. При этом $\mathbb{R}_+$-инвариантная окрестность точки z в $(T^*M\backslash\{0\}) \times (T^*M\backslash\{0\})$ покрывается картой со стандартными координатами

$$(x_1, \dots, x_n, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n, q_1, \dots, q_n, \widetilde{q}_1, \dots, \widetilde{q}_n),$$

где $(q_1, \dots, q_n)$ и $(\widetilde{q}_1, \dots, \widetilde{q}_n)$ — канонические координаты в слоях многообразия T^*M, двойственные к $(x_1, \dots, x_n)$ и $(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$, соответственно;

(ii) существует такое $j \in \{1, \dots, N\}$, что точка $\pi(z)$ лежит в произведении $W_j \times W_{\mu(j)}$ конических координатных окрестностей особых точек α_j и $\alpha_{\mu(j)}$. (Так будет, если точка z лежит на или вблизи $\partial T^*M \times \partial T^*M$.) Тогда на Ω_j и $\Omega_{\mu(j)}$ существуют локальные карты с локальными координатами $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ и $\widetilde{\omega} = (\widetilde{\omega}_1, \dots, \widetilde{\omega}_{n-1})$, соответственно, такие, что $\mathbb{R}_+$-инвариантная окрестность точки z в $(T^*M\backslash\{0\}) \times (T^*M\backslash\{0\})$ покрывается картой со стандартными координатами $(r, \omega, \widetilde{r}, \widetilde{\omega}, p, q, \widetilde{p}, \widetilde{q})$, где r и $\widetilde{r}$ — радиальные переменные в соответствующих конических координатных окрестностях, p, $\widetilde{p}$ — импульсные переменные, двойственные к r и $\widetilde{r}$, а q и $\widetilde{q}$ — импульсные переменные (в слоях $T^*\Omega$ и $T^*\Omega_{\mu(j)}$, соответственно), двойственные к ω и $\widetilde{\omega}$.

Далее будет удобно работать в соответствующих *цилиндрических* координатах, так что в окрестности точки z в $(T^*M\backslash\{0\}) \times (T^*M\backslash\{0\})$ эти координаты будут иметь вид

$$(t, \omega, \widetilde{t}, \widetilde{\omega}, p, q, \widetilde{p}, \widetilde{q}), \quad t = -\ln r, \quad \widetilde{t} = -\ln \widetilde{r}. \tag{3.23}$$

Оказывается, что, как и в обычной (гладкой) теории на графике L_g можно выбрать так называемые *канонические координаты*, в которых преобразование g задается с помощью производящих функций. Опишем их. Рассмотрим вначале вариант (i). В этом случае график преобразования g в окрестности точки z

есть (в локальных координатах) график обычного канонического преобразования $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \to \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, так что справедлива хорошо известная "лемма о локальных координатах" (см., напр., [2]). Применительно к каноническим преобразованием она выглядит следующим образом.

Лемма 3.2. *В случае* (i) *существует такое подмножество* $I \subset \{1, \dots, n\}$, *что набор функций* $(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q)$, *где* $\overline{I} = \{1, \dots, n\} \backslash I$, $\widetilde{x}_I = \{\widetilde{x}_j\}_{j \in I}$, $\widetilde{q}_{\overline{I}} = \{\widetilde{q}_j\}_{j \in \overline{I}}$, *образует систему локальных координат на многообразии* L_g *в окрестности точки* z. *При этом каноническое преобразование может быт задано в окрестности точки* $\pi_1(z)$ *неявными формулами*

$$\begin{aligned} x &= \frac{\partial S_I}{\partial q}(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q), \\ \widetilde{q}_I &= \frac{\partial S_I}{\partial \widetilde{x}_I}(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q), \\ \widetilde{x}_{\overline{I}} &= -\frac{\partial S_I}{\partial \widetilde{q}_{\overline{I}}}(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q), \end{aligned} \tag{3.24}$$

где $S_I(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q)$ — *гладкая вещественная функция, называемая производящей функцией преобразования* g *в канонических локальных координатах* $(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q)$.

Замечание 3.1. Производящая функция определена условием (3.24) с точностью до константы. Из того, что $(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q)$ — локальные координаты, вытекает, что

$$\det \frac{\partial^2 S_I}{\partial(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}})\partial q} \neq 0$$

в соответствующих точках. Это обеспечивает разрешимость системы (3.24) (в силу теоремы о неявной функции). Далее, можно переписать (3.24) в виде

$$dS_I = x\, dq - \widetilde{x}_{\overline{I}} d\widetilde{q}_{\overline{I}} + \widetilde{q}_I d\widetilde{x}_I \tag{3.25}$$

(все входящие в эту формулу функции рассматриваются как функции на L_g), так что

$$d(S_I - qx + \widetilde{q}_{\overline{I}}\widetilde{x}_{\overline{I}}) = \widetilde{q} d\widetilde{x} - q\, dx = 0. \tag{3.26}$$

Форма $\widetilde{q}\, d\widetilde{x} - q\, dx$ обращается в 0 на L_g, т.к. это многообразие лагранжево и однородное). Таким образом (с учетом требования однородности)

$$S_I = qx - \widetilde{q}_{\overline{I}}\widetilde{x}_{\overline{I}}$$

на многообразии L_g.

Рассмотрим теперь вариант (ii). В этом случае небольшая модификация рассуждений, используемых в доказательстве леммы 3.2, позволяет вывести следующее утверждение.

Лемма 3.3. *В случае* (ii) *существует такое подмножество* $I \subset \{1, \dots, n-1\}$, *что набор функций*

$$(\widetilde{r}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q)$$

образует систему локальных координат на многообразии L_g *в окрестности точки* z. *Каноническое преобразование может быть задано в окрестности точки* $\pi_1(z)$ *неявными формулами*

$$\begin{aligned} r &= \widetilde{r} \exp\left\{-\frac{\partial \Phi_I}{\partial p}(\widetilde{r}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q)\right\}, \\ \widetilde{p} &= p - \widetilde{r}\frac{\partial \Phi_I}{\widetilde{r}}(\widetilde{r}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q), \qquad (3.27) \\ \widetilde{q}_I &= \frac{\partial \Phi_I}{\partial \omega_I}(\widetilde{r}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q), \qquad (3.28) \\ \widetilde{\omega}_{\overline{I}} &= -\frac{\partial \Phi_I}{\partial q_{\overline{I}}}(\widetilde{r}, \widetilde{\omega}_{\overline{I}}, p, q), \\ \omega &= \frac{\partial \Phi_I}{\partial q}(\widetilde{r}, \widetilde{\omega}, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q), \end{aligned}$$

где $\Phi_I(\widetilde{r}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q)$ — *гладкая вещественная функция.*

Если ввести *производящую функцию* в указанных координатах формулой

$$\overset{\circ}{S}_I\,(\widetilde{r}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q) = -p \ln \widetilde{r} + \Phi_I(\widetilde{r}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q) \qquad (3.29)$$

и перейти к цилиндрическим координатам с помощью замены $r = e^{-t}$, $\widetilde{r} = e^{-\widetilde{t}}$, то через новую производящую функцию

$$S_I(\widetilde{t}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q) = p\widetilde{t} + \Phi_I(e^{-\widetilde{t}}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q) \qquad (3.30)$$

преобразование будет выражаться стандартными формулами

$$t = \frac{\partial S_I}{\partial p}, \quad \widetilde{p}\frac{\partial S_I}{\partial \widetilde{t}}, \quad \omega\frac{\partial S_I}{\partial q}, \quad \widetilde{\omega}_{\overline{I}} = -\frac{\partial S_I}{\partial q_{\overline{I}}}, \quad \widetilde{q}_I = \frac{\partial S_I}{\partial \widetilde{\omega}_I}. \qquad (3.31)$$

Таким образом, если $\pi_1(z) \notin \partial T^*M$ (хотя и находится вблизи ∂T^*M), координаты типа (ii) и соответствующая производящая функция (3.30) могут быть проинтерпретированы как специальная разновидность координат (i).

Поскольку координатные окрестности, описанные в леммах 3.2 и 3.3 могут считаться $\mathbb{R}_+$-инвариантыми, а многообразие $L_g/\mathbb{R}_+$ компактно (напомним, что M предполагается компактным), стандартными рассуждениями приходим к следующему предложению.

Предложение 3.1. *Многообразие L_g может быть покрыто конечным числом $\mathbb{R}_+$-инвариантных канонических карт типов* (i) *и* (ii) *с каноническими координатами и производящими функциями, описанными в леммах* 3.2 *и* 3.3*, соответственно.*

Замечание 3.2. Такие карты будут обозначаться через $U_I^{(1)}$ и $U_I^{(2)}$, соответственно (чтобы не загромождать обозначения, выбор локальных координат на M в них явно не указывается и предполагается, что в покрытии имеется не более одной карты каждого типа с заданным I; если это не так, то, разумеется, надо вводить дополнительные индексы для различения карт одного и того же типа с совпадающими наборами I).

На многообразии T^*M имеется стандартная форма объема

$$\mu_0 = \frac{1}{n!}(\omega^2)^{\wedge n}, \tag{3.32}$$

которая имеет на ∂T^*M особенность: в стандартных конических координатах вблизи края имеем

$$\mu_0 = -\frac{1}{r} dp \wedge dr \wedge \frac{(\omega^2_{T^*\Omega})^{\wedge(n-1)}}{(n-1)!}. \tag{3.33}$$

В цилиндрических координатах, разумеется, форма μ_0 приобретает стандартный вид

$$\mu_0 = dp \wedge dt \wedge \frac{(\omega^2_{T^*\Omega})^{\wedge(n-1)}}{(n-1)!}, \tag{3.34}$$

соответствующий представлению цилиндра как произведения $(0,\infty) \times \Omega$.

Плотность формы μ_0 в канонических локальных координатах играет важную роль в конструкции ИОФ; она будет обозначаться через $\mu_I^{(1)}$ или $\mu_I^{(2)}$, в

зависимости от типа карты. Таким образом,

$$\mu_0 = \mu_I^{(1)} d\widetilde{x}_I \wedge d\widetilde{q}_{\overline{I}} \wedge dq \tag{3.35}$$

в карте $U_I^{(1)}$ и

$$\mu_0 = \mu_I^{(2)} d\widetilde{t} \wedge d\widetilde{\omega}_I \wedge d\widetilde{q}_{\overline{I}} \wedge dp \wedge dq \tag{3.36}$$

в карте $U_I^{(2)}$. В формулах (3.35) и (3.36) мы пользуемся сокращенными обозначениями: через dq обозначаем форму $dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_n$, а в произведении, например, $d\widetilde{x}_I \wedge d\widetilde{q}_{\overline{I}}$ сомножители упорядочены таким образом, что индексы идут по возрастанию (например, если $I = \{1, 3\}$, а $\overline{I} = \{2\}$, то $d\widetilde{x}_I \wedge d\widetilde{q}_{\overline{I}} = d\widetilde{x}_1 \wedge d\widetilde{q}_2 \wedge d\widetilde{x}_3$).

3.3.2. Квантованные контактные преобразования

В теории интегральных операторов Фурье (ИОФ) на гладких многообразиях (см., напр., [26, 41, 61, 62, 79] и др.) выделенную роль играют интегральные операторы Фурье, ассоциированные с контактными (=однородными каноническими) преобразованиями, т. е. такие ИОФ, у которых ассоциированное (однородное) лагранжево многообразие в $T^*(M_1 \times M_2)\backslash\{0\}$ представляет собой график некоторого однородного канонического преобразования

$$g : T^*M_1\backslash\{0\} \to T^*M_2\backslash\{0\}.$$

Именно, такие ИОФ обладают свойством непрерывности во всей шкале Соболева, причем порядок оператора совпадает с порядком его символа как однородной функции; они могут быть эллиптическими (если символ не обращается в 0 вне нулевого сечения), и для таких операторов Вайнстейн [108] поставил, а Эпштейн и Мельроуз [80], а затем Лейштнам, Нест и Циган [91] решили *проблему индекса*. Нас интересует проблема Вайнстейна в контексте многообразий с особенностями, поэтому мы с самого начала будем заниматься только интегральными операторами Фурье, ассоциированными с контактными преобразованиями, для конфигурационных пространств, имеющих (конические) особенности. При этом, всюду далее, если специально не оговорено противное, под контактным преобразованием понимается каноническое преобразование, однородное относительно стандартного действия мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ положитель-

ных чисел в слоях кокасательного расслоения с выброшенным нулевым сечением. Переформулировка в терминах косферического расслоения не представляет трудностей.

Перейдем теперь к построению *квантованных* контактных преобразований. Как и для случая ПДО, начнем с локальных моделей.

Локальные модели ИОФ. ИОФ будем определять как интегральные операторы с ядрами специального класса, ассоциированного с многообразием L_g — графиком соответствующего контактного преобразования. С точностью до компактных операторов с гладким ядром ИОФ есть оператор, ядро которого имеет носитель в произвольно малой окрестности проекции многообразия L_g на $M \times M$. Таким образом, достаточно описать структуру ядра в окрестности проекции $\pi(z)$ произвольной точки $z \in L_g$. По леммам 3.2 и 3.3 и предложению 3.1, точка z лежит в одной из канонических карт $U_I^{(1)}$ или $U_I^{(2)}$. Рассмотрим эти два случая отдельно. Чтобы не утяжелять изложения, считаем, что на многообразии M задана некоторая гладкая мера (форма объема) $d\rho$, которая в рассматриваемых цилиндрических и конических системах координат вблизи особых точек имеет вид

$$d\rho = dt \wedge d\omega = -\frac{dr}{r} \wedge d\omega,$$

где $d\omega$ — некоторая форма объема на базе Ω.

Тогда ядра рассматриваемых нами операторов можно считать функциями (вообще говоря, обобщенными) на $M \times M$.

Локальная модель ИОФ во внутренней части многообразия. Пусть $z \in U_I^{(1)}$. Тогда в координатах $(x_1, \dots, x_n, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n) = (x, \widetilde{x})$ на $M \times M$ в окрестности точки $\pi(z)$ ядро $K(x, \widetilde{x})$ может быть задано с точностью до сколь угодно гладких функций формулой

$$\begin{aligned} K(x,\widetilde{x}) \;=\; & \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{n+|\overline{I}|)/2} \int \exp\left\{i[-qx + \widetilde{q}_{\overline{I}}\widetilde{x}_{\overline{I}} + S_I(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q)]\right\} \\ & \times a_I(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q)\sqrt{\mu_I(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q)}\, d\widetilde{q}_{\overline{I}}\, dq, \end{aligned} \tag{3.37}$$

где $|\overline{I}|$ — число элементов во множестве $\overline{I}$, ветвь корня $\sqrt{\mu_I(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q)}$ из плотности меры некоторым образом фиксируется, а $a_I(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q)$ — гладкая асимптотически $\mathbb{R}_+$-однородная функция некоторой степени m от переменных $(\widetilde{q}_{\overline{I}}, q)$, с носителем в канонической карте называется *амплитудой* конструируемого нами ИОФ в карте $U_I^{(1)}$. Асимптотическая однородность означает, что функция $a_I(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q)$ при больших $|\widetilde{q}_{\overline{I}}|^2 + |q|^2$ разлагается в асимптотический ряд

$$a_I(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_I^{(j)}(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q),$$

где $a_I^{(j)}(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q)$ — однородные функции степени $m - j$:

$$a_I^{(j)}(\widetilde{x}_I, \lambda\widetilde{q}_{\overline{I}}, \lambda q) = \lambda^{m-j} a_I^{(j)}(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q),$$

а разность между $a_I(\widetilde{x}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, q)$ и суммой первых k членов ряда, $k = 1, 2, \ldots$ есть $O((|\widetilde{q}_{\overline{I}}|^2 + |q|^2)^{m-j/2})$ вместе со всеми производными при $|\widetilde{q}_{\overline{I}}|^2 + |q|^2 \to \infty$. При этом интеграл (3.37) понимается как осциллирующий интеграл (см., напр., [63]).

Описанная выше конструкция совпадает с конструкцией, используемой в теории интегральных операторов Фурье на гладких многообразиях; подробности можно найти, например, в [41, 47].

Локальная модель ИОФ вблизи особых точек. Пусть $z \in U_I^{(1)}$. Тогда в соответствующих цилиндрических координатах $(\omega, t, \widetilde{\omega}, \widetilde{t})$ вблизи $\pi(z) \in M \times M$ локальное выражение ядра $K(\omega, t, \widetilde{\omega}, \widetilde{t})$ с точностью до слагаемых вида $e^{-\alpha\widetilde{t}} f(\omega, t, \widetilde{\omega}, \widetilde{t})$, где f — сколь угодно гладкая функция, ограниченная вместе со всеми производными, имеет вид

$$\begin{aligned} K(\omega, t, \widetilde{\omega}, \widetilde{t}) \;=\; & \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{n+|\overline{I}|)/2} \int \exp\left\{i[-pt - q\omega + \widetilde{q}_{\overline{I}}\widetilde{\omega}_{\overline{I}} + S_I(\widetilde{t}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_I, p, q)]\right\} \\ & \times a_I(e^{-\widetilde{t}}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q)\sqrt{\mu_I(e^{-\widetilde{t}}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q)}\, d\widetilde{q}_{\overline{I}}\, dq\, dp. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Элементы этой формулы имеют смысл, аналогичный соответствующим элементам формулы (3.37), но при этом амплитуда, плотность меры и производящая функция (действие) специальным образом зависят от переменной t. Именно,

амплитуда, плотность меры и функция $S_I - p\widetilde{t}$ являются гладкими функциями от переменной $\widetilde{r} = e^{-\widetilde{t}}$.

Замечание 3.3. Заметим, что, если амплитуда равна 0 при $\widetilde{t} > T_0$ для некоторого конечного T_0, то формула (3.38) является частным случаем формулы (3.37) в специально выбранных координатах.

Глобальное определение ИОФ. Глобализуем теперь приведенные в предыдущем пункте локальные определения.

Прежде всего, сравним между собой два локальных ИОФ, построенные по двум разным каноническим картам в окрестности одной и той же точки $z \in L_g$, в предположении, что носители амплитуд лежат в пересечении карт. Так же как и в обычной теории ИОФ, это можно сделать с помощью метода стационарной фазы. Мы сформулируем только результат, отсылая читателя за подробностями к [41, 47].

Теорема 3.6. *Пусть $U_I^{(i)}$ и $U_J^{(j)}$ — две канонические карты на L_g с непустым пересечением $U_I^{(i)} \cap U_J^{(j)}$, и пусть $T_{I,(i)}(a)$, $T_{J,(j)}(b)$ — интегральные операторы с ядрами, задаваемыми соответствующими формулами (3.37) и (3.38) для этих карт, и амплитудными функциями a и b, соответственно. Существует линейный оператор V на пространстве асимптотически однородных функций с носителями в $U_I^{(i)}$ и $U_J^{(j)}$, такой, что*

$$T_{I,(i)}(a) = T_{J,(j)}(Va) \tag{3.39}$$

для любой амплитуды, с точностью до компактных операторов с гладким ядром. Оператор V является асимптотически дифференциальным, и его главный (по $\mathbb{R}_+$-однородности) член равен ± 1, в зависимости от выбора ветвей квадратного корня в локальных формулах (3.38) и (3.37).

Если многообразие

$$\overset{\circ}{\mathcal{L}}_g = \operatorname{Int} \mathcal{L}_g \subset (T^* \overset{\circ}{M} \setminus \{0\}) \times (T^* \overset{\circ}{M} \setminus \{0\})$$

удовлетворяет *условию квантования* (см., например, [41]), то ветви квадратных корней во всех картах можно выбрать таким образом, чтобы главный член

оператора V для любой пары карт был равен 1. Используя разбиение единицы, отвечающее каноническому атласу, для любого символа a — однородной функции степени m на L_g — можно определить, с точностью до операторов меньшего порядка, оператор $T(a)$ по формуле

$$T(a) = \sum_{i,I} T_{I,(i)}(e_{i,I}a),$$

где $\{e_{i,I}\}$ — упомянутое разбиение единицы. Полученный таким образом оператор будет непрерывным в пространствах

$$T(a) : H^{s,0}(M) \to H^{s-m,0}(M)$$

для любого s и не зависит от выбора разбиения единицы в точностью до операторов меньшего порядка в шкале $H^{s,0}(M)$.

Определение ИОФ при ненулевых значениях весового показателя γ. Определения предыдущих пунктов пригодны в шкале пространств Соболева $H^{s,\gamma}(M)$ с нулевым значением весового показателя ($\gamma = 0$). При $\gamma \neq 0$ эти определения должны быть модифицированы. Укажем соответствующие модификации. Они сводятся к тому, что в формуле (3.38) интеграл по переменной p берется не по вещественной оси, а по весовой прямой $\mathcal{L}_\gamma = \{\operatorname{Im} p = \gamma\}$. Таким образом, действие $S_I(\widetilde{t}, \widetilde{\omega}, \widetilde{q_{\overline{I}}}, q, p)$, амплитуда $a_I(\widetilde{t}, \widetilde{\omega}, \widetilde{q_{\overline{I}}}, q, p)$ и плотность меры $\mu_I(\widetilde{t}, \widetilde{\omega}, \widetilde{q_{\overline{I}}}, q, p)$ должны быть определены на весовой прямой $\mathcal{L}_\gamma$. Действуя аналогично тому, как это было в теории ПДО, можно было было бы изучать "ИОФ с параметром p" на Ω и определять ИОФ вблизи конической точки в соответствующих терминах. К сожалению, эта теория, в отличии от теории ПДО с параметром, совершенно не развита. Поэтому мы примем альтернативный подход (который, однако, несколько сужает множество рассматриваемых ИОФ). Именно, требуется, чтобы действие, амплитуда и плотность меры были аналитическими функциями параметра p. Чтобы добиться этого, в формуле (3.38) заменяем S_I, a_I и μ_I их свертками (по переменной p) с преобразованием Фурье некоторой функции φ с компактным носителем, такой, что

$$\int \varphi(\eta)\, d\eta = 1.$$

Новые функции S_I, a_I и μ_I (которые обозначим теми же буквами) имеют в главном члене ту же асимптотику при $\mathrm{Re}\ p \to \infty$, что и исходные функции при $p \to \infty$ на вещественной оси, но в результате построенный интегральный оператор Фурье отличается от первоначального в шкале $H^{s,0}(M)$ на оператор меньшего порядка. В то же время новый оператор является непрерывным в шкале $H^{s,\gamma}(M)$ для любого γ.

Всюду далее через $T(g,a)$ будем обозначать ИОФ, соответствующий контактному преобразованию g и амплитуде a некоторого порядка m на графике L_g. Поскольку L_g диффеоморфно проектируется на первый сомножитель в $(T^*M\backslash\{0\}) \times (T^*M\backslash\{0\})$, можно считать (и это всегда будет делаться впоследствии), что a есть однородная функция порядка m на $(T^*M\backslash\{0\})$. Она называется *главным символом* ИОФ $T(g,a)$.

Сопряженный оператор и формула для T^*T. Скалярное произведение в $L^2(M) = H^{0,0}(M)$ индуцирует невырожденное спаривание

$$H^{s,\gamma}(M) \times H^{-s,-\gamma}(M) \to \mathbf{C}$$

для любых s и γ. Если $T(g,a)$ — ИОФ на M, то через $T^*(g,a)$ будем обозначать оператор, сопряженный к $T(g,a)$ относительно этого спаривания. Более точно, пусть при любом s

$$T_\gamma(g,a) : H^{s,\gamma}(M) \to H^{s-m,\gamma}(M)$$

— оператор $T(g,a)$, действующий в шкале $H^{s,\gamma}(M)_{s\in\mathbb{R}}$ весовых пространств Соболева на M [100]. Сопряженный оператор $T^*_\gamma(g,a)$ действует тогда в шкале $H^{s,-\gamma}(M)_{s\in\mathbb{R}}$:

$$T^*_\gamma(g,a) : H^{s',-\gamma}(M) \to H^{s'-m,-\gamma}(M). \tag{3.40}$$

(Локально его можно представить в виде, аналогичном (3.37) и (3.38).)

Таким образом, корректно определены произведения

$$T^*_{-\gamma}(g,a)T_\gamma(g,a), \quad T_\gamma(g,a)T^*_{-\gamma}(g,a) : H^{s,\gamma}(M) \to H^{s-2m,\gamma}(M), \tag{3.41}$$

которые ниже для краткости будут обозначаться просто через $T^*(g,a)T(g,a)$ и $T(g,a) \times T^*(g,a)$.

Теорема 3.7. *Оператор $T^*(g,a)T(g,a)$ является ПДО порядка $2m$ на многообразии M с коническими особенностями. Его главный символ равен $|a|^2$. Аналогичная теорема верна и для оператора $T(g,a)T^*(g,a)$. Его главный символ равен $g^*(|a|^2)$.*

Доказательство. Эта теорема хорошо известна для ИОФ на гладких компактных многообразиях (см., например, [41, 47]). Учитывая, что ИОФ $T = T(g,a)$ представляет собой конечную сумму вида

$$T = \sum T_j,$$

где T_j есть "локальные" операторы с ядрами, задаваемыми формулами (3.37) и (3.38), имеем

$$T^*T = \sum T_j^* T_k.$$

В том случае, когда оба оператора T_j^* и T_k соответствуют картам типа (i) (внутренняя часть многообразия), псевдодифференциальность произведения $T_j^*T_k$ и утверждение относительно символа следуют из известных результатов для гладких многообразий. Нетрудно понять, что $T_j^*T_k$ представляет собой оператор с гладким ядром, если проекции составляющих карт на $M \times M$ не пересекаются. Если одна из карт, скажем, j-ая, есть карта типа (i), а другая — типа (ii), то, используя разбиение единицы, можно разбить оператор T_k на слагаемые, у одного из которых сингулярный носитель не пересекается с проекцией j-ой карты, другое может быть представлено в виде оператора, соответствующего карте типа (i). Таким образом, достаточно рассмотреть произведение $T_j^*T_k$ в том случае, когда обе соответствующие карты принадлежат к типу (ii). Для простоты рассмотрим лишь случай $j = k$ и будем предполагать, что соответствующая каноническая карта — неособая ($\overline{I} = 0$).

Тогда (индекс j, начиная с этого места, опускается) в цилиндрических координатах имеем

$$T\psi(\widetilde{t},\widetilde{\omega}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int \exp\left\{iS(\widetilde{t},\widetilde{\omega},p,q)\right\} b(e^{-\widetilde{t}}\widetilde{\omega},p,q)\widetilde{\psi}(p,q)\,dp\,dq, \qquad (3.42)$$

где $\widetilde{\psi}(p,q)$ — преобразование Фурье–Лапласа функции $\psi(t,\omega)$,

$$\begin{aligned} S(\widetilde{t},\widetilde{\omega},p,q) &= p\widetilde{t}+\Phi(e^{-\widetilde{t}},\omega,p,q), \\ b(\widetilde{r},\widetilde{\omega},p,q) &= a(\widetilde{r},\widetilde{\omega},p,q)\sqrt{\mu(\widetilde{r},\widetilde{\omega},p,q)}, \end{aligned}$$

а интеграл по переменной p вычисляется по соответствующей весовой прямой $\mathcal{L}_\gamma$.

Сопряженный оператор действует по формуле

$$T^*\psi(\widetilde{t},\widetilde{\omega}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{2n} \int \exp\left\{i[\widetilde{p}(\widetilde{t}-t)+q(\widetilde{\omega}-\omega)+S(t,\omega,p,q)]\right\}\psi(t,\omega)\,dt\,d\omega, \tag{3.43}$$

где вновь интегрирование по p выполняется по весовой прямой $\mathcal{L}_\gamma$. Вычисление оператора T^*T может быть выполнено с помощью метода стационарной фазы, как в [41], в результате чего получаем, что T^*T — псевдодифференциальный оператор. □

3.3.3. Эллиптичность и фредгольмовость

Конормальный символ оператора $T(g,a)$. Непосредственным вычислением проверяется, что конормальный символ оператора с ядром вида (3.38) имеет вид операторов семейства $B(p)$ с ядром

$$\begin{aligned} B(p,\omega,\widetilde{\omega}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{(n-1+|I|/2} &\int \exp\left\{-iq\omega+i\widetilde{q}_{\overline{I}}\widetilde{\omega}_{\overline{I}}+\Phi_I(0,\widetilde{\omega}_I,\widetilde{q}_{\overline{I}},p,q)\right\} \\ &\times a_I(0,\widetilde{\omega}_I,\widetilde{q}_{\overline{I}},p,q)\sqrt{\mu_I(0,\widetilde{\omega}_I,q_{\overline{I}},p,q)}\,dq_{\overline{I}}dq. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Конормальный символ $\sigma_c(T(g,a))(p)$ оператора $T(g,a)$ содержит конечное число слагаемых с ядрами вида (3.44); эти слагаемые отвечают каноническим картам на L_g вблизи $\partial T^*M\times\partial T^*M$, т. е. картам типа (ii). Таким образом, конормальный символ

$$\sigma_c(T(g,a))(p)\equiv\sigma_c(T)(p),$$

который в дальнейшем для краткости будет обозначаться просто через $T_0(p)$, представляет собой ИОФ с параметром p, соответствующий конормальному семейству $g(p)$ преобразования g.

Установим некоторые свойства конормального символа.

Пусть $T_0^*(p)$ — конормальный символ оператора $T^* \equiv T^*(g,a)$. Тогда, очевидно,

$$T_0^*(p) = (T_0(\overline{p}))^*, \tag{3.45}$$

где черта над p означает комплексное сопряжение, а сопряженный оператор в правой части понимается в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$, задающего двойственность между $H^s(\Omega)$ и $H^{-s}(\Omega)$ для любого s. Поскольку произведение конормальных символов двух операторов равно конормальному символу их произведения, заключаем, что

$$D_1(p) = T_0^*(p)T_0(p) \quad D_2(p) = T_0(p)T_0^*(p) \tag{3.46}$$

суть семейства ПДО с параметром p на многообразии Ω, причем главные символы этих ПДО имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma(D_1(p)) &= \widetilde{a}(p)\widetilde{a}^*(\overline{p}), \\ \sigma(D_2(p)) &= \widetilde{b}(p)\widetilde{b}^*(\overline{p}), \end{aligned}$$

где $\widetilde{a} = a|_{\partial T^*M}$, $\widetilde{b} = (g^*a)|_{\partial T^*M}$.

Определение 3.3. Оператор $T = T(g,a)$ называется *формально эллиптическим*, если его главный символ a эллиптичен (т. е. не обращается в 0 на ∂T^*M).

Теорема 3.8. *Пусть T — формально эллиптический ИОФ на многообразии M с коническими особенностями. Тогда конормальный символ $T_0(p)$ конечномероморфно обратим в некоторой полосе $\{|\operatorname{Im} p| < R\}$, $R > 0$.*

Доказательство. В предположениях теоремы операторы (3.46) являются эллиптическими по Аграновичу–Вишику ПДО с параметром p в некоторой полосе указанного вида, и потому конечномероморфно обратимы. Положим

$$\begin{aligned} R_1(p) &= D_1(p)^{-1}T_0^*(p), \\ R_2(p) &= T_0^*(p)D_2(p)^{-1}. \end{aligned}$$

Это конечномероморфные семейства, причем

$$R_1(p)T_0(p) = T_0(p)R_2(p) = 1$$

всюду вне полюсов этих семейств. Отсюда вытекает, что $R_1(p) = R_2(p) = T_0(p)^{-1}$ (двусторонний обратный) и, в частности, $T_0(p)$ — конечномероморфно обратимое семейство. □

Условие фредгольмовости.

Определение 3.4. Оператор $T(g,a)$ называется *эллиптическим* в шкале пространств Соболева $H^{s,\gamma}(M)$ с заданным весовым показателем γ, если он формально эллиптичен и конормальный символ $T_0(p)$ обратим на весовой прямой $\mathcal{L}_\gamma = \{\operatorname{Im} p = \gamma\}$.

Теорема 3.9. *Предположим, что оператор $T(g,a)$ эллиптичен в шкале пространств $H^{s,\gamma}(M)$. Тогда он фредгольмов в любой паре пространств*

$$T(g,a):\ H^{s,\gamma}(M) \to H^{s-m,\gamma}(M),$$

где $m = \operatorname{ord} T(g,a)$ — порядок оператора $T(g,a)$.

Доказательство. Как и выше, обозначим оператор $T(g,a)$ для краткости через T, а его конормальный символ — через $T_0(p)$.

Предположим сначала, что на *объединении* $\mathcal{L}_\gamma \cup \mathcal{L}_{-\gamma}$ двух весовых прямых нет полюсов семейства $T_0(p)^{-1}$. Тогда операторы

$$\widehat{D}_1 = T^*T \quad \text{и} \quad \widehat{D}_2 = TT^*$$

является эллиптическими в шкале $H^{s,\gamma}(M)$ (действительно, их конормальные символы задаются формулами (3.46) и надо еще принять во внимание (3.45)). Пусть $\widehat{R}_1$ и $\widehat{R}_2$ — соответствующие почти обратные операторы. Тогда $\widehat{R}_1 T^*$ и $T^*\widehat{R}_2$ будут, соответственно, левым и правым регуляризаторами для T. Таким образом, оператор T фредгольмов. Если указанное выше условие не выполнено, то в предыдущих рассуждениях достаточно заменить $T^* = T^*_\gamma$ на $e^{-\gamma' t}T^*e^{\gamma' t}$ с произвольным γ', для которого на прямой $\operatorname{Im} p = \gamma - \gamma'$ нет полюсов семейства $T_0(p)^{-1}$. При этом операторы T^*T и TT^* по-прежнему будут псевдодифференциальными, и дальнейшее доказательство проходит без каких-либо изменений. □

3.4. Принцип локальности относительного индекса

Приведем здесь нужные для доказательства теоремы об индексе в следующем разделе определения и результаты, касающиеся принципа локальности относительного индекса ([48], см. также [97]). Все приводимые в этом разделе утверждения доказаны в указанных работах.

Определение 3.5. (a) *Пространством с перешейком* называется сепарабельное гильбертово пространство H, снабженное структурой модуля над коммутативной топологической алгеброй $C^\infty([-1,1])$ (действие непрерывно, единичная функция $\mathbf{1} \in C^\infty([-1,1])$ действует на H как тождественный оператор).

(b) *Носителем* элемента $h \in H$ называется замкнутое множество

$$\operatorname{supp} h = \bigcap \varphi^{-1}(0) \subset [-1,1], \tag{3.47}$$

где $\varphi^{-1}(0)$ — полный прообраз точки 0, а пересечение берется по всем таким элементам $\varphi \in C^\infty([-1,1])$, что $\varphi h = 0$. Для произвольного подмножества $F \subset [-1,1]$ через $H(F)$ будет обозначаться замыкание в H множества всех элементов $h \in H$ с носителем в F.

Поскольку в $C^\infty([-1,1])$ существует разбиение единицы, подчиненное любому локально конечному открытому покрытию, введенное таким образом понятие носителя обладает естественными свойствами. В частности, если $F_1, F_2 \subset [-1,1]$ — такие подмножества, что $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 = \varnothing$, то $H(F_1 \cup F_2) = H(F_1) \oplus H(F_2)$ (сумма прямая, но не обязательно ортогональная).

Определение 3.6. Пусть H_1, H_2 — пространства с перешейками, а $F \subset [-1,1]$ — заданное подмножество. Мы говорим, что H_1 *совпадает* на F с H_2, и пишем $H_1 \overset{F}{=} H_2$, если задан изоморфизм (не обязательно изометрический) $H_1(F) \approx H_2(F)$. В этом случае мы также говорим, что H_1 и H_2 являются *модификациями* друг друга на $[-1,1]\backslash F$, и пишем $H_1 \overset{[-1,1]\backslash F}{\longleftrightarrow} H_2$. Квадрат модификаций

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \overset{B}{\longleftrightarrow} & H_2 \\ {\scriptstyle A}\updownarrow & & \updownarrow{\scriptstyle C} \\ H_3 & \overset{D}{\longleftrightarrow} & H_4 \end{array}$$

будем называть *коммутативным*, если коммутативна соответствующая диаграмма изоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} H_1(F) & \approx & H_2(F) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ H_3(F) & \approx & H_4(F) \end{array} \qquad F = [-1,1] \setminus (A \cup B \cup C \cup D).$$

Следующее определение формализует в контексте пространств с перешейком понятие оператора, который может быть прогомотопирован к оператору, ядро Шварца которого сосредоточено в произвольно узкой окрестности диагонали.

Определение 3.7. (a) *Правильным оператором* в пространствах с перешейком H, G называется непрерывное (в равномерной операторной топологии) семейство ограниченных линейных операторов

$$D_\delta \colon H \to G, \qquad \delta > 0, \tag{3.48}$$

удовлетворяющее следующему условию: для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$, такое что

$$\operatorname{supp} D_\delta h \subset U_\varepsilon(\operatorname{supp} h) \qquad \forall h \in H \tag{3.49}$$

при любом $\delta < \delta_0$. Здесь $U_\varepsilon(F)$ есть ε-окрестность множества F.

(b) *Эллиптическим оператором* в пространствах с перешейком H, G называется правильный оператор (3.48), такой, что D_δ фредгольмов при каждом δ и имеет почти обратный $D_\delta^{[-1]}$, такой что семейство $D_\delta^{[-1]}$ — правильный оператор.

Теорема 3.10 ([48, Теорема 1.11])**.** *Пусть имеет место следующая коммутативная диаграмма модификаций эллиптических операторов в пространствах с перешейком*:

$$\begin{array}{ccc} D & \overset{\{-1\}}{\longleftrightarrow} & D_- \\ {\scriptstyle\{1\}}\updownarrow & & \updownarrow{\scriptstyle\{1\}} \\ D_+ & \overset{\{-1\}}{\longleftrightarrow} & D_{+-} \end{array}$$

Тогда

$$\operatorname{ind}(D) - \operatorname{ind}(D_-) = \operatorname{ind}(D_+) - \operatorname{ind}(D_{+-}).$$

3.5. Формула индекса для квантованных контактных преобразований на многообразиях с коническими особенностями

3.5.1. Формула относительного индекса

Анализ проблемы индекса начнем с того, что установим *формулу относительного индекса* для ИОФ. В дальнейшем, в сочетании с условиями симметрии и перестройками с переходом на дубль, это даст требуемую формулу индекса в общем случае.

Пусть $T = T(g, a)$ — формально эллиптический ИОФ на M с конормальным символом $\sigma_c(T) = T_0(p)$, и пусть $\gamma_1 < \gamma_2$ — такие весовые показатели, что на весовых прямых $\mathcal{L}_{\gamma_1}$ и $\mathcal{L}_{\gamma_2}$ нет полюсов семейства $T_0(p)^{-1}$. Тогда операторы

$$T_{\gamma_i} : H^{s,\gamma_i}(H) \to H^{s-m,\gamma_i}(H),$$

индуцированные в соответствующих шкалах весовых пространств Соболева оператором T, эллиптичны и, по теореме 3.9, фредгольмовы. При этих условиях справедлива следующая теорема.

Теорема 3.11 (формула относительного индекса)**.**

$$\operatorname{ind} T_{\gamma_2} - \operatorname{ind} T_{\gamma_1} = - \sum_{\gamma_1 < \operatorname{Im} p_j < \gamma_2} m_j, \tag{3.50}$$

где числа m_j — кратности полюсов семейства $T_0(p)^{-1}$.

Доказательство. Обозначим через $T^{(\varepsilon)}$ оператор вида

$$T^{(\varepsilon)} = f_\varepsilon^{-1} T f_\varepsilon, \tag{3.51}$$

где f_ε — не обращающаяся в нуль гладкая функция на $\overset{\circ}{M}$, такая, что

$$f_\varepsilon = e^{-\varepsilon t}$$

в цилиндрических координатах вблизи особых точек. Тогда $T^{(\varepsilon)}$ — ИОФ, отвечающий тому же преобразованию g и с тем же символом a, но с другим

конормальным символом:

$$T_0^{(\varepsilon)}(p) \equiv \sigma_c(T^{(\varepsilon)}(p)) = T_0(p + i\varepsilon). \tag{3.52}$$

Докажем сначала утверждение теоремы для частного случая, когда $\gamma_2 = -\gamma_1 = \gamma$, а на весовой прямой $\mathcal{L}_0 = \{\operatorname{Im} p = 0\}$ также нет полюсов семейства $T_0^{-1}(p)$.

Рассмотрим формально эллиптический оператор

$$\widehat{D} = T_0^* T_0.$$

Согласно сказанному выше,

$$\sigma_c(\widehat{D})(p) = T_0(\overline{p})^* T_0(p) \tag{3.53}$$

(сопряжение в $L^2(m)$), и, поскольку семейство $T_0(p)$ обратимо на прямых $\mathcal{L}_\gamma$, $\mathcal{L}_{-\gamma}$ и $\mathcal{L}_0$, оператор $\widehat{D}$ эллиптичен в $H^{s,\gamma}(M)$ и $H^{s,0}(M)$. По формуле относительного индекса для ПДО получаем

$$\operatorname{ind} \widehat{D}_\gamma - \operatorname{ind} \widehat{D}_0 = \sum_j \widetilde{m}_j,$$

где $\widetilde{m}_j$ — кратность полюсов семейства (3.53) в полосе $0 < \operatorname{Im} p < \gamma$. Таковыми полюсами являются:

a) полюса p_j семейства $T_0^{-1}(p)$ в указанной полосе;

b) полюса $\widetilde{p}_j$ семейства $T_0(\overline{p})^*$ в той же полосе или, эквивалентно, полюса семейства $T_0(p)$ в полосе $-\gamma < \operatorname{Im} p < 0$.

Учитывая, что кратность полюса произведения в данной точке равна сумме кратностей полюсов сомножителей в тех же точках, получаем

$$\operatorname{ind} \widehat{D}_\gamma - \operatorname{ind} \widehat{D}_0 = \sum_{|\operatorname{Im} p_j| < \gamma} m_j,$$

где числа m_j — кратности полюсов семейства $T_0^{-1}(p)$. С другой стороны, оператор $\widehat{D}_0$ самосопряжен (в $L^2 = H^{0,0}(M)$), и его индекс равен нулю, а

$$\widehat{D}_\gamma = (T_{-\gamma})^* T_\gamma,$$

так что

$$\operatorname{ind} \widehat{D}_\gamma = \operatorname{ind} T_\gamma - \operatorname{ind} T_{-\gamma}.$$

Таким образом, в указанном частном случае теорема доказана.

Рассмотрим теперь общий случай. Малым изменением γ_1 и γ_2 (что не меняет $\operatorname{ind} T_{\gamma_1}$ и $\operatorname{ind} T_{\gamma_2}$) можно добиться того, чтобы на весовой прямой $\mathcal{L}_{\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}}$ не было полюсов семейства $T_0(p)$. Переход от оператора T к оператору $T^{\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right)}$ сводит общий случай к доказанному выше частному случаю. Доказательство теоремы закончено. □

Замечание 3.4. Формула (3.50) по внешнему виду в точности совпадает с соответствующей формулой для псевдодифференциальных операторов. Это обстоятельство, разумеется, не случайно. Оно позволяет вернуться к исходной формуле относительного индекса для ПДО в том случае, когда g — тождественное преобразование.

Перейдем теперь к получению формул индекса для ИОФ с дополнительными условиями симметрии.

3.5.2. Условия симметрии и склейка

В данном пункте мы применим стандартную технику для того, чтобы продолжить эллиптический ИОФ $T(g, a)$ на дубль $2M$ и, используя принцип локальности индекса, получить, в дополнение к установленному выше условию симметрии, второе уравнение, так что из полученной системы можно будет найти $\operatorname{ind} T(g, a)$ в терминах оператора на дубле $2M$ и вклада полюсов конормального семейства. Разумеется, это будет возможно лишь при выполнении некоторых условий симметрии.

ИОФ как операторы в пространствах с перешейком. Прежде всего покажем, что эллиптические ИОФ на многообразии M с коническими особенностями, всегда могут рассматриваться как эллиптические операторы в пространствах с перешейком некоторого специального вида.

Именно, рассмотрим многообразие M как многообразие с цилиндрическим концом и наделим $H^{s,\gamma}(M)$ структурой пространств с перешейками в соответствии со стандартной конструкцией: действие функции $\varphi \in C^\infty([-1,1])$ на элемент $u(x) \in H^{s,\gamma}(M)$ сводится к умножению на функцию $\varphi(\chi(x))$:

$$[\varphi - u](x) = \varphi(\chi(x))\, u(x),$$

где $\chi(x)$ — гладкая функция, возрастающая от -1 до 1 в перешейке и постоянная вне перешейка.

Пусть $T = T(g, a)$ — эллиптический ИОФ на M. Покажем, что его можно включить в непрерывное семейство $T(\delta)$ операторов такое, что

(i) $\{T(\delta)\}$ — правильный оператор в $H^{s,\gamma}(M)$ при любом γ;

(ii) $\{T_\gamma(\delta)\}$ эллиптический при всех γ таких, что T_γ фредгольмов.

Выполнение условия (ii) гарантируется тем, что при гомотопиях не будет меняться конормальный символ:

$$\sigma_c(T(\delta)) \equiv \sigma_c(T),$$

а амплитуда будет гомотопироваться непрерывно в классе эллиптических символов.

Отметим при этом, что рассматриваемые гомотопии затронут все элементы, входящие в конструкцию оператора T, в частности, и само преобразование g.

Прежде всего, покажем, что преобразование g можно прогомотопировать к новому преобразованию, которое будет перестановочно со сдвигами по переменной t достаточно далеко (в окрестности бесконечности) на цилиндрическом конце.

Лемма 3.4. *Существует непрерывная гомотопия*

$$g_t : T^*M\backslash\{0\} \to T^*M\backslash\{0\}$$

в классе однородных канонических преобразований, такая, что $g_1 = g$, а g_0 коммутирует с оператором сдвига по t при достаточно больших t на цилиндрическом конце.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся данной выше леммой о локальных координатах и производящих функциях. По этой лемме, график преобразования g в окрестности цилиндрического конца покрывается конечным числом карт $U_I^{(2)}$ в каждой из которых преобразование задается неявными формулами вида (см. (3.30) и (3.31))

$$\begin{aligned} t &= \widetilde{t} + \frac{\partial \Phi_I}{\partial p}(e^{-\widetilde{t}}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_I, p, q), \\ \widetilde{p} &= p + e^{-\widetilde{t}}\frac{\partial \Phi_I}{\partial \widetilde{r}}(e^{-\widetilde{t}}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q), \\ \omega &= \frac{\partial \Phi_I}{\partial q}(e^{-\widetilde{t}}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q), \\ \widetilde{\omega}_{\overline{I}} &= -\frac{\partial \Phi_I}{\partial \widetilde{q}_{\overline{I}}}(e^{-\widetilde{t}}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q), \\ \widetilde{q}_I &= \frac{\partial \Phi_I}{\partial \omega_I}(e^{-\widetilde{t}}, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q), \end{aligned} \tag{3.54}$$

Заменим в этих формулах функцию Φ_I на функцию вида

$$\Phi_{I_\mu} = \Phi_I(\chi_\mu(e^{-\widetilde{t}}), \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q),$$

где $\chi_\mu(r)$ — непрерывное семейство гладких функций, такое, что $\chi_\mu(r) \equiv r$ при $r \geq 1$, а $\chi_0(r) \equiv 0$ при $r < 1/2$. Тогда при всех значениях параметра μ гомотопии формулы (3.54) задают преобразования, согласующиеся друг с другом в пересечениях карт, тем самым определяя глобальное преобразование g_μ. При этом преобразование g_0 обладает требуемыми свойствами. Лемма доказана. □

Действуя с помощью аналогичной гомотопии, можно добиться, чтобы символ a не зависел от t достаточно далеко на цилиндрическом конце.

В этой области преобразование g_0 (в дальнейшем будем обозначать его просто через g) имеет вид

$$t = \widetilde{t} + \frac{\partial \Phi_I}{\partial p}(0, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q}_{\overline{I}}, p, q).$$

Правая часть этого равенства есть однородная функция степени 0 от переменных $(q_{\overline{I}}, p, q)$. Поскольку $L_g/\mathbb{R}_+$ компактно, отсюда вытекает, что разность $|t - \widetilde{t}|$

равномерно ограничена на цилиндрическом конце. Устроим дальнейшую гомотопию g_δ преобразования g так, что в окрестности цилиндрического конца оно будет задаваться функцией

$$\Phi_I(0, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q_{\overline{I}}}, \delta p, q),$$

где δ — малый параметр. Тогда $|t - \widetilde{t}| \leq C\delta$ в окрестности цилиндрического конца. Обозначим оператор, соответствующий этому преобразованию и амплитуде a (не зависящей от t на цилиндрическом конце) через $T(\delta)$.

Проекция лагранжевого многообразия L_{g_δ} на $M \times M$ в окрестности цилиндрического конца содержится во множестве $|t - \widetilde{t}| \leq C\delta$. Умножим ядро оператора $T(\delta)$ на гладкую срезающую функцию $\chi(t, \widetilde{t})$. Полученный оператор будет иметь тот же конормальных символ и уже будет правильным оператором в пространствах с перешейком. Осталось лишь выяснить, при каких условиях возможна склейка нашего оператора так, чтобы получился ИОФ на дубле $2M$.

Введем здесь простейшее условие симметрии:

$$T_0(p) = T_0(-p). \tag{3.55}$$

Из этого условия с учетом локальных представлений ИОФ вытекает, что производящие функции (3.30), удовлетворяют условиям

$$\Phi_I(0, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q_{\overline{I}}}, p, q) = \Phi_I(0, \widetilde{\omega}_I, \widetilde{q_{\overline{I}}}, -p, q) \tag{3.56}$$

и, поскольку эти функции являются производящдими функциями конормального семейства

$$g_p : T^*\Omega \to T^*\Omega, \quad \forall p \in \mathbb{R},$$

то выполнено и условие

$$g_p = g_{-p} \quad \forall p \in \mathbb{R}. \tag{3.57}$$

Обратно, в силу $\mathbb{R}_+$-однородности функции Φ_I, (3.56) вытекает из (3.57).

Кроме того, из условия (3.55) следует, что амплитуда удовлетворяет условию симметрии

$$a|_{\partial T^*M}(-p) = a|_{\partial T^*M}(p). \tag{3.58}$$

Если теперь отрезать окрестность бесконечности в цилиндрическом конце T^*M и склеить два полученных многообразия с краем "внахлест", то, в силу условия (3.57) получим каноническое преобразование

$$2g : T^*(2M)\backslash\{0\} \to T^*(2M)\backslash\{0\}.$$

Считая, что склейка проводится по симметричной окрестности $(-T, T)$ нуля на оси T, зададим ее формулами

$$\begin{aligned} &(\omega, t)_1 \cong (\omega_1, -t)_2, \\ &\qquad\qquad t \in (-T, T), \\ &(q, p)_1 \cong (q_1, -p)_2, \end{aligned} \tag{3.59}$$

где нижний индекс нумерует экземпляры M. Условие (3.57) (вместе с трансляционной инвариантностью преобразования g на цилиндрических концах) обеспечивает, что два разных определения g, соответствующие двум экземплярам многообразия M, на самом деле согласованы между собой.

Далее, условие (3.58) (вместе с независимостью символа от переменной t на цилиндрическом конце) обеспечивает склейку символов a на двух экземплярах многообразия M в один гладкий символ $2a$. Итак, корректно определен (с точностью до младших членов) оператор

$$2T = T(2g, 2a)$$

как интегральный оператор Фурье на многообразии $2M$, ассоциированный с преобразованием $2g$. Нам еще понадобится трансляционно-инвариантный ИОФ

$$B = T_0\left(-i\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

на бесконечном цилиндре $\Omega \times (-\infty, \infty)$. Для всех значений γ таких, что $T_0(p)$ обратим на весовой прямой $\mathcal{L}_\gamma$, оператор B обратим. В частности, его индекс равен нулю.

Теперь можно перейти к формулировке и доказательству формулы индекса для ИОФ на многообразии M.

3.5.3. Формула индекса

Теорема 3.12. *Пусть T — формально эллиптический ИОФ на многообразии M с коническими особенностями, удовлетворяющий условию симметрии (3.55). Тогда имеет место следующая формула индекса*

$$\operatorname{ind} T_\gamma = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ind} 2T - \sum_{-\gamma<\operatorname{Im} p_j<\gamma} m_j\right), \tag{3.60}$$

для любого $\gamma \geq 0$ такого, что конормальный символ $T_0(p)$ обратим на $\mathcal{L}_\gamma$. Здесь p_j — полюса семейства $T_0(p)^{-1}$, m_j — их кратности. При $\gamma < 0$ имеет место формула, аналогичная (3.60), с заменой знака "$-$" на "$+$" перед суммой кратностей.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму модификаций

$$\begin{array}{ccc} T_\gamma \oplus T_{-\gamma} \oplus B_\gamma & \overset{1}{\longleftrightarrow} & B_\gamma \oplus B_{-\gamma} \oplus B_\gamma \\ {\scriptstyle -1}\,\updownarrow & & \updownarrow\,{\scriptstyle -1} \\ 2T_\gamma \oplus B_\gamma \oplus B_{-\gamma} & \overset{1}{\longleftrightarrow} & B_\gamma \oplus B_\gamma \oplus B_{-\gamma}. \end{array}$$

Из нее, с учетом того факта, что $\operatorname{ind} B_\gamma = B_{-\gamma} = 0$, и из абстрактной теоремы об относительном индексе 3.10 следует нужное утверждение. □

Замечание 3.5. Первое слагаемое — $\frac{1}{2}\operatorname{ind} 2T$ — в формуле (3.60) безусловно является топологическим инвариантом — оно, очевидно, не меняется при гомотопиях преобразования g в классе преобразований, удовлетворяющих условию симметрии (3.57) и при гомотопиях главного символа a в классе эллиптических символов, удовлетворяющих условию симметрии (3.58). Более того, можно рассматривать оператор T действующий в сечениях расслоений:

$$T:\ H^{s,\gamma}(M,E) \to H^{s-m,\gamma}(M,F);$$

при этом главный символ будет действовать в сечениях расслоений

$$a:\ \pi^*E \to g^*\pi^*F,$$

где $\pi : T^*M \to M$ — естественная проекция. Можно даже допустить, чтобы преобразование g осуществляло изоморфизм кокасательных расслоений различных многообразий:

$$g : T^*M_1\backslash\{0\} \to T^*M_2\backslash\{0\}.$$

при этом формула, составляющая утверждение теоремы 3.12, остается справедливой.

Имеет место также более общая теорема с ослабленным условием симметрии, которая доказывается аналогичным образом [48].

Теорема 3.13. *Пусть $T(g,a)$ — эллиптический интегральный оператор Фурье–Маслова на паре многообразий с коническими особенностями N_1 и N_2, конормальный символ $T_0(p)$ которого гомотопен в классе конормальных символов формально эллиптических интегральных операторов Фурье конормальному символу $T_0(-p)$. Тогда*

$$\operatorname{ind} T(g,a) = \frac{1}{2}\{\operatorname{ind}\mathcal{T} + \operatorname{sf} T_{0t}\},$$

где $\operatorname{sf} T_{0t}$ — спектральный поток гомотопии T_{0t}, связывающей $T_0(p)$ и $T_0(-p)$, а $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G,A) : H^s(\mathcal{N}_1) \to H^s(\mathcal{N}_2)$ — интегральный оператор Фурье–Маслова на замкнутых многообразиях $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$, получаемых как дубли раздутий $N_1^\wedge$ и $N_2^\wedge$, причем каноническое преобразование G и амплитуда A выписываются явно.

В настоящее время явное выражение индекса интегрального оператора Фурье $\mathcal{T}$ на гладких компактных многообразиях имеется как в частном случае, когда оператор $\mathcal{T}$ действует из в пространства *скалярных функций* на некотором многообразии $\mathcal{M}$ в себя (т. е., в частности, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$; соответствующий результат принадлежит Эпштейну и Мельроузу [80]), так и в общем случае различных многообразий (см. работу Лейштнама, Неста и Цигана [91]).

Глава 4

Туннельный канонический оператор и газ Бозе–Маслова

Давно известно о существовании параллелей между термодинамикой и классической механикой (см., например, [25]). Формулы метода термодинамических потенциалов (см., например, [88]), выражающие термодинамические переменные через производные термодинамического потенциала по двойственным «естественным» переменным, с точностью до обозначений тождественны формулам, выражающим в классической механике импульсы как производные производящей функции по координатам [2], а переход от одних наборов естественных переменных к другим (или, что то же самое, от одного термодинамического потенциала к другому) есть не что иное, как преобразование Лежандра. Термодинамические переменные разбиваются на пары сопряженных переменных (давление–объем, энтропия–температура, число частиц–химический потенциал), и множество равновесных состояний термодинамической системы представляет собой в пространстве термодинамических переменных *лагранжево многообразие* [26], задаваемое термодинамическими потенциалами как производящими функциями.

В статистической физике, как и в квантовой механике, имеется естественный малый параметр. Это $1/N$, где N — число частиц. В сочетании с тем фактом, что в термодинамике, которая представляет собой «классический предел» статистической физики при $N \to \infty$, имеются естественные лагранжевы многообразия, это наводит на мысль, что и в этой ситуации квантование лагранжева многообразия должно приводить к приближению по параметру, стремящемуся к нулю, на этот раз в статистической физике.

Идея квантования термодинамического лагранжева многообразия была развита в работах [29], [30]. Это квантование весьма сильно отличается от своего квантовомеханического аналога. Там речь идет о быстроосциллирующих функциях, здесь же никаких осцилляций нет, а рассматриваются быстроубыва-

ющие функции. Поэтому вместо обычного канонического оператора используется так называемый *туннельный* канонический оператор [28]. Логарифм функции, задаваемой туннельным каноническим оператором на термодинамическом лагранжевом многообразии, был назван в [29] *статистическим потенциалом*, и основной постулат заключается в том, что туннельный канонический оператор задает асимптотику статистической суммы при больших N, так что статистический потенциал точнее описывает свойства термодинамической системы, чем термодинамические потенциалы.

Разумеется, в термодинамике наряду с феноменологической квазиклассикой, или геометрическим квантованием в духе Н. Бора, имеется и задача о квазиклассическом предельном переходе, т. е. о строгом *вычислении асимптотики статистической суммы при* $N \to \infty$. В общем случае эта задача является значительно более сложной и далека от решения. В модельных примерах иногда удается, например, записав выражение для статистической суммы в виде бесконечномерного интеграла по траекториям (см. Фейнман–Хибс [58], а также Фейнман [57]), вычислить асимптотику этого интеграла в неособом случае при $N \to \infty$ методом Лапласа, что позволяет получить не только экспоненту, но и предэкспоненциальный множитель, а из последнего — и меру на лагранжевом многообразии.

В данной главе рассматривается одна из моделей, играющих важную роль в разработанной В. П. Масловым новой термодинамике (см., например, [31]). Рассмотрим идеальный бозе-газ невзаимодействующих частиц, уровни энергии которых (с учетом кратности) представляют собой последовательность $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ положительных чисел, такую что ее считающая функция

$$\rho(\lambda) = \#\{j \colon \lambda_j \le \lambda\} \tag{4.1}$$

имеет при $\lambda \to \infty$ асимптотику

$$\rho(\lambda) = c_0 \lambda^{1+\gamma}(1 + O(\lambda^{-\varepsilon})) \tag{4.2}$$

для некоторых $c_0 > 0$, $\gamma > -1$, $\varepsilon > 0$. Показатель γ связан с числом d степеней свободы частицы формулой $d = 2 + 2\gamma$. Разумеется, число степеней свободы

отдельной частицы — целое число. Маслов рассмотрел ситуацию, когда число степеней свободы при одной средней энергии у различных молекул различно, так же, как скорости и энергии отдельных молекул. Тогда среднее число степеней свободы по всем молекулам может быть нецелым числом и принимать весь спектр значений. Это приводит к статистике типа Бозе статистики для частиц дробной "размерности", которая отвечает дробному числу степеней свободы d.

Бозе-газ невзаимодействующих частиц, для которого соотношение (4.2) выполнено с некоторым произвольно заданным $\gamma > 0$, будем называть *газом Бозе–Маслова*.

Поставим задачу о вычислении статистического потенциала и построении термодинамического лагранжева многообразия для газа Бозе–Маслова. Пусть $\mathcal{N}(E)$, $E > 0$ — число различных последовательностей $\{N_j\}_{j=1}^{\infty}$ неотрицательных целых чисел, таких что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j N_j \leq E.$$

Если λ_j — это уровни энергии частиц газа Бозе–Маслова, то N_j — это соответствующие числа заполнения, $\mathcal{N}(E)$ — число состояний газа с полной энергией, не превышающей E, а его логарифм $\mathcal{S}(E) = \ln \mathcal{N}(E)$ — *энтропия* газа при заданной энергии E. Заметим, что число частиц мы здесь не фиксируем, и в качестве большого параметра выступает сама энергия E (разумеется, среднее число частиц при $E \to \infty$ также будет стремиться к бесконечности). Вид зависимости $\mathcal{S}(E)$ при больших E и определяет статистический потенциал и соответствующее термодинамическое лагранжево многообразие в соответствии с уравнением

$$\beta = \frac{\partial \mathcal{S}(E)}{\partial E},$$

где $\beta = T^{-1}$ — обратная температура. (Для данной модели термодинамическое лагранжево многообразие одномерно, поскольку какие-либо еще пары сопряженных термодинамических переменных отсутствуют. При наличии еще одного ограничения — на число частиц — возникает дополнительная пара сопряженных термодинамических переменных N–μ — число частиц и химический потенциал, так что соответствующее термодинамическое лагранжево многообразие будет

двумерным. Эта ситуация для случая целочисленных уровней энергии рассматривалась в совместных работах В. П. Маслова и автора [34, 35].)

Отметим, что асимптотика величины $\mathcal{N}(E)$ весьма хорошо изучена для случая, когда все λ_j — натуральные числа. Например, случай $\gamma = 0$ (т. е. $d = 2$) тесно связан со знаменитой задачей о разбиениях в теории чисел, в которой $\lambda_j = j$, а решения диофантова уравнения

$$\sum_{j=1}^{\infty} jN_j = E$$

соответствуют разбиениям натурального числа M на натуральные слагаемые. Эта задача была глубоко исследована Харди и Рамануджаном [85] и позднее Радемахером [98], Эрдошем [81] и другими математиками (см. также [64], где можно найти дальнейшие ссылки); по поводу других значений d см., например, работы А. М. Вершика [8] и [9], а также работы В. П. Маслова и автора [36–38] и цитированную там литературу.

Для произвольных вещественных λ_j ситуация более сложная. В этом случае асимптотика энтропии $\ln \mathcal{N}(E)$ была получена в [104, Theorem 1] на основе тауберовой теоремы Харди–Рамануджана [84, Theorem A] при дополнительном предположении, что λ_j — собственные значения положительно определенного псевдодифференциального оператора первого порядка на компактном многообразии. (В частности, при этом γ оказывается целым неотрицательным, а (4.2) вытекает из формул типа Вейля–Куранта и Хермандера (см. [53, § XIII.15] и [62, гл. 29].) Физики, разумеется, выписывают энтропию в любом случае (см., например, [25]) на основе эвристических рассуждений, но математически строгое доказательство обычно отсутствует.

Мы получаем асимптотику при $E \to \infty$ для $\mathcal{N}(E)$ и $\mathcal{S}(E)$ при условии (4.2) без каких-либо дополнительных предположений.

Введение к данной главе следует совместной работе В. П. Маслова и автора [33] и работам автора [44, 94]. Раздел 4.1 является вспомогательным — в нем напоминается определение туннельного канонического оператора — и также следует [33]. Основные теоремы главы — теоремы 4.2 и 4.3 — получены лично автором и представлены в разделе 4.2, изложение в котором следует [44, 94].

4.1. Определение туннельного канонического оператора

Туннельный канонический оператор был введен В. П. Масловым (см. [28, гл. 9, § 3]). Приведем необходимые определения и утверждения из [28] в удобной для нас форме, следуя работе [33].

4.1.1. Лагранжево многообразие и мера

Пусть $\mathbb{R}^{2n}_{q,p}$ — фазовое пространство с координатами $q = (q_1, \dots, q_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$ и симплектической формой

$$\omega^2 = dp \wedge dq \equiv \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i,$$

и пусть $\jmath\colon \Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}_{q,p}$ — лагранжево многообразие в $\mathbb{R}^{2n}_{q,p}$, т. е. $\jmath^*\omega^2 = 0$. Через

$$\pi\colon \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n_q, \qquad (q,p) \longmapsto q$$

обозначим проекцию лагранжева многообразия Λ на координатное пространство $\mathbb{R}^n_q$. Будем предполагать, что лагранжево многообразие Λ удовлетворяет следующим условиям:

(a) проекция π *собственная*, т. е. прообраз $\pi^{-1}(K) \subset \Lambda$ любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n_q$ компактен;

(b) для произвольного замкнутого контура $\gamma \subset \Lambda$ выполнено соотношение

$$\oint_\gamma p\, dq = 0.$$

Из условия (b) следует, что уравнение Пфаффа $dS = p\, dq$ имеет на Λ глобальное решение, определенное однозначно с точностью до аддитивной константы, которую мы каким-либо образом зафиксируем. Функцию $S(\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$, будем называть *действием* на Λ.

Точка $\alpha \in \Lambda$ называется *равновесной*, если

$$S(\alpha) = \min_{\beta \in \pi^{-1}(\pi(\alpha))} S(\beta) \tag{4.3}$$

(т. е. если значение действия в этой точке минимально по всем точкам, проектирующимся в ту же самую точку пространства $\mathbb{R}^n_q$ переменных q). В противном случае она называется *неравновесной*. Из условия (а) следует, что множество $\Gamma \subset \Lambda$ равновесных точек замкнуто.

Пусть на Λ задана также гладкая вещественная *мера* μ. В отличие от других вариантов теории канонического оператора здесь под мерой понимается *нечетная* форма объема. В произвольной локальной системе координат $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ на Λ она имеет вид

$$\mu = \mu_{(\alpha)}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\, d\alpha_1 \wedge \dots \wedge d\alpha_n, \qquad \mu_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0,$$

причем при заменах координат плотность меры умножается на *модуль* якобиана: если $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ — другая система локальных координат на Λ, связанная с $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ отображением перехода $\beta_j = \beta_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $j = 1, \dots, n$, то

$$\mu_{(\alpha)}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mu_{(\beta)}(\beta_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, \beta_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \left| \det \frac{\partial(\beta_1, \dots, \beta_n)}{\partial(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \right|.$$

4.1.2. Локальное определение

Туннельный оператор вблизи неособой точки. Точка $\alpha_0 \in \Lambda$ называется *неособой*, если проекция π является диффеоморфизмом в ее достаточно малой окрестности U.

Определение 4.1. Туннельный канонический оператор в окрестности U неособой точки a_0 задается формулой

$$[K_0\varphi](x) = \left\{ e^{-\lambda S(\alpha)} \varphi(\alpha) \sqrt{\mu_q(\alpha)} \right\}\Big|_{\pi(\alpha)=x}, \qquad \varphi \in C_0^\infty(U). \tag{4.4}$$

Здесь $\lambda \to +\infty$ — большой параметр (в термодинамике в качестве этого параметра выступает $\lambda = N/k$), а μ_q — плотность меры μ в координатах $(q_1, \dots, q_n)$.

Туннельный оператор вблизи особой точки. Пусть $\alpha_0 \in \Lambda$ — особая точка (дифференциал $d\pi|_{\alpha_0}$ вырожден). Возьмем неотрицательный вектор $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ (т. е. $\sigma_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$) и зададим каноническое преобразование

$$g_\sigma(q, p) = (q - \sigma p, p), \qquad \sigma p = (\sigma_1 p_1, \dots, \sigma_n p_n), \tag{4.5}$$

— сдвиг на время -1 вдоль траекторий системы Гамильтона $\dot q_j = \sigma_j p_j$, $\dot p_j = 0$, $j = 1, \dots, n$, с гамильтонианом $H_\sigma = \frac12 \sum_{j=1}^n \sigma_j p_j^2$. Множество тех σ, для которых α_0 — неособая точка лагранжева многообразия $\Lambda_\sigma = g_\sigma(\Lambda)$, непусто и содержит сколь угодно малые по норме неотрицательные σ. Возьмем такое σ и зададим действие и меру на Λ_σ формулами

$$S_\sigma(\alpha) = S(\alpha) - \frac12 \sum_{j=1}^n \sigma_j p_j^2(\alpha), \qquad \mu_\sigma = (g_\sigma^{-1})^*(\mu); \tag{4.6}$$

по этим объектам в соответствии с (4.4) построим «неособый» туннельный оператор $\widetilde K_\sigma$ на Λ_σ в малой окрестности U точки α_0.

Определение 4.2. Туннельный оператор на Λ в окрестности U особой точки a_0 задается формулой

$$K_\sigma \varphi = e^{\lambda \widehat H_\sigma}(\widetilde K_\sigma \varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(U), \tag{4.7}$$

где $\widehat H_\sigma = \frac12 \sum_{j=1}^n \sigma_j \big(-\lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}\big)^2$, а экспонента $e^{\lambda \widehat H_\sigma}$ — решение соответствующего уравнения теплопроводности — интегральный оператор с ядром

$$G_\sigma(x,y) = \prod_{j\colon \sigma_j = 0} \delta(x_j - y_j) \prod_{j\colon \sigma_j > 0} \sigma_j^{-1} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \exp\left\{-\lambda \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - y_j)^2}{2\sigma_j}\right\}. \tag{4.8}$$

4.1.3. Глобальное определение

Рассмотрим локально конечное покрытие множества Γ открытыми множествами $U_j \subset \Lambda$, каждому из которых сопоставлен неотрицательный вектор $\sigma(j) \in \mathbb{R}^n_+$, такой что туннельный оператор $K_{\sigma(j)}$ определен в окрестности U_j. Далее, пусть $\{e_j\}$ — разбиение единицы на Γ, подчиненное покрытию U_j, а $\{\psi_j\}$ — локально конечная система срезающих функций на $\mathbb{R}^n$, такая, что $\psi_j(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности множества $\pi(U_j \cap \Gamma)$.

Определение 4.3. Туннельный канонический оператор K задается на пространстве $C^\infty(\Lambda \times [0,1])$ функций $\varphi(\alpha, h)$, гладко зависящих от точки $\alpha \in \Lambda$ и параметра $h \in [0,1]$, формулой

$$[K\varphi](x,\lambda) = \sum_j \psi_j(x) K_{\sigma(j)}(e_j(\alpha)\varphi(\alpha, \lambda^{-1})), \tag{4.9}$$

где локальные операторы K_σ имеют вид (4.4) при $\sigma = 0$ и (4.7) при $\sigma \neq 0$.

Заметим, что сумма (4.9) локально конечна. Обозначим через R множество функций, представимых при достаточно больших λ в виде (4.9) для какой-либо функции $\varphi \in C^\infty(\Lambda \times [0,1])$ при каком-либо выборе покрытия $\{U_j\}$, векторов $\sigma(j)$, разбиения единицы $\{e_j\}$ и срезающих функций ψ_j.

Теорема 4.1 ([28]). *Если K и K° — два туннельных оператора, определенных с помощью разных покрытий $\{U_j\}$, векторов $\sigma(j)$, разбиений единицы $\{e_j\}$ и срезающих функций ψ_j, удовлетворяющих описанным выше условиям, то*

$$K\varphi - K^\circ\varphi \in \lambda^{-1}R \quad \textit{для любого } \varphi \in C^\infty(\Lambda \times [0,1]).$$

Замечание 4.1. Из теоремы 4.1 вытекает, что в областях пространства $\mathbb{R}^n_x$, образованных точками x, для которых в $\pi^{-1}(x)$ имеется единственная равновесная точка, причем лежащая в неособой карте, туннельный оператор определен на не обращающихся в нуль функциях φ с «мультипликативной» точностью: при переходе к другому выбору произвольных элементов, входящих в его определение, функция $K\varphi$ умножается на $1 + O(\lambda^{-1})$. В общем случае это не так.

4.2. Газ Бозе–Маслова

4.2.1. Асимптотика числа состояний $\mathcal{N}(E)$

В этом пункте мы докажем следующую теорему.

Теорема 4.2. *Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ — последовательность положительных чисел, такая что ее считающая функция (4.1) имеет при $\lambda \to \infty$ асимптотику (4.2) с некоторыми $c_0 > 0$, $\gamma > -1$, и $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$\mathcal{N}(E) = \frac{b^{(\gamma+1)/2} \exp\left(bE - \sum_{j=1}^\infty \ln(1 - e^{-b\lambda_j})\right)}{\left(2\pi c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+3)\zeta(\gamma+2)\right)^{1/2}} \big(1 + o(1)\big) \quad \textit{as } E \to \infty, \tag{4.10}$$

где $b = b(E) > 0$ — (единственное) решение уравнения

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{\lambda_j}{e^{b\lambda_j} - 1} = E, \tag{4.11}$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, а $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана.

Доказательство. Пусть $\chi(y)$, $y \in \mathbb{R}^1$ — гладкая вещественная функция, такая что $\chi(y) = 0$ при $y < -1$ и функция $\chi(y)e^{-y}$ вместе со всеми своими производными быстро убывает при $|y| \to \infty$. Пусть $b = b(E) > 0$ — решение уравнения (4.11). Положим

$$\mathcal{N}_\chi(E) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \sum_{N_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{N_j=0}^{\infty} \cdots \chi\biggl(b\biggl(E - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j N_j\biggr)\biggr). \tag{4.12}$$

(Сумма в действительности конечна.) Преобразование Фурье

$$a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy(\xi - i)} \chi(y)\, dy$$

функции $\chi(y)e^{-y}$ быстро убывает вместе со всеми производными при $|\xi| \to \infty$. Имеем

$$\chi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(\xi - i)} a(\xi)\, d\xi. \tag{4.13}$$

Подставляя представление (4.13) в (4.12) и меняя порядок суммирования и интегрирования (что легко обосновать с помощью оценки (4.2)), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\chi(E) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{N_1=0}^{\infty} \sum_{N_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{N_j=0}^{\infty} \cdots \exp\biggl[ib(\xi - i)\biggl(E - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j N_j\biggr)\biggr] a(\xi)\, d\xi \\ &= \frac{e^{bE}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ibE\xi} \prod_{j=1}^{\infty} \biggl(\sum_{N_j=0}^{\infty} e^{-ib(\xi - i)\lambda_j N_j}\biggr) a(\xi)\, d\xi = \frac{e^{\mathcal{S}(E)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\Phi(\xi)} a(\xi)\, d\xi, \end{aligned}$$

где[1]

$$\mathcal{S}(E) = bE - \sum_{j=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-b\lambda_j}), \quad \Phi(\xi) = ibE\xi + \sum_{j=1}^{\infty} \ln \frac{1 - e^{-b\lambda_j}}{1 - e^{-b\lambda_j(1 + i\xi)}}. \tag{4.14}$$

Нам понадобятся две леммы.

Лемма 4.1 (вариант формулы Эйлера–Маклорена)**.** *Пусть* $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— последовательность положительных чисел, считающая функция* (4.1) *которой удовлетворяет условию* (4.2)*. Пусть* $f(x)$ *— функция класса* C^1 *на интервале*

[1] Функция Φ зависит также от E, но мы этот аргумент опускаем, чтобы сделать обозначения менее громоздкими.

$(0,\infty)$, *такая что*

$$f(x) \text{ и } f'(x) \text{ убывают быстрее любой степени } x \qquad \text{при } x \to \infty, \tag{4.15}$$

$$f(x) = O(x^\alpha), \quad f'(x) = O(x^\beta) \qquad \text{при } x \to 0, \tag{4.16}$$

где

$$\alpha > -\gamma - 1, \qquad \beta > -\gamma - 2.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(b\lambda_j) = b^{-\gamma-1} c_0(\gamma+1) \int_0^\infty x^\gamma f(x)\,dx + o(b^{-\gamma-1}), \qquad b \to 0. \tag{4.17}$$

Доказательство. Это утверждение, без сомнения, известно, но автор не располанает ссылкой, так что приведем доказательство. Положим

$$\sigma(\lambda) = c_0 \lambda^{\gamma+1}, \qquad r(\lambda) = \rho(\lambda) - \sigma(\lambda).$$

Тогда для каждого $\delta \in (0, \varepsilon)$ справедлива оценка

$$|r(\lambda)| \le C\lambda^{\gamma+1-\delta}, \qquad \lambda \in (0,\infty), \tag{4.18}$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Действительно, эта оценка следует из асимптотики (4.2) при $\lambda \ge \widetilde{\lambda} = \min_j \lambda_j$, а при $\lambda < \widetilde{\lambda}$ имеем $\rho(\lambda) = 0$ и

$$|r(\lambda)| = c_0\lambda^{\gamma+1} \le c_0 \widetilde{\lambda}^{\delta} \lambda^{\gamma+1-\delta}.$$

Сумма в левой части равенства (4.17) может быть записана в виде интеграла Стилтьеса

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(b\lambda_j) = \int_0^\infty f(b\lambda)\,d\rho(\lambda) = \int_0^\infty f(b\lambda)\,d\sigma(\lambda) + \int_0^\infty f(b\lambda)\,dr(\lambda)$$

(интегралы сходятся в силу первых условий в (4.15) и (4.16)). Далее,

$$\int_0^\infty f(b\lambda)\,d\sigma(\lambda) = c_0(\gamma+1)\int_0^\infty \lambda^\gamma f(b\lambda)\,d\lambda = b^{-\gamma-1}c_0(\gamma+1)\int_0^\infty x^\gamma f(x)\,dx,$$

и интегрирование по частям дает

$$\int_0^\infty f(b\lambda)\,dr(\lambda) = -b\int_0^\infty f'(b\lambda)r(\lambda)\,d\lambda$$

(благодаря условиям (4.15) и (4.16) и оценке (4.18) внеинтегральные члены равны нулю и интеграл в правой части сходится.) Остается заметить, что

$$\left| b\int_0^\infty f'(b\lambda)r(\lambda)\,d\lambda \right| \le Cb\int_0^\infty f'(b\lambda)\lambda^{\gamma+1-\delta}\,d\lambda = Cb^{\delta-\gamma-1}\int_0^\infty f'(\lambda)\lambda^{\gamma+1-\delta}\,d\lambda$$

(интеграл в правой части сходится при $0 < \delta < \gamma + \beta + 2$). Доказательство предложения закончено. □

Лемма 4.2. *Пусть* $a(0) \ne 0$. *Тогда*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\Phi(\xi)}a(\xi)\,d\xi = \frac{b^{(\gamma+1)/2}a(0)\bigl(1+o(1)\bigr)}{\bigl(c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+3)\zeta(\gamma+2)\bigr)^{1/2}} \quad \text{as } E\to\infty. \tag{4.19}$$

Доказательство. По существу мы собираемся вычислить асимптотику интеграла в правой части формулы (4.19) при $E \to \infty$ (или, что то же самое, при $b \to 0$) с помощью некоторой разновидности метода перевала [56]. Однако структура фазовой функции $\Phi(\xi)$ довольно сложна, и нам понадобятся некоторые тонкие оценки. Начнем с того, что изучим первые три производные функции $\Phi(\xi)$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\Phi'(\xi) = ibE - i\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b\lambda_j}{e^{b\lambda_j(1+i\xi)}-1}, \qquad \Phi''(\xi) = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(b\lambda_j)^2 e^{b\lambda_j(1+i\xi)}}{(e^{b\lambda_j(1+i\xi)}-1)^2},$$

$$\Phi'''(\xi) = i\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(b\lambda_j)^3(e^{2b\lambda_j(1+i\xi)}+e^{b\lambda_j(1+i\xi)})}{(e^{b\lambda_j(1+i\xi)}-1)^3}.$$

В частности, используя соотношение (4.11), лемму 4.1 и формулы [14, 3.144, p. 339; 3.423, p. 344], получаем

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= \Phi'(0) = 0,\\ \Phi''(0) &= -b^{-\gamma-1}c_0(\gamma+1)\int_0^\infty \frac{x^{\gamma+2}e^x\,dx}{(e^x-1)^2} + o(b^{-\gamma-1})\\ &= -b^{-\gamma-1}c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+3)\zeta(\gamma+2)\bigl(1+o(1)\bigr).\end{aligned} \tag{4.20}$$

Поскольку $|e^{\operatorname{Re} z}-1|\le|e^z-1|$, имеем также

$$\begin{aligned}|\Phi'''(\xi)| &\le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(b\lambda_j)^3(e^{2b\lambda_j}+e^{b\lambda_j})}{(e^{b\lambda_j}-1)^3}\\ &= b^{-\gamma-1}c_0(\gamma+1)\int_0^{\infty}\frac{x^3(e^{2x}+e^x)\,dx}{(e^x-1)^3}+o(b^{-\gamma-1})\le Cb^{-\gamma-1}.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Теперь нужно изучить вещественную часть фазовой функции. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\operatorname{Re}\Phi(\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}\ln\frac{1-e^{-b\lambda_j}}{|1-e^{-b\lambda_j(1+i\xi)}|}=-\frac12\sum_{j=1}^{\infty}\ln\left\{1+\frac{4e^{b\lambda_j}\sin^2\frac{b\lambda_j\xi}{2}}{(e^{b\lambda_j}-1)^2}\right\}.\tag{4.22}$$

Получим оценку сверху для $\operatorname{Re}\Phi(\xi)$. Для этого, поскольку все слагаемые в правой части (4.22) неположительны, отбросим часть из них и оставим только те, для которых

$$b\lambda_j\le 1\quad\text{and}\quad b\lambda_j|\xi|\le\pi.$$

Для этих j имеем

$$\frac{4e^{b\lambda_j}\sin^2\frac{b\lambda_j\xi}{2}}{(e^{b\lambda_j}-1)^2}\ge c\xi^2$$

с некоторой постоянной $c>0$, и поэтому

$$\operatorname{Re}\Phi(\xi)\le-\frac12\ln(1+c\xi^2)\sum_{\substack{j:\ b\lambda_j\le1,\\ b\lambda_j|\xi|\le\pi}}1=\begin{cases}-\frac12\ln(1+c\xi^2)\rho(b^{-1}), & |\xi|<\pi,\\ -\frac12\ln(1+c\xi^2)\rho(\pi b^{-1}|\xi|^{-1}), & |\xi|\ge\pi.\end{cases}\tag{4.23}$$

Комбинируя оценку (4.23) с асимптотикой (4.2) функции $\rho(\lambda)$, в итоге получаем следующие оценки для $\operatorname{Re}\Phi(\xi)$ при $b\to0$:

$$\operatorname{Re}\Phi(\xi)\le-C_1b^{-1-\gamma}\xi^2 \qquad \text{при } |\xi|<\pi,\tag{4.24}$$

$$\operatorname{Re}\Phi(\xi)\le-C_2(b|\xi|)^{-1-\gamma} \qquad \text{при } \pi\le|\xi|<C_3b^{-1},\tag{4.25}$$

$$\operatorname{Re}\Phi(\xi)\le0 \qquad \text{для всех } \xi\tag{4.26}$$

с некоторыми постоянными $C_1, C_2, C_3 > 0$. Теперь напишем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\Phi(\xi)} a(\xi)\, d\xi = \int\limits_{|\xi|\le b^{5(1+\gamma)/12}} e^{\Phi(\xi)} a(\xi)\, d\xi + \int\limits_{b^{5(1+\gamma)/12}\le|\xi|\le\pi} e^{\Phi(\xi)} a(\xi)\, d\xi$$
$$+ \int\limits_{\pi\le|\xi|\le b^{-1/2}} e^{\Phi(\xi)} a(\xi)\, d\xi + \int\limits_{b^{-1/2}\le|\xi|} e^{\Phi(\xi)} a(\xi)\, d\xi$$
$$\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Из оценок (4.24) и (4.25) следует, что

$$\operatorname{Re}\Phi(\xi) \le -C_1 b^{-(1+\gamma)/6} \qquad \text{for } b^{5(1+\gamma)/12} \le |\xi| \le \pi,$$
$$\operatorname{Re}\Phi(\xi) \le -C_2 b^{-(1+\gamma)/2} \qquad \text{for } \pi \le |\xi| \le b^{-1/2};$$

отсюда мы заключаем, что $I_2 = O(b^\infty)$ и $I_3 = O(b^\infty)$. Далее, функция $a(\xi)$ быстро убывает при $|\xi| \to \infty$. Поэтому при $|\xi| \ge b^{-1/2}$ получаем оценку

$$|a(\xi)| \le C_k |\xi|^{-k} = C_k |\xi|^{-k/2} b^{k/4}$$

с некоторой постоянной $C_k > 0$ для всех натуральных k; в силу (4.26) имеем $I_4 = O(b^\infty)$. Таким образом, I_2, I_3 и I_4 не дают вклада в асимптотику рассматриваемого интеграла, и остается вычислить I_1. По формуле Тейлора

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2}\Phi''(0)\xi^2 + F(\xi)\xi^3,$$

где

$$|F(\xi)| \le \frac{1}{6} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} |\Phi'''(\tau)| \le C b^{-\gamma-1}$$

в силу оценки (4.21). Далее, в силу (4.20) $\Phi''(0) = -b^{-\gamma-1}\Omega(b)$, где $\Omega(b)$ — непрерывная функция и

$$\Omega(0) = c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+3)\zeta(\gamma+2). \tag{4.27}$$

Если $|\xi| \le b^{5(1+\gamma)/12}$, то

$$|e^{F(\xi)\xi^3} - 1| \le C b^{-\gamma-1+15(1+\gamma)/12} = o(1), \qquad |a(\xi) - a(0)| = O(b^{5(1+\gamma)/12}) = o(1),$$

и поскольку $a(0) \neq 0$ и экспонента $e^{-\frac{1}{2}\Phi''(0)\xi^2}$ положительна, мы получаем

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_{-b^{5(1+\gamma)/12}}^{b^{5(1+\gamma)/12}} e^{\Phi(\xi)} a(\xi)\, d\xi = \int\limits_{-b^{5(1+\gamma)/12}}^{b^{5(1+\gamma)/12}} e^{-b^{-\gamma-1}\Omega(b)\xi^2/2} a(0)(1+o(1))\, d\xi \\
&= a(0)(1+o(1)) \int\limits_{-b^{5(1+\gamma)/12}}^{b^{5(1+\gamma)/12}} e^{-b^{-\gamma-1}\Omega(b)\xi^2/2} d\xi \\
&= a(0) b^{(\gamma+1)/2} (1+o(1)) \int\limits_{-b^{-(1+\gamma)/12}}^{b^{-(1+\gamma)/12}} e^{-\Omega(b)x^2/2} dx \\
&= a(0) b^{(\gamma+1)/2} (1+o(1)) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\Omega(b)x^2/2} dx \\
&= a(0) b^{(\gamma+1)/2} \sqrt{\frac{2\pi}{\Omega(b)}} (1+o(1)) = a(0) b^{(\gamma+1)/2} \sqrt{\frac{2\pi}{\Omega(0)}} (1+o(1)).
\end{aligned}
$$

Осталось воспользоваться равенством (4.27). Лемма доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы. Возьмем произвольное $\delta > 0$ и зафиксируем некоторую функцию $\chi(y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$
0 \leq \chi(y) \leq 1, \qquad \chi(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1, & y > \delta. \end{cases}
$$

Очевидно, для такой функции χ имеем

$$
\mathcal{N}(E) \geq \mathcal{N}_\chi(E) \quad \text{и} \quad a(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y} \chi(y)\, dy \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\delta}^{\infty} e^{-y}\, dy = \frac{e^{-\delta}}{\sqrt{2\pi}}.
$$

Для заданных числа δ и функции χ существует число $E_0 = E_0(\delta)$, такое что в формуле (4.19) $1 + o(1) > e^{-\delta}$ для всех $E > E_0$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\Phi(\xi)} a(\xi)\, d\xi &> \frac{b^{(\gamma+1)/2} a(0) e^{-\delta}}{\big(c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+3)\zeta(\gamma+2)\big)^{1/2}} \\
&> \frac{b^{(\gamma+1)/2} e^{-2\delta}}{\big(2\pi c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+3)\zeta(\gamma+2)\big)^{1/2}}
\end{aligned}
$$

и соответственно

$$\mathcal{N}(E) \geq \mathcal{N}_\chi(E) > \frac{b^{(\gamma+1)/2} e^{\mathcal{S}(E)-2\delta}}{\bigl(2\pi c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+3)\zeta(\gamma+2)\bigr)^{1/2}} \tag{4.28}$$

при $E > E_0$.

Если теперь взять $\chi(y)$, удовлетворяющую условиям

$$0 \leq \chi(y) \leq 1, \qquad \chi(y) = \begin{cases} 0, & y < -\delta, \\ 1, & y > 0, \end{cases}$$

то

$$\mathcal{N}(E) \leq \mathcal{N}_\chi(E) \quad \text{и} \quad a(0) \leq \frac{e^\delta}{\sqrt{2\pi}},$$

и, возможно, увеличивая E_0, аналогичным образом получаем

$$\mathcal{N}(E) < \frac{b^{(\gamma+1)/2} e^{\mathcal{S}(E)+2\delta}}{\bigl(2\pi c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+3)\zeta(\gamma+2)\bigr)^{1/2}} \tag{4.29}$$

при $E > E_0$.

В итоге видим, что для каждого $\delta > 0$ существует число $E_0 = E_0(\delta)$, такое что неравенства (4.28) и (4.29) выполнены при $E > E_0$. С учетом определения (4.14) функции $\mathcal{S}(E)$ это в точности означает, что выполнено соотношение (4.10). Теорема 4.2 доказана. □

4.2.2. Асимптотика энтропии $\mathcal{S}(E)$

В качестве следствия теоремы 4.2 получаем логарифмическую асимптотику функции $\mathcal{N}(E)$ (т. е. асимптотику энтропии $\mathcal{S}(E) = \ln \mathcal{N}(E)$).

Следствие 4.1. *Если выполнены условия теоремы 4.2, то*

$$\ln \mathcal{N}(E) = \frac{\gamma+2}{\gamma+1}\bigl(c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+2)\zeta(\gamma+2)\bigr)^{1/(\gamma+2)} E^{(\gamma+1)/(\gamma+2)}\bigl(1+o(1)\bigr) \tag{4.30}$$

при $E \to \infty$.

Доказательство. В силу леммы 4.1 и [14, 3.411, p. 339] имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{e^{b\lambda_j}-1} &= b^{-\gamma-2} c_0(\gamma+1) \int_0^\infty \frac{x^{\gamma+1}\,dx}{e^x-1} + o(b^{-\gamma-2}) \\ &= b^{-\gamma-2} c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+2)\zeta(\gamma+2)\bigl(1+o(1)\bigr). \end{aligned}$$

Подставим это в (4.11) и получим

$$b = \bigl(c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+2)\zeta(\gamma+2)\bigr)^{1/(\gamma+2)} E^{-1/(\gamma+2)}\bigl(1+o(1)\bigr). \tag{4.31}$$

Таким же образом получаем

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \ln(1-e^{-b\lambda_j}) &= c_0(\gamma+1)b^{-\gamma-1}\int_0^{\infty} x^{\gamma}\ln(1-e^{-x})\,dx + o(b^{-\gamma-1}) \\ &= -c_0 b^{-\gamma-1}\int_0^{\infty}\frac{x^{\gamma+1}\,dx}{e^x-1} + o(b^{-\gamma-1}) \\ &= -c_0 b^{-\gamma-1}\Gamma(\gamma+2)\zeta(\gamma+2)\bigl(1+o(1)\bigr).\end{aligned}$$

Используем теперь эти соотношения в показателе экспоненты в (4.10) и заметим, что предэкспонента не влияет на логарифмическую асимптотику; в результате приходим к (4.30). Следствие доказано. □

Нетрудно сравнить оценку (4.30) с хорошо известной логарифмической асимптотикой числа $p^{(s)}(n)$ разбиений натурального числа n в сумму s-х степеней натуральных чисел. Эта асимптотика имеет вид [85, с. 79]

$$\ln p^{(s)}(n) \sim (s+1)\left\{\frac{1}{s}\Gamma\left(1+\frac{1}{s}\right)\zeta\left(1+\frac{1}{s}\right)\right\}^{s/(s+1)} n^{1/(s+1)}. \tag{4.32}$$

В наших обозначениях $p^{(s)}(n) = \mathcal{N}(n)$ при условии, что $\lambda_j = j^s$. Считающая функция имеет вид

$$\rho(\lambda) = \lfloor \lambda^{1/s} \rfloor = \lambda^{1/s} + O(1)$$

(где $\lfloor x \rfloor$ — целая часть числа x), так что

$$c_0 = 1, \qquad 1+\gamma = \frac{1}{s}, \qquad \varepsilon = -\frac{1}{s} \tag{4.33}$$

в формуле (4.2). Подставляя это в (4.30), получаем (4.32). В частности, для $s = 1$ получаем

$$\ln p^{(1)}(n) = \pi\sqrt{\frac{2n}{3}}$$

в полном соответствии с формулой Харди–Рамануджана [85].

Оказывается, однако, что если речь идет только о вычислении асимптотики энтропии, то можно обойтись значительно более простыми средствами[2]. В работе автора [44] эта асимптотика найдена для случая произвольной последовательности чисел $\lambda_j > 0$, удовлетворяющих (4.2) с произвольным заданным $\gamma > 0$, без использования комплексного анализа, тауберовых теорем или метода перевала. Изложим этот результат. Положим

$$\Phi(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \ln \frac{1}{1 - e^{-\xi\lambda_j}}, \quad E(\xi) = -\Phi'(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{e^{\xi\lambda_j} - 1}, \quad \xi > 0, \tag{4.34}$$

и обозначим через $\xi = g(E)$, $E > 0$, функцию, обратную к $E = E(\xi)$. Функция $\Phi(\xi)$ выпукла. Рассмотрим ее преобразование Лежандра

$$\mathcal{S}(E) = \big[\xi E + \Phi(\xi)\big]\big|_{\xi = g(E)}.$$

Теорема 4.3. *Для энтропии* $\ln \mathcal{N}(E)$ *справедлива асимптотика*

$$\ln \mathcal{N}(E) = \mathcal{S}(E) + O\big(E^{\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma+2}} \chi(E)\big) \qquad \text{при } E \to \infty,$$

где $\chi(E) > 0$ — *произвольная функция, такая что* $\lim_{E\to\infty} \chi(E) = \infty$.

Следствие 4.1 вытекает из этой теоремы, если применить лемму 4.1 к рядам (4.34).

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = e^{\alpha(E-x)}$, $\alpha > 0$. Так как $f(x) \geq 1$ при $x \leq E$ и $f(x) \geq 0$ всюду, то

$$\mathcal{N}(E) \leq \sum_{N_1=0}^{\infty} \sum_{N_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{N_j=0}^{\infty} \cdots f\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j N_j\right) = e^{\alpha E + \Phi(\alpha)}$$

(ряды по N_j суммируются по формуле геометрической прогрессии). Минимум правой части по α достигается при $\alpha = g(E)$, откуда получаем оценку сверху $\mathcal{N}(E) \leq e^{\mathcal{S}(E)}$, т.е. $\ln \mathcal{N}(E) \leq \mathcal{S}(E)$. Оценим теперь $\ln \mathcal{N}(E)$ снизу. Рассмотрим функцию

$$f(x) = e^{(E-\Delta E-x)\alpha}\big(1 - e^{\tau(E-\Delta E-x)} - e^{\tau(x-E)}\big), \qquad \Delta E, \alpha, \tau > 0.$$

[2] Гипотеза о существовании такого вычисления была высказана В. П. Масловым. Неформально говоря, оно оказывается возможным благодаря тому, что при переходе от асимптотики числа состояний к асимптотике его логарифма — энтропии — обычная арифметика превращается в значительно более простую «тропическую», в которой роль произведения играет сумма, а роль суммы — операция взятия максимума.

Так как $f(x) \le 0$ при $x \ge E$ и $f(x) \le 1$ при $x \le E$, то

$$\mathcal{N}(E) \ge \sum_{N_1=0}^{\infty} \sum_{N_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{N_j=0}^{\infty} \cdots f\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j N_j\right) = e^{S_1} - e^{S_2} - e^{S_3}, \tag{4.35}$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= (E - \Delta E)\alpha + \Phi(\alpha), \\ S_2 &= (E - \Delta E)\alpha + \Phi(\alpha + \tau) + (E - \Delta E)\tau, \\ S_3 &= (E - \Delta E)\alpha + \Phi(\alpha - \tau) - E\tau. \end{aligned}$$

Положим

$$\Delta E = E^{\frac{1}{2}\frac{\gamma+3}{\gamma+2}} \chi(E), \qquad \alpha = g(E - \Delta E/2), \qquad \tau = \alpha^{\frac{\gamma+3}{2}}.$$

Разлагая $\Phi(\alpha \pm \tau) - \Phi(\alpha)$ по формуле Тейлора с учетом равенства $\Phi'(\alpha) = -E + \Delta E/2$, получаем

$$S_j \le S_1 - \frac{1}{2}\tau\Delta E + C\tau^2, \quad j = 2, 3, \qquad C = \frac{1}{2} \sup_{\xi \in [\alpha-\tau, \alpha+\tau]} \Phi''(\xi). \tag{4.36}$$

Применяя предложение 4.1 к рядам (4.34) и ряду

$$\Phi''(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 e^{\xi\lambda_j}}{(e^{\xi\lambda_j} - 1)^2}$$

для $\Phi''(\xi)$, получаем

$$\Phi(\xi) \asymp \xi^{-1-\gamma}, \qquad E(\xi) = -\Phi'(\xi) \asymp \xi^{-2-\gamma}, \qquad \Phi''(\xi) \asymp \xi^{-3-\gamma}$$

при $\xi \to 0$, где символ $\asymp$ означает, что отношение величин справа и слева от него ограничено сверху и снизу положительными постоянными. Положим $\beta = g(E)$. Так как $\Delta E = o(E)$, то $\alpha \asymp \beta$, $\tau = o(\beta)$ и поэтому $C \asymp \beta^{-3-\gamma}$. Следовательно,

$$\tau\Delta E \asymp \chi(E)\beta^{\frac{\gamma+3}{2}} E^{\frac{1}{2}\frac{\gamma+3}{\gamma+2}} \asymp \chi(E)\beta^{\frac{\gamma+3}{2}}\beta^{-\frac{\gamma+3}{2}} \asymp \chi(E),$$
$$C\tau^2 \asymp \beta^{-3-\gamma}(\beta^{\frac{\gamma+3}{2}})^2 \asymp 1 = o(\tau\Delta E).$$

Таким образом, из (4.36) следует, что $S_j - S_1 \to -\infty$ при $E \to \infty$, $j = 2, 3$, так что последние два слагаемых в (4.35) намного меньше первого и $\ln \mathcal{N}(E) \ge S_1 + O(1)$. Остается заметить, что

$$\begin{aligned} S_1 &= (E - \Delta E)\alpha + \Phi(\alpha) = \mathcal{S}(E - \Delta E/2) - \alpha\Delta E/2 = \mathcal{S}(E) + O(\beta\Delta E) \\ &= \mathcal{S}(E) + O(E^{-\frac{1}{\gamma+2}} E^{\frac{1}{2}\frac{\gamma+3}{\gamma+2}} \chi(E)) = \mathcal{S}(E) + O(E^{\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma+2}} \chi(E)). \end{aligned}$$

□

4.2.3. Термодинамическое лагранжево многообразие для газа Бозе–Маслова

Выпишем теперь термодинамическое лагранжево многообразие для газа Бозе–Маслова в координатах (E, β) (энергия — обратная температура), в которых роль действия играет сама энтропия, так что термодинамическое лагранжево многообразие задается уравнениями

$$d\mathcal{S} = \beta dE.$$

Отметим сразу, что «точная» энтропия $\mathcal{S}(E) = \ln \mathcal{N}(E)$ для этой цели не подходит: функция $\mathcal{N}(E)$, будучи по своей природе целочисленной, кусочно постоянна, а значит, такова же и $\mathcal{S}(E)$, которая, следовательно, не дифференцируема. Поэтому вместо функции $\mathcal{S}(E)$ мы рассмотрим главный член ее асимптотики в соответствии с (4.30):

$$S(E) = \frac{\gamma+2}{\gamma+1}\big(c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+2)\zeta(\gamma+2)\big)^{1/(\gamma+2)} E^{(\gamma+1)/(\gamma+2)}. \tag{4.37}$$

Для производной функции $S(E)$ получаем

$$\beta(E) = \frac{\partial S(E)}{\partial E} = \big(c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+2)\zeta(\gamma+2)\big)^{1/(\gamma+2)} E^{-1/(\gamma+2)}.$$

Заметим, что это выражение представляет собой не что иное, как главный член асимптотики (4.31) для параметра b (что совершенно естественно, учитывая то, каким образом этот параметр входит во все формулы).

Соотношения (4.37) и (4.2.3) асимптотически следует понимать в интегральном смысле: разность

$$\mathcal{S}(E) - \mathcal{S}(E') - \int_{E'}^{E} \beta(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

при $E, E' \to \infty$ будет относительно мала, и в этом смысле $\beta(E)$ аппроксимирует производную от функции $\mathcal{S}(E)$.

Заключение

В диссертации получен ряд новых результатов в области канонического оператора Маслова и его приложений. Именно, в диссертационной работе впервые получены следующие перечисленные во введении результаты.

1. В рамках канонического оператора Маслова предложен и разработан метод построения новых интегральных представлений быстроосциллирующих функций в окрестности каустик и фокальных точек на основе специального класса систем координат на лагранжевых многообразиях (эйконал-координаты). Полученное этим методом представление существенно упрощает локальный вид решения в окрестности каустик и эффективно при построении широкого класса асимптотических решений линейных гиперболических уравнений и систем с переменными коэффициентами (в частности, решений вида волновых пучков и решений задач с локализованными начальными данными или правыми частями).

2. Доказано, что в задачах о распространении волн с локализованными начальными данными локализованную в окрестности точки начальную функцию можно представить с помощью канонического оператора на инвариантном относительно гамильтониана задачи лагранжевом многообразии, представляющем собой объединение траекторий соответствующей системы Гамильтона, выпущенных из косферы на этой точкой, что позволяет существенно упростить формулы для асимптотических решений и сделать их эффективными в компьютерной реализации.

3. Предложен и разработан метод построения асимптотик решений многомерного волнового уравнения, вырождающегося на границе области. Этот метод основан на новом фазовом пространстве, отвечающем таким уравнениям, которое получается как расширение стандартного фазового пространства и на обобщении канонического оператора Маслова на лагранжевы подмногообразия такого фазового пространства, и приводит, в частности, к новым простым формулам для максимальной амплитуды в точках границы области решения задачи Коши для такого волнового уравнения с локализованными начальными

данными специального вида.

4. Для задаваемого квантованным каноническим преобразованием (интегральным оператором Фурье–Маслова) невырожденного эндоморфизма эллиптического комплекса на гладком компактном многообразии в том случае, когда у классического канонического преобразования имеются гладкие многообразия неподвижных точек и эти многообразия либо симплектические, либо лагранжевы, получены асимптотические формулы, выражающие вклад таких многообразий в число Лефшеца эндоморфизма.

5. Доказаны формулы индекса для удовлетворяющих некоторым условиям симметрии квантованных контактных (однородных канонических) преобразований на компактном многообразии с коническими особенностями, выражающие индекс в виде полусуммы индекса квантованного контактного преобразования на гладком компактном многообразии — дубле исходного многообразия с вырезанными окрестностями конических точек — и явно выписываемого инварианта конормального символа. Инвариант конормального символа выражен через кратности его особых точек в комплексной плоскости.

6. Получены асимптотические формулы для энтропии и числа состояний газа Бозе–Маслова, и н этой основе построено термодинамическое лагранжево многообразие, на котором определен отвечающий газу Бозе–Маслова туннельный канонический оператор.

Список литературы

1. Арнольд В. И. О характеристическом классе, входящем в условия квантования // Функц. анализ и его прил. — 1967. — Т. 1. — Вып. 1. — С. 1–14.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.
3. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. — М.: Фазис, 1996.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. — М.: Наука, 1970. — Т. II. Преобразования Бесселя, интегралы от специальных функций из Справочная математическая библиотека.
5. Белов В. В., Доброхотов С. Ю. Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. I. Общий подход // Теор. и матем. физика. — 1992. — Т. 92. — Вып. 2. — С. 215–254.
6. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — Л.: ЛГУ, 1980.
7. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949. — Т. 1.
8. Вершик А. М. Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации // Функц. анализ и его прил. — 1996. — Т. 30. — Вып. 2. — С. 19–39.
9. Вершик А. М. Предельное распределение энергии квантового идеального газа с точки зрения теории разбиений натуральных чисел // Успехи матем. наук. — 1997. — Т. 52. — Вып. 2 (314). — С. 139–146.
10. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. — 1957. — Т. 12. — Вып. 5. — С. 3–122.
11. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. Современные физико-технически проблемы. — 2-е изд. — М.: Наука, 1979.
12. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — 4-е изд. — М.: Наука, 1981.
13. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики.

— М.: Наука, 2000.

14. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — 4-е изд. — М.: Наука, 1963.
15. Доброхотов С. Ю., Жевандров П. Н., Маслов В. П., Шафаревич А. И. Асимптотические быстроубывающие решения линейных строго гиперболических систем с переменными коэффициентами // Матем. заметки. — 1991. — Т. 49. — Вып. 4. — С. 31–46.
16. Доброхотов С. Ю., Макракис Г., Назайкинский В. Е. Канонический оператор Маслова, одна формула Хермандера и локализация решения Берри–Балажа в теории волновых пучков // Теор. и матем. физика. — 2014. — Т. 179. — Вып. 4. — С. 1–23.
17. Доброхотов С. Ю., Макракис Г., Назайкинский В. Е., Тудоровский Т. Я. Новые формулы для канонического оператора Маслова в окрестности фокальных точек и каустик в двумерных квазиклассических асимптотиках // Теор. и матем. физика. — 2013. — Т. 177. — Вып. 3. — С. 355–386.
18. Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Тироцци Б. Асимптотические решения двумерного модельного волнового уравнения с вырождающейся скоростью и локализованными начальными данными // Алгебра и анализ. — 2010. — Т. 22. — Вып. 6. — С. 67–90.
19. Доброхотов С. Ю., Секерж-Зенькович С. Я. Один класс точных алгебраических локализованных решений многомерного волнового уравнения // Матем. заметки. — 2010. — Т. 88. — Вып. 6.
20. Доброхотов С. Ю., Секерж-Зенькович С. Я., Тироцци Б., Тудоровский Т. Я. Описание распространения волн цунами на основе канонического оператора Маслова // Докл. РАН. — 2006. — Т. 74. — Вып. 1. — С. 592–596.
21. Доброхотов С. Ю., Тироцци Б. Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c = \sqrt{x}$ // Успехи матем. наук. — 2010. — Т. 65. — Вып. 1(391). — С. 185–186.
22. Доброхотов С. Ю., Тироцци Б., Шафаревич А. И. Представления быстроубывающих функций каноническим оператором Маслова // Матем. замет-

ки. — 2007. — Т. 82. — Вып. 5. — С. 792–796.

23. Доценко С. Ф., Сергеевский Б. Ю., Черкесов Л. В. Пространственные волны цунами, вызванные знакопеременным смещением поверхности океана // Исследования цунами. — М.: Междувед. геофиз. комитет при Президиуме АН СССР, 1986. — Т. 1. — С. 7–14.
24. Карасев М. В., Назайкинский В. Е. О квантовании быстроосциллирующих символов // Матем. сборник. — 1978. — Т. 106. — Вып. 2. — С. 183–213.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. — ГИТТЛ, 1951.
26. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: МГУ, 1965.
27. Маслов В. П. Операторные методы. — М.: Наука, 1973.
28. Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. — М.: Наука, 1988.
29. Маслов В. П. Аналитическое продолжение асимптотических формул и аксиоматика термодинамики и квазитермодинамики // Функц. анализ и его прил. — 1994. — Т. 28. — Вып. 4. — С. 28–41.
30. Маслов В. П. Геометрическое квантование термодинамики, фазовые переходы и асимптотика в критических точках // Матем. заметки. — 1994. — Т. 56. — Вып. 3. — С. 155–156.
31. Маслов В. П. Фазовые переходы в реальных газах и идеальные бозе-газы // Теор. и матем. физика. — 2011. — Т. 167. — Вып. 2. — С. 295–310.
32. Маслов В. П., Назайкинский В. Е. Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. I. Псевдодифференциальные уравнения с растущими коэффициентами // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. — М.: ВИНИТИ, 1979. — Т. 13. — С. 5–144.
33. Маслов В. П., Назайкинский В. Е. Туннельный канонический оператор в термодинамике // Функц. анализ и его прил. — 2006. — Т. 40. — Вып. 3. — С. 12–29.
34. Маслов В. П., Назайкинский В. Е. О распределении целочисленных случайных величин, связанных двумя линейными неравенствами. I // Матем. заметки. — 2008. — Т. 83. — Вып. 4. — С. 559—-580.

35. Маслов В. П., Назайкинский В. Е. О распределении целочисленных случайных величин, связанных двумя линейными соотношениями // Матем. заметки. — 2008. — Т. 84. — Вып. 1. — С. 69—-98.
36. Маслов В. П., Назайкинский В. Е. О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. I // Матем. заметки. — 2008. — Т. 83. — Вып. 2. — С. 232–263.
37. Маслов В. П., Назайкинский В. Е. О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. II // Матем. заметки. — 2008. — Т. 83. — Вып. 3. — С. 381—-401.
38. Маслов В. П., Назайкинский В. Е. О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. III // Матем. заметки. — 2008. — Т. 83. — Вып. 6. — С. 880—-898.
39. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1976.
40. Миненков Д. С. Асимптотики решений одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды с вырождающейся скоростью // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92. — Вып. 5. — С. 721—-730.
41. Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. — М.: Наука, 1978.
42. Назайкинский В. Е. Асимптотические решения вырождающегося волнового уравнения с локализованными начальными данными, отвечающие различным самосопряженным расширениям // Матем. заметки. — 2011. — Т. 89. — Вып. 5. — С. 797–800.
43. Назайкинский В. Е. Геометрия фазового пространства для волнового уравнения, вырождающегося на границе области // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92. — Вып. 1. — С. 153–156.
44. Назайкинский В. Е. Об энтропии газа Бозе—Маслова // Докл. РАН. — 2013. — Vol. 448. — No. 3. — P. 266—-268.
45. Назайкинский В. Е. Канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях в фазовом пространстве, соответствующем вырождающемуся на границе волновому уравнению // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96.

— Вып. 2. — С. 261–276.

46. Назайкинский В. Е. О представлениях локализованных функций в $\mathbf{R}^2$ каноническим оператором Маслова // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96. — Вып. 1. — С. 87–99.
47. Назайкинский В. Е., Ошмян В. Г., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Интегральные операторы Фурье и канонический оператор // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36. — Вып. 2. — С. 81–140.
48. Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю. О принципе локальности индекса в эллиптической теории // Функц. анализ и его прил. — 2001. — Т. 35. — Вып. 2. — С. 37–52.
49. Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю., Шульце Б.-В. Индекс квантованных контактных преобразований на многообразиях с коническими особенностями // Докл. РАН. — 1999. — Т. 368. — Вып. 5. — С. 598–600.
50. Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю., Шульце Б.-В. Индекс интегральных операторов Фурье на многообразиях с изолированными особенностями // Изв. РАН. Сер. матем. — 2001. — Т. 65. — Вып. 2. — С. 127–154.
51. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1969. — М.: ВИНИТИ, 1971. — С. 7–252.
52. Пелиновский Е. Н. Гидродинамика волн цунами. — Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996.
53. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. — М.: Мир, 1982. — Т. 4. Анализ операторов.
54. Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Теорема Атья–Ботта–Лефшеца о неподвижной точке в симплектической геометрии // Докл. РАН. — 1996. — Т. 348. — Вып. 2. — С. 165–168.
55. Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Теорема Лефшеца о неподвижной точке для квантованных канонических преобразований // Функц. анализ и его прил. — 1998. — Т. 32. — Вып. 4. — С. 35–48.
56. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977. — 366 с.
57. Фейнман Р. Статистическая механика. — М.: Мир, 1975.

58. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.
59. Функциональный анализ / Под ред. С. Г. Крейн. Справочная математическая библиотека. — 2 изд. — М.: Наука, 1972.
60. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. — М.: Мир, 1986.
61. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1987.
62. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 4. Интегральные операторы Фурье. — М.: Мир, 1988.
63. Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. — Москва: Наука, 1978.
64. Andrews G. E. The Theory of Partitions. — Reading: Addison–Wesley, 1976.
65. Atiyah M. F., Bott R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I // Ann. of Math. — 1967. — Vol. 86. — P. 374–407.
66. Atiyah M. F., Bott R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. II. Applications // Ann. Math. — 1968. — Vol. 87. — P. 451–491.
67. Berry M. V., Balazs N. L. Nonspreading wave packets // Amer. J. Phys. — 1979. — Vol. 47. — No. 3. — P. 264–267.
68. Dobrokhotov S., Sekerzh-Zenkovich S., Tirozzi B., Volkov B. Explicit Asymptotics for Tsunami Waves in Framework of the Piston Model // Russ. J. Earth Sci. — 2006. — Vol. 8. — No. 4. — P. ES4003, 1–12.
69. Dobrokhotov S. Yu., Makrakis G., Nazaikinskii V. E. Fourier integrals and a new representation of Maslov's canonical operator near caustics // Spectral Theory and Differential Equations: V.A. Marchenko 90th Anniversary Collection (in press). — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2014. — American Mathematical Society Translations-Series 2, Advances in the Mathematical Sciences. — arXiv:1307.2292 [math-ph].

70. Dobrokhotov S. Yu., Minenkov D. S., Nazaikinskii V. E., Tirozzi B. Functions of noncommuting operators in an asymptotic problem for a 2D wave equation with variable velocity and localized right-hand side // Operator Theory, Pseudo-Differential Equations, and Mathematical Physics. — Basel: Birkhäuser, 2013. — Vol. 228 of Operator Theory: Advances and Applications. — P. 95–126.
71. Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Lozhnikov D. A. Wave trains associated with a cascade of bifurcations of space-time caustics over elongated underwater banks // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. — 2013. — Vol. 8. — No. 05. — P. 1–12.
72. Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Tirozzi B. Asymptotic solution of the one-dimensional wave equation with localized initial data and with degenerating velocity: I // Russ. J. Math. Phys. — 2010. — Vol. 17. — No. 4. — P. 434–447.
73. Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Tirozzi B. Asymptotic solutions of 2D wave equations with variable velocity and localized right-hand side // Russ. J. Math. Phys. — 2010. — Vol. 17. — No. 1. — P. 66–76.
74. Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Tirozzi B. Two-dimensional wave equation with degeneration on the curvilinear boundary of the domain and asymptotic solutions with localized initial data // Russ. J. Math. Phys. — 2013. — Vol. 20. — No. 4. — P. 389–401.
75. Dobrokhotov S. Yu., Nekrasov R. V., Tirozzi B. Asymptotic solutions of the linear shallow-water equations with localized initial data // J. Engng. Math. — 2011. — Vol. 69. — No. 2–3. — P. 225–242.
76. Dobrokhotov S. Yu., Shafarevich A. I., Tirozzi B. Localized wave and vortical solutions to linear hyperbolic systems and their application to linear shallow water equations // Russ. J. Math. Phys. — 2008. — Vol. 15. — No. 2. — P. 192–221.
77. Dobrokhotov S. Yu., Sinitsyn S. O., Tirozzi B. Asymptotics of localized solutions of the one-dimensional wave equation with variable velocity. I. The Cauchy problem // Russ. J. Math. Phys. — 2007. — Vol. 14. — No. 1. — P. 28–56.

78. Dobrokhotov S. Yu., Tirozzi B., Vargas C. A. Behavior near the focal points of asymptotic solutions to the Cauchy Problem for the linearized shallow water equations with initial localized perturbations // Russ. J. Math. Phys. — 2009. — Vol. 16. — No. 2. — P. 228–245.
79. Duistermaat J. J. Fourier integral operators // Lect. Notes Courant Inst. — New York, 1973.
80. Epstein C., Melrose R. Contact degree and the index of Fourier integral operators // Math. Res. Lett. — 1998. — Vol. 5. — No. 3. — P. 363–381.
81. Erdős P. On some asymptotic formulas in the theory of partitions // Bull. Amer. Math. Soc. — 1946. — Vol. 52. — P. 185–188.
82. Fedosov B. V. Trace formula for Schrödinger operator // Russ. J. Math. Phys. — 1993. — Vol. 1. — No. 4. — P. 447–463.
83. Fichera G. Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine // Atti Accad. naz. Lincei, Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur., Sez. 1. — 1956. — Vol. 5. — No. 1. — 30 p.
84. Hardy G. H., Ramanujan S. Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types. (A problem in the analytic theory of numbers.) // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. — 1916. — Vol. 16. — P. 112–132.
85. Hardy G. H., Ramanujan S. Asymptotic formulae in combinatory analysis // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. — 1917. — Vol. 17. — P. 75–115.
86. Hörmander L. Fourier integral operators I // Acta Math. — 1971. — Vol. 127. — P. 79–183.
87. Katanaev M. O. — Passing the Einstein–Rosen bridge. — arXiv:1310.7390 [gr-qc]. — 2013.
88. Kubo R. Thermodynamics. — Amsterdam: North-Holland, 1968.
89. Lax M., Louisell W. H., McKnight W. B. From Maxwell to paraxial wave optics // Phys. Rev. A. — 1975. — Vol. 11. — P. 1365–1370.
90. Lefschetz S. L'analysis situs et la géométrie algébrique. — Paris: Gauthier–Villars, 1924.
91. Leichtnam E., Nest R., Tsygan B. Local formula for the index of a Fourier integral operator // J. Differential Geom. — 2001. — Vol. 59. — No. 2.

— P. 269–300.

92. Mei C. C. The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. — Singapore: World Scientific, 1989.
93. Nazaikinskii V. E. Semiclassical Lefschetz formulas on smooth and singular manifolds // Russ. J. Math. Phys. — 1999. — Vol. 6. — No. 2. — P. 202–213.
94. Nazaikinskii V. E. On the asymptotics of the number of states for the Bose-Maslov gas // Mathematical Notes. — 2012. — Vol. 91. — No. 5—6. — P. 816—-823.
95. Nazaikinskii V. E. Maslov's canonical operator for degenerate hyperbolic equations // Russ. J. Math. Phys. — 2014. — Vol. 21. — No. 2. — P. 289–290.
96. Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Schulze B.-W., Sternin B. Elliptic Theory on Singular Manifolds. — Boca Raton, Fl.: Chapman & Hall/CRC, 2006.
97. Nazaikinskii V. E., Schulze B.-W., Sternin B. Yu. The Localization Problem in Index Theory of Elliptic Operators. — Basel: Springer, 2014.
98. Rademacher H. On the partition function $p(n)$ // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. — 1937. — Vol. 43. — P. 241–254.
99. S. Dobrokhotov S. Sekerzh-Zenkovich B. Tirozzi, Tudorovski T. Asymptotic theory of tsunami waves: geometrical aspects and the generalized Maslov representation // Publications of Kyoto Institute. — No. Kokyuroku, no. 4. RIMS, 2006. — P. 118–153.
100. Schulze B.-W. Pseudodifferential Operators on Manifolds with Singularities. — Amsterdam: North–Holland, 1991.
101. Schulze B.-W., Sternin B., Shatalov V. Differential Equations on Singular Manifolds. Semiclassical Theory and Operator Algebras. — Berlin–New York: Wiley–VCH Verlag, 1998. — Vol. 15 of Mathematics Topics.
102. Sekerzh-Zenkovich S. Ya. Simple asymptotic solution to the Cauchy–Poisson problem for leading waves // Russ. J. Math. Phys. — 2009. — Vol. 16. — No. 2. — P. 215–222.
103. Stoker J. J. Water Waves: The Mathematical Theory with Applications. — New York: Wiley, 1958 (reprinted in 1992).
104. Tate T. A spectral analogue of the Meinardus theorem on asymptotics of the

number of partitions // Asymptot. Anal. — 2010. — Vol. 67. — No. 1–2. — P. 101–123.

105. Vukašinac T., Zhevandrov P. Geometric asymptotics for a degenerate hyperbolic equation // Russ. J. Math. Phys. — 2002. — Vol. 9. — No. 3. — P. 371–381.
106. Wang S. The propagation of the leading wave // ASCE Specialty Conference on Coastal Hydrodynamics / University of Delaware, June 29–July 1. — , 1987.
107. Weinstein A. Fourier integral operators, quantization, and the spectra of Riemannian manifolds // Géométrie symplectique et physique mathématique (Aix-en-Provence, 1974). — No. Colloque Internationale de CNRS, no. 237. — 1976. — P. 289–298.
108. Weinstein A. Some questions about the index of quantized contact transformations // RIMS Kôkûryuku. — 1977. — Vol. 104. — P. 1–14.