# ОТЗЫВ

о диссертационной работе Назайкинского Владимира Евгеньевича «Обобщения канонического оператора Маслова и их приложения в математической физике», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика

Диссертация В. Е. Назайкинского посвящена развитию теории канонического оператора Маслова и приложениям к задачам математической физики, в частности, к задачам распространения волн цунами.

Канонический оператор Маслова представляет собой мощный метод построения асимптотик в задачах теории дифференциальных уравнений и математической физики. С развитием в последнее время мощны систем интерактивных математических вычислений, таких, как Wolfram Mathematica, возникает необходимость в построении максимально простых и удобных в реализации асимптотических формул, так что актуальной является задача получения возможно более простых выражений для канонического оператора, в особенности вблизи каустик, где эти выражения задаются интегралами от быстроосциллирующих функций. Далее, стандартный канонический оператор не дает ответа во многих задачах с вырождением. Важным примером такой задачи является задача о накате длинных волн (например, волн цунами) на пологий берег. Другой подобной задачей является задача построения асимптотического решения в случае смены кратности, даже для случая построения аддитивных асимптотик. Поэтому актуальна задача об обобщении канонического оператора Маслова на случай вырождающихся уравнений.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 108 наименований. Каждая из глав содержит один или два из результатов, заявленных автором как основные.

В первой главе, которая называется «Новое интегральное представление канонического оператора Маслова и локализация быстроосциллирующих решений», предлагается и разрабатывается метод, позволяющий строить новые интегральные представления быстроосциллирующих функций в окрестности каустик и фокальных точек. Метод основан на использовании специальных локальных координат на отвечающих таким функциям лагранжевых многообразиях, которые автор назвал эйконал-координатами, и существенно упрощает представление решения в окрестности каустик. Это позволяет получить эффективные формулы для широкого класса асимптотических решений гиперболических уравнений и систем; в качестве примера приводится применение указанного интегрального представления к задаче локализации волновых пучков. (Хорошо известные пучки Эйри-Бесселя обладают бесконечной энергией; локализация позволяет получить из них физически осмысленные асимптотические решения конечной энергии.)

Вторая глава называется «Канонический оператор для уравнений, вырождающихся на границе области». Речь в ней идет об уравнениях волнового типа в области с гладкой границей, причем скорость распространения вырождается (обращается в нуль) на границе как корень квадратный из расстояния до границы. (Примером физической задачи, которая в линейном приближении приводит к такого рода уравнениям, является задача о распространении длинных волн в океане (в частности, волн цунами) с накатом на берег.) Наличие вырождения приводит к тому, что соответствующее лагранжево многообразие имеет особенность (импульс стремится к бесконечности в некоторых точках конфигурационного пространства). Поэтому «стандартный» канонический оператор не может быть использован для построения асимптотических решений таких уравнений, так как траектории системы Гамильтона уходят при приближении к границе на бесконечность по импульсам за конечное время. Автором построено новое фазовое пространство, отвечающее уравнениям этого типа, которое получается как расширение стандартного фазового пространства и в котором траектории системы Гамильтона бесконечно продолжимы; канонический оператор Маслова обобщается на случай лагранжевых многообразий в таком фазовом пространстве, что и

позволяет строить асимптотические быстроосциллирующие решения. Эта конструкция является существенным и красивым обобщением результата П. Жевандрова и Т. Вукасинач. В рассматриваемых в диссертации В. Е. Назайкинского задачах, однако, особый интерес представляют решения с локализованными начальными данными (так, в случае волн цунами линейные размеры источника малы по сравнению с характерными линейными размерами бассейна). Канонический оператор дает быстроосциллирующие асимптотические решения; известные представления локализованных решений через быстроосциллирующие используют для начального условия стандартное лагранжево многообразие, никак не связанное с гамильтонианом задачи. Автором доказано, что локализованное начальное условие можно также представить через быстроосциллирующие функции, ассоциированные с лагранжевым многообразием, инвариантным, что очень важно, относительно гамильтониана. Это сильно упрощает асимптотические формулы и дает возможность их эффективной компьютерной реализации. В частности, автором получены простые формулы для максимальной амплитуды решения в точках границы для локализованных начальных данных специального вида.

В третьей главе «Канонический оператор Маслова и некоторые задачи эллиптической теории» получены асимптотические формулы для вклада гладких многообразий неподвижных точек в число Лефшеца эндоморфизма эллиптического комплекса на гладком компактном многообразии в том случае, когда эндоморфизм задается квантованным каноническим преобразованием (интегральным оператором Фурье-Маслова), а многообразия неподвижных точек симплектические либо лагранжевы. Также в этой главе доказаны формулы индекса для квантованных контактных преобразований на компактном многообразии с коническими особенностями при некоторых условиях симметрии. Индекс выражается как сумма топологического инварианта - индекса квантованного контактного преобразования на гладком дубле исходного многообразия - и инварианта конормального символа, выражающегося через кратности его особых точек в комплексной плоскости.

В заключительной, четвертой главе «Туннельный канонический оператор и газ Бозе-Маслова» получены асимптотические формулы для

энтропии и числа состояний газа Бозе-Маслова с произвольными (не обязательно целочисленными) уровнями энергии и на этой основе построено термодинамическое лагранжево многообразие, на котором определен соответствующий термодинамический туннельный канонический оператор.

Диссертация Владимира Евгеньевича Назайкинского представляет собой обширное исследование, посвященное актуальной области современной математической физики – методу канонического оператора Маслова – и содержащее ряд важных научных результатов.

По моему мнению, центральной в диссертации является вторая глава. Во-первых, схема, предложенная В. Е. Назайкинским, представляется очень перспективной с точки зрения как дальнейшего развития в рамках теории канонического оператора, так и приложения к другим классам задач с вырождением. Во-вторых, предложенный автором подход, как видно из диссертации, легко обобщается на некоторый класс задач, в котором построение аддитивных асимптотик осложняется пересечением кратности. Примером может служить волновое уравнение с узким гауссовым пакетом в качестве начального условия.

Полученные в работе результаты могут оказаться полезными для специалистов, работающих в научных центрах России, Италии и Германии. Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в изданиях их списка ВАК; автореферат правильно отражает ее содержание.

В. Е. Назайкинский является известным и признанным специалистом в области уравнений с частными производными, давно и плодотворно работающим в этой области. По моему мнению, совокупность полученных им результатов (не только тех, которые включены в диссертацию) существенно превосходит требования, предъявляемые к соискателям ученой степени доктора физико-математических наук.

Диссертационная работа Владимира Евгеньевича Назайкинского безусловно удовлетворяет требованиям, предъявляемым ВАК к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-

математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика, а ее автор заслуживает присуждения ему этой степени.

Доктор физико-математических наук, профессор

МИЭМ – НИУ ВШЭ

В.Г. Данилов

Подпись заверяю

Заместитель начальника
Управления персонала

М.В. Дыбцына

27.10.2014