Утверждаю:

Первый проректор,
проректор на научной и инновационной работе
федерального государственного
образовательного учреждения высшего
профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая
Григорьевича Столетовых»
д.ф.-м.н., профессор

_____ В.Г.Прокошев

«___» _____ 2014 года

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу

Назайкинского Владимира Евгеньевича «Обобщения канонического оператора Маслова и их приложения в математической физике», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Актуальность темы исследования

Диссертационная работа В. Е. Назайкинского посвящена обобщениям и приложениям канонического оператора Маслова. Тема работы весьма актуальна в связи с тем, что развитие в последнее время мощных интерактивных систем математических вычислений, таких как Wolfram Mathematica, с одной стороны, предъявляет новые требования к инструментарию построения асимптотических формул, а с другой стороны, позволяет проводить по асимптотическим формулам эффективные вычисления даже в тех задачах, в которых раньше это было практически невозможно.

Теория канонического оператора берет свое начало с опубликованной в 1965 году классической книги В.П. Маслова «Теория возмущений и асимптотические методы». С тех пор это бурно развивающаяся область современной математической физики и теории линейных уравнений в частных производных; среди математиков, внесших свой вклад в ее развитие, можно упомянуть В.В. Белова, Б.Р. Вайнберга, В.Г. Данилова, В.Л. Дубнова, С.Ю. Доброхотова, М.В. Карасева, В.Н. Колокольцова, В.В. Кучеренко, Ж. Лере, А.С. Мищенко, Б.Ю. Стернина, М.В. Федорюка, А.М. Чеботарева, В.Е. Шаталова

и других, включая и диссертанта.

Интерактивные системы математических вычислений позволяют оперативно менять входные параметры и визуализировать результаты вычислений в наглядной графической форме и тем самым анализировать решение задачи в режиме диалога. Чтобы это было возможно, асимптотические формулы должны быть максимально простыми и эффективными в реализации средствами таких систем. Существующие формулы и алгоритмы канонического оператора Маслова не всегда удовлетворяют этому условию. Далее, формулы стандартного метода канонического оператора, хотя и весьма универсальны, не дают ответа во многих задачах с вырождением. Одной из них является задача об асимптотических решениях волнового уравнения с вырождением на границе (такое уравнение возникает в линейной модели наката длинных волн, в частности, волн цунами, на пологий берег).

Диссертация В.Е. Назайкинского восполняет значительную часть указанных пробелов. В частности, в ней построены новые эффективные интегральные представления канонического оператора в окрестности каустик и особых точек, разработано обобщение канонического оператора для уравнений с вырождением на границе. Перейдем к более подробному анализу диссертации.

Научная новизна исследования

В качестве новых научных результатов в диссертации выдвинуты следующие положения:

1) Предложен и разработан метод построения новых интегральных представлений быстроосциллирующих функций в окрестности каустик и фокальных точек на основе специального класса систем координат (эйконал-координаты) на лагранжевых многообразиях.
2) Доказано, что в задачах о распространении волн с локализованными начальными данными локализованную в окрестности точки начальную функцию можно представить с помощью канонического оператора Маслова на инвариантном относительно гамильтониана задачи лагранжева многообразии.
3) Предложен и разработан метод построения асимптотик решений многомерного волнового уравнения, вырождающегося на границе области.
4) Получены асимптотические формулы, выражающие вклад гладких многообразий неподвижных точек классического канонического преобразования в число Лефшеца задаваемого соответствующим квантованным каноническим преобразованием (интегральным оператором Фурье–Маслова) эндоморфизма эллиптического комплекса на гладком компактном многообразии, для случая, когда многообразия неподвижных точек симплектические либо лагранжевы.
5) Получены формулы индекса для квантованных контактных преобразований на компактном многообразии с коническими особенностями,

удовлетворяющих некоторым условиям симметрии.

6) Получены асимптотические формулы для энтропии и числа состояний газа Бозе–Маслова и построено отвечающее этому газу термодинамическое лагранжево многообразие.

В целом основные предложения диссертации являются принципиально новым научным знанием в области асимптотических методов в математической физике и теории дифференциальных уравнений. Совокупность результатов диссертации можно квалифицировать как крупное научное достижение в области дифференциальных уравнений и математической физики.

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и заключений

Автор диссертации продемонстрировал высокий уровень знакомства с литературой по изучаемому вопросу и развивает новейшие научные методы для обоснования полученных результатов, выводов и заключений. Список литературы диссертации содержит 108 наименований.

Для получения основных результатов диссертации автор использует ряд классических методов математической физики, функционального анализа, асимптотические методы (в том числе канонический оператор Маслова и интегральные операторы Фурье), теорию функций от некоммутирующих операторов, симплектическую геометрию, дифференциальную геометрию и эллиптическую теорию.

Применение всех этих методов для исследования проблем, рассматриваемых в диссертации, представляется вполне обоснованным.

Результаты, полученные Назайкинским В. Е. в рамках диссертации, находятся в согласии с известными фактами и подтверждают гипотезы, выдвинутые другими авторами.

Достоверность полученных результатов подтверждается публикациями в ведущих отечественных журналах. Результаты также докладывались на международных конференциях и получили одобрение ведущих специалистов в области дифференциальных уравнений и математической физики.

Структура и содержание работы

Диссертация состоит из введения и четырех глав.

Во введении раскрыты актуальность темы исследования и современное состояние науки в этой области, приведены цели диссертационной работы, сформулированы основные научные положения, выносимые на защиту, их научная новизна. Введение также содержит структуру и краткое описание диссертационной работы.

Первая глава **«Новое интегральное представление канонического оператора Маслова и локализация быстроосциллирующих решений»** посвящена предложенному автором новому эффективному представлению канонического оператора в окрестности фокальных точек.

В первом параграфе рассматривается двумерный случай. При условии невырожденности фундаментальной 1-формы на лагранжевом многообразии вводятся специальные координаты, названные автором эйконал-координатами, поскольку одной из координатных функций является действие, или эйконал. В окрестности «особых точек» лагранжева многообразия (т.е. точек, в окрестности которых лагранжево многообразие не проектируется диффеоморфно на плоскость координатных переменных) строится представление канонического оператора в виде интеграла по второй эйконал-координате. Показано, что доставляемый новым представлением класс быстроосциллирующих функций совпадает с классом, задаваемым стандартным каноническим оператором Маслова на том же лагранжевом многообразии.

Во втором параграфе конструкция нового интегрального представления канонического оператора распространяется на многомерный случай.

В третьем параграфе на примере уравнения Гельмгольца с радиально симметричным коэффициентом преломления показано, как новое интегральное представление канонического оператора может применяться для построения асимптотических решений, а на примере уравнения параксиального приближения в оптике – как оно может использоваться для локализации волновых пучков типа Эйри–Бесселя, т.е. для построения задаваемых эффективными формулами волновых пучков, аналогичных пучкам Эйри–Бесселя, но обладающими, в отличие от последних, конечной энергией.

Во второй главе диссертации **«Канонический оператор для уравнений, вырождающихся на границе области»** строятся асимптотические решения гиперболических уравнений, в частности, волновых уравнений, вырождающихся на границе области (входящая в уравнение скорость распространения волны обращается на границе в нуль как корень квадратный из расстояния до границы), с начальными данными осциллирующего или локализованного вида. Хотя такие уравнения корректны в соответствующих энергетических пространствах, траектории отвечающей главному символу гамильтоновой системы выходят по координатным переменным на границу и одновременно по импульсным переменным на бесконечность за конечное время, что не дает возможности построить асимптотические решения с помощью стандартного канонического оператора. В одномерном случае асимптотические решения вырождающегося волнового уравнения были ранее построены Т. Вукасинач и П. Жевандровым с помощью специальной конструкции, перенесение которой на многомерный случай затруднительно. Автор построил каноническое преобразование, регуляризующее гамильтониан и гамильтонову систему вблизи бесконечно удаленных точек по импульсам над границей области. Это каноническое преобразование позволяет расширить

исходное фазовое пространство – кокасательное расслоение открытой области – таким образом, что на новом фазовом пространстве гамильтониан оказывается гладким, а траектории гамильтоновой системы продолжаются по времени неограниченно. Быстроосциллирующие асимптотические решения доставляются построенным автором каноническим оператором на лагранжевых многообразиях в новом фазовом пространстве, причем ключевую роль в конструкции канонического оператора играет ассоциированное с регуляризующим систему Гамильтона каноническим преобразованием квантованное каноническое преобразование, которое есть не что иное, как преобразование Ганкеля. Таким образом, наряду с преобразованием Фурье (отвечающим повороту в фазовом пространстве) новый канонический оператор включает преобразование Ганкеля (отвечающее регуляризующему каноническому преобразованию). Подчеркнем, что конструкция автора является новой и в одномерном случае.

Описанные выше результаты составляют содержание первых пяти параграфов главы 2. В шестом параграфе исследуется связь между быстроосциллирующими и локализованными решениями, что позволяет строить асимптотические решения задачи Коши с локализованными начальными данными с помощью канонического оператора (который сам по себе дает быстроосциллирующие решения). Именно, показано, что разработанное С.Ю. Доброхотовым, А.И. Шафаревичем и Б.Тироцци представление локализованных функций через быстроосциллирующие может быть модифицировано таким образом, что используемое в ней лагранжево многообразие будет инвариантно относительно заданного гамильтониана. Такая модификация существенно упрощает последующую конструкцию асимптотического решения задачи Коши, поскольку лагранжево многообразие в ней не будет меняться со временем. В седьмом параграфе разработанные конструкции применяются для построения решения двумерного волнового уравнения, вырождающегося на границе области, с локализованными начальными данными. Для начальных данных специального вида получены простые явные формулы для значений решения на границе области.

В третьей главе **«Канонический оператор Маслова и некоторые задачи эллиптической теории»** вычислен вклад симплектических и лагранжевых многообразий неподвижных точек в асимптотическое число Лефшеца квантованного канонического преобразования и получена теорема об индексе для интегральных операторов Фурье–Маслова на многообразиях с коническими особенностями. Асимптотическая теория Лефшеца (теория Лефшеца для эндоморфизмов эллиптического комплекса, задаваемых квантованными каноническими преобразованиями) была разработана Б.Ю. Стерниным и В.Е. Шаталовым, которые получили явные выражения для вклада в число Лефшеца от изолированных неподвижных точек соответствующего классического канонического преобразования. Вопрос о вкладе многообразия неподвижных точек положительной размерности при этом оставался открытым, было лишь известно, что он задается интегралом по этому многообразию от некоторой

формы, определяемой данными задачи. Диссертантом этот вопрос решен в двух «крайних» случаях, когда соответствующее многообразие неподвижных точек симплектическое (сужение на него канонической 2-формы имеет полный ранг) или лагранжево (многообразие имеет половинную размерность, а сужение на него канонической 2-формы равно нулю), и соответствующие выражения выписаны явно. Результаты диссертанта, касающиеся теории Лефшеца, даны в параграфе 2, а в первом параграфе приводится известный вспомогательный материал по теории Лефшеца.

Задача об индексе квантованных контактных преобразований (и, более общим образом, произвольных эллиптических интегральных операторов Фурье–Маслова) была поставлена А. Вайнстейном и решена в частном случае Ч. Эпстейном и Р. Мельроузом и в общем случае Э. Лейштнамом, Р. Нестом и Б. Цыганом. Эти результаты относятся к случаю гладких компактных многообразий без края. С другой стороны, теория индекса для эллиптических дифференциальных и псевдодифференциальных операторов на многообразиях с коническими особенностями была развита Б.Ю. Стерниным, В.Е. Шаталовым, Б.-В. Шульце и диссертантом. Естественно в этой ситуации изучить задачу об индексе интегральных операторов Фурье–Маслова на многообразиях с коническими особенностями, что диссертантом и было сделано. Полученная им формула индекса справедлива при некоторых условиях симметрии на конормальный символ интегрального оператора Фурье–Маслова и выражает индекс как сумму инвариантов конормального символа (задаваемых вычетами некоторых явно выписываемых мероморфных оператор-функций) и главного символа (половина индекса интегрального оператора Фурье–Маслова на гладком компактном многообразии – дубле исходного многообразия с коническими особенностями). Этот принадлежащий автору результат содержится в пятом параграфе третьей главы, а третий и четвертый ее параграфы посвящены соответственно определению интегральных операторов Фурье–Маслова на многообразиях с коническими особенностями и общему принципу локальности относительного индекса; эти результаты, полученные диссертантом в соавторстве с другими математиками, имеют вспомогательный характер и в число заявленных новых результатов диссертации не входят.

В четвертой главе **«Туннельный канонический оператор и газ Бозе–Маслова»** рассматривается модель, играющая важную роль в разработанной В.П. Масловым «новой термодинамике», а именно модель идеального бозе-газа невзаимодействующих частиц, уровни энергии которых (с учетом кратности) представляют собой последовательность положительных чисел, считающая функция которой имеет на бесконечности степенную асимптотику. Газом Бозе–Маслова автор называет модель, в которой показатель степени отвечает произвольному, не обязательно целому, числу степеней свободы молекул газа. Автор вычисляет асимптотику числа состояний и энтропии газа при больших энергиях и на основе полученной зависимости энтропии от энергии строит термодинамическое лагранжево многообразие, на котором

определен туннельный канонический оператор. Это сделано в параграфе 2. В первом параграфе для удобства приведены известные результаты, касающиеся определения туннельного канонического оператора.

В заключении кратко перечислены основные результаты работы.

Замечания по работе

Диссертация в целом хорошо оформлена, материал удачно структурирован, изложение ясное и хорошо иллюстрированное примерами. Вместе с тем некоторые детали оформления нельзя считать удачными.

1) В диссертации имеются неудачные обозначения (например, гигантская тильда над выражением $1 - A$ в лемме 3.1 и ниже).
2) Для нумерации пунктов в леммах и предложениях используются обозначения (i), (ii) и т.д., как это обычно бывает в англоязычных текстах. Кроме того, в предложении 2.10 номера пунктов почему-то набраны полужирным шрифтом, а в остальных местах – обычным. Для удобства чтения было бы лучше нумеровать пункты через а), б), в) … и использовать во всех местах один и тот же шрифт.
3) Доказательства некоторых утверждений (например, предложения 2.6) отсутствуют, хотя и приводятся соответствующие ссылки на аналогичные утверждения.

Сделанные замечания не снижают высокой научной значимости проведенных исследований и общей положительной оценки диссертационной работы.

Выводы

Диссертация является законченным научным трудом, выполненным на высоком современном уровне. Результаты проведенного исследования опубликованы в рецензируемых научных изданиях и подробно изложены в диссертации. Автореферат достаточно полно отражает содержание диссертации, содержит ее основные идеи и выводы, показывает вклад автора и степень новизны результатов проведенных исследований, содержит список публикаций, в которых опубликованы основные научные результаты. Диссертация в целом представляет собой научный труд, в котором разработаны теоретические положения, совокупность которых является научным достижением в области асимптотических методов, имеющим существенное значение для развития математической физики.

Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным «Положением о порядке присуждения ученых степеней». Диссертация представляет собой завершенную научно-исследовательскую работу на

актуальную тему. Новые научные результаты, полученные диссертантом, имеют существенное значение для развития физико-математических наук. Выводы и рекомендации достаточно обоснованы. Работа отвечает критериям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Отзыв на диссертацию и автореферат обсужден на заседании кафедры математического анализа ВлГУ 8 октября 2014 г.

Отзыв заслушан и утвержден на заседании научно-технического совета ВлГУ (протокол №2 от 9 октября 2014 года).

Заведующий кафедрой математического анализа,
ФГБОУ ВПО «Владимирский государственный
Университет имени Александра Григорьевича
и Николая Григорьевича Столетовых»,
доктор физико-математических наук, профессор

Жиков
Василий Васильевич

Ученый секретарь научно-технического совета,
кандидат экономических наук, доцент

Паньшин
Илья Владимирович