ОТЗЫВ
о диссертационной работе Илларионова Андрея Анатольевича
"Статистические свойства полиэдров Клейна
и локальных минимумов решеток",
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 -
математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация А.А. Илларионова посвящена одному из наиболее актуальных направлений геометрии чисел, связанному с исследованием статистических свойств различных многомерных обобщений цепных дробей. Вопросы, затрагиваемые в диссертации, также имеют отношение к метрической теории чисел. Диссертация представляет из себя одно из первых систематических исследований, посвященных оценкам средних количеств относительных минимумов многомерных решеток, оценкам средних количеств наилучших диофантовых приближений (в задаче о совместных диофантовых приближениях нескольких чисел и в задаче о наилучших приближениях для одной линейной формы), а также статистическим свойствам полиэдров Клейна.

Вопросы, связанные с многомерными диофантовыми приближениями и многомерными обобщениями цепных дробей изучаются во всем мире. Классические определения восходят к Ш. Эрмиту, Г. Минковскому, Г.Ф. Вороному, Ф. Клейну. В настоящее время, ряд важных результатов был получен М. Концевичем и Ю. Суховым, Е. Коркиной, Ж. Лажо, О. Карпенковым, В. Быковским, О. Германом и другими математиками. Следует отметить, что результаты диссертации А.А. Илларионова существенно проясняют ситуацию с распределением относительных минимумов решеток в среднем и с другими статистическими свойствами решеток и связанных с ними объектов.

Диссертация состоит из введения и шести глав. Кроме того, в ней имеется два приложения. Во **введении** устанавливается актуальность темы исследования, дается краткий исторический обзор, формулируются основные определения и описываются основные объекты исследования. Также во введении формулируются основные результаты диссертации. В **первой главе** автором получены верхние и нижние оценки для максимального количества локальных минимумов s-мерной решетки ранга t, координаты которых ограничены некоторой величиной. Полученные автором оценки точны по порядку. Во **второй главе** изложены результаты автора об асимптотиках для количеств целочисленных матриц с элементами, принадлежащими областям специального вида. Эти результаты обобщают старые теоремы Скубенко на случай, когда области, в которых могут находиться элементы матриц, имеют специальный вид. Именно результаты о распределении матриц с элементами из этих областей будут использоваться в дальнейшем при выводе основных теорем о статистиках для относительных минимумов решеток, наилучших диофантовых приближений и полиэдров Клейна. **Третья глава** посвящена среднему значению количества относительных минимумов целочисленных решеток фиксированного определителя. Решаемая здесь трудная и серьезная задача представляет из себя обобщение одномерного результата о средней длине разложения рационального числа с фиксированным знаменателем в цепную

дробь. В этой главе автором получена асимптотическая формула с главным и остаточным членом для среднего числа относительных минимумов. Этот результат является значительным достижением. Надо отметить, что изложен он очень хорошо. Сначала детально рассматриваются двумерный и трехмерный случаи, а потом проводятся все рассуждения в случае произвольной размерности. **Четвертая глава** связана со статистическими свойствами полиэдров Клейна. Основной результат этой главы это асимптотические формулы для среднего числа граней заданного типа и полиэдра Клейна в трехмерном случае (среднее берется по всем целочисленным решеткам фиксированного определителя). В четвертой главе также доказываются оценки сверху и снизу для средних значения некоторых величин, связанных с полиэдром Клейна, в случае произвольной размерности. В **пятой главе** формулируются и доказываются результаты о статистике наилучших совместных диофантовых приближений в фиксированной (в частности, в евклидовой) норме (так называемых "цилиндрических минимумов"). Здесь же приведены соответствующие результаты о средних значениях для наилучших приближений в смысле линейной формы. Результаты о цилиндрических минимумах связаны с развитием знаменитого критерия наилучшего приближения, принадлежащего Г. Вороному, с помощью которого он обосновывал свой знаменитый алгоритм отыскания наилучших приближений. **Шестая глава** посвящена обощению результатов главы 3 на случай так называемых "Ф-минимумов" решетки, то есть относительных минимумов, определяемых не с помощью абсолютной величины координат, а с помощью некоторого фиксированного набора Ф, состоящего из гладких функций. В **приложениях** изложены некоторые вспомогательные результаты.

На мой взгляд основными являются результаты глав 3, 4 и 5. Эти результаты являются весьма существенным и впечатляющим вкладом в геометрию чисел и метрическую теорию чисел. А.А. Илларионов в своей диссертации решил несколько достаточно известных задач.

Для доказательств автор применяет конструкции геометрии чисел и методы математического анализа. Следует отметить, что многие из его геометрических конструкций достаточно нетривиальны и весьма изобретательны. Многие доказательства технически сложны. Автором проделана очень большая работа. Диссертация написана достаточно четко и ясно. Доказательства изложены понятно.

В качестве замечания можно отметить, что, вероятно, в некоторых из результатах автора можно получить более точные оценки остаточного члена, что может быть связано с применением аналитических методов (оценок сумм Клоостермана). Однако, реализация этой идеи будет еще более технически сложной.

Таким образом, диссертация Андрея Анатольевича Илларионова представляет собою обширное исследование, посвященное весьма актуальному направлению в теории чисел - изучению многомерных обобщений цепных дробей и их статистических свойств. В ней содержится ряд важных и глубоких результатов. Следует отметить, что в диссертации решено несколько известных серьезных задач.

Полученные результаты, несомненно, могут быть полезными специалистам, занимающимся геометрией чисел и работающим в Математическом институте РАН, Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Петербургском отделении Математического института РАН и в других академических институтах и университетах, как в России, так и за рубежом. Основные результаты диссертации опубликованы в изданиях их списка ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертационная работа Андрея Анатольевича Илларионова полностью удовлетворяет всем требованиям пп. 9, 10 "Положения о присуждении ученых степеней" (утвержденного

постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 824) и всем требованиям, предъявляемым ВАК к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел, а ее автор заслуживает присуждения ему этой степени.

26 сентября 2014 года

Доктор физико-математических наук,
профессор МГУ им. М.В. Ломоносова

Н.Г. Мощевитин

Механико-математический факультет
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
Ленинские горы
119991, Москва

e-mail: moshchevitin@mech.math.msu.su, moshchevitin@gmail.com